Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

Viszontbiztosítás hatása a csődvalószínűségre

diplomamunka

készítette: Szigethy András
Biztosítási és pénzügyi matematika MSc szak
Aktuárius szakirány
2011

témavezető: Arató Miklós

Tartalomjegyzék

Előszó **3**

1. Biztosításmatematikai bevezető **5**

1.1. Kockázati modellek 5

1.2. Kár- és kárszám eloszlások 6

1.3. Díjkalkulációs elvek 8

1.4. Viszontbiztosítás 9

2. Kockázati folyamatok diszkrét modellje **13**

2.1. A Bellman-egyenlet 14

2.2. Az optimális viszontbiztosítás diszkrét időben 18

3. A klasszikus kockázati folyamat **25**

3.1. Csődvalószínűség viszontbiztosítás nélkül 25

3.2. A csődvalószínűség csökkentése viszontbiztosítás segítségével 28

3.3. Egyszerű viszontbiztosítási stratégiák 32

4. Csődvalószínűség, mint korlátozó feltétel **37**

Köszönetnyilvánítás **42**

Irodalomjegyzék **43**

Előszó

Világunk olyan, hogy az embereknek sok különböző kockázattal kell szembe nézniük. Ezek érinthetik az életüket, egészségüket, de vagyontárgyaikat is. A biztosító társaságok és egyesületek pénzbeli kompenzációban részesítik ügyfeleiket, illetve azok kedvezményezettjeit, ha kár éri őket. Tehát, aki biztosítást köt, és ezzel egy nagy veszélyközösség részévé válik, védve érezheti magát a kellemetlen anyagi hatású eseményektől. Nyugodt lehet afelől, hogy ha jogosnak minősítik a kártérítési igényt, akkor a biztosító kifizeti a szerződésben vállaltaknak megfelelő összeget vagy egyéb szolgáltatást nyújt (például assistance biztosítási elemek). Azonban szélsőséges esetekben adódhat olyan helyzet is, hogy a biztosító aktuális tőkéje nem elegendő arra, hogy az összes károsultnak kifizesse a nekik járó pénzt. Ez az a helyzet, pontosabban ennek esélye, ami dolgozatom témáját szolgáltatja. Ezt a szituációt – a releváns matematikai modellekhez hasonló módon – csődnek fogom nevezni. Ezt a helyzetet természetesen el kell kerülni, amennyire csak lehetséges. Ennek egyik legfőbb eszköze a viszontbiztosítás, amely ugyan csökkenti a díjbevételt, de szolvensebbé teszi a biztosítót, és ezáltal az ügyfelek is nagyobb biztonságban érezhetik magukat. Az, hogy milyen módon kell viszontbiztosítást kötni az aktuális tőke függvényében, korántsem egy egyszerű kérdés. Konkrétan, ha például a csőd valószínűségét egy időszak egészére vetítve kell minimalizálni, úgy hogy időnként változtatni lehet a viszontbiztosítási szerződésen, akkor bizony egy előre megadott fejlődési dinamikával rendelkező sztochasztikus folyamatot kell rögzíteni, amelynek aktuális értéke mindig a múlt és jelen kártapasztalatától, és így a pillanatnyi tőkétől függ. A jobb szemléltetés érdekében képzeljünk el egy embert, aki sorozatosan kockára tesz meglévő pénzéből valamennyit, amelyet bizonyos valószínűséggel elveszít, vagy megnyeri a dupláját. Kitűz maga elé egy célt, például, hogy tíz fogadás elteltével még legyen pénze. Ekkor felmerül a kérdés, hogy hogyan játszon, mikor mennyit kockáztasson ahhoz, hogy célja a lehető legnagyobb eséllyel valósuljon meg. Egyértelmű, hogy adnia kell egy olyan módszert, amely minden időpontban, minden lehetséges tőkeszint mellett megmondja, hogy éppen mennyit kell kockáztatnia. Ez pedig egy adaptált sztochasztikus folyamat, hiszen induláskor nem tudja, hogy a későbbi lépésekben, hogyan fog eljárni, de ha odaér, akkor egyértelmű lesz a számára, hogy mit kell tennie. Az is világos, hogy ugyan véges sok lehetőség közül kell választania, de ha nincs egy jó eljárása az optimum helyének megtalálására, akkor nagyon sokáig is keresgélhet. Ha ráadásul – visszatérve az eredeti témához – a lehetőségek száma nem is véges vagy akár nem is megszámlálható, akkor mélyebb matematikai eszköztárat igényel a feladat.

Sok matematikus foglalkozott eddig a témával és számos tetszetős állítást bizonyítottak be, amelyek jól behatárolják a keresett optimumot és annak helyét. Ennek ellenére továbbra is reménytelennek tűnik az ilyen jellegű problémák megoldása, mivel a kapott egyenletek a legtöbb életszerű szituációban nem számolhatóak végig. Szimulációra pedig a feladat jellegéből adódóan nincs is lehetőség, hiszen az csak egy előre rögzített döntési folyamat hatását tudja mérni statisztikai módszerekkel, de arról nem ad információt, hogy milyen messze vagyunk a kívánt optimumtól. Így indokoltnak láttam a dolgozat végén egy olyan fejezet megírását is, pusztán csak indikációs jelleggel, amelyben már egy, a valósághoz közelebbi problémakör tárgyalását tűztem ki célul.

A dolgozat minden részénél fel van tüntetve a megfelelő forrás, amely nyomán az íródott, ahol ez nem szerepel, az önálló eredmény – nevezetesen a teljes negyedik fejezet, illetve a harmadik fejezet utolsó szakaszában közölt modell, és az ott kimondott és bebizonyított lemmák.

1. fejezet

Biztosításmatematikai bevezető

Mielőtt hozzá kezdenénk a konkrét témához, szót kell ejteni azokról az alapvető fogalmakról és modellekről – illetve a teljesség kedvéért néha egy kicsit többről is – melyek végig kísérik majd az egész dolgozatot. Ezen a helyen nem megyünk bele a részletekbe, csak röviden áttekintjük a releváns szakirodalmat. Az első három szakaszban a [2], míg a negyedikben [3] alapján készült az áttekintés.

1.1. Kockázati modellek

A biztosításmatematika legfontosabb két kockázati modelljét ismertetjük, melyek mind elméletben, mind pedig a biztosítási gyakorlatban sokszor előfordulnak. Először azonban világossá kell tennünk, hogy mit is értünk kockázat alatt. Erre rengeteg lehetőség kínálkozik, és ráadásul a legtöbb változat meg is állja a helyét a megfelelő környezetben. Most a kockázaton a biztosító egy időszakra eső összes kárkifizetését, mint nemnegatív valószínűségi változót fogjuk érteni. Ez természetesen nem köti meg a kezünket semmilyen szempontból sem. Egyaránt alkalmas lehet szerződés, módozat, ágazat, ág vagy akár a teljes biztosító szintjén mérni a kockázati kitettséget.

Az első modell neve az **egyéni kockázat modellje**. Ezt akkor alkalmazzák, ha a megfigyelt veszélyközösség n szerződésből áll, és azok kockázatai függetlenek egymástól. Nem követelmény azonban, hogy azonos eloszlásúak legyenek. Ha ez mégis így volna, akkor meggondolandó lehet a másik modell alkalmazása. Tehát

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

ahol X_i-k az egyes szerződésekre eső kárkifizetések, melyek eloszlásai ismertek, például a korábbi tapasztalatokon alapuló statisztikai eljárások útján. Világos az is, hogy

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i),$$

$$D^2(S) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i).$$

A másik modell az **összetett kockázat modellje**. Ebben az esetben nem lényeges a veszélyközösség létszáma, mert az egy időszakra eső károk száma és azok nagysága határozza meg az összkifizetést. A kárszám is valószínűségi változó, és természetéből fakadóan nemnegatív egész értékű. Itt már fontos feltevés, hogy az egyes károk azonos eloszlásúak is legyenek, illetve nem csak egymástól, hanem a kárszámtól is függetlenek. Ekkor az összkár az alábbi véletlen tagszámú összeg, mely az $\eta = 0$ esetben konzisztens módon nullaként definiálódik:

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_\eta.$$

Statisztikai módszerekre persze itt is szükség van, hogy használhassunk valamilyen eloszlást mind a kárra, mind pedig a kárszámra. Ha ezen eloszlások ismertek, akkor a teljes várható érték és a teljes szórásnégyzet tétele értelmében

$$E(S) = E(\eta)\, E(X_1),$$

$$D^2(S) = E(\eta)\, D^2(X_1) + D^2(\eta)\, E(X_1).$$

1.2. Kár- és kárszám eloszlások

A kockázat megismeréséhez tehát alapvető fontosságú, hogy a biztosító eloszlásokat tudjon illeszteni tapasztalati káraira és azok számára. Éppen ezért lényeges, hogy olyan típusokat használjon, amelyek a valóságban is megállják a helyüket és kezelhetőek számítógéppel vagy akár anélkül is. Ebben a szakaszban nem kerül bemutatásra az összes és széles körben alkalmazott eloszlás, csak azok amelyek a dolgozat során felbukkannak vagy olyan tulajdonsággal bírnak, mely mindenképpen említésre méltó.

Az első káreloszlás a $\lambda > 0$ paraméterű **exponenciális**, amely rengeteg helyen előkerül. Ennek oka nem az, hogy kivételesen jó illeszkedést mutat, hanem, hogy sok számolást megkönnyít és alkalmas arra, hogy bizonyos módszereket szemléltessenek vele. Az eloszlás abszolút folytonos és sűrűségfüggvénye

$$\lambda e^{-\lambda x} \chi_{(x>0)}.$$

A várható érték és a szórásnégyzet is egyszerű függvénye a paraméternek:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda},$$

$$D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Sok más kellemes tulajdonsága is van ennek az eloszlásnak. Például explicit formában ismert a momentum generáló függvénye, illetve a legtöbb transzformáltja. Továbbá rendelkezik a következő, úgynevezett „örökifjú” tulajdonsággal:

$$P(X < z \,|\, X > y) = P(X < z - y)$$

minden $0 < y < z$ esetben. A sűrűségfüggvény alakja olyan, hogy exponenciális sebességgel tart a nullához, amiért az egyik alapvető vékony farkú eloszlásnak tekinthető. Így pedig a nagy károkat csak igen ritkán vagy egyáltalán nem produkáló esetekben alkalmazható sikerrel.

Egy másik fontos és az előzőtől lényegesen különböző eloszlás az $a > 0, b > 0$ paraméterű **Pareto** eloszlás, mely alkalmas a nagy károk lehetőségét is magában hordozó biztosításoknál (például tűzbiztosítások, természeti katasztrófák, gyárak, stb...) az egyes kifizetések modellezésére. Ennek oka, hogy

$$\frac{a}{b}\left(\frac{b}{b+x}\right)^{a+1} \chi_{(x>0)}$$

alakú sűrűségfüggvénye csak polinom rendben tart nullához, így viszonylag vastag farok résszel rendelkezik. A paraméterekkel kifejezve

$$E(X) = \frac{b}{a-1},$$

ha $a > 1$, illetve

$$D^2(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)},$$

ha $a > 2$.

Veszélyes voltát a paraméterektől megkövetelt feltételek is jelzik. Sérülésük esetén az adott momentum nem létezik és így nem biztosítható kockázatokkal nézünk szembe, melynek okairól a következő szakaszban lesz szó.

1.1. Megjegyzés. *Egy harmadik tipikusnak mondható káreloszlás, a lognormális bemutatása most mellőzésre kerül, mert a dolgozatban nem használjuk fel. Azért meg kell jegyezni, hogy ez az az eloszlás, amely sok esetben tényleges károkra jól illeszthető.*

A dolgozat során az egyetlen, és talán a leginkább elterjedt kárszám eloszlást, a $\lambda > 0$ paraméterű **Poisson**-t fogjuk használni. Ennek bemutatásával zárul ez a részfejezet. A valószínűség függvény a következő:

$$P(\eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}.$$

A főbb jellemzők itt is a paraméter egyszerű függvényei. Konkrétan

$$E(\eta) = \lambda,$$

$$D^2(\eta) = \lambda.$$

Elég sokszor jó illeszkedést mutat, bár a nulla valódi előfordulásának gyakoriságát sokszor irreálisan eltorzítja. Ilyenkor konstans szorzásokkal egy másik – igen hasonló – eloszlássá transzformálható át.

1.3. Díjkalkulációs elvek

Az ügyfelektől díjat szed a biztosító, hogy fedezze vele a veszélyközösségtől átvállalt kockázatot, költségeit és a profit elvárást. Sok esetben azonban nehéz megállapítani, hogy milyen az a nettó (kockázati) díjrész, ami valóban megbízható fedezetéül szolgál a kockázatnak. Ugyanakkor fontos az is, hogy olyan bruttó díjat szabjon a biztosító, mely a megfelelő profit kitermelését is garantálja a piaci versenyképesség megőrzése mellett. Ebben a szakaszban – a teljesség igénye nélkül – néhány elméleti módszert mutatunk be, amely alkalmas a kockázati díjrész megállapítására. Ez természetesen nem feltétlenül a szerződések szintjén történik, hanem a vizsgált kockázati kitettségnek megfelelően.

1.1. Definíció. *A nemnegatív valós számokra koncentrált eloszlások H halmazán értelmezett*

$$\Pi : H_\Pi \subseteq H \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

leképezést díjkalkulációs vagy röviden díjelvnek nevezzük. Az X kockázathoz rendelt $\Pi(Q_X)$ díjat a $\Pi(X)$ módon jelöljük.

A dolgozatban egyedüliként használt díjelvvel, a **várható érték elvvel** kezdjük a bemutatást.

1.2. Definíció. *A Π díjelv $\alpha \geq 0$ paraméterű várható érték elv, ha $\Pi(X) = (1+\alpha)E(X)$ minden nemnegatív valószínűségi változóra.*

Természetes kívánalom, hogy egy díjelv függjön a kockázat várható értékétől. Ennek a többi bemutatott díjelv is eleget tesz, de a várható érték elvétől eltérő módon számolja a biztosító által alkalmazott kockázati puffert.

1.3. Definíció. *A Π díjelv $\beta \geq 0$ paraméterű* ***szórásnégyzet elv****, ha $\Pi(X) = E(X) + (1+\beta)D^2(X)$ minden nemnegatív valószínűségi változóra.*

A **szórás elv** ehhez hasonló, csak szórásnégyzet helyett szórás szerepel.

1.4. Definíció. *A Π díjelv $1-\varepsilon, p \in (0,1)^2$ paraméterű* ***kvantilis elv****, ha $\Pi(X) = pE(X) + (1-\varepsilon)\inf\{x : P(X < x) \geq 1-\varepsilon\}$ minden nemnegatív valószínűségi változóra.*

1.2. Megjegyzés. *Figyeljük meg, hogy a Pareto eloszlásnál az $0 < a \leq 1$ esetben nem létezik a várható érték, így díj sem számolható egyik esetben sem. Továbbá, ha $1 < a \leq 2$, akkor a második momentum nem létezik, azaz a szórás- és szórásnégyzet elvek alapján nem tudunk (véges) díjat mondani.*

1.4. Viszontbiztosítás

A fejezet lezárásaként a viszontbiztosítással, mint a dolgozat központi témájával foglalkozunk. Ha egy biztosító nem akarja vagy nem tudja egyedül fedezni a kockázatait, akkor azok egy részét viszontbiztosításba adja. Ez azt jelenti, hogy átad a beszedett díjakból valamennyit, és cserébe térítésként visszakapja a kifizetett károk előre rögzített részét. Tehát maga is ügyféllé válik és biztosítást köt.

Felmerül a kérdés, hogy miért is van szükség viszontbiztosításra? Elsősorban azért, mert a legtöbb biztosító nem elég tőkeerős ahhoz, hogy vállalni tudja a hirtelen megnövekedett kifizetések kockázatát. A viszontbiztosítók viszont jellemzően az ilyen jellegű kockázat vállalására specializálódott, óriási tőkével rendelkező vállalatok. Több oka is lehet annak, hogy a biztosító kárkifizetése megnő. Előidézheti ezt a károk gyakoriságának növekedése, az átlagkár drasztikus emelkedése, a károk ingadozása, néhány elég nagy kár bekövetkezte vagy például egy-egy káreseményhez sok kummulálódó kárkifizetés köthető. Ezek egytől egyik olyan dolgok, melyek viszontbiztosítási ügylet kötésére késztethetik a biztosítót.

Most lássuk, hogy a matematika nyelvén, hogyan kezelhető a viszontbiztosítás. Legyen a biztosító kockázata az X valószínűségi változó. Az ügyletet azonosítja, hogy az átadott Y kockázat után mekkora díjat kell fizetni és mekkora a térítés mértéke. Jelölje a saját megtartású részt $T(X)$, míg az átadott díjat P_1. A viszontbiztosító tehát ezen díj fejében a károkból az $X - T(X)$ részt fizeti ki. Minthogy a biztosítás nem arra szolgál, hogy az ügyfelek vagyoni előnyhöz jussanak általa, így a viszontbiztosítás esetében is természetes kívánalom, hogy fennálljon a

$$0 \leq T(x) \leq x$$

egyenlőtlenség.

A viszontbiztosításnál megkülönböztetünk arányos és nem arányos formákat. Előbbi a leginkább kézenfekvő megoldás, mert ebben az esetben arányosan részesedik a viszontbiztosító a kárból és a díjból is. Az egyik ilyen viszontbiztosítási forma a **quota share** viszontbiztosítás, melynél

$$T(x) = qx$$

valamilyen $0 \leq q \leq 1$ számra az összes kár esetében. Könnyen megmutatható ([3] meg is teszi), hogy ekkor a díj $1-q$ részét kell átadni, hogy igazságos legyen az ügylet. A valóságban azonban másként működik a dolog. Mindkét fél költségekkel dolgozik, de a viszontbiztosító jellemzően alacsonyabbakkal (gondoljunk például az ügynöknek kifizetett szerzési jutalékra). Ennek megfelelően ugyanolyan kockázati díjra más-más loadingot számítanak fel. Így a viszontbiztosító az arányosnál kevesebb díjat fog kapni, azaz tulajdonképpen viszontbiztosítási jutalékot fizet a direkt biztosítónak.

Szót kell még ejteni a szélsőséges esetekről. A $q = 1$ eset azt jelenti, hogy nem köt a biztosító viszontbiztosítást, míg a $q = 0$ esetben a teljes kockázatot áthárítja. Utóbbi esetet nem nagyon szeretik a viszontbiztosítók, hiszen ekkor a közvetlen aláíró nem érdekelt a kockázatban, így bármilyen jellegűt elvállalhat. A biztosítóknak ez a viszontbiztosítási forma annyiban rossz, hogy a jó kockázataikból is ugyanolyan mértékben részesítik a partnert, mint a rosszakból. Ezt kiküszöbölendő, létezik a **surplus** viszontbiztosítás, amelyet most nem részletezünk, mivel a dolgozatban nem kerül felhasználásra.

Az úgynevezett nem arányos viszontbiztosításoknál a biztosító szeretné elkerülni, hogy a jó kockázatait is átadja, így olyan szerződést köt, hogy a viszontbiztosító csak egy bizonyos szint feletti kifizetést térítsen meg neki. Itt azonban több lehetőség is kínálkozik. Ha káronként alkalmazza ezt a levágást, akkor **XL** viszontbiztosításról beszélünk. Ilyen esetben

$$T(S) = \sum_{i=1}^{\eta}(X_i \wedge M)$$

valamely $M \geq 0$ konstansra. Ez csak a nagy károk ellen nyújt védelmet, a károk számának növekedésével így is jelentős lehet a kárkifizetés. A megtartási szint értelmezhető a teljes vállalt kockázat mértékére is, ez az úgynevezett **stop loss** viszontbiztosítás. Ez már korlátossá teszi az összkifizetést, hiszen

$$T(S) = S \wedge M.$$

A felsorolt kettő formától eltérő a **CatXL** viszontbiztosítás, melynél nincs ugyan globális korlát, de az egy káreseményből származó öszes kár kifizetése korlátozott, azaz

$$T(S) = \sum_{j=1}^{N}\left[\Big(\sum_{i=1}^{\eta_j} X_i\Big) \wedge M\right],$$

ahol N a káresemények számának, míg η_j a j-edik esemény során keletkezett károk számának eloszlása. Természetesen N-től független, hogy eseményenként hány kár következik be, azok viszont már nem feltétlenül függetlenek, sőt erősen korrelálhatnak is. Ez a változat tipkusan az árvíz, a jégverés és egyéb természeti katasztrófa jellegű módozatoknál tehet jó szolgálatot.

Díjazási szempontból a nem arányos formák esetében problémák merülhetnek fel. Nem lineáris transzformációról lévén szó, nem elegendő ismerni a közvetlen aláíró díját, hanem a farok eloszlások is fontos szerephez jutnak. Több esetben az erre vonatkozó nem elégséges statisztikai adatok miatt a viszontbiztosító jelentős pótdíjat kérhet – például a szórásnégyzet elv alapján – az átadott rész várható kifizetésén felül.

2. fejezet

Kockázati folyamatok diszkrét modellje

Gyakorta modellezik a biztosítók tőkéjének időbeli alakulását diszkrét paraméterterű sztochasztikus folyamatokkal. Ilyenkor úgy tekintendő, hogy a biztosító elindul valamilyen nemnegatív kezdő tőkével, melyhez minden periódusban hozzá adódik a díjbevétel és a nem pozitív aggregált kárkifizetés. A fejezet célja, hogy [4] alapján áttekintést adjon az ezen modellben rejlő lehetőségekről a viszontbiztosítás vonatkozásában.

Feltesszük, hogy az egyes periódusokban kifizetendő összegek független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Tehát

$$Z_n = u + cn - \sum_{i=1}^{n} S_i,$$

ahol $c > 0$ az egy periódusra eső díjbevétel, míg az S_i-k független és azonos eloszlású kockázatok. Ezen utóbbi változók előállhatnak például egyéni vagy összetett kockázati modellek alapján is.

Ezen a ponton elérkeztünk a dolgozat témáját szolgáltató csőd szigorúan csak matematikai értelemben vett definíciójához.

2.1. Definíció. *A $\{\exists n : Z_n < 0\}$ eseményt csődnek nevezzük. A $T_u = \min\{n : Z_n < 0\}$ valószínűségi változó a csőd időpontja, a $\Psi(u) = P(T_u < \infty)$ mennyiség pedig annak valószínűsége végtelen időhorizonton.*

Legyen továbbá $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ a nem tönkremenés valószínűsége.

A megadott fogalmak értelemszerű módosításával kapható meg a véges időhorizontra vonatkozó változatuk is.

2.1. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a csőd időpontja megállási idő lesz az aggregált kifizetések által generált filtrációra nézve!*

2.1. A Bellman-egyenlet

A fejezetnek megfelelő téma tárgyalását most megszakítjuk, és egy általánosabb probléma típust tekintünk át, melynek eredményei megalapozzák későbbi vizsgálódásainkat. Ebben a szakaszban alapvetően dinamikus programozásról és sztochasztikus irányításról lesz szó, melyek megfelelő matematikai eszközt adnak azok kezébe, akiket a fejezet elején bevezetett folyamatba való külső beavatkozás, és annak hatásai érdekelnek.

2.2. Definíció. *Legyen $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyek értékei valamely E_Y lengyel tér elemei, $u \in E$ kezdő állapot, ahol E egy másik lengyel tér és $U = \{U_n : n \in \mathbb{Z}_0^+\}$ sztochasztikus folyamat – a későbbiekben sztochasztikus irányítás – valamilyen $\mathcal{U}$ állapottérrel. Erről a folyamatról megköveteljük, hogy adaptált legyen az $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0^+} = \{\sigma(u, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_0^+}$ filtrációhoz. Ekkor tekintsük az alábbi diszkrét paraméterű, E állapotterű sztochasztikus folyamatot:*

$$X_0 = u$$

$$X_{n+1} = f(X_n, U_n, Y_{n+1}) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ahol $f : E \times \mathcal{U} \times E_Y \to E$ egy mérhető függvény.

A fennt rekurzív módon megadott sztochasztikus folyamatnak tekintsük a következő funkcionálját:

2.3. Definíció. *Legyen az $r : E \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ függvény neve kifizetés függvény, míg az U sztochasztikus irányításhoz és T véges vagy végtelen diszkrét időtartamhoz tartozó* *értékfüggvény a következő:*

$$V_T^U(u) = E\left[\sum_{n=0}^{T} r(X_n, U_n)e^{-\varrho n}\right],$$

ahol ϱ rögzített pozitív konstans.

Ezek után be lehet vezetni ezen értékfüggvények optimumát egy megadott halmaz felett.

2.4. Definíció. *Ha a megengedett irányítások halmazát $\mathfrak{U}$-val jelöljük, akkor legyen a*

$$V_T(u) = \sup_{\mathcal{U}\in\mathfrak{U}} V_T^U(u)$$

kifejezés az optimális értékfüggvény.

A végtelen időhorizont esetén elhagyjuk az alsó indexből a T jelzést, ezzel is különbséget téve a két eset között.

A következőkben ismertetjük az optimális értékfüggvénnyel kapcsolatos főbb eredményeket. Feltesszük, hogy vizsgálódásunk tárgyát az összes adaptált folyamat képezi majd, amik felett a szuprémumot nézzük. Továbbá vezessük be a következő jelöléseket:

$$V_t^U(u),$$

$$V_t(u)$$

a megfelelő értékek, ha T-ig t idő van hátra és $X_{T-t} = u$. Legyen definíció szerint $V_{-1}(u) = 0$.

A most következő két tétel rendkívül fontos a sztochasztikus irányítás elméletében, de más dinamikus programozást használó feladatoknál is felmerülnek. A bennük szereplő azonosságokat Bellman-egyenletnek nevezik.

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy véges időhorizonton $V_T(u)$ véges. Ekkor kielégíti az alábbi egyenletet:*

$$V_T(u) = \sup_{v\in\mathcal{U}}\big\{r(u,v) + e^{-\varrho}E[V_{T-1}(f(u,v,Y))]\big\}, \tag{2.1}$$

ahol Y egy általános valószínűségi változó ugyanazzal az eloszlással, mint az $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ sorozat.

Bizonyítás. Legyen U tetszőleges irányítás. Ekkor definíció szerint

$$X_1 = f(u, U_0, Y_1)$$

és

$$V_T^U(u) = E(r(u, U_0)) + e^{-\varrho} E\left[\sum_{n=0}^{T-1} r\bigl(X_{n+1}, U_{n+1} e^{-\varrho n}\bigr)\right].$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\widetilde{X}_n = X_{n+1},$$

$$\widetilde{U}_n = U_{n+1},$$

$$\widetilde{Y}_n = Y_{n+1}.$$

Nyilván fennáll az

$$\widetilde{X}_{n+1} = f(\widetilde{X}_n, \widetilde{U}_n, \widetilde{Y}_{n+1})$$

összefüggés. Továbbá

$$E\left[\sum_{n=0}^{T-1} r\bigl(X_{n+1}, U_{n+1}\bigr) e^{-\varrho n} \,\middle|\, X_1, U_0\right] = \\ E\left[\sum_{n=0}^{T-1} r\bigl(\widetilde{X}_n, \widetilde{U}_n\bigr) e^{-\varrho n} \,\middle|\, X_1, U_0\right] = V_{T-1}^{\widetilde{U}}(X_1) \leq V_{T-1}(X_1).$$

Ezek alapján igaz a következő becslés:

$$V_T^U(u) \leq E\bigl[r(u, U_0) + e^{-\varrho} V_{T-1}(X_1)\bigr] = \\ E\bigl[r(u, U_0) + e^{-\varrho} V_{T-1}(f(u, U_0, Y_1))\bigr] \leq \\ \sup_{v \in \mathcal{U}} \Bigl\{ r(u, v) + e^{-\varrho} E\bigl[V_{T-1}(f(u, v, Y))\bigr] \Bigr\}.$$

Mivel U tetszőleges volt, ezért az előbbiből

$$V_T(u) \leq \sup_{v \in \mathcal{U}} \Bigl\{ r(u, v) + e^{-\varrho} E\bigl[V_{T-1}(f(u, v, Y))\bigr] \Bigr\}$$

is következik. A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához tekintsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot és egy v elemét $\mathcal{U}$-nak. Válasszunk egy $\widetilde{U}$ irányítást, amely eleget tesz a következő feltételnek:

$$V_{T-1}(X_1) < V_{T-1}^{\widetilde{U}}(X_1) + \varepsilon,$$

ahol $X_1 = f(u, v, Y_1)$. Az

$$U_0 = v$$

$$U_n = \widetilde{U}_{n-1} \qquad n = 1, 2, \dots$$

módon definiált irányításra teljesül a következő:

$$r(u,v) + e^{-\varrho} E\big[V_{T-1}(f(u,v,Y_1))\big] < r(u,v) + e^{-\varrho} E\big[V_{T-1}^{\widetilde{U}}(X_1)\big] + \varepsilon =$$
$$V_T^U(u) + \varepsilon \leq V_T(u) + \varepsilon.$$

Figyelembe véve, hogy $v \in \mathcal{U}$ tetszőlegesen választott volt, az előbbi eredményből adódik a

$$\sup_{v \in \mathcal{U}} r(u,v) + e^{-\varrho} E\big[V_{T-1}(f(u,v,Y))\big] \leq V_T(u) + \varepsilon$$

becslés is. Ugyanakkor az $\varepsilon > 0$ választás szintén tetszőleges volt, ezért

$$\sup_{v \in \mathcal{U}} r(u,v) + e^{-\varrho} E\big[V_{T-1}(f(u,v,Y))\big] \leq V_T(u)$$

szükségképpen teljesül, amivel a bizonyítást befejeztük. □

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy végtelen időhorizonton $V(u)$ véges. Ekkor kielégíti az alábbi egyenletet:*

$$V(u) = \sup_{v \in \mathcal{U}} \Big\{ r(u,v) + e^{-\varrho} E\big[V(f(u,v,Y))\big] \Big\},$$

ahol Y egy általános valószínűségi változó ugyanazzal az eloszlással, mint az $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ sorozat.

Bizonyítás. Az előbbi tétel bizonyításakor nem használtuk fel T végességét, így T és $T-1$ helyére végtelent írva itt is megismételhető annak gondolatmenete. □

Végül folytassuk azzal az állítással, mely az optimum helyet – melyről ne feledjük, hogy sztochasztikus folyamat – karakterizálja.

2.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy T és $V_T(u)$ véges, és minden $t \leq T$ időponthoz létezik egy $v_t(u)$ elem az $\mathcal{U}$ térből, amelyen (2.1) jobb oldalának értéke eléretik ha alkalmazzuk a $T = t$ helyettesítést. Megköveteljük továbbá, hogy az előbbi $v_t : E \longrightarrow \mathcal{U}$ függvény mérhető legyen minden $t \leq T$ esetén. Legyen $U = \{U_n\} = \{v_{T-n}(X_n)\}$. Ekkor*

$$V_T(u) = V_T^U(u).$$

Bizonyítás. Világos, hogy elegendő a $V_T(u) \le V_T^U(u)$ egyenlőtlenséget igazolnunk. Ezt T szerinti teljes indukció segítségével tesszük meg. Ha $T = 0$, akkor bármely $U' = U_0'$ irányítás esetén

$$V_0^{U'}(u) = E\big[r(u, U_0')\big] \le r(u, v_0(u)) = V_0^U(u)$$

miatt $V_0(u) \le V_0^U(u)$. Most tegyük fel, hogy $T = n$-re igaz a kérdéses egyenlőtlenség. Legyen U' tetszőleges irányítás $T = n+1$ esetén, és jelentse ismét $\widetilde{U'}$ ugyanazt, mint (2.1) tétel bizonyításában a hasonló jelöléssel nyert irányítás. Ekkor igaz a következő:

$$\begin{aligned}
V_{n+1}^{U'}(u) = E\Big[r(u, U_0') + e^{-\varrho} E\big[V_n^{\widetilde{U'}}(f(u, U_0', Y_1))|U_0'\big]\Big] \le \\
E\Big[r(u, U_0') + e^{-\varrho} E\big[V_n(f(u, U_0', Y_1))|U_0'\big]\Big] \le \\
r(u, v_{n+1}(u)) + e^{-\varrho} E\big[V_n(f(u, v_{n+1}(u), Y_1))\big] = \\
r(u, v_{n+1}(u)) + e^{-\varrho} E\big[V_n^{\widetilde{U}}(f(u, v_{n+1}(u), Y_1))\big] = V_{n+1}^U(u).
\end{aligned}$$

Az indukciós feltevést az utolsó előtti egyenlőségnél használtuk fel. A kapott egyenlőtlenségből adódik, hogy $V_{n+1}(u) \le V_{n+1}^U(u)$. $\square$

2.2. Az optimális viszontbiztosítás diszkrét időben

Az előzőekben megismert optimalizálási feladat egy speciális biztosításmatematikai problémánál is felmerül, ha a bevezetett objektumoknak megfelelő szereposztását adjuk. Kezdjük tehát ezt a szakaszt néhány definícióval.

2.5. Definíció. *Tegyük fel, hogy a választható viszontbiztosítási formák összessége leírható m darab paraméter segítségével. Ennek megfelelően legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ az a halmaz, amelyből kikerülhet a mindenkori választást leíró paramétervektor.*

2.6. Definíció. *Legyen $b_i \in \mathcal{U}$ az i-edik periódusra választott viszontbiztosítás, míg a $b = \{b_t\}_{t\in\mathbb{Z}^+}$ sztochasztikus folyamat a viszontbiztosítási stratégia, melyről szükséges megkövetelni, hogy adaptált legyen az aggregált kárkifizetések által generált filtrációhoz.*

Az előző fejezet viszontbiztosítással foglalkozó részének megfelelően szükségünk van két függvényre, melyek kifejezik a választott viszontbiztosítási stratégia hatását a megtartott díjra és a fizetendő kárösszegre.

2.7. Definíció. *Legyen a $c : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ függvény az, amely megadja, hogy az i-edik periódusban mennyi díjbevétele lesz a biztosítónak, ha a b_i viszontbiztosítási formát alkalmazza.*

2.8. Definíció. *Legyen az $s : \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}_0^+$ függvény az, amely megadja, hogy az i-edik periódusban mennyi a biztosító kárkifizetése, ha a b_i viszontbiztosítási formát választja, és a az összkára S_i.*

A fent említett $c(.)$ és $s(.,.)$ függvényeknek eleget kell tenniük néhány feltevésnek, melyeket a valóság és ugyanakkor ezzel pont ellentmondásban a matematikai kezelhetőség ihletett.

- $0 \leq s(S_i, b_i) \leq S_i$
- $s(y, b) \geq s(y, b') \; \forall y \geq 0 \Rightarrow c(b) \geq c(b')$
- $s(y, b) = 0 \; \forall y \geq 0 \Rightarrow c(b) < 0$
- $s(.,.)$ és $c(.)$ folytonos b-ben
- $c(b_i) \leq c \; \forall i \in \mathbb{Z}^+$
- $s(.,.)$ y-ban monoton növekedő
- tetszőleges $b \in \mathfrak{U}$ esetén $P(s(S_i, b_i) \leq c(b_i) \; \forall i) = 0$
- $\left\{ b = \{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+} : \sharp\{i : E(c(b_i) - s(S_i, b_i)) > 0\} = \infty \right\} \neq \emptyset$ (nettó profit feltétel)

Ezen definíciók után vezessük be a viszontbiztosítással irányított, diszkrét idejű kockázati folyamatot:

$$Z_n^b = u + \sum_{i=1}^{n} c(b_i) - \sum_{j=1}^{n} s(S_j, b_j),$$

ahol S_j az j-edik periódus összkockázata, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak, míg b_j a j-edik periódusra választott viszontbiztosítási forma.

Szükségünk van még az új folyamat esetében is a korábban definiált fogalmak megfelelőire viszontbiztosítás mellett.

2.9. Definíció. *A* $\{\exists n : Z_n^b < 0\}$ *eseményt csődnek, a* $T_u^b = \inf\{n : Z_n^b < 0\}$ *megállási időt a csőd időpontjának nevezzük a* $b \in \mathfrak{U}$ *viszontbiztosítási stratégia alkalmazása mellett. Továbbá* $\Psi_b(u)$ *és* $\Phi_b(u)$ *a csőd-, illetve a nem tönkremenési valószínűségeket jelölik ebben az esetben.*

Mivel ezek a definíciók rögzített stratégia mellett mondják meg a folyamat jellemzőit, optimalizálási feladatot akkor kapunk, ha a megfelelő valószínűségeket valamely megengedett stratégia halmaz felett tekintjük.

2.10. Definíció. *Legyen* $\Psi^*(u) = \inf_{b\in\mathfrak{U}} \Psi_b(u)$ *és* $\Phi^*(u) = \sup_{b\in\mathfrak{U}} \Phi_b(u)$.

Bár matematikailag pontatlan, de az egyszerűség kedvéért az előző definícióban szereplő valószínűségeket a minimális, illetve maximális jelzők kíséretében fogjuk használni.

Lássuk most azon tételek és lemmák sorát, melyek végül megoldási módszert szolgáltatnak a minimális csődvalószínűség kiszámítására. Először kezdjük egy önmagában is hasznos lemmával és tétellel.

2.1. Lemma. *Legyen* $M_n = \sum_{k=1}^n R_k - Q_k$ *szubmartingál, ahol* $0 \le R_k \le r$ *valamilyen* $r > 0$ *számra és* $Q_k \ge 0$. *Ekkor*

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \infty, \sum_{k=1}^{\infty} R_k < \infty\right) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $a > 0$ valós szám és tekintsük a $\nu = \inf\{n : M_n > a\}$ megállási időt. Ekkor $M_{n\wedge\nu}$ is szubmartingál, továbbá felülről korlátos $a + r$-ben. Így tehát 1 valószínűséggel konvergens is, a limesz pedig az M_ν valószínűségi változó. Ha az $\{\omega : \sup_n M_n(\omega) \le a\}$ esemény következik be, akkor az előbbiek miatt $\inf_n M_n > -\infty$, hiszen ezen az eseményen $M_n = M_{n\wedge\nu}$. Mivel ez minden pozitív a-ra elmondható, ezért ha $\sup_n M_n < \infty$,akkor $\inf_n M_n > -\infty$. Mindezt figyelembe véve, ha $\sup_n M_n = \infty$, akkor $\sum_{k=1}^n R_k = \infty$, ha pedig $\sup_n M_n < \infty$ és $\sum_{k=1}^\infty Q_k = \infty$, akkor $\inf_n M_n > -\infty$ miatt $\sum_{k=1}^n R_k = \infty$.$\square$

2.4. Tétel. *Tetszőleges b viszontbiztosítási stratégia mellett*

$$P\Big(\Big\{T_u^b < \infty\Big\} \bigcup \Big\{\lim_{t\to\infty} U_t^b = \infty\Big\}\Big) = 1.$$

Bizonyítás. Legyen valamely periódusban $b_i \in \mathcal{U}$ a választott viszontbiztosítási forma. A korábban tett feltevések miatt a $b_i \to P(s(S_i, b_i) > c(b_i))$ függvény folytonos és $\mathcal{U}$ kompaktságából fakadóan van minimuma, ami – mint az a feltevésekből kiolvasható – pozitív, így valamely $\delta > 0$ számmal kifejezve, értéke 2δ. Egy adott viszontbiztosítási forma esetén legyen

$$\varepsilon(b_i) = \sup\{\varepsilon : P(s(S_i, b_i) > c(b_i) + \varepsilon) \geq \delta\}.$$

Megint a folytonosság és a kompaktság miatt $\varepsilon(b_i) > 0$. Ezért létezik olyan $\varepsilon > 0$, amire $P(s(S_i, b_i) > c(b_i) + \varepsilon) \geq \delta$ bármely viszontbiztosítási forma esetén. Most válasszunk egy $a > 0$ számot, és legyen

$$R_n = \chi_{\{Z_n^b \leq a, s(S_{n+1}, b_n) > c(b_n) + \varepsilon\}}$$

és

$$Q_n = \delta \chi_{\{Z_n^b \leq a\}}.$$

Az így megadott R_n és Q_n folyamatok teljesítik a (2.1) lemma feltételeit. Így annak állítását felhasználva, ha végtelen sok n-re igaz, hogy $Z_n^b \leq a$, akkor végtelen sok n-re teljesül az is, hogy $Z_{n+1}^b \leq a - \varepsilon$. Mivel a tetszőleges pozitív szám volt, ezért indukcióval adódik a negatív tartomány végtelen sokszori elérése, azaz a csőd biztos bekövetkezése. Mindez persze csak akkor igaz, ha $\liminf_{n \to \infty} Z_n^b < \infty$. Ha ez nem teljesül, akkor is bekövetkezhet a csőd, de a tőke mindenképpen végtelenbe tart.□

Az optimum megkonstruálásához vezető utat kezdjük azzal, hogy úgy fogalmazzuk át a feladatot, hogy alkalmazható legyen rá a Bellmann-egyenlet. Ehhez legyen Δ egy nyelő állapot, mely szerint ha $Z_n^b < 0$ vagy már $Z_n^b = \Delta$, akkor $Z_{n+1}^b = \Delta$. Tekintsük a következő kifizetés függvényt:

$$r(Z_n^b, b_n) = -\chi_{(Z_n < 0)}.$$

Ilyen megközelítésben a nyelő állapot miatt az $r(.,.)$ függvény értéke pontosan a csőd időpontjában -1, egyébként pedig 0. Így egy tetszőleges viszontbiztosítási stratégia értékfüggvénye a következő:

$$V^b(u) = -P(\exists n : Z_n^b = \Delta).$$

Világos, hogy ekkor a $V(u)$ optimális értékfüggvény értékkészlete a $(-1,0)$ intervallum. Alkalmazva rá a (2.2) tételt, a $\varrho = 0$ esetben nemnegatív u mellett

$$V(u) = \sup_{b\in\mathcal{U}} \int_0^\infty V(u + c(b) - s(y,b))\, dF_S(y) =$$
$$\sup_{b\in\mathcal{U}} \int_0^{\rho(u+c(b),b} V(u + c(b) - s(y,b))\, dF_S(y) - (1 - F_S(\rho(u + c(b), b))),$$

ahol $\rho(z,b) = \sup\{y : s(y,b) \leq z\}$. Ennek az egyenletnek a megoldása nem egyértelmű a valós függvények között, de ha megköveteljük azt, ami egyébként is a mi esetünkben elvárható a megoldástól, nevezetesen hogy $\lim_{u\to\infty} V(u) = 0$, akkor már az lesz. Térjünk most át inkább a $\Phi^*(u)$ függvény vizsgálatára, amely nyilván a

$$\Phi^*(u) = 1 + V(u)$$

transzformációval adódik. Ekkor viszont

$$\Phi^*(u) = \sup_{b\in\mathcal{U}} \int_0^{\rho(u+c(b),b} \Phi^*(u + c(b) - s(y,b))\, dF_S(y).$$

Ha egy függvény megoldás, akkor annak konstansszorosa is az, ezért tekintsük ehelyett az

$$f(u) = \sup_{b\in\mathcal{U}} \int_0^\infty f(u + c(b) - s(y,b))\, dF_S(y)$$

egyenletet az $f(0) = 1$ kezdeti feltétellel. Továbbá a negatív számegyenesen terjesszük ki a függvényt azonosan nullával.

Magától értetődő azon feltevés is, hogy monoton növekedő megoldást keresünk, hiszen nagyobb kezdő tőke esetén nem csökkenhet a nem tönkremenés valószínűsége. A következő tétel ezt is figyelembe véve megteremti a kapcsolatot az előbbi egyenlet megoldása és a keresett $\Phi^*(u)$ függvény között.

2.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f(u)$ egy monoton növekedő megoldása a fenti egyenletnek, melyre teljesül, hogy $f(0) = 1$. Ekkor $f(u)$ korlátos és*

$$f(u) = \frac{\Phi^*(u)}{\Phi^*(0)}.$$

Bizonyítás. Jelöljük az f függvény végtelenben vett határértékét $f(\infty)$-nel. Tetszőleges b viszontbiztosítási stratégia mellett

$$
\begin{aligned}
&E(f(Z_{T_u^b\wedge(n+1)})\,|\,\mathcal{F}_n) = \\
&\qquad \chi_{(T_u^b>n)}\int_0^\infty f(Z_n^b + c(b_n) - s(y,b_n)\,dF_S(y)) \le \\
&\qquad \chi_{(T_u^b>n)}\sup_{b\in\mathcal{U}}\int_0^\infty f(Z_n^b + c(b) - s(y,b)\,dF_S(y)) = \\
&\qquad\qquad \chi_{(T_u^b>n)} f(Z_n^b) = f(Z^b_{T_u^b\wedge n})
\end{aligned}
$$

mutatja, hogy az $f(Z^b_{T_u^b\wedge n})$ sztochasztikus folyamat pozitív szupermartingál. Tehát a martingál konvergencia tétel szerint van határértéke, mely a (2.4) tétel értelmében 0 vagy $f(\infty)$. Mivel választható úgy a b viszontbiztosítási stratégia, hogy $\Phi^b(u) > 0$, illetve $\lim_{n\to\infty} f(Z^b_{T_u^b\wedge n})$ integrálható, ezért $f(\infty) < \infty$. A majorált konvergencia tétel miatt pedig $f(u) \ge f(\infty)\Phi^b(u)$. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszuk a b stratégiát olyannak, hogy

$$
f(Z_n^b) < \int_0^\infty f(Z_n^b + c(b_n) - s(y,b_n))\,dF_S(y) + \frac{\varepsilon}{(n+1)^2}
$$

teljesüljön. Így

$$
f(Z_{T_u^b\wedge n}) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{(k+1)^2}
$$

korlátos szubmartingál. Tartsunk n-nel végtelenbe, és akkor látszik, hogy

$$
f(u) < f(\infty)\Phi^*(u) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{(k+1)^2}.
$$

Mivel ε tetszőleges volt, következik, hogy $f(u) = \Phi^*(u)f(\infty)$, melyből már egyszerűen adódik a tétel állítása. $\square$

Legvégül lássunk egy tételt bizonyítás nélkül, mely a megoldás konstrukciójáról szól.

2.6. Tétel. *A*

$$
\begin{aligned}
g_0(u) &= \chi_{(u\ge 0)}, \\
g_{n+1}(u) &= \chi_{(u\ge 0)}\sup_{b\in\mathcal{U}}\int_0^\infty g_n(u + c(b) - s(y,b))\,dF_S(y)
\end{aligned}
$$

módon definiált függvénysorozat konvergens, és határértéke $\Phi^*(u)$.

Mindezek ellenére azonban az a tapasztalat, hogy még a nem túl bonyolult esetekben (például az elég sok szempontból kellemesnek mondható exponenciális aggregált kárkifizetés esetén, quota share viszontbiztosítás mellett) is reménytelen megtalálni az optimumot. Sőt, ha egyszerűbb szerkezetű stratégiákat vizsgálunk, és előre rögzítünk egy megtartási szintet azon többé nem változtatva, akkor sem lehet numerikus módszerek nélkül kiszámítani a csődvalószínűséget, így annak optimumát sem ezen stratégiák halmaza felett. Így a diszkrét idejű eset végső konklúziójaként elmondható, hogy bár a csődvalószínűség minimalizálásának problémája precízen körül járható matematikailag, de érdemben hasznosítható eredmények eddig még nem születtek.

3. fejezet

A klasszikus kockázati folyamat

Ebben a fejezetben foglalkozunk a matematikus szakma által legtöbbször vizsgált folytonos idejű kockázati folyamattal. Először [1] alapján bemutatjuk a folyamatot, illetve a vele kapcsolatban megszületett legfontosabb eredményeket. Ezek után a második szakaszban a [4] és [5] által közölt eredmények mentén megvizsgáljuk, hogy miként hat a viszontbiztosítás a csőd valószínűségére. Végül a harmadik szakaszban egy speciális kockázati folyamat segítségével megnézzük, hogy milyen alsó becslés konstruálható a nem tönkremenés valószínűségére, ha egy előre rögzített, nem túl bonyolult viszontbiztosítási stratégiát szeretnénk használni.

3.1. Csődvalószínűség viszontbiztosítás nélkül

3.1. Definíció. *Az* $U_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Z_j \quad t \geq 0$ *sztochasztikus folyamatot klasszikus kockázati folyamatnak nevezzük, ha* u *tetszőleges valós szám,* $c > 0$, N_t λ *intenzitású homogén Poisson-folyamat, és a* $Z_1, Z_2, \ldots$ *valószínűségi változók nemnegatívak, azonos eloszlásúak, illetve függetlenek egymástól és* N_t-*től is.*

A definícióban megadott objektumok biztosítási szemléltetése nyilvánvaló. A folyamat elindul valamilyen kezdő tőkével a $t = 0$ időpontban. Trajektóriáit pedig az idővel arányos kummulált díjbevétel, illetve a kárkifizetések által meghatározott sztochasztikus folyamat alakítják. Utóbbi az úgynevezett összetett Poisson-folyamat, melynek definíciója az alábbi.

3.2. Definíció. *Legyen N_t homogén Poisson-folyamat, illetve a $Z_1, Z_2, \dots$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak és függetlenek egymástól és N_t−től is. Ekkor az*

$$S_t = \sum_{j=1}^{N_t} Z_j$$

folyamatot összetett Poisson-folyamatnak nevezzük.

Világos, hogy a homogén Poisson-folyamat modellezi a károk számát tetszőleges intervallumon, míg a Z_j változók a rájuk kifizetendő összegek nagyságát külön-külön. Így elmondható, hogy tetszőleges (s, t) intervallumon az összes kárkifizetést megadó $S_t - S_s$ valószínűségi változó egy összetett kockázati modell szerint alakul, ahol a kárszám eloszlása $\lambda(t - s)$ paraméterű Poisson. Tehát az S_t folyamat is, hasonlóan N_t-hez stacionárius és független növekményű.

Jelen környezetben is a központi kérdés a csőd és a hozzá kapcsolódó mennyiségek. Ezért az előző fejezethez hasonlóan tekintsük a következő fogalmakat.

3.3. Definíció. *A $T_u = \inf\{t \geq 0 : U_t < 0\}$ időpontot a csőd időpontjának nevezzük.*

Ennek segítségével megadjuk magát a csőd eseményt is.

3.4. Definíció. *A $\{T_u < \infty\}$ eseményt csődnek nevezzük.*

A folyamat jellegéből adódóan – nemnegatív kezdő tőke esetén – csőd csak kárkifizetés alkalmával következhet be, hiszen két káresemény között a trajektóriák szigorúan monoton növekedőek. Végül vezessük be a csődvalószínűség fogalmát erre a modellre is.

3.5. Definíció. *Legyen a $\Psi(u) = P(T_u < \infty)$ mennyiség a csőd, míg a $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ a komplementer esemény, azaz a nem tönkremenés valószínűsége u kezdő tőke esetén.*

A szakasz hátralevő részében a legfontosabb eredményeket soroljuk fel, amelyeket a későbbiekben használni is fogunk. Mindegyik bizonyítása nagyon ötletes, de mégis eltekintünk tőlük, mert nem kapcsolódik szorosan a dolgozat témájához. Kezdjük rögtön egy olyan állítással, amely a kiindulást adja az összes többi bizonyításához.

3.1. Tétel. *A klasszikus kockázati folyamat esetén $\Phi(u)$ kielégíti az alábbi integrálegyenletet:*

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Phi(u-z)\,(1 - F_{Z_1}(z))dz.$$

Ez az egyenlet néhány speciális káreloszlás esetén expliciten meg is oldható. Ilyen például az exponenciális, illetve ennek keverék eloszlásai. Ha tehát Z_1 eloszlása $\frac{1}{\mu}$ paraméterű exponenciális, akkor

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{-\frac{c-\lambda\mu}{\mu c}u}.$$

Továbbá $u = 0$ esetén a kár eloszlására tett midenféle feltevés nélkül, az integrálegyenlet segítségével bebizonyítható az alábbi tétel.

3.2. Tétel. *Ha $c > \lambda\mu$, akkor $\Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$, illetve ha $c \leq \lambda\mu$, akkor pedig $\Psi(0) = 1$.*

Tehát az eddigiek alapján általános esetben, pozitív kezdő tőke mellett nem tudunk pontos értéket mondani a csőd valószínűségére. Erre vonatkozóan nincsenek is eredmények a szakirodalomban, de a következő tétel bizonyos feltételek teljesülése esetén hasznos öszefüggéseket ad rá.

3.3. Tétel. *Legyen $h(r) = \int_0^\infty e^{rz} dF_{Z_1}(z) - 1$, azaz Z_1 momentum generáló függvényének 1-gyel csökkentett értéke. Tegyük fel, hogy létezik olyan $R > 0$ szám, mely kielégíti a következő egyenletet:*

$$h(r) - \frac{rc}{\lambda} = 0.$$

Továbbá tegyük fel azt is, hogy $c > \lambda\mu$, illetve a $h(r)$ függvény véges R valamely pozitív sugarú környezetében. Ekkor

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\,\Psi(u) = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda h'(R) - c},$$

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

Az említett R számot szokás Lundberg-kitevőnek is nevezni.

Könnyen elképzelhető olyan helyzet is, hogy ne csak kizárólag a csőd érdekeljen minket, hanem egy előre rögzített $\widetilde{u} > u$ szintnek az elérése. Ezt fontos lehet vizsgálni akkor, ha a cél egy megadott hozam realizálása, u kezdő tőke befektetése esetén. Ekkor persze az $\widetilde{u}$ szint egyértelműen meghatározott és akkor áll meg a folyamat, ha elértük a kívánt tőke szintet vagy csődbe ment a biztosító. Mivel mindkét véletlen időpont megállási idő, ezért a minimumuk is az. Jelöljük ezt a változót $\widetilde{T}_u$-val. Martingálelméleti technikák segítségével igazolható az alábbi tétel.

3.4. Tétel. *Ha $c \geq \lambda\mu$, akkor*

$$P(U_{\widetilde{T}_u} = \widetilde{u}) \geq \frac{u}{\widetilde{u}}.$$

Most ejtsünk pár szót a csőd nagyságáról is, hiszen az is lényeges kérdés, hogy ha bekövetkezik a csőd, akkor az milyen súlyos. Legyen

$$\Psi(u, y) = P(-U_{T_u} < y,\, T_u < \infty).$$

Ekkor nyilván teljesül, hogy $\lim_{y\to\infty} \Psi(u, y) = \Psi(u)$. Itt is fel lehetne írni egy integrálegyenletet a bevezetett mennyiségre, de helyette tekintsük azt a fontos összefüggést, amely jelen fejezet harmadik szakaszában felhasználásra kerül majd.

$$\Psi(0, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^y 1 - F_{Z_1}(z)\, dz.$$

3.1. Megjegyzés. *Figyeljük meg, hogy a kár eloszlásától függetlenül 0 kezdő tőke mellett a csőd időpontjában, annak súlyossága abszolút folytonos eloszlású.*

3.2. A csődvalószínűség csökkentése viszontbiztosítás segítségével

Az első fejezethez hasonlóan, a klasszikus kockázati folyamat esetében is megvizsgáljuk, hogy mi mondható a csőd valószínűségéről, ha lehetőség van viszontbiztosítási ügyletet kötni. Már a diszkrét modellnél is – mint láttuk – kudarcba fulladt az optimum megtalálása, és sajnos itt sem jobb a helyzet. Nem számíthatunk tehát rá, hogy akár csak egy egyszerű quota share viszontbiztosítás esetén megtaláljuk azt a stratégiát, mely mellett minimális lesz a csődvalószínűség. Azonban legalább a konstans stratégiák halmazán lehetőség nyílik bizonyos értelemben vett optimalizálásra, illetve röviden áttekintjük azokat a sztochasztikus irányítással kapcsolatos tételeket, melyek az előző fejezetben is bemutatásra kerültek.

A legfontosabb azzal kezdeni, hogy mennyiben változik meg a folyamat struktúrája a viszontbiztosítás hatására. Természetesen jelen helyzetben is mind a díjbevétel, mind pedig a károk eloszlása megváltozik, így szükség van egy új definícióra.

3.6. Definíció. *A b viszontbiztosítási stratégia mellett a klasszikus kockázati folyamat a következő:*

$$U_t^b = u + \int_0^t c(b_s)ds - \sum_{j=1}^{N_t} s(Z_j, b_{\tau_i -}).$$

A kárkifizetést megadó $s(Z_j, .)$ függvénynél azért szerepel a stratégia bal oldali határértéke a kárbekövetkezés időpontjában, mert ez zárja ki annak a lehetőségét, hogy majdnem minden pontjában a nem negatív félegyenesnek viszontbiztosítás nélkül fejlődhessen a folyamat, majd a károk időpontjainak null mértékű halmazán, átadott díj nélkül teljes viszontbiztosításra váltson vagy legalább is nagyon kedvezőre.

3.5. Tétel. *Klasszikus kockázati folyamat esetén tetszőleges b viszontbiztosítási stratégia mellett*

$$P\Big(\Big\{T_u^b < \infty\Big\} \bigcup \Big\{\lim_{t\to\infty} U_t^b = \infty\Big\}\Big) = 1.$$

Bizonyítás. A bizonyítást csak a quota share esetre mondjuk el, de az állítás természetesen érvényben van a többi viszontbiztosítási formára is. Elég azt igazolni, hogy a tőke 1 valószínűséggel a végtelenbe tart a $T_u^q = \infty$ feltétel mellett. Ezért a továbbiakban szorítkozzunk a következő valószínűségi mező vizsgálatára: $(\Omega, \mathcal{A}, \widetilde{P})$, ahol tetszőleges A eseményre

$$\widetilde{P}(A) = \frac{P(A \cap \{T_u^q = \infty\})}{P(T_u^q = \infty)}.$$

Meg kell azonban jegyezni, hogy csak olyan stratégiákat engedünk meg, melyek mellett 1-nél kisebb a csőd valószínűsége, és így valóban értelmes a fennt definiált új valószínűség.

Legyen $0 < \varepsilon < 1$ és tegyük fel, hogy $\liminf_{t\to\infty} \in [M, M + \frac{\varepsilon}{2})$ valamely $M < \infty$ számra. Tehát létezik végtelen sok t_k időpont, melyekre $U_{t_k}^q < M + \varepsilon$. Ezekről feltehető, hogy $t_1 < t_1 + 1 < t_2 < t_2 + 1 < \ldots$ Az $\frac{\varepsilon}{c}$ mennyiséget δ-val, azt a saját megtartási arányt pedig, amely mellett a beszedett díj és az átadott díj különbsége éppen 0, jelöljük $\underline{q}$-sal. Ha végtelen sok olyan k létezik, melyre a $\{t \in [t_k, t_k+1] : q_t \geq \underline{q}/2\}$ halmaz Lebesgue mértéke legalább δ, akkor a kárigény folyamat stacionárius és független növekményei miatt a

$$P\left(\frac{\underline{q}}{2}S_\delta > M + c + 1\right) > 0$$

összefüggés a nagy számok erős törvénye értelmében biztos csődöt eredményez, ami ellentmondás. Tehát végtelen sok k-ra pont az lesz igaz, hogy a $\{t \in [t_k, t_k+1] : q_t \geq \underline{q}/2\}$ halmaz Lebesgue mértéke δ-nál kisebb. Feltehetjük azt is, hogy ez az összes k-ra igaz. Így

$$U^q_{t_k+1} < U^q_{t_k} + \delta c + (c(\underline{q}/2))(1-\delta) < M + 2\varepsilon + (c(\underline{q}/2))(1-\delta).$$

Végül, mivel ε tetszőleges, ezért

$$\liminf_{t\to\infty} U^q_t < M,$$

ami ellentmondás. Tehát M nem lehet véges, azaz a tőke – $\widetilde{P}$ szerint – 1 valószínűséggel a végtelenbe tart. □

A következőkben a csődvalószínűséget minimalizáló stratégia és az optimum értékét tárgyaló állítások következnek.

3.6. Tétel. *A $\Phi^*(u)$ függvény szigorúan monoton növekedő.*

Legyen

$$\overline{\mathcal{U}} = \{b \in \mathcal{U} : c(b) > 0\},$$

azaz csak a pozitív nettó díjbevételt eredményező része a teljes viszontbiztosítási formát leíró térnek. Most pedig tekintsük azt a differenciálegyenletet, amely kulcsfontosságú lesz a számunkra.

$$f'(x) = \inf_{b\in\overline{U}}\left\{\frac{\lambda}{c(b)}\left[f(x) - \int_0^\infty f(x-s(z,b))dF_{Z_1}(z)\right]\right\}$$

3.7. Tétel. *A fenti egyenlet megoldása az $f(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett egyértelműen létezik, illetve korlátos, szigorúan monoton növekedő és folytonosan differenciálható.*

Jelöljük $b(x)$-szel ezen egyenlet jobb oldalát minimalizáló értéket. Ekkor igaz lesz az, hogy $b(x)$ mérhető módon is előáll.

3.8. Tétel. *Legyen $f(x)$ a vizsgált egyenlet megoldása az $f(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett. Ekkor*

$$f(u) = \frac{\Phi^*(u)}{\Phi^*(0)}.$$

Továbbá az optimális b_t^* stratégia előáll $u(U_t^*)$ alakban, ahol U_t^* a folyamat értéke t-ben az optimális stratégia mellett.

3.9. Tétel. *Quota share viszontbiztosítást alkalmazva, ha $\liminf_{q\to 1} \frac{c-c(q)}{1-q} > \lambda\mu$, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $q(x) = 1$, ha $x \leq \varepsilon$.*

Persze közgazdaságilag nézve, elég furcsa, hogy közel a 0 tőkeszinthez, nem kötünk viszontbiztosítást, holott elvileg itt nagyobb biztonságra lenne szükség. Azonban ne felejtsük el, hogy a csőd valószínűségét szeretnénk minimalizálni, ezért, ha nem adunk át díjat, akkor a lehető leggyorsabban érünk ki a „veszély zónából".

Most térjünk rá arra, hogy miként használhatók a fenti tételek az optimum megtalálásában. A válasz sajnos az, hogy érdemben nem. Jelen esetben is szinte megoldhatatlan az optimális stratégia és a minimális csődvalószínűség megtalálása. A helyzet azért nem kilátástalan, hiszen itt – ellentétben a diszkrét esettel – legalább a konstans stratégiák mellett már kezelhetővé válik a probléma.

Konstans stratégián az előző fejezethez hasonlóan a $b_t \equiv b$ folyamatot (konstans függvényt) fogjuk érteni. Mivel a viszontbiztosítás nélküli esetben sem tudtuk explicite megmondani $\Psi(u)$ értékét, ezért nyilván itt sem fogjuk tudni megtalálni az optimumot. Ha azonban feltesszük, hogy létezik a Lundberg-kitevő, akkor annak maximalizálásával a (3.3) tételben adott felső korlát minimális lesz.

Nézzünk erre az esetre egy példát!

3.1. Példa. *Tegyük fel, hogy a káreloszlás exponenciális eloszlású, paramétere pedig – mivel a várható érték μ – $\frac{1}{\mu}$. Ekkor van Lundberg-kitevő, hiszen a momentum generáló függvény 1-gyel csökkentett értéke éppen*

$$\frac{r\mu}{1 - r\mu},$$

ami nyilván az $r < \frac{1}{\mu}$ esetben véges. Az

$$\frac{r\mu}{1 - r\mu} = \frac{rc}{\lambda}$$

egyenlet megoldása pedig az

$$R = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c},$$

ami pedig belül van azon az intervallumon, ahol a momentum generáló függvény véges.

A quota share viszontbiztosítás nem változtatja meg alapjában a káreloszlást. Ugyanúgy exponenciális marad, csak a paraméter változik $\frac{1}{\mu q}$-ra. Ezért rögzített saját megtartási szint mellett $R^q = \frac{1}{\mu q} - \frac{\lambda}{c}$. Ez pedig a $q \downarrow \underline{q}$ mellett növekszik. Viszont az már nem engedhető meg, hogy a nettó díjbevétel 0 legyen, mert ekkor biztos csőd elé néznénk. Tehát nem tudjuk maximalizálni a Lundberg-kitevőt, csak egy véges határértékhez egyre közelebb vinni. Viszont általános esetben egyáltalán nem biztos, hogy R növelése csökkenti a csődvalószínűséget is, de ebben az esetben ez is igaz, hiszen a korábban megadott $\Psi(u)$ függvény deriváltja minden megengedett q esetében pozitív.

3.3. Egyszerű viszontbiztosítási stratégiák

Láttuk tehát korábban, hogy az optimumhoz való eljutás a legtöbb viszontbiztosítási forma esetében megoldatlan maradt, illetve egy jóval szűkebb halmazon is csak felső korlátot tudunk adni rá. Ha azonban lejebb adunk az igényeinkből, és megelégszünk például azzal, ha egy előre adott stratégia csődvalószínűségre gyakorolt hatását vizsgáljuk meg, akkor hasznos összefüggésekhez juthatunk.

Először tekintsük a következő kockázati folyamatot:

$$\begin{aligned}\overline{U}_t = u + c_1 \sum_{j=0}^{\mathcal{N}_t - 1} (\overline{\tau}_{j+1} - \overline{\tau}_j)\chi_{(\overline{U}_{\overline{\tau}_j} < K)} + c_2 \sum_{j=0}^{\mathcal{N}_t - 1} (\overline{\tau}_{j+1} - \overline{\tau}_j)\chi_{(\overline{U}_{\overline{\tau}_j} \geq K)} + \\ (t - \overline{\tau}_{\mathcal{N}_t})(c_1 \chi_{(\overline{U}_{\overline{\tau}_{\mathcal{N}_t}} < K)} + c_2 \chi_{(\overline{U}_{\overline{\tau}_{\mathcal{N}_t}} \geq K)}) - \\ \sum_{i=1}^{N_t} \Big(Z_i^{(1)} \chi_{(\overline{U}^-_{\tau_i} < K)} + Z_i^{(2)} \chi_{(\overline{U}^-_{\tau_i} \geq K)} \Big)\end{aligned}$$

Ez gyakorlatilag úgy interpretálható, hogy egy pozitív K szint alatt és felett más-más fejlődési dinamika szerint alakul a pillanatnyi tőkénk értéke, azaz egy úgynevezett rezsimváltó folyamattal van dolgunk. Mindkét rezsimben egy-egy klasszikus kockázati folyamat van, de a díjbevétel és a káreloszlás különböző. Amíg a tőke a szint alatt van, addig az első folyamat szerint fejlődik, amikor pedig eléri azt, akkortól a második folyamat jellemzőinek megfelelően alakul a tőke, mindaddig, amíg vissza nem esik K alá, és így tovább a végtelenségig. Az egyetlen, ami viszont megegyezik a két rezsimnél, az az, hogy a károk τ_i időpontjait ugyanaz a Poisson-folyamat modellezi. A néhány bevezetett új jelölés definíciója az alábbi:

$$\overline{\tau}_0 = 0,$$

$$\overline{\tau}_{k+1} = \inf\big\{t > \overline{\tau}_k : \overline{U}_t = K\big\} \wedge \inf\big\{t > \overline{\tau}_k : \overline{U}_t^- \neq \overline{U}_t\big\},$$

azaz ezek a véletlen időpontok a károk időpontjainak és a szint eléréseknek a rendezett sorozata. (Itt hallgatólagosan feltételezzük, hogy a folyamat jobbról folytonos trajektóriákkal rendelkezik.) Továbbá az ezeket számláló sztochasztikus folyamat $\mathcal{N}_t$, vagyis

$$\mathcal{N}_t = \sup\big\{k : \overline{\tau}_k < t\big\}.$$

A megadott $Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}, Z_2^{(1)}, Z_2^{(2)}, \ldots$ változók a két rezsim kárainak sorozata, melyek egymástól és a másik sorozattól is függetlenek. Ez persze egy kicsit furcsán ható dolog, hogy a kár időpontjában két féle kárt is értelmezünk, de mivel pontosan az egyiket tartjuk csak meg, ezzel csupán a formalizálást könnyítjük. Különböztessük meg a két rezsim esetében a megfelelő $\Psi(.)$ és $\Psi(.,.)$ függvényeket alsó indexek használatával.

Speciális kezdő tőke esetén igaz a következő lemma.

3.1. Lemma. *A fenti $\overline{U}$ folyamat esetén*

$$\Phi(K) \geq \frac{1 - \frac{\lambda\mu_2}{c_2}}{1 - m},$$

ahol

$$m = \frac{1}{K}\int_0^K \Psi_2(0, K - s)\, ds.$$

Bizonyítás. A K szintről indulva a kérdéses mennyiség felírásához használjuk a teljes valószínűség tételét, illetve azt a tényt, hogy a folyamathoz $-K$-t adva éppen egy 0-ból induló klasszikus kockázati folyamatot kapunk. Legyen továbbá

$$\nu = \inf\{t\, :\, U_t^{(2)} < K\}.$$

$$\Phi(K) = P(T_K = \infty \,|\, \nu = \infty)P(\nu = \infty) +$$
$$P(T_K = \infty \,|\, \nu < \infty, \overline{U}_\nu \geq 0)P(\nu < \infty, \overline{U}_\nu \geq 0) +$$
$$P(T_K = \infty \,|\, \nu < \infty, \overline{U}_\nu < 0)P(\nu < \infty, \overline{U}_\nu < 0).$$

Világos, hogy az első feltételes valószínűség 1, míg a harmadik 0. Továbbá az első és második tagban a feltétel valószínűsége már egy ismert szám, ha alkalmazzuk az említett eltolást. Ez alapján

$$\Phi(K) = 1 - \frac{\lambda\mu_2}{c_2} + P(T_K = \infty \,|\, \nu < \infty, \overline{U}_\nu \geq 0)\Psi_2(0, K).$$

Ismét a teljes valószínűség tételét használva, és rögtön elhagyva a 0 értékű tagot

$$P(T_K = \infty \,|\, \nu < \infty, \overline{U}_\nu \geq 0) =$$
$$P(T_K = \infty \,|\, \nu < \infty, \overline{U}_\nu \geq 0, \widetilde{T}^{(1)}_s = K)\, P(\widetilde{T}^{(1)}_S = K) =$$
$$\Phi(K)\, P(\widetilde{T}^{(1)}_S = K) = \Phi(K)\, E(P(\widetilde{T}^{(1)}_S = K \,|\, S))$$

Innentől azonban nem tudunk már egyenlőséggel tovább haladni. A korábban említett (3.4) tétel alapján azonban

$$P(\widetilde{T}^{(1)}_S = K \,|\, S) \geq \frac{S}{K}.$$

Hátra van még a káresemény után maradó tőke eloszlásának meghatározása azon feltétel mellett, hogy értéke a $[0, K)$ intervallumba esik. Az eloszlásfüggvény az $s \leq 0$ esetben 0, míg az $s \geq K$ esetben 1. Tehát vizsgálódásunkat elég a maradék intervallumon folytatni.

$$F_{S|S\in[0,K)}(s) = \frac{P(0 \leq S < s)}{P(0 \leq S < K)} = \frac{\Psi_2(0, K) - \Psi_2(0, K - s)}{\Psi_2(0, K)}.$$

Ez alapján

$$E\left(\frac{S}{K}\right) = \frac{1}{K}\int_0^K 1 - \frac{\Psi_2(0, K) - \Psi_2(0, K - s)}{\Psi_2(0, K)}\, ds.$$

Megszorozva ezt a formulát a $\Psi_2(0, K)$ mennyiséggel, pont m-et kapjuk. Összefoglalva mindazt, amit eddig tudunk

$$\Phi(K) \geq 1 - \frac{\lambda\mu_2}{c_2} + m\,\Phi(K).$$

Ezt átrendezve adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.□

Ebből a lemmából kiindulva tudunk becslést adni $\Phi(u)$ értékére, ha a kezdő tőke legalább 0, de kisebb mint K, ugyanis igaz a következő:

3.2. Lemma. *Az $\overline{U}$ folyamat esetében $0 \le u < K$ kezdő tőke mellett teljesül az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\Phi(u) \ge \frac{u(1 - \frac{\lambda\mu_2}{c_2})}{K(1-m)}$$

Bizonyítás. A korábbiak alapján a

$$\Phi(u) = P(\widetilde{T}_u^{(1)} = K)\,\Phi(K)$$

azonosságból azonnal adódik a lemma állítása. □

A megmaradt tartományon, azaz, amikor a kezdő tőke K-nál nagyobb, „durvább beavatkozásra" kényszerülünk az alsó korlát megtalálásának céljából. Erről szól a témakör harmadik, és egyben utolsó lemmája.

3.3. Lemma. *Az $\overline{U}$ folyamat esetében $u > K$ kezdő tőke mellett teljesül az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\Phi(u) \ge \frac{1 - \frac{\lambda\mu_2}{c_2} + g\,\Phi(K)}{1-h},$$

ahol

$$h = \frac{1}{u-K}\int_0^{u-K} \Psi_2(0, u-K-s)\,ds,$$

$$g = \frac{1}{K}\int_0^{K} \Psi_2(0, u-s) - \Psi_2(0, u-K)\,ds.$$

Bizonyítás (vázlat). A (3.1) lemma bizonyításához hasonlóan járunk el most is.

$$\Phi(u) = 1 - \frac{\lambda\mu_2}{c_2} + \Psi_2(0, u-K)\,E(P(\widetilde{T}_S^{(2)} = u-K\,|\,S))\,\Phi(u) +$$
$$(\Psi_2(0,u) - \Psi_2(0,u-K))\,E(P(\widetilde{T}_W^{(1)} = K\,|\,W))\,\Phi(K) + p,$$

ahol p azt a hiányzó tagot jelöli, melyben egyszerre szerepel szorzó tényezőként egy felső szint elérésének valószínűsége, illetve egy alsó szint alá való beesés valószínűsége, mielőtt a neki megfelelő felső szintet elérnénk. Nyilván a két mennyiségre csak ellentétes irányú becslést tudnánk adni, ezért nem tehetünk mást, mint hogy nullával becsüljük alulról. A megmaradt tagokkal pedig a bizonyítás a korábbiak mintájára befejezhető. □

3.2. Megjegyzés. *A három lemma mindegyikénél elmondható, hogy az alsó becslés nem függ az „alsó" rezsim káreloszlásától és díjbevételétől sem, ami az élesség szempontjából nem kedvező.*

3.3. Megjegyzés. *A bizonyítások során külön említés nélkül ki lett használva a klasszikus kockázati folyamat azon előnyös tulajdonsága, mely szerint bármely tetszőleges t időpontban, u tőkeszint mellett a nem tönkremenés valószínűsége független t-től, azaz értéke* $\Phi(u)$*. Ezt az magyarázza, hogy homogén Poisson-folyamat esetén az ugrások között eltelt idők független* λ *paraméterű exponenciális eloszlásúak, így rendelkeznek az első fejezet során említett örökifjú tulajdonsággal.*

Jogosan merül fel a kérdés, hogy miként alkalmazhatóak ezek a lemmák a bennünket foglalkoztató viszontbiztosítási problémák megoldásában. A válasz igen egyszerű. Ha például egy olyan káreloszlással van dolgunk, amelynél létezik a Lundberg-kitevő, akkor becsüljük meg azt a korábbi tapasztalataink alapján (részletekért lásd [1]). Ezután keressünk olyan K szintet, illetve a rendelkezésre álló viszontbiztosítási formák közül válasszuk olyat, melyek mellett a csőd valószínűségére adható felső korlát kisebb, mint ami az előbbi becslésből származik. Ha van ilyen páros, akkor az immár nem üres halmaz felett lehetőség nyílik az optimum megkeresésére is. Az optimalizáció során a K szint és a viszontbiztosítási forma egymástól függetlenül kezelhető, jelentősen megkönnyítve ezzel az eljárást. Azonban ne feledjük, hogy ezzel csak $\Psi(u)$ felső becslését élesíthetjük, de a konkrét értéken nem biztos, hogy javítani tudunk. Ilyenkor a biztosító aktuáriusának kell mérlegelnie, hogy a kapott eredmény elég értékes-e ahhoz, hogy a megfelelő díjról lemondjon a viszontbiztosító javára.

4. fejezet

Csődvalószínűség, mint korlátozó feltétel

A dolgozat eddigi részében a csőd valószínűsége célfüggvényként szerepelt, és az eddig bemutatott eredmények is mind arra voltak kihegyezve, hogy miként lehet ezt minél lejebb szorítani viszontbiztosítások alkalmazásával. Most változtatunk a koncepción és más célfüggvények optimumát fogjuk keresni, de feltételül szabjuk majd, hogy csak olyan lehetőségek közül választhatunk, melyek mellett a csődvalószínűség egy adott érték alatt marad.

Ez sem teljesen valóságtól elrugaszkodott vizsgálódás, hiszen napjainkban is állandó feladat az aktuárius szakma számára a Szolvencia II. szabályozás adaptálása. Ennek lényege nagyvonalakban az, hogy egy biztosító csak akkor folytathatja biztosítási tevékenységét, ha elegendő szavatoló tőkével rendelkezik ahhoz, hogy a saját jól meghatározott kockázata mellett egy bizonyos megbízhatósági szinten (99,5 %) teljesíteni tudja jövőbeni kötelezettségeit.

A dolgozat témájának megfelelően mi most csődnek fogjuk nevezni azt, amikor a biztosító nem tudja teljesíteni a vállalt kötelezettségeit. Négy különböző pénzáram alakítja majd a tőkeszintet: a kezdő tőke, a – viszontbiztosítási szempontból – nettó díjbevétel és kárkifizetés, illetve a felmerülő költségek. A tartalékokat nem modellezzük külön, hanem úgy tekintünk rá, hogy az újonnan megképzett és a felszabaduló mennyiség különbsége, mint szintén valószínűségi változó, benne van a károk eloszlásában. Továbbá feltesszük azt, hogy egy egységnyi kezdőtőke tartása h

tőkeköltséggel jár. Ez egyébként elég reális is, hiszen szavatoló tőke csak az lehet, ami kellően likvid és nincs kockázatosan befektetve. Ekkor pedig nyilván hozamtól esünk el azáltal, hogy nem a megfelelő eszközbe fektetünk, hanem egy biztosító társaság működését finanszírozzuk vele. Tesszük persze mindezt annak reményében, hogy például a díjbevétel és a kárráfordítás különbsége meghaladja azt a profitot, amit máshol szerezhetnénk meg ugyanekkora tőke befektetésével.

Legyen tehát egy periódus – tipikusan egy év – aggregált kárráfordításának eloszlása L, a díjbevétel (amely tartalmazza a vállalkozói díjrészt is) c, míg legyen a fix költség $\mathcal{E}$. Az első kérdés, amit vizsgálunk az az, hogy mekkora u kezdő tőkével kell rendelkezni ahhoz, hogy a díjbevétellel azt megnövelve legalább $99,5\%$-os valószínűséggel ki tudjuk fizetni az összes kárt és a költségeket. Ezt formalizálva, keresünk olyan u-t, melyre

$$P(u + c - L - \mathcal{E} \geq 0) \geq 0,995.$$

Ennek megoldása minden olyan érték, amely legalább akkora, mint L $99,5\%$-os kvantilisének c-vel csökkentett és $\mathcal{E}$-vel növelt értéke. A kvantilis kiszámításához az eloszlásfüggvény megfelelő értelemben általánosított inverzét használjuk majd, melyet $\widehat{F}_L^{-1}$-lel jelölünk. Ez abszolút folytonos esetben természetesen azonos az eredeti inverz függvénnyel. Tehát a keresett kezdő tőke nem más, mint

$$u = \widehat{F}_L^{-1}(0,995) + \mathcal{E} - c.$$

A periódus végére a tulajdonos(ok) várható nyeresége

$$c - \mathcal{E} - E(L) - h\big(\widehat{F}_L^{-1}(0,995) + \mathcal{E} - c\big).$$

Megváltozik a kép akkor, ha valamilyen viszontbiztosítást is lehet kötni erre az időszakra. Ekkor ugyanis csak a nettó kockázattal és díjjal kell számolni a szavatoló tőke szükséglet megállapításakor – legalábbis a mi modellünk szerint. Most tehát a várható nyereség rögzített viszontbiztosítási forma mellett

$$c(b) - \mathcal{E} - E(s(L,b)) - h\big(\widehat{F}_{L(b)}^{-1}(0,995) + \mathcal{E} - c(b)\big).$$

Ilyenkor célként lehet kitűzni például azt, hogy ezt az értéket maximalizáljuk. Ez persze csak akkor tűnik igazán hatásosnak, ha kellően sok pénze van a tulajdonosnak, mert akkor az esetleges kezdeti veszteségeket elviseli és hosszú távon szép haszonra tehet szert.

Lássunk most erre a feladatra egy példát!

4.1. Példa. *Tegyük fel, hogy az L kockázat eloszlása exponenciális λ paraméterrel. Lehetőség van stop loss viszontbiztosítást kötni bármekkora megtartási szinttel. A direkt biztosító α paraméterű várható érték elvvel számolja a díjakat, míg a viszontbiztosító ugyanígy jár el, de $\beta > \alpha$ paraméterrel. Most tekintsük úgy, hogy mindkét esetben bruttó díjakról van szó, és a vállalkozói díjrészt a paraméterek már tartalmazzák.*

Ennek megfelelően rögzített M megtartási szint mellett a megtartott díj

$$\frac{1+\alpha-(1+\beta)\,e^{-\lambda M}}{\lambda}.$$

Természetesen az átadott díj megállapításánál kihasználtuk az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát. Ki kell még számolni, hogy mekkora a tőkeszükséglet ebben az esetben. Azaz a megtartott rész eloszlásának megfelelően kell mondani egy olyan értéket, melyet az csak legfejebb $0,5\%$-os valószínűséggel lép túl. Mivel a megtartott kockázat eloszlása pozitív súlyt koncentrál az M értékre, azon kívül pedig abszolút folytonos, ezért szakadása van az eloszlásfüggvénynek. Így óvatosan kell eljárni a kvantilis kiszámításakor. A megkövetelt tőke tehát

$$M\chi_{(e^{-\lambda M}\geq 0{,}005)} + F_L^{-1}(0,995)\chi_{(e^{-\lambda M}<0{,}005)}.$$

A periódus végén a várható nyereség pedig

$$\frac{1+\alpha-(1+\beta)\,e^{-\lambda M}}{\lambda} - \mathcal{E} - \frac{1-e^{-\lambda M}}{\lambda} - \\ h\bigg(M\chi_{(e^{-\lambda M}\geq 0{,}005)} + F_L^{-1}(0,995)\chi_{(e^{-\lambda M}<0{,}005)} + \mathcal{E} - \frac{1+\alpha-(1+\beta)\,e^{-\lambda M}}{\lambda}\bigg).$$

Ezt kell maximalizálni.

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor $e^{-\lambda M} \geq 0,005$, azaz $M \leq \frac{\ln(0{,}005)}{-\lambda}$. Csak a döntési változót tartalmazó tagokat tekintve

$$\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{-(1+\beta)\,e^{-\lambda M}}{\lambda} - \frac{1-e^{-\lambda M}}{\lambda} - hM - h\frac{(1+\beta)e^{-\lambda M}}{\lambda}\right] = \big(\beta+h(1+\beta)\big)e^{-\lambda M} - h = 0$$

Ezt megoldva kapjuk az optimum helyet:

$$M = \frac{\ln\left(\frac{h}{\beta+(1+\beta)h}\right)}{-\lambda},$$

ami lokális maximumhely.

A másik esetben a

$$\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{-(1+\beta)\, e^{-\lambda M}}{\lambda} - \frac{1-e^{-\lambda M}}{\lambda} - h\frac{(1+\beta)e^{-\lambda M}}{\lambda}\right] = \big(\beta + h(1+\beta)\big)e^{-\lambda M} = 0$$

egyenletnek nincs megoldása, mert a derivált pozitív.

A konkrét paraméterektől függ majd, hogy a kapott lokális maximumhely valóban bele esik-e a kijelölt intervallumba, és ha igen, akkor ott a hasznosság legalább akkora--e, mint az $M \to \infty$ határátmenettel kapott érték. Így elméletben létezhet olyan eset is, amikor egy konkrét megtartási szint mellett lesz maximális a várható nyereség, illetve olyan is, amikor a viszontbiztosítás nélküli megoldás a legkedvezőbb.

Elképzelhető természetesen más hasznossági függvény is. Az egyik legalapvetőbb tőkepiaci modell, a CAPM például nem csak egy kockázatos befektetés várható hozamát veszi alapul, hanem hangsúlyos a kockázat is. Ezt pedig a hozam szórásával azonosítja. Meg kell jegyeznünk, hogy a kockázatnak elég sok féle definícióját lehetne adni. Ez nyilván attól is függ, hogy milyen környezetben kívánjuk azt mérni. A következőkben a szórásnégyzet segítségével adunk meg egy hasznosság függvényt, amivel egy érdekes eredményre jutunk majd.

Használjuk tehát a korábbi jelölések megtartása mellett a következő függvényt a tulajdonos hasznosságának mérésére:

$$u(b) = c(b) - \mathcal{E} - E(s(L,b)) - h\Big(\widehat{F}^{-1}_{L(b)}(0,995) + \mathcal{E} - c(b)\Big) - \gamma D^2\big(s(L,b)\big),$$

ahol γ a tulajdonosra jellemző pozitív, úgynevezett kockázat elutasítási paraméter. Ez minél nagyobb, annál inkább rontja a hasznosságot az elért hozamban rejlő bizonytalanság. Tehát előfordulhat, hogy egy kisebb várható hozam jobban preferált, mint egy nagyobb, de jókora szórásnégyzettel rendelkező mennyiség. Nézzünk erre is egy példát.

4.2. Példa. *Legyen az L kockázat eloszlása ismét λ paraméterű exponenciális, és alkalmazzunk quota share viszontbiztosítást. Ekkor*

$$u(q) = \frac{1+\alpha-(1-q)(1+\beta)}{\lambda} - \mathcal{E} -$$
$$\frac{q}{\lambda} - h\left(\frac{\ln(0,005)}{-\frac{\lambda}{q}} + \mathcal{E} - \frac{1+\alpha-(1-q)(1+\beta)}{\lambda}\right) - \gamma\frac{q^2}{\lambda^2}.$$

Ezt deriválva q szerint a

$$\frac{\beta + h(ln(0,005)+1+\beta)}{\lambda} = \frac{2\gamma q}{\lambda^2}$$

egyenlet gyöke szolgáltatja az optimum helyét, ami

$$q = \frac{\lambda(\beta + h(\ln(0,005)+1+\beta))}{2\gamma}.$$

Ebből pedig az látszódik, hogy bizonyos paraméter kiosztás mellett ez lehet maximumhely is, feltéve persze, hogy a $(0,1)$ intervallumba esik. Egyébként pedig valamelyik szélsőséges esetben jutunk optimumhoz.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek és tanáromnak, Arató Miklósnak, hogy hónapokon át segített diplomamunkám megírásában. Ha kérdésem volt vagy kifogytam az ötletekből, ő mindig szakított rám időt és átlendített a holt pontokon. Továbbá köszönöm Michaletzky György tanár úrnak azokat a felejthetetlen előadásokat, melyeket a kockázati folyamatok témájában tartott, megfelelő szakmai alapokat adva ezzel a dolgozat megírásához.

Irodalomjegyzék

[1] Michaletzky Gy.: Kockázati folyamatok, egyetemi jegyzet

[2] Arató M.: Nem-élet biztosítási matematika, egyetemi tankönyv

[3] Kerényi I.: Viszontbiztosítás, egyetemi jegyzet

[4] H. Schmidli : Stohastic control in insurance, *Springer* 2008 – 254 oldal

[5] H. Schmidli : On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance *The Annals of Applied Probability* 2002, Vol.12, No.3, 890–907.