# A férj és feleség élettartamának modellezése több életre szóló életbiztosítási szerződéseknél

Szakdolgozat


Írta: Tárnok Edina

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc, Aktuárius szakirány

Témavezető:

Vékás Péter, egyetemi tanársegéd

Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar,
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék


Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011

# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezetés

Az életbiztosítások díjkalkulációja halandósági táblákon alapul, melyek nemre és korra lebontva tartalmazzák a halálozási valószínűségeket. Egy életbiztosításnak azonban nem feltétlenül csak egy biztosítottja lehet. A több életre szóló életbiztosítási szerződések egyik legkedveltebb típusa az a két életre szóló biztosítás, melyet házastársak köthetnek. Mivel egy ilyen szerződés esetén is halálozási valószínűségekkel kell számolnunk, felmerül a kérdés, hogy milyen halandósági táblával számoljunk, hogy helyes eredményre jussunk.

Számos statisztika bizonyítja, hogy a házasságban élők várható élettartama hosszabb azokénál, akik egyedül élnek. Egy másik érdekes dolog, hogy a férj és a feleség élettartama között összefüggés fedezhető fel [5]. Ennek több oka is lehet, például az azonos életszínvonal, életvitel, ill. előfordul, hogy az özvegy nem sokkal társa halála után "‘érzelmi okokból"’ követi párját (brokenheart syndrome). Ezek arra sarkallnak, hogy egy házaspároknak szóló életbiztosítás díjkalkulációjakor ne az eredeti férfi és női halandósági adatokkal számoljunk, - ezáltal azokat függetlennek tekintve - hanem vegyük figyelembe a két élettartam között húzódó kapcsolatot is.

Az elemzéshez olyan adatokra van szükségünk, melyeknél nem külön férfi és női élettartamokat figyeltünk meg, hanem a férj és a feleség élettartamát összekapcsolva tartjuk számon. Így képesek leszünk feltérképezni a két élettartam közti kapcsolatot.

Az ilyen feladatok megoldására a matematika több módszert is kínál. Az egyik út lehetne a sokkmodell alkalmazása. Dolgozatomban egy másik matematikai megközelítést választottam, a kopulát. Ez a fogalom nem tekint vissza nagyon hosszú múltra, ám mostanra rengeteg területen felhasználták, kezdve pénzügyi folyamatok modellezésétől, mérnöki feladatok megoldásán át, előrejelzések készítéséig. Többek között azért döntöttem a kopula alkalmazása mellett, mert arra törekedtem, hogy a módszer, melyet használok, minél egyszerűbb lépésekből épüljön fel és minél inkább követhető legyen a kapcsolat feltárásának minden mozzanata. Erre a kopula felhasználásával remek lehetőségem nyílt.

A szakdolgozat Elméleti bevezető című fejezetében rövid elméleti áttekintést adok a kopulákról általánosságban. Ismertetem a fogalmat és összefoglalom annak legfontosabb tulajdonságait. Ezt követően néhány konkrét kopulafajtára kitérek részletesebben is, melyeket a modellezés során használtam.

A következő fejezetben bemutatom az adatokat, melyekkel dolgoztam, és azokat a műveleteket, melyek elvégzése szükséges volt ahhoz, hogy ezek az adatok alkalmasak legyenek arra, hogy kopulát illeszthessek rájuk. Ezek után illesztem a konkrét kopulafajtákat paraméterbecslésen keresztül, majd ellenőrzöm az illeszkedést. Az eredmények összegzése után kiválasztom a legalkalmasabb kopulát, mellyel a dolgozat további részében dolgozom.

A Díjkalkuláció címet viselő negyedik fejezet a két életre szóló kétdimenziós halandósági tábla konstruálásával indul. Ebből számolom a kihalási rendet, melyet a díjkalkulációs képletekben alkalmazok. Ezt követően sorra veszem az alapvető biztosítás-fajtákat és értelmezem őket két életre szóló szerződések esetén. Szerepel többféle kockázati és elérési biztosítás, majd szó esik a vegyes és a term fix típusú életbiztosításokról is.

A két életes konstrukciókra először egyszeri nettó díjakat számolok. A következő alfejezetben a két életre szóló járadékok kalkulációját készítem el. Ezek a számítások azért is fontosak, mert ezekből nyerhetőek a járadéktagok a rendszeres díjfizetésű biztosítások díjainak kiszámításához, melyre a fejezet végén kerül sor.

A díjkalkulációs fejezetben több konkrét díjat is ismertetek, melyeket a kopulával készített kihalási rend számai alapján számolok. Ezzel párhuzamosan független élettartamok feltételezésével konstruált kihalási rend alapján is számítok díjakat, hogy összevethessem a két módszer által kapott eredményeket.

A szakdolgozatom célja az, hogy bemutassak egy jól követhető kopulaillesztési módszert férj és feleség élettartamára a metódus elvégzésén keresztül, ezáltal egy a két élettartam közötti kapcsolatot modellező kopulát nyerve. A díjkalkulációs fejezetben többféle lehetséges módozat aktuáriusi képleteinek felírását tűztem ki célul. A konkrét számítások során pedig azt szeretném megmutatni, hogy valóban érdemes két életre szóló szerződések esetén figyelembe venni az élettartamok közötti kapcsolatot, mert a díj így tükrözi a vállalt valódi kockázatokat és ez akár jelentősen eltérhet a független élettartamok feltételezése mellett kalkulált díjaktól.

# 2. Elméleti bevezető

## 2.1. A kopula fogalma

Két valószínűségi változó közötti függőséget többféle módon is le tudunk írni. Az egyik lehetséges fogalom a korreláció. Két valószínűségi változó korrelációja mindig -1 és 1 közé esik, és akkor és csak akkor 1 vagy -1, ha az egyik változó, X 1 valószínűséggel felírható a másik változó, Y lineáris függvényeként: $X = a \cdot Y + b$. Tehát a korreláció a linearitás egy mértékének mondható. További lehetőségek a Kendall $\tau$ és a Spearman $\rho$. A korrelációhoz hasonlóan ezeknél a mennyiségeknél is 1 jelöli a tökéletes együttmozgást és -1 pedig a teljesen ellentétesen mozgást. A fejezetben ismertetésre váró kopuláknak más az alapötlete. Többdimenziós eloszlás esetén szeretnénk az egydimenziós valószínűségi változók közötti függőséget modellezni úgy, hogy a peremeloszlások és az együttes eloszlás között keresünk olyan kapcsolatot, melyet egy többdimenziós függvénnyel kifejezhetünk. A következő elméleti fejtegetések szorosan követik [1] kopulákról szóló fejezetét.

A kopula fogalmát A. Sklar 1959-ben vezette be Fréchet kérdésére válaszolva, mely a többdimenziós eloszlásfüggvények kapcsolatát vizsgálta az alacsonyabb dimenziójú marginálisaikkal. Eleinte valószínűségi metrikus tereknél alkalmazták a kopula fogalmát, később pedig fontos valószínűségi és matematikai-statisztikai fogalommá nőtte ki magát.

A kopula egy olyan speciális eloszlásfüggvény-fajta, mely a $[0,1]^d$ d-dimenziós kockán van értelmezve és a marginálisai pedig egyenletes eloszlások a $[0,1]$ intervallumon.

**2.1. Definíció.** *(Kopula) Legyen $U_1, U_2, \ldots, U_d$ d darab $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $C : [0,1]^d \mapsto [0,1]$ függvény egy d-változós kopula, ha*

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_d) = P(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2, \ldots, U_d \le u_d). \tag{1}$$

Legyenek az $X_1, X_2, \ldots, X_d$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényei rendre $F_1, F_2, \ldots, F_d$ és az együttes eloszlásfüggvényük pedig $F$. Ismert, hogy ha egy valószínűségi változót a saját eloszlásfüggvényébe írunk, akkor egy $[0,1]$-en egyenletes eloszlású változót kapunk. Így $F_1(X_1), F_2(X_2), \ldots, F_d(X_d)$ mindegyike egyenletes eloszlású a $[0,1]$-en. Egy kopula az $F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)$ helyen a következő:

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)) = P(U_1 \leq F_1(x_1), U_2 \leq F_2(x_2), \ldots, U_d \leq F_d(x_d)). \quad (2)$$

Legyen az $F_j(u)$ eloszlásfüggvény általánosított inverze:

$$F_j^{-1}(u) = inf\{x : F_j(x) \geq u\}. \quad (3)$$

Ezek után a következő átalakítások végezhetőek el:

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)) = \\ P(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, F_2^{-1}(U_2) \leq x_2, \ldots, F_d^{-1}(U_d) \leq x_d) = \\ P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \ldots, X_d \leq x_d) = F(x_1, x_2, \ldots, x_d). \end{aligned} \quad (4)$$

Azaz egy többváltozós eloszlásfüggvény megadható a marginálisai függvényében egy kopula segítségével. A következő megállapítás Sklartól származik és fontos a kopulák használhatóságának szemszögéből. Mivel a későbbiekben csak kétdimenziós kopulákra lesz szükségünk, ezért a továbbiakban csak az ilyen esetekre szorítkozunk.

**2.2. Tétel.** *(Sklar tétele) Legyen $F$ egy kétváltozós eloszlásfüggvény $F_1$ és $F_2$ peremeloszlásokkal. Ekkor létezik - ha $F_1$ és $F_2$ folytonos, akkor egyértelműen - egy olyan $C$ kétváltozós kopula, hogy*

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \quad (5)$$

*Így az is igaz, hogy bármilyen $C$ kopulához és $F_1$, $F_2$ peremeloszláshoz létezik egy $F$ kétdimenziós eloszlásfüggvény, melyre igaz a fenti összefüggés és a marginálisai $F_1$ és $F_2$.*

A kopula segítségével el tudjuk különíteni egy többdimenziós eloszlásfüggvény esetén a marginálisokat és a köztük lévő összefüggést. A kopula csak a peremeloszlások közti kapcsolatot ragadja meg, a peremeloszlások formájától független.

Speciálisan két dimenzióban tudunk alsó és felső korlátot is adni egy tetszőleges kopulára. Ehhez a következő összefüggést használjuk fel:

$$P(U_1 \geq u_1, U_2 \geq u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2), \quad (6)$$

Amiből átrendezve kapjuk, hogy

$$C(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + P(U_1 \geq u_1, U_2 \geq u_2). \tag{7}$$

Mivel egy valószínűség mindig nagyobb vagy egyenlő, mint nulla, így

$$C(u_1, u_2) \geq u_1 + u_2 - 1. \tag{8}$$

Ám a jobboldalon szereplő kifejezés lehet negatív is ezért ezt az alsó korlátot ki kell egészítenünk:

$$C(u_1, u_2) \geq \max(0, u_1 + u_2 - 1). \tag{9}$$

A felső korlátot az alábbi két észrevételből nyerjük:

$$\begin{aligned}
C(u_1, u_2) &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \leq P(U_1 \leq u_1) = u_1 \\
C(u_1, u_2) &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \leq P(U_2 \leq u_2) = u_2 \\
\Longrightarrow C(u_1, u_2) &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \leq \min(u_1, u_2).
\end{aligned} \tag{10}$$

A kopula további kedvező tulajdonsága, hogy invariáns a valószínűségi változó szigorúan monoton transzformációval kapott transzformáltjára. Emiatt az invariáns tulajdonság miatt az $X_i$ valószínűségi változók modellezése ugyanahhoz a kopulához vezet, mint például a $\log X_i$ változóké. Formálisan:

**2.3. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $X$ és $Y$ valószínűségi változók peremeloszlás-függvényei rendre $F_1$ és $G_1$, együttes eloszlásukat a $C_1$ kopula írja le. Legyenek $v(x)$ és $w(x)$ függvények szigorúan monoton növekvőek. A $v(X)$ eloszlásfüggvénye legyen $F_2$, a $w(Y)$-é $G_2$, együttes eloszlásukat modellezze a $C_2$ kopula. Ekkor a $C_1$ kopula invariáns bármely a feltételeknek eleget tevő $v(X)$, $w(Y)$ transzformációra, azaz $C_1 = C_2$.*

**Bizonyítás.** Vegyük észre, hogy:

$$F_2(x) = P(v(X) \leq x) = P\left(X \leq v^{-1}(x)\right) = F_1\left(v^{-1}(x)\right). \tag{11}$$

Hasonlóan $G_2(y) = G_1\left(w^{-1}(y)\right)$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy:

$$C_2\left(F_2(x), G_2(y)\right) = P(v(X) \leq x, w(Y) \leq y) = P\left(X \leq v^{-1}(x), Y \leq w^{-1}(y)\right) = C_1\left(F_1\left(v^{-1}(x)\right), G_1\left(w^{-1}(y)\right)\right) = C_1(F_2(x), G_2(y)).$$

■

## 2.2. Néhány kopulafajta

Ebben a fejezetben olyan kopulákat mutatok be, melyekre később szükség lesz. Ezek mind ún. arkhimédeszi kopulák, mely két dimenzióban annyit jelent, hogy ezek felírhatóak egy $\Phi$ generátorfüggvény segítségével a következő alakban:

$$C\left(u_1, u_2\right) = \Phi^{-1}\left[\Phi(u_1) + \Phi(u_2)\right], \tag{12}$$

ahol a $\Phi$ függvény szigorúan monoton csökkenő, konvex, folytonos és a [0,1]-ből a $[0, \infty]$-be képez. Továbbá a $\Phi^{-1}$-nek az összes deriváltja monoton a $[0, \infty]$-en ilyen módon:

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \Phi^{-1}(x) \geq 0, \quad \forall n > 0. \tag{13}$$

Egy arkhimédeszi kopula tartója mindig az egységnégyzet egy része és az, hogy melyik része, mindig a generátorfüggvénytől függ. A monotonitási feltételek miatt mindig igaz, hogy $\Phi(u) + \Phi(v) \leq \Phi(0)$. A kopula nullát vesz fel a $\Phi(u) + \Phi(v) = \Phi(0)$ görbe alatti részén az egységnégyzetnek.

Azért jó ezekkel a kopulákkal dolgozni, mert kevés paraméterrel rendelkeznek, viszonylag könnyen felírhatóak akár zárt alakban is. Most következzen négy olyan kopula, melyeknek illesztésével foglalkoztam.

**Clayton kopula**

A Clayton kopula a Cook-Johnson kopula kétdimenziós változata. A generátorfüggvénye: $\Phi(u) = u^{-\Theta} - 1$, ahol $\Theta > 0$. Ez a függvény a következő $C$ eloszlásfüggvényű kopulát generálja:

$$C_{Cl}(u,v) = (u^{-\Theta} + v^{-\Theta} - 1)^{-\frac{1}{\Theta}}. \tag{14}$$

A Clayton kopulának - akárcsak a másik három kopulának, amelyek majd ismertetésre kerülnek - egy paramétere van, a $\Theta$. Ez maximum likelihood becsléssel a későbbiekben megbecsülhető. A loglikelihoodfüggvény felírásához szükség van a kopula sűrűségfüggvényére. Ez a $c$ sűrűségfüggvény a $C$ eloszlásfüggvényből a két változó szerinti parciális differenciálásokkal nyerhető:

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}. \tag{15}$$

A Clayton kopula esetében a sűrűségfüggvény a következő:

$$c_{Cl}(u,v) = (\Theta + 1)(u^{-\Theta} + v^{-\Theta} - 1)^{-\frac{1}{\Theta}-2} u^{-\Theta-1} v^{-\Theta-1}. \tag{16}$$

**Frank kopula**

A Frank kopula generátora:$\Phi(u) = -\ln \frac{e^{-\Theta u}-1}{e^{-\Theta}-1}$, ahol $\Theta \neq 0$. Így a Frank kopula eloszlás- és sűrűségfüggvénye:

$$C_{Fr}(u,v) = -\ln \left( 1 + \frac{\left(e^{-\Theta u} - 1\right)\left(e^{-\Theta v} - 1\right)}{e^{-\Theta} - 1} \right)^{\frac{1}{\Theta}} \tag{17}$$

$$c_{Fr}(u,v) = \frac{\Theta\left(1 - e^{-\Theta}\right) e^{-\Theta(u+v)}}{\left(\left(1 - e^{-\Theta}\right) - \left(1 - e^{-\Theta u}\right)\left(1 - e^{-\Theta v}\right)\right)^2}. \tag{18}$$

**Ali-Mikhail-Haq kopula**

Az Ali-Mikhail-Haq kopula $\Phi$ generátorfüggvényének $\Theta$ paramétere a $[-1{,}1]$ intervallumba esik. A függvény pedig:$\Phi(u) = \ln \frac{1-\Theta(1-u)}{u}$. A $\Phi$ ebben az esetben az alábbi eloszlás- és sűrűségfüggvényű kopulát generálja:

$$C_{AMH}(u,v) = \frac{uv}{1 - \Theta(1-u)(1-v)} \tag{19}$$

$$c_{AMH}(u,v) = \frac{\Theta^2(-uv + u + v - 1) - \Theta(uv + u + v - 2) - 1}{\left(\Theta(u-1)(v-1) - 1\right)^3}. \tag{20}$$

### Joe kopula

Végül következzék a Joe kopula a $\Phi(u) = -\ln\left(1-(1-u)^{\Theta}\right)$ generátorfüggvénnyel, ahol $\Theta \geq 1$. A kopula eloszlásfüggvénye:

$$C_{Joe}(u,v) = 1 - \left((1-u)^{\Theta} + (1-v)^{\Theta} - (1-u)^{\Theta}(1-v)^{\Theta}\right)^{\frac{1}{\Theta}}. \tag{21}$$

A sűrűségfüggvény az alábbi módon írható fel:

$$\begin{aligned} c_{Joe}(u,v) = (1-u)^{\Theta-1}(1-v)^{\Theta-1}\left(\Theta - \left((1-u)^{\Theta}-1\right)\left((1-v)^{\Theta}-1\right)\right) \\ \left(-(1-u)^{\Theta}(1-v)^{\Theta} + (1-u)^{\Theta} + (1-v)^{\Theta}\right)^{\frac{1}{\Theta}-2}. \end{aligned} \tag{22}$$

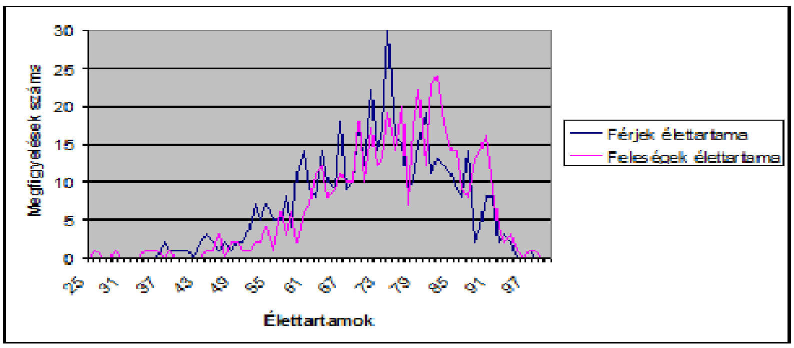
Azért éppen ezeket a kopulákat választottam, mert a sűrűségfüggvényeit ezeknek tudtam viszonylag könnyen meghatározni és beírni Excelbe, hiszen törekedtem a minél egyszerűbb módszereket alkalmazására az illesztésnél. Különböző programcsomagokkal többféle kopulát is ki lehetett volna próbálni, de arra törekedtem, hogy minden számítást magam végezzek el és ténylegesen nyomon lehessen követni az illesztés folyamatát. Szerencsére, mint később majd láthatjuk, így is találtam olyan kopulát, mely illeszkedett az adatokra, melyekkel dolgoztam.

# 3. Kopula illesztése

## 3.1. Az adatok

Az adatokat Tusnády Paula bocsátotta rendelkezésemre. Ez a saját gyűjtésű adatsor egy temető három különböző részéből származik. Olyan születési és halálozási évszámokat tartalmaz, melyek a sírfeliratok alapján házapárokhoz tartoznak. Összesen 528 adatnégyest kaptam (férj születési és halálozási dátuma és feleség születési és halálozási dátuma). Ebből 42 kiszűrhető, mert a házaspár egyik tagja még életben volt az adatgyűjtéskor. Továbbá találni irreleváns számokat (például 120 éves férfi), melyeket minden bizonnyal félregépeltek. Ezek is kivehetők az adatsorból. Végül 482 házaspár maradt az elemzéshez az adatok rendezése után.

A rendelkezésre álló mintával kapcsolatban több probléma is felmerült. Az egyik, hogy 482 megfigyelés kevés az elemzéshez. Sajnos bővebb adathalmazt csak nagy összegekért lehet vásárolni adatgyűjtő cégektől. Így az eredmények nem biztos, hogy valós képet festenek. A cél ezért főként a kopulaillesztés, majd az ebből nyert együttes eloszlásfüggvény segítségével történő két életre szóló szerződések díjkalkulációjának módszerének bemutatása volt. A másik probléma, hogy az adatokból nem lehet halandósági táblát készíteni, mert a születési évszámok közel száz évet felölelnek, száz év alatt pedig jócskán változhattak a halálozási valószínűségek. Hogy mégis lehet ezeket az adatokat használni, annak az az oka, hogy a kopulákkal a két változó függését lehet modellezni. Feltehető, hogy a férj és feleség élettartamának kapcsolata nem változott a vizsgált időszak alatt. Ha ez igaz, akkor az adatsor használható a kopula illesztésére. Most fogadjuk el igaznak ezt az állítást. Természetesen megfelelő adatokon ilyen kompromisszumok nélkül is használható az alább ismertetett módszer.




1. ábra. Megfigyelt darabszámok

A következő lépés az élettartamok meghatározása volt. Így már nem számított, hogy valaki melyik évben született, csak a megélt évek száma. A legfiatalabban meghalt feleség 26, míg a legfiatalabban elhunyt férj 37 éves volt. A leghosszabb élettartam a nők részéről 97, a férfiak részéről 98 évnek bizonyult a mintában. Akadt olyan házaspár, akiknél az özvegység fél évszázadig is eltartott. A minta felében viszont ez az időszak maximum 10 év volt. 67 párnál 2 évnél rövidebb idő telt el a két halálozás között.

Arról nincs információnk, hogy a házaspárok melyik évben házasodtak össze. Akár ez is fontos lehet az élettartamok közötti kapcsolat feltérképezésében. Ez lehetne a házaspárok harmadik paramétere a két életkor után.

A cél az volt, hogy a megfigyelt mintára - ami felfogható egy együttes eloszlás kimeneteleinek - kopulát illesszünk a transzformáció után, mely az adatokat alkalmassá tette az illesztésre. Ezután a kopulából nyerhető egy immáron simított, együttes eloszlás (majd abból egy kétdimenziós halandósági tábla), melyből bármely életkor-kombinációra díjat lehet kalkulálni.

## 3.2. Előkészületek

A kis mintaelemszám miatt szükségesnek láttam, hogy korcsoportokat képezzek és ne évenként vegyem figyelembe az élettartamokat, mert így túl kevés megfigyelés tartozott egy-egy értékhez. Többféle felosztással próbálkoztam, azonban a legmegfelelőbbnek a következő felosztást találtam: 10 csoportba osztottam az élettartamokat az alábbi táblázat szerint:

| Kor | Korcsoport neve | Férfiak száma | Nők száma |
|---|---|---|---|
| 0-50 | 45 | 21 | 16 |
| 51-55 | 55 | 28 | 10 |
| 56-60 | 60 | 42 | 23 |
| 61-65 | 65 | 50 | 47 |
| 66-70 | 70 | 66 | 59 |
| 71-75 | 75 | 99 | 75 |
| 76-80 | 80 | 68 | 78 |
| 81-85 | 85 | 56 | 93 |
| 86-90 | 90 | 36 | 60 |
| 90-100 | 95 | 16 | 21 |

1. táblázat. A csoportok

Így már elfogadhatóan sok megfigyelés tartozik az egyes értékekhez, de azért nem lesz túlságosan durva a felosztás. Most tehát egy diszkrét együttes eloszlásból származó minta állt rendelkezésemre.

| nők\férfiak | 45 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | Összesen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 5 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 16 |
| 55 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | | | 1 | 1 | 1 | 10 |
| 60 | 1 | 2 | 4 | 1 | 4 | 5 | 2 | 1 | 1 | 2 | 23 |
| 65 | | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 6 | 5 | 3 | 2 | 47 |
| 70 | 2 | 2 | 5 | 7 | 10 | 15 | 8 | 6 | 3 | 1 | 59 |
| 75 | 2 | 3 | 3 | 9 | 13 | 18 | 14 | 8 | 3 | 2 | 75 |
| 80 | 7 | 6 | 6 | 8 | 7 | 16 | 11 | 8 | 6 | 3 | 78 |
| 85 | | 4 | 9 | 6 | 10 | 21 | 13 | 16 | 12 | 2 | 93 |
| 90 | 1 | 4 | 5 | 9 | 8 | 10 | 9 | 6 | 6 | 2 | 60 |
| 95 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 | 4 | 1 | 1 | 21 |
| Összesen | 21 | 28 | 42 | 50 | 66 | 99 | 68 | 56 | 36 | 16 | 482 |

2. táblázat. Adatok eloszlása

A kopulaillesztéshez mindkét adatsor [0,1]-be transzformálására szükség volt, mert a kétdimenziós kopula a $[0,1]^2$-en van értelmezve, hiszen a függvény argumentumai valószínűségek. A peremeloszlás-függvények becslésére az [1] többek között a következő módszert ajánlotta: megfigyelt értékeinket rendezzük nagyság szerinti sorrendbe. Ha $n$ darab különböző felvett érték szerepel a mintában, akkor a legkisebbhez rendeljük az $\frac{1}{n+1}$-et, a második legkisebbhez a $\frac{2}{n+1}$-et és így tovább egészen a legnagyobb értékig, melyhez az $\frac{n}{n+1}$ tartozik. Így tulajdonképpen egy egyenletes eloszlással becsüljük a peremeloszlásokat. Ennél a becslésnél csak a megfigyelt értékek rangsorát vesszük figyelembe.

Elsőre ezzel a megoldással próbálkoztam. Azonban ez olyannyira nem illeszkedett a megfigyelt értékek eloszlásához, hogy a kopula illeszkedését is elrontotta. Ezért más súlyokat kellett az értékekhez rendelni. A legkézenfekvőbbnek az a súlyozás tűnt, amikor a bekövetkezett relatív gyakoriságokat használjuk fel. Ezért minden csoporthoz a $\frac{\text{korcsoport létszáma}}{482}$ számot kellett rendelni. Mivel az eloszlásfüggvény kumulált valószínűségekkel dolgozik, ezért a relatív gyakoriságokból számolt kumulált valószínűségekre volt szükség, melyek az alábbiaknak adódtak:

| korcsoport | férfiak | nők |
|---|---|---|
| 45 | 4,36% | 3,32% |
| 55 | 10,17% | 5,39% |
| 60 | 18,88% | 10,17% |
| 65 | 29,25% | 19,92% |
| 70 | 42,95% | 32,16% |
| 75 | 63,49% | 47,72% |
| 80 | 77,59% | 63,90% |
| 85 | 89,21% | 83,20% |
| 90 | 96,68% | 95,64% |
| 95 | 100,00% | 100,00% |

3. táblázat. Kumulált valószínűségek

Ezekre a transzformált értékekre illeszthetők a következő alfejezetben bemutatott kopulák. A továbbiak egyszerűbb leírásához célszerű jelöléseket bevezetni. Jelöljük az $(x_i, y_i)$-vel az $i$. házaspár élettartamához az 1. táblázat szerint hozzárendelt csoportok neveit úgy, hogy $x_i$ jelentse a férjhez tartozó csoport nevét, $y_i$ a feleséghez tartozót. A $u_i$ legyen az $x_i$-hez tartozó csoporthoz hozzárendelt becsült kumulált valószínűség, $v_i$ pedig az $y_i$-hez kapcsolódóé.

## 3.3. Kopula illesztése az előkészített adatokra

Az illesztéshez nem használtam speciális programot. Helyette a Microsoft Office 2003 Excel programjával oldottam meg a számolásokat, azaz "kézzel" illesztettem a kopulát, ennek jósága is ugyanígy begépelt képletekkel, ismert statisztikai összefüggések alapján ellenőrizhető.

Az illesztés mind a négy kopula esetében a $\Theta$ paraméter becslését jelentette. Ez maximum likelihood becsléssel végezhető. Ehhez a kopulák sűrűségfüggvényeire volt szükség volt, melyek feljebb már ismertetésre kerültek. A loglikelihoodfüggvény felírásához a sűrűségfüggvények logaritmusát kellett kiszámolni, majd ebbe kellett páronként behelyettesíteni az értékpárokat, amikre illeszteni akarjuk a kopulát, végül összegezni a kapott eredményeket. Ennek a szummának a maximumát meg lehet határozni Solver segítségével Excelben. Képletekben összefoglalva:

$$l = \sum_{i=1}^{482} \ln c(u_i, v_i) \longrightarrow \max \tag{23}$$

Nézzük meg részletesen a Clayton kopula illesztését. Párokba rendezve megvannak az $(u_i, v_i)$ értékek. A kopula sűrűségfüggvényét deriválással kell meghatározni:

$$c_{Cl}(u,v) = (\Theta+1)(u^{-\Theta}+v^{-\Theta}-1)^{-\frac{1}{\Theta}-2}u^{-\Theta-1}v^{-\Theta-1}. \tag{24}$$

A loglikelihoodhoz vesszük a $c(u,v)$ logaritmusát:

$$\ln c_{Cl}(u,v) = \ln(\Theta+1) - \left(\frac{1}{\Theta}+2\right)\ln\left(u^{-\Theta}+v^{-\Theta}-1\right) - (\Theta+1)\ln(u\cdot v). \tag{25}$$

Ezt az értéket minden egyes párra ki kellett számolni, ami Excelben nagyon könynyen megoldható. Majd a loglikelihoodhoz össze kell adni ezeket a logaritmusokat mind a 482 számpárra. Ezek a kiszámolt értékek a $\Theta$ paramétertől függnek. A $\Theta$-t érdemes egy külön cellába írni és erre a cellára hivatkozni minden sűrűségfüggvényben. A kezdéshez adni kellett egy értéket a $\Theta$-nak a megengedett tartományból, ahonnan elindulhatott a maximumkeresés. A maximumot a Solver keresi meg iteráció segítségével. A loglikelihoodot kell beállítani maximalizálandónak, a $\Theta$ paraméter pedig a módosuló cella. Feltételt is kellett adni, hiszen a $\Theta$-t csak a pozitív számokon értelmezzük a Clayton kopulánál. A Solvert több helyről is elindítottam, de mindig ugyanazt a $\Theta = 0{,}37$ eredményt kaptam, a loglikelihoodra pedig 14,19-et. Így már fel lehetett írni a kopula eloszlásfüggvényét:

$$C_{Cl}(u,v) = (u^{-0{,}37}+v^{-0{,}37}-1)^{-\frac{1}{0{,}37}}. \tag{26}$$

A következő lépés az illeszkedésvizsgálat volt. $\chi^2$-próbával tesztelhető, hogy illeszkedik-e a becsült paraméterrel megadott kopula az $(x_i, y_i)$ adatsor eloszlására. Ezen $(x_i, y_i)$ adatok eloszlását a 2. táblázat mutatja. A kopula alapján készíthető egy ugyanilyen felépítésű táblázat. Ehhez mindössze a korcsoportokhoz tartozó kumulált valószínűségeket kellett a kopulába helyettesíteni a 3. táblából. Ekkor egy olyan táblázatot kapunk, amiben szintén kumulált eloszlásfüggvény-értékek szerepelnek. Mivel a megfigyelt adatokból készített kimutatás nem kumulált adatokat tartalmazott, ezért további átalakításokra volt szükség. Így a készített kumulált táblázat minden egyes cellájára ki kell vonni a felette lévő és tőle balra eső cellában található értéket és hozzáadni a tőle átlósan balra felfele lévő értéket. Ezzel a $P$(x=i.csoport,y=j.csoport) értéket kapjuk a táblázat $(i,j)$-edik mezőjében. Ez az alábbi kétdimenziós diszkrét eloszlásfüggvényekre vonatkozó összefüggésen alapul, ha $x_1 < x_2$ és $y_1 < y_2$:

$$P(X \in (x_1, x_2], Y \in (y_1, y_2]) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \quad (27)$$

A kapott táblázat minden elemét meg kellett még szorozni 482-vel, hogy a várt darabszámokat megkapjuk. Ezek a Clayton kopula esetében a következők voltak:

| **nők\férfiak** | **45** | **55** | **60** | **65** | **70** | **75** | **80** | **85** | **90** | **95** | Összesen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **45** | 4,38 | 2,41 | 2,17 | 1,72 | 1,60 | 1,70 | 0,89 | 0,62 | 0,36 | 0,15 | 16 |
| **55** | 1,46 | 1,31 | 1,41 | 1,25 | 1,27 | 1,44 | 0,80 | 0,57 | 0,34 | 0,14 | 10 |
| **60** | 2,40 | 2,58 | 3,06 | 2,92 | 3,14 | 3,77 | 2,17 | 1,60 | 0,95 | 0,41 | 23 |
| **65** | 3,16 | 4,15 | 5,55 | 5,82 | 6,75 | 8,73 | 5,30 | 4,03 | 2,46 | 1,06 | 47 |
| **70** | 2,60 | 4,03 | 6,01 | 6,87 | 8,57 | 11,91 | 7,64 | 6,00 | 3,74 | 1,63 | 59 |
| **75** | 2,33 | 4,06 | 6,59 | 8,09 | 10,73 | 15,90 | 10,70 | 8,67 | 5,50 | 2,43 | 75 |
| **80** | 1,81 | 3,45 | 5,98 | 7,78 | 10,86 | 16,99 | 11,94 | 9,93 | 6,41 | 2,86 | 78 |
| **85** | 1,68 | 3,43 | 6,30 | 8,59 | 12,53 | 20,55 | 15,00 | 12,77 | 8,39 | 3,77 | 93 |
| **90** | 0,90 | 1,93 | 3,69 | 5,21 | 7,85 | 13,33 | 10,02 | 8,69 | 5,77 | 2,61 | 60 |
| **95** | 0,29 | 0,63 | 1,23 | 1,77 | 2,71 | 4,67 | 3,56 | 3,11 | 2,08 | 0,94 | 21 |
| Összesen | 21 | 28 | 42 | 50 | 66 | 99 | 68 | 56 | 36 | 16 | 482 |

4. táblázat. Várt darabszámok (Clayton)

Jól látszik a táblázatból, hogy a peremeloszlások tökéletesen illeszkednek a megfigyelt értékekre, hiszen így konstruáltuk a kopulát.

A $\chi^2$ próbához érdemes jelölést bevezetni. Jelölje $N_{i,j}$ a tapasztalt darabszámokat, ha a férfiak az $i$. csoportba esnek, a nők a $j$-edikbe. Hasonlóan jelölhetőek a várt darabszámok $n_{i,j}$-vel. A $\chi^2$ statisztikát az alábbi összeg adja:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \frac{(N_{i,j} - n_{i,j})^2}{n_{i,j}}. \quad (28)$$

A statisztika értékére 71,68 adódott.

Az eloszlás kritikus értékének meghatározásához először meg kell mondanunk a próba szabadságfokát. Ez a (kategóriák száma)-(becsült paraméterek száma)-1. Esetünkben a becsült paraméternek a $\Theta$ és a csoportok darabszáma-2 tekinthető, hiszen ez is egy becslés volt, ahogyan a csoportokat választottam, de mindkét nemnél az utolsó csoportokhoz determinisztikusan az 1 valószínűséget rendeltük, nem becslésen alapult a súly nagysága. Így a szabadságfok

$$100 - (18 + 1) - 1 = 80. \tag{29}$$

A 80 szabadságfokú $\chi^2$ eloszlás 95% -os kvantilise 101,88. Tehát 95%-os megbízhatósági szinten 101,88 a kritikus érték. Mivel a kapott 71,68-as érték kisebb a kritikus értéknél, ezért a becsült Clayton kopula illeszkedik a megfigyelt adatokhoz 5%-os szignifikanciaszinten.

Az illeszkedésvizsgálattal kapcsolatban az a probléma merült fel, hogy a várt darabszámok a táblázat több cellájában sem érték el az ajánlatos 5-öt. Ezt úgy lehet kezelni, ha egyes cellákat egyesítünk úgy, hogy minden cella csak egy egyesítésben szerepelhessen és az egyesített cellákban lévő várt darabszám már elérje az ötöt. Ekkor a megfigyelt adatok táblázatát át kell alakítani, a várt darabszámoknál egyesített celláknak megfelelő cellákat ott is össze kell vonni. Majd ebből lehet újra számolni a $\chi^2$ statisztikát.

Az összevonások után az előbbinél jóval kisebb értéket kaptam a statisztikára: 27,26. A cellák összevonásával természetesen az eloszlás szabadságfoka is megváltozott. 14 összevont cella keletkezett 62 cellából. 38 cellában pedig ötnél nagyobb érték volt, ezeknél nem volt szükség összevonásra. Így a szabadságfok: 38+14-19-1=32. Egy ilyen szabadságfokú $\chi^2$-eloszlás kritikus értéke 5%-os szignifikanciaszinten 46,19. Tehát a próba alapján illeszkedik a kopula.

Elmondható, hogy van egy Clayton kopula, melyet maximum likelihood becsléssel nyertünk és illeszkedik az adatokra, így modellezi a férj és a feleség élettartama közti kapcsolatot. Ezzel a kopulával már létre lehet hozni egy halandósági táblát és abból majd díjat tudok kalkulálni különféle több életre szóló életbiztosítási szerződésekre.

Ugyanezt az eljárást kell elvégezni a többi kopulával is. A loglikelihoodok az alábbiaknak adódtak:

1. Frank kopula

$$l = \sum_{i=1}^{482} \left[\ln\Theta + \ln\left(1 - e^{-\Theta}\right) - \Theta(u_i + v_i) - 2\ln\left(\left(1 - e^{-\Theta}\right) - \left(1 - e^{-\Theta u_i}\right)\left(1 - e^{-\Theta v_i}\right)\right)\right] \tag{30}$$

2. Ali-Mikhail-Haq kopula

$$l = \sum_{i=1}^{482} [\ln\left(\Theta^2(-u_i v_i + u_i + v_i - 1) - \Theta(u_i v_i + u_i + v_i - 2) - 1\right) \\ -3\ln\left(\Theta(u_i - 1)(v_i - 1) - 1\right)] \tag{31}$$

3. Joe kopula

$$l = \sum_{i=1}^{482} [(\Theta - 1)\ln(1 - u_i) + (\Theta - 1)\ln(1 - v_i) + \ln\left(\Theta - \left(1 - u_i\right)^{\Theta} - 1\right)\left((1 - v_i)^{\Theta} - 1\right)\right) \\ + \left(\frac{1}{\Theta} - 2\right)\ln\left(-(1 - u_i)^{\Theta}(1 - v_i)^{\Theta} + (1 - u_i)^{\Theta} + (1 - v_i)^{\Theta}\right)]$$

A Solver beállításánál minden kopulafajtára más feltételt kell beállítani annak megfelelően, hogy a $\Theta$-ra milyen feltételek adottak az eloszlásfüggvény felírásánál. Sajnos a Frank és a Joe kopula esetében a Solver a feltételben megadott tartomány egyik határához konvergált, bármilyen kezdőértékekkel is indult az iteráció. Az ilyen eredményt nem lehet jó megoldásnak tekinteni.

Viszont az Ali-Mikhail-Haq kopula esetében a maximum likelihood becslés első látásra jó $\Theta$-t hozott. A Solver $\Theta = 0{,}53$-as eredményre jutott több megengedett kezdőpontból is újraindítva. A loglikelihood értéke pedig 9.91-nek adódott. Tehát a becsült kopula:

$$C_{AMH}(u, v) = \frac{uv}{1 - 0{,}53(1 - u)(1 - v)} \tag{32}$$

Természetesen az adatokra való illeszkedést ennél a kopulánál is meg kellett vizsgálni. A tesztstisztika értéke 73,87 lett, ha nem foglalkoztam azzal, hogy egyes cellákba kevesebb, mint 5 várható darab jutott. Ez alatta van a már meghatározott 80 szabadságfokú 5%-os szignifikanciaszint melletti értéknek. Az AMH kopula $\chi^2$-tesztjét is el kell végezni cellaegyesítések után. 37 cellába esett 5-nél nagyobb várt darabszám. A maradék 63 cellát megfelelően összevonva 15 cellát kapunk. A szabadságfok: 37+15-19-1=32. Már szerepelt, hogy a 32 szabadságfokú $\chi^2$-eloszlás kritikus értéke 5%-os szignifikanciaszinten 46,19. A tesztstatisztika értéke most: 31,73. Tehát ez a kopula is illeszkedik.

| nők\férfiak | 45 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | Összesen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **45** | 1,37 | 1,65 | 2,16 | 2,17 | 2,37 | 2,78 | 1,53 | 1,08 | 0,63 | 0,26 | 16 |
| **55** | 0,81 | 0,99 | 1,31 | 1,34 | 1,48 | 1,78 | 0,99 | 0,71 | 0,41 | 0,17 | 10 |
| **60** | 1,75 | 2,16 | 2,91 | 3,03 | 3,42 | 4,19 | 2,38 | 1,72 | 1,01 | 0,42 | 23 |
| **65** | 3,13 | 3,95 | 5,51 | 5,96 | 6,99 | 8,95 | 5,28 | 3,91 | 2,33 | 0,98 | 47 |
| **70** | 3,25 | 4,25 | 6,17 | 7,01 | 8,67 | 11,81 | 7,34 | 5,61 | 3,42 | 1,45 | 59 |
| **75** | 3,34 | 4,51 | 6,84 | 8,18 | 10,70 | 15,60 | 10,29 | 8,18 | 5,11 | 2,20 | 75 |
| **80** | 2,79 | 3,88 | 6,14 | 7,70 | 10,64 | 16,62 | 11,65 | 9,64 | 6,20 | 2,71 | 78 |
| **85** | 2,67 | 3,82 | 6,26 | 8,21 | 11,96 | 19,97 | 14,89 | 12,86 | 8,52 | 3,79 | 93 |
| **90** | 1,44 | 2,10 | 3,54 | 4,80 | 7,28 | 12,83 | 10,06 | 9,01 | 6,12 | 2,76 | 60 |
| **95** | 0,45 | 0,67 | 1,15 | 1,58 | 2,44 | 4,42 | 3,55 | 3,24 | 2,23 | 1,01 | 21 |
| Összesen | 21 | 28 | 42 | 50 | 66 | 99 | 68 | 56 | 36 | 16 | 482 |

5. táblázat. Várt darabszámok (AMH)

Összefoglalva az eredményeket: két kopulánál sikerült jól megbecsülni a $\Theta$-t maximum likelihood becsléssel, a Clayton és az Ali-Mikhail-Haq kopulánál. A Clayton kopula illesztésénél 14,19-es maximumot tudtunk elérni a loglikelihood maximalizálása során. Az AMH esetében ez 9,91 volt. Ahhoz, hogy össze lehessen őket hasonlítani, az illeszkedésvizsgálatnál ugyanazon a cellák összevonására volt szükség a két kopulánál. Így készíthető egy olyan cellaegyesítés-konstrukciót, melynél mindkét kopulánál teljesült az, hogy minden cellában legalább 5 legyen a várt darabszám. Ilyen módon 37 cella volt, melyeket eredeti állapotukba lehetett hagyni, 63-at pedig össze kellett vonni 15 cellává. A szabadságfok a szokott módon számolható. A kategóriák száma 37+15 volt. A becsült paraméterek száma továbbra is 19. Ezért a szabadságfok: 37+15-19-1=32. A kritikus érték 5%-os szignifikanciaszinten 46,19. A Clayton kopula tesztstatisztikája 30,85 , az AMH kopuláé 31,69 volt. A különbség nem számottevő, de mivel a Clayton kopula illeszkedik jobban, ezért ezt érdemes választani a további számolások alapjául.

# 4. Díjkalkuláció

## 4.1. Halandósági tábla konstruálása

Az előző fejezetben találtunk egy kopulát, mely illeszkedett az adatokra. Így sikerült modellezni a férj és a feleség élettartama közti kapcsolatot és nyertünk egy együttes eloszlást. Ezt szeretnénk felhasználni arra, hogy egy kétdimenziós halandósági táblát létrehozzunk. Mivel azt feltételeztük, hogy a férj és feleség élettartamának kapcsolata az általunk vizsgált időszakban és attól kezdve napjainkig nem változott, ezért a kopula melyet a megfigyelt régebbi adatokból becsültünk ugyanazt a kapcsolatot modellezi, mint amit ma is tapasztalnánk. Ezzel ellentétben a peremeloszlások biztosan megváltoztak. Erről az évek során készült halandósági táblák alapján könynyen meggyőződhetünk. Ezért a becsült Clayton kopulába nem a felhasznált adatok peremeloszlásait fogjuk helyettesíteni, hanem - a kopula skálafüggetlen tulajdonságát kihasználva - egy friss halandóság táblából nyert eloszlásokat. Ezáltal a peremeloszlások és azok kapcsolata is a mai állapotot fogják mutatni.

A 2009-es halandósági táblát használtam, az induló populációt 100.000 főnek választottam. A kihalási rend $l_x$-eiből számolhatók ki a $d_x$-ek. Az $l_x$ jelöli az $x$. életévőket betöltők számát, a $d_x$ azokét, akik az $x$. születésnapjukat megérik, de az $x+1$-ediket már nem. Tehát az összefüggés a két változó között: $l_x - d_x = l_{x+1}$. A $d_x$-ek segítségével kiszámolhatjuk a kumulált halálozási valószínűségeket, mind a férfiakra, mind a nőkre:

$$q_x^{\text{kumulált}} = \frac{\sum_{i=0}^{x} d_i}{100.000}, \quad \text{ahol } l_0 = 100.000 \text{ a kezdő állomány.} \tag{33}$$

Jelölje az előző fejezetnek megfelelően $u(x)$ az $x$ éves férfiakhoz tartozó kumulált halálozási valószínűséget, $v(y)$ pedig az $y$ éves nőkhöz tartozót. Ezeket helyettesítjük be páronként a kopulába, hogy minden életkor-kombináció szerepeljen. Egy táblázatban kényelmesen tudjuk tárolni a kiszámolt együttes eloszlás értékeit. Most is kumulált eloszlásokat kapunk, amikor a kopulába helyettesítünk. De nem erre van szükségünk. Ezért a már ismertett módon kiszámoljuk minden $(x, y)$ életkorra a $P$(férj x évet él, feleség y évet él) valószínűséget a 27. összefüggés alapján. Ez a táblázat az a kétdimenziós halandósági tábla, mely egy házaspár együttes halálozási valószínűségeit tartalmazza. Az elemeit jelöljük $q_{x,y}$-nal.

A díjkalkulációhoz kényelmesebb kihalási rendet használni. Ennek kiszámolásához először a megfelelő $d_{x,y}$-okkal érdemes feltölteni egy táblázatot. A kiinduló állományt 100.000 (0,0) éves házaspárnak választottam. Ez nyilvánvalóan technikai feltevés. A kapott tábla segítségével egy tetszőleges korban megházasodott házaspár túlélési és halálozási valószínűségei kiszámíthatóak. A $d_{x,y}$ kifejezés tehát olyan házaspárok számát adja meg, ahol a férj $x$ évesen, a feleség $y$ évesen hal meg. Ezt a következőképpen számoljuk:

$$d_{x,y} = 100.000 \cdot q_{x,y}, \tag{34}$$

ahol $q_{x,y}$ a nem kumulált halálozási valószínűség egy $x$ éves férj és egy $y$ éves feleség esetén. Ebből az élők számát úgy számolhatjuk az $(x, y)$ éves korokra, hogy kivonjuk az addig meghaltak számát. Azok közé, akik még $(x, y)$ évesen élnek már azok sem tartoznak, ahol a pár férfi tagja ugyan megérte az $x$ életkort, de a feleség már nem érte meg az $y$ évet és fordítva. Először írjuk fel az $l_{x,y}$-t a peremeloszlás-függvények és az együttes eloszlásfüggvény segítségével:

$$l_{x,y} = 100.000 \cdot (1 - F_X(x-1) - F_Y(y-1) + F(x-1, y-1), \tag{35}$$

ahol $F_X$ jelöli a férfiak halálozási valószínűségét leíró peremeloszlás-függvényt, $F_Y$ a nőkét és $F$ az együttes eloszlásfüggvény. Valószínűségekkel megfogalmazva:

$$l_{x,y} = 100.000 \cdot (1 - P(X \leq x-1) - P(Y \leq y-1) + P(X \leq x-1, Y \leq y-1). \tag{36}$$

Ez az összefüggés hasonló gondolatmeneten alapul, mint a 27. egyenlet. Ahhoz, hogy megkapjuk azok számát, akik még $x, y$ évesen mindketten élni fognak, ki kell vonnunk azon házaspárok számát, akiknél a férfiak maximum az $x - 1$. születésnapjukat érik meg, majd azon párok számát, akiknél a nők legfeljebb az $y - 1$. életévüket érték meg. Ám ebben az esetben azok számát kétszer vontuk le, ahol a férfiak is kevesebbet éltek $x$ évnél és a nők is kevesebbet éltek $y$ évnél. Ezért ezt a mennyiséget még hozzá kell adnunk az eddigiekhez.

**4.1. Megjegyzés.** Az $l_{x,0}$ mennyiség valójában az $l_x$, mert az együttes eloszlás peremeloszlásai maguk a férfi és női halálozási valószínűségek. Az $l_{0,y}$ ennek megfelelően egyenlő $l_y$-nal.

Elkészült a kihalási rend, mely segítségével a díjat fogjuk kalkulálni. Azért, hogy eredmények összehasonlíthatóak legyenek egy független halandósági táblából számolt díjjal, létre kell hozni egy a függetlenségi kopulából készült halandósági táblát és a kihalási rendet is. A függetlenségi kopula a valószínűségi változókat függetlennek feltételezi, ezért egy $q_x$, $q_y$ halálozási valószínűségi pár esetén az együttes valószínűség a két valószínűség szorzata.

Összehasonlítottam a két kihalási rendet. Azt tapasztaltam, hogy a függetlenségi kopula jócskán felülbecsüli a halálozási valószínűségeket. Minden életkorra legalább akkora $l_{x,y}$-okat kaptam a Clayton kopulánál, mint a függetlenségi kopulánál. A legnagyobb eltérés a (67,77) életkor kombinációhoz tartozott. Ez az eltérés 4261 párnak adódott. Átlagos eltérésnek 671 párt számoltam.

## 4.2. Két életre szóló egyszeri díjas életbiztosítások és díjkalkulációjuk

Ebben a fejezetben a [2]-ben található több életre szóló szerződések kalkulálásába bevezető képleteket gondoltam tovább. A kalkuláláshoz szükséges adatok rendelkezésünkre állnak. Lássuk, hogy milyen fajta két életre szóló életbiztosítási szerződéseket kalkulálhatunk. Az egy életre szóló szerződések minden változatát át tudjuk fogalmazni több életre szólóra. Kezdjük az egyik legalapvetőbbel, a kockázati életbiztosítással.

#### Kockázati életbiztosítás

Ez egy olyan biztosításfajta, ahol a biztosító arra vállal kötelezettséget díj ellenében, hogy ha a tartam alatt a biztosított elhalálozik, akkor a kedvezményezettnek a szerződésben megjelölt biztosítási összeget kifizeti. Két életre szóló szerződésnél felmerül a kérdés, hogy mit tekintünk halálesetnek. Többféle lehetőség is adódik:

- A pár mindkét tagja meghal
- A férj meghal, és a feleség nem
- A feleség meghal, és a férj nem
- Vagy a férj vagy a feleség meghal (de csak az egyikük)

– Valamelyikük vagy mindkettőjük meghal.

Mindegyik variációhoz más és más halálozási valószínűség tartozik. A biztosítási szerződésben határozzuk meg, hogy melyik változatot tekintjük halálesetnek és annak megfelelően kalkuláljuk a díjat.

A kockázati biztosításnál a legegyszerűbb eset az, ha biztosító akkor fizet,ha a biztosítottak bármelyike meghal, tehát csak az első halálra fizet a biztosító. Ilyen esetben a kedvezményezettek lehetnek maguk a biztosítottak, így a pár egyik tagja halálakor az életben maradt tag kapja a biztosítási összeget. Egy ilyen kockázati szerződésnél egy $(x, y)$ belépési korú házaspárnál a biztosítás $i$. évében azoknak kell kifizetnünk a biztosítási összeget, akik az $i-1$. évben még mindketten éltek, de az $i$. évben már valamelyikük nem élt. Ez a kihalási rend segítségével kifejezve: $l_{x+i-1,y+i-1} - l_{x+i,y+i}$. Az ekvivalencia-elv a két életre szóló szerződéseknél ugyanúgy érvényben van, mint az egy életre szóló szerződések esetén. Az egyszeri díj kalkulásához szükségünk van még egy $i_{\text{tech}}$ technikai kamatlábra, melyből a $v$ diszkontráta az ismert módon számolható:

$$v = \frac{1}{1 + i_{\text{tech}}}. \tag{37}$$

Jelöljük $A^1_{x,y:n}$-nel azt az egyszeri nettó díjat, melyet egy 1 Ft-ra szóló kockázati biztosításért fizet egy $(x, y)$ belépési korú házaspár, ha a szerződés tartama $n$ év. Feltételezzük, hogy a haláleseti kifizetések mindig év végén történnek attól függetlenül, hogy az esetleges haláleset az év melyik szakában következik be. Az ekvivalencia-elv alapján a bevételek és a kiadások diszkontált várható értéke megegyezik és a következő módon néz ki:

$$l_{x,y} A^1_{x,y:n} = \sum_{i=1}^{n} \left[ \left( l_{x+i-1,y+i-1} - l_{x+i,y+i} \right) v^i \right], \tag{38}$$

így egy $SA$ biztosítási összegre a díj:

$$A^1_{x,y:n} = SA \frac{\left[ \sum_{i=1}^{n} \left( l_{x+i-1,y+i-1} - l_{x+i,y+i} \right) v^i \right]}{l_{x,y}}. \tag{39}$$

Kiszámoltam ezt a díjat egy 5 éves szerződésre minden életkombinációra a Clayton kopulával kapott kihalási rendből. Természetesen vannak egymással nem kompatibilis életkorok (túlságosan nagy korkülönbség miatt), ill. valószínűsíthető, hogy ilyen szerződést legalább 18 éves emberek kötnek. A dolgozatban a technikai kamatlábat a mai szabályozás szerinti legmagasabbnak, 2,9%-nak tekintettem.

1.000.000 Ft biztosítási összegre kalkuláltam a díjakat. Ugyanezt elvégeztem a függetlenségi kopulával. A Clayton kopulából számított díjakkal összevetve a független élettartamok feltételezésével túl drágán áruljuk a biztosítást. A legnagyobb díjbeli eltérést a (76,70) belépési korú házaspárra kaptam, több, mint 25.000 Ft-tal volt drágább a függetlenségi kopulából számolt díj. Bár valójában egy ilyen biztosítás megkötése nem reális. A kockázati biztosítások általában olcsó biztosítások, mert kicsi halálozási valószínűségekkel kalkuláljuk őket, hiszen a célcsoportja inkább a fiatalabb réteg. Az átlagos eltérés a kétféle díjszámítás között 3793 Ft volt. Az arányokat nézve pedig átlagosan 4%-kal drágább a függetlenségi kopulából számolt biztosítás a Clayton kopulás változatnál. Egy lehetséges (40,35) belépési korú házaspár esetén egy 5 éves tartamú 1.000.000 Ft-ra szóló egyszeri kockázati nettó díj függetlenség esetén 17.474 Ft, Clayton kopula esetén 15.551 Ft. Tehát az összefüggőség figyelembevételével 1923 Ft különbség van, ami a díjnak több, mint 10%-a!

Természetesen most csak a nettó díjról van szó, a bruttó díj kialakításához még hozzá kell számolnunk a költségeinket, a profitot. A nettó díjnak azt kell tükröznie, hogy mekkora kockázatot vállal a biztosító. Ha biztosító alulbecsüli a díjat, akkor több kockázatot vállal, mint amennyiért az ügyfelek valójában fizetnek, és várhatóan veszteséges lesz ez a módozata. Ha túlbecsüli a díjat, akkor túlságosan drága lesz a biztosítás és lehetséges, hogy emiatt nem lesz sikere a piacon. Tehát mindkét tévedés negatívan hat a társaságra. Ezért törekedni kell arra, hogy a kockázatokat minél jobban fel tudjuk mérni.

A kockázati biztosításnak lehetséges olyan verziója is, mely a férj és a feleség halálára különböző biztosítási összeget fizet. Ez olyan esetekben lehet hasznos, ha a házaspár egyik tagja a fő családfenntartó, így halála esetén a család fő bevételi forrása megszűnik. Ilyenkor érdemes erre a főre nagyobb biztosítási összeget megjelölni.

Egy ilyen kockázati biztosítás tulajdonképpen három külön biztosításból tevődik össze. Az egyik akkor fizet, ha a férj meghal és a feleség tovább él (abban az évben), a második pedig akkor, ha a feleség hal meg és a férj marad életben (arra az évre). A harmadik abban a szerencsétlen esetben fizet, ha mindketten meghalnak egy biztosítási év során. E három biztosítás összege a feljebb leírt biztosítás, így a három egyszeri nettó díj összege megadja a három biztosítási összegre szóló két személyes kockázati biztosítás egyszeri nettó díját.

Tegyük fel, hogy a házaspár belépési kora $(x, y)$ év. Ekkor az $i$. évben azon párok száma, akiknél a férj még megérte az $x+i-1$. életévét, de az $x+i$-ediket már nem, és a feleség pedig megérte az $y+i$. születésnapját:

$$l_{x+i-1,y+i} - l_{x+i,y+i}, \tag{40}$$

hiszen azok számából, akiknél a feleség megérte az $y+i$. életévét és a férj pedig az $x+i-1$-ediket, azokat vonjuk ki, akik a biztosítás kezdetétől számítva még mindketten élnek az $i$. évben. Így pontosan a kérdezett párok számát kapjuk. Jelölje a férj halálára 1 Ft biztosítási összeget fizető kockázati biztosítás díját $A^{1(\text{férj})}_{x,y:n}$. Felírva az ekvivalenciaegyenletet azt kapjuk, hogy:

$$l_{x,y} A^{1(\text{férj})}_{x,y:n} = \sum_{i=1}^{n} \left(l_{x+i-1,y+i} - l_{x+i,y+i}\right) v^i. \tag{41}$$

$SA_x$ biztosítási összegre az egyszeri nettó díj:

$$A^{1(\text{férj})}_{x,y:n} = SA_x \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(l_{x+i-1,y+i} - l_{x+i,y+i}\right) v^i}{l_{x,y}}. \tag{42}$$

A feleségre analóg módon kapjuk az $SA_y$ biztosítási összeget fizető $n$ év tartamú biztosítása egyszeri nettó díját:

$$A^{1(\text{feleség})}_{x,y:n} = SA_y \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(l_{x+i,y+i-1} - l_{x+i,y+i}\right) v^i}{l_{x,y}}. \tag{43}$$

A harmadik esetben azok számát kell megadnunk, akiknél a házaspár mindkét tagja meghal az $i$. évben. Itt megint felhasználható a 27. összefüggés logikája. Erre a biztosítási eseményre $SA_{xy}$ Ft szolgáltatást fizető biztosítás egyszeri nettó díja:

$$A^{1(\text{mindkettő})}_{x,y:n} = SA_{xy} \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(l_{x+i-1,y+i-1} - l_{x+i,y+i-1} - l_{x+i-1,y+i} + l_{x+i,y+i}\right) v^i}{l_{x,y}}. \tag{44}$$

Az a biztosítás, amely a férj és a feleség halála esetén egyaránt fizet, azonban különböző összeget a fenti három biztosítás összege. Ez a biztosítás is az első halálra fizet. Az $SA_{xy}$-t választhatjuk úgy is, hogy az $SA_x$ és az $SA_y$ összege legyen. Erre a biztosításra a következő egyszeri nettó díj kalkulálható:

$$A^{1}_{x,y:n}{}' = \frac{SA_x \sum_{i=1}^{n} \left(l_{x+i-1,y+i} - l_{x+i,y+i}\right) v^i}{l_{x,y}} + \frac{SA_y \sum_{i=1}^{n} \left(l_{x+i,y+i-1} - l_{x+i,y+i}\right) v^i}{l_{x,y}} + \frac{SA_{xy} \sum_{i=1}^{n} \left(l_{x+i-1,y+i-1} - l_{x+i,y+i-1} - l_{x+i-1,y+i} + l_{x+i,y+i}\right) v^i}{l_{x,y}}.$$

Ez a képlet felfogható a 39. összefüggés általánosításaként, hiszen speciálisan, ha a három biztosítási összeg megegyezik, akkor a legelőször ismertetett kockázati életbiztosítást kapjuk. Kiszámoltam $SA_x = 2.000.000$ Ft és $SA_y = 1.000.000$. Ft-ra az egyszeri nettó díjat ötéves tartamra ($SA_{xy}$-t most nullának választottam). A (40,35) éves belépési korokra 38.597 Ft adódott egyszeri nettó díjnak, ami 17.639-cel több, mint amikor a férj halála esetén is csak 1.000.000 Ft biztosítási összeg járt.

**Elérési életbiztosítás**

Az elérési biztosítás hasonlóan a kockázatihoz egy olyan alapvető biztosítás, mely más biztosítások építőeleme is. Ez egy élet esetén akkor fizet, ha a biztosított megéri a tartam végét. Több életre ugyancsak többféle elérést is definiálhatunk a kockázatihoz hasonlóan:

- Mindketten megérik a tartam végét
- Férj megéri a tartam végét, és a feleség nem
- Feleség megéri a tartam végét, és a férj nem
- Egyikük megéri a tartam végét, mindegy, hogy melyikük, de csak az egyikük
- Legalább egyikük megéri a tartam végét

A legegyszerűbb eset az, ha az összeg kifizetésének az a feltétele, hogy mindkét biztosított megérje a tartam végét. Jelöljük $A_{x,y:n}^{\;\;\;\;1}$-gyel egy $n$ év tartamú 1 Ft biztosítási összegű elérési biztosítás egyszeri nettó díját, ha a biztosítottak belépési kora $x$ és $y$ év. Ekkor az ekvivalencia-elv alapján felírt egyenlet a következő:

$$l_{x,y} A_{x,y:n}^{\;\;\;\;1} = l_{x+n,y+n} \cdot v^n, \tag{45}$$

ahol $v$ a diszkontráta. Azok száma, akik megveszik a biztosítást $l_{x,y}$, azoké akik megérik a tartam végét $l_{x+n,y+n}$. Nekik jár a biztosítási összeg. Tehát az egyszeri nettó díj a fenti biztosításra:

$$A_{x,y:n}^{\ \ 1} = SA \cdot \frac{l_{x+n,y+n} \cdot v^n}{l_{x,y}}. \tag{46}$$

A független és összefüggő élettartamok feltételezésével megint 2 díjkalkulációt készítettem 5 éves tartamú biztosítások díjára 1.000.000 Ft biztosítási összegre. Ahogyan az várható volt, a független élettartamokat feltételező kalkulációnál alacsonyabb díjak jöttek ki, mint a Clayton kopulából számoltaknál. A legnagyobb különbség 21.304 Ft volt a kétféle díjszámítás között, melyet a (78,72) belépési korú házaspárokra kaptam. Az átlagos eltérés 3.165 Ft volt. A Clayton kopulából kalkulált díj átlagosan mindössze 1%-kal volt nagyobb a független élettartamokból számolt nettó díjnál.

Itt is megnéztem (40,35) éves belépési korra a díjakat: függetlenségi kopula esetén 854.512 Ft, Clayton kopula esetén 855.864 Ft adódott. A különbség itt mindössze 1.352 Ft. Arányaiban, a díjhoz viszonyítva, nem olyan nagy, mint a kockázatinál.

Érdemes még kiszámolni a díjat olyan elérési biztosításra, melynél az elérés azt jelenti, hogy elegendő az is, ha a párból csak az egyikük éri meg a tartam végét. Ekkor akár más-más biztosítási összeget is megjelölhetünk azokra az esetekre, ha a férj marad életben a tartam végére, ha a feleség marad életben, vagy ha mindketten elérik a tartam végét. Jelöljük ezeket az összegeket rendre $SA_x, SA_y$ és $SA_{xy}$-nal.

Azon párok száma (egy 100.000 fős induló állomány esetén), akiknél csak a férj éri meg az $n$ éves tartam végét $(x, y)$ belépési kor mellett $l_{x+n,y} - l_{x+n,y+n}$. Tehát le kell vonnunk azon házaspárok számát, akiknél a feleség is megéri a tartam végét azokéból, akiknél a feleség legalább $y$ évet élt, a férj pedig biztosan megérte az $x+n$. születésnapját. A feleségre hasonló gondolatmenettel kapjuk az $l_{x,y+n} - l_{x+n,y+n}$ párt.

Egy ilyen típusú elérési biztosítás (3 biztosítási összeg van, $n$ év a tartam és $(x, y)$ a belépési kor) egyszeri nettó díja:

$$A_{x,y:n}^{\ \ 1\ \prime} = \frac{\left[SA_x \left(l_{x+n,y} - l_{x+n,y+n}\right) + SA_y \left(l_{x,y+n} - l_{x+n,y+n}\right) + SA_{xy} l_{x+n,y+n}\right] \cdot v^n}{l_{x,y}}. \tag{47}$$

Az elsőként számolt elérési biztosítás ennek olyan speciális esete, amikor az $SA_x$ és az $SA_y$ egyenlő nullával. Olyan három összegre kalkulált elérési biztosításra számoltam egyszeri nettó díjat, ahol a közös elérés esetén 1.000.000 Ft-ot fizet a biztosító, a férj ill. a feleség kizárólagos elérése esetén pedig 500.000-500.000 Ft jár a kedvezményezett(ek)nek. Ez jól összehasonlítható azzal, amikor csak kettős elérés esetén kaphatták meg a házaspárok az egy milliós biztosítási összeget, hiszen ez most azzal egészült ki, hogy ha csak a pár egyik tagja éri meg a tartam végét, akkor is kap 500.000 Ft-ot. Ez a plusz szolgálatatás átlagosan 136.387 Ft-tal tette drágábbá az alap elérési életbiztosítást. A szokásos (40,35) belépési korú férj és feleség így 856.234 Ft-ot fizet a kiegészített szolgáltatásokért, 9.349 Ft-tal többet az alapesetnél.

A magyarországi piacon nem nagyon találunk tisztán elérési biztosítást. Mégis fontos volt ezt is végigszámolni, mert a közkedvelt vegyes biztosítás egyik építőköve és a járadék kalkulációjánál is felhasználhatóak ezek az eredmények.

**A vegyes és a term fix egyszeri díjas életbiztosítás**

A vegyes biztosítást - hasonlóképpen az egy életre szóló életbiztosításokhoz - a kockázati és az elérési típusok összegeként kapjuk, hiszen ez a biztosítás egyaránt fizet a tartam végének elérésekor ill. a tartam alatt bekövetkezett halál esetén. A több életre szóló szerződéseknél az elérés és a halál fogalma több különböző dolgot takarhat, több lehetőség nyílik ezek variálására.

Nézzünk most egy olyan vegyes biztosítást, mely akkor fizet 500.000 Ft-ot, ha valamelyik biztosított a tartam alatt meghal (tehát az első halálra fizet csak a biztosító), ill. ha mindketten elérik a tartam végét, akkor 1.000.000 Ft kerül kifizetésre. Így tulajdonképpen az alap elérési biztosítást egészítjük ki egy kockázati elemmel. Ennek felára egy (40,35) belépési korú házaspárnál 10.479 Ft. Így az egész biztosítás egyszeri nettó díja: 858.364 Ft.

A term fix biztosítás akárcsak egy élet egyszeri díjfizetéssel nem tekinthető valódi biztosításnak. Az $n$ év tartamú term fix egyszeri nettó díja:

$$A_n = v^n. \tag{48}$$

A term fix a rendszeres díjfizetéstől válik biztosítássá, mert a biztosított halálakor a biztosító átvállalja a díjfizetést, így ez lesz a kockázati elem a biztosításban.

## 4.3. Több életre szóló járadékok kalkulációja

Ebben az alfejezetben előleges két személyre szóló járadékok kalkulációját tárgyaljuk. A járadékbiztosítás Magyarországon nem örvend nagy népszerűségnek. Mégis fontos ezeket a kalkulációkat elvégezni, mert a rendszeres díjak számításához ezekre az összefüggésekre lesz szükségünk.

A halál és életbenlét definíciója a járadékok esetében is többféle lehet, járadék köthető többféle feltételhez:

- Mindketten élnek
- Férj él, és a feleség nem
- Feleség él, és a férj nem.
- Egyikük él, mindegy, hogy melyikük, de csak az egyikük
- Legalább egyikük él

Az olyan esetekre, amikor csak az egyikük él azért van szükség, mert erre az esetre meghatározhatunk akár csökkentett biztosítási összeget is, hiszen valószínűsíthető, hogy ekkor már nincs szükség olyan összegű járadékra, mint mikor mindketten éltek. Ezért felesleges a drágább járadékot megvenni, mely egészen az utolsó halálig ugyanazt az összeget fizeti. Ha csak akkor jár a járadék, ha a férj és a feleség is életben van, akkor az első halál után az özvegy járadék nélkül marad. Így ez sem tűnik jó megoldásnak. Mégis ezzel a típussal kezdjük a kalkulációt, mert ez a legegyszerűbb és a rendszeres díjak fizetésénél más értelmet nyer majd ez a járadékfajta.

**Azonnal induló két életre szóló életjáradék**

Az egyik legalapvetőbb járadéktípus az életjáradék. Ezt főként idősek nyugdíjkiegészítéseként lehet elképzelni. Ezen kívül az időleges életjáradékok kalkulálásához elengedhetetlenek az életjáradékok. Először tekintsünk egy olyan életjáradékot, mely addig fizet, míg mindkét biztosított életben van. Ez tulajdonképpen az alap elérési biztosítások sorozata. Mivel előleges és azonnal induló, ezért az első kifizetést minden belépő megkapja. Ha $(x, y)$ a belépési kor, akkor ez $l_{x,y}$ házaspár. Ezt tekintsük a 0. évnek. Minden $i$. évben $l_{x+i,y+i}$ házaspár kapja meg a szerződésben megjelölt összeget. Jelöljük ezt az összeget $SA$-val. Így felírható az ekvivalencia egyenlet.

$$l_{x,y}\ddot{a}_{xy} = SA \sum_{i=0}^{\omega-max(x,y)} \left[l_{x+i,y+i} \cdot v^i\right], \tag{49}$$

ahol legyen $\ddot{a}_{xy}$ annak az azonnal induló, előleges járadékbiztosításnak az egyszeri nettó díja, mely minden év elején $SA$ Ft-ot fizet azoknak a pároknak, akik mindketten életben vannak az év elején és $\omega$ a populációban megfigyelt legmagasabb életkor. Ezt 100 évnek szokták tekinteni Magyarországon. Ekkor az egyszeri nettó díj:

$$\ddot{a}_{xy} = SA\frac{\sum_{i=0}^{\omega-max(x,y)} \left[l_{x+i,y+i} \cdot v^i\right]}{l_{x,y}}. \tag{50}$$

Most nézzünk olyan biztosítást, mely akkor is fizet járadékot, ha már csak az egyik biztosított él. Ennél az esetnél is elmondható az, mint a három biztosítási összeges elérési biztosításnál: megjelölhető a szerződésben három különböző biztosítási összeg arra az esetre, ha már csak a férj él, ha csak a feleség vagy ha mindketten élnek még. Ezeknél a biztosítási összegeknél is lehetőség nyílik arra, hogy úgy állítsuk be őket, hogy az a lehető legjobban igazodjon a házaspár anyagi szükségleteihez. Például ha ez a biztosítás nyugdíjkiegészítésként szolgál, akkor a kevesebb nyugdíjat kapó félre meghatározhatunk magasabb járadékot, ill. az sem szükséges, hogy a férj és a feleség járadékának (amit akkor kapnának, ha a másikuk már nem élne) összege a közös járadék legyen, hiszen általában egy pár költségei kisebbek, mint két különélő ember költségeinek összege.

Jelöljük ebben az alfejezetben is a férjre szóló, a feleségre szóló és a közös járadékot rendre $SA_x$, $SA_y$ és $SA_{xy}$-nal. Ebben az esetben is az elérési biztosítás összefüggéseit használhatjuk fel, hiszen ez is elérési biztosítások sorozatának tekinthető azzal a különbséggel, hogy most a három biztosítási összeggel számoló elérési képleteket használhatjuk fel. Mivel azonnal induló előleges járadékokat számolunk, ezért az első kifizetést mindenki megkapja, aki megvette a biztosítást. Ez $l_{x,y}SA_{xy}$ Ft-ot jelent. Ezután minden $i$. évben (ha az első kifizetés évét nulladiknak tekintjük) $l_{x+i,y}-l_{x+i,y+i}$ férfi kap $SA_x$ járadékot. Hasonlóan $l_{x,y+i} - l_{x+i,y+i}$ feleségnek kerül kifizetésre az $SA_y$ összeg. Végül az $i$. évben $l_{x+i,y+i}$ házaspárnak jár $SA_{xy}$ Ft. A kifizetések és befizetések várható jelenértékének egyenlőségéből kapjuk a járadék egyszeri nettó díját:

$$\ddot{a}'_{x,y} = SA_x \frac{\sum_{i=1}^{\omega-x}\left[\left(l_{x+i,y} - l_{x+i,y+i}\right)v^i\right]}{l_{x,y}} +$$
$$+SA_y \frac{\sum_{i=1}^{\omega-y}\left[\left(l_{x,y+i} - l_{x+i,y+i}\right)v^i\right]}{l_{x,y}} + SA_{xy} \frac{\sum_{i=0}^{\omega-max(x,y)}\left[l_{x+i,y+i}v^i\right]}{l_{x,y}}, \tag{51}$$

ahol $\ddot{a}'_{x,y}$-vel jelöljük a járadék egyszeri nettó díját.

**Két életre szóló halasztott életjáradék**

Ez az életjáradék nem azonnal, hanem a szerződésben kikötött időtartam után indul meg. Legyen $m$ a halasztott évek száma. Ha a járadék csak akkor jár, ha mindkét biztosított él, akkor a halasztott életjáradék $SA$ összegre szóló egyszeri nettó díja:

$${}_m\ddot{a}_{xy} = SA \frac{\sum_{i=m}^{\omega-max(x,y)}\left[l_{x+i,y+i} \cdot v^i\right]}{l_{x,y}}. \tag{52}$$

Három összeg esetén az azonnal induló életjáradéknál használt jelölésekkel $m$ év halasztással a halasztott életjáradék egyszeri nettó díja:

$${}_m\ddot{a}'_{x,y} = SA_x \frac{\sum_{i=m}^{\omega-x}\left[\left(l_{x+i,y} - l_{x+i,y+i}\right)v^i\right]}{l_{x,y}} +$$
$$+SA_y \frac{\sum_{i=m}^{\omega-y}\left[\left(l_{x,y+i} - l_{x+i,y+i}\right)v^i\right]}{l_{x,y}} + SA_{xy} \frac{\sum_{i=m}^{\omega-max(x,y)}\left[l_{x+i,y+i}v^i\right]}{l_{x,y}}, \tag{53}$$

**Azonnal induló két életre szóló időleges életjáradék**

Az időleges életjáradék $n$ éven keresztül fizet meghatározott összeget, de csak addig, amíg a biztosított(ak) életben van(nak). Az időleges életjáradék tulajdonképpen két életjáradék különbségeként fogható fel több életre szóló szerződések esetén is. Egy azonnal induló életjáradék és egy $n$ évvel halasztott életjáradék különbségeként.

Jelölje $\ddot{a}_{x,y:n}$ azt az előleges azonnal induló időleges életjáradékot, mely abban az esetben fizet $n$ évig minden évben egy $SA$ összeget, ha a biztosítottak mindegyike életben van. Ekkor

$$\ddot{a}_{x,y:n} = \ddot{a}_{x,y} - {}_n\ddot{a}_{xy}. \tag{54}$$

A kihalási renddel kifejezve:

$$\ddot{a}_{x,y:n} = SA\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\left[l_{x+i,y+i}\cdot v^i\right]}{l_{x,y}}. \tag{55}$$

Egy ilyen járadékbiztosítás egyszeri nettó díját kiszámoltam 5 éves tartamra minden lehetséges $(x, y)$ belépési korra évenként 200.000 Ft összegre a Clayton kopulából nyert kihalási renddel. Átlagos díjként 791.939-et kaptam. Egy (40,35) belépési korú házaspár esetén a díj: 937.859 Ft. Ugyanezt kiszámoltam a függetlenségi kopulából származó kihalási renddel. A (40,35) belépési korú párra 937.232 adódott, ami mindössze 627 Ft-nyi eltérés. Az átlagos eltérés 2098 Ft volt.

Érdemes még felírni a három biztosítási összegre kalkulált előleges azonnal induló időleges életjáradék egyszeri nettó díját. Ezt is az 54. összefüggés logikája szerint kapjuk:

$$\ddot{a}'_{x,y:n} = SA_x\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(l_{x+i,y} - l_{x+i,y+i}\right)v^i\right]}{l_{x,y}} + \\ + SA_y\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(l_{x,y+i} - l_{x+i,y+i}\right)v^i\right]}{l_{x,y}} + SA_{xy}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\left[l_{x+i,y+i}v^i\right]}{l_{x,y}}. \tag{56}$$

Elkészítettem egy ilyen ötéves időleges járadék kalkulációját is $SA_x = 120.000$ Ft, $SA_y = 90.000$ Ft és $SA_{xy} = 200.000$ Ft esetére Clayton kopula segítségével. Az átlagos díj 852.088 Ft lett. Egy (40,35) belépési korú párnak 941.305 Ft-ba kerül ez a biztosítás. A függetlenségi kopula ugyanerre a párra 941.029 Ft-ot adott eredményül. Így 276 Ft volt az eltérés egy ilyen házaspár díjában. Az átlagos eltérés 2076 Ft volt.

A tapasztalt eltérések nem tűnnek olyan soknak, de vegyük észre, hogy 200.000 Ft-os éves járadék nem nagy összeg és az 5 éves tartam is rövidnek mondható. Egy hosszabb tartamnál sokkal nagyobb különbségeket tapasztalnánk a Clayton ill. a függetlenségi kopulából kapott díjak között. Az ötéves tartamot azért választottam, mert egy rövidebb tartam leegyszerűsíti a számolást, és ez már elég hosszú ahhoz, hogy láthatóvá váljanak a különbségek a két különböző kopulával számolt díjaknál.

## 4.4. Több életre szóló rendszeres díjas életbiztosítások kalkulációja

A járadékbiztosítások díjkalkulációja után minden rendelkezésünkre áll, hogy megállapíthassuk a különféle biztosítások rendszeres éves nettó díját. Ahhoz, hogy a rendszeres díjakat megkaphassuk, a megfelelő járadéktagokkal kell elosztanunk a biztosítások egyszeri díjait. A díjfizetést úgy tekintjük, hogy mindig év elején esedékes, ezért is számoltunk előleges járadékokat.

A kalkulált járadékok alapján tudunk olyan rendszeres díjat számolni, melyet akkor kell fizetni, ha a biztosítottak mindketten életben vannak. Ezt az $\ddot{a}_{x,y:m}$ járadéktag segítségével határozhatjuk meg, ahol $m$ a díjfizetés tartama. Egy ilyen biztosítás esetén, ha az egyik biztosított meghal, akkor a másiknak már nem kell tovább fizetnie a megkötött szerződés díját, díjmentessé válik a szerződés.

A másik időleges járadéktípus esetén arra van lehetőség, hogy csökkentsük az özvegyekre jutó terheket azzal, hogy a djfizetés nagyságát csökkentjük abban az esetben, ha a házaspár egyik tagja meghal. Ezzel vonzóbbá téve a módozatot. Ez a rendszeres díj kisebb lesz, mint a feljebb említett, mert a díjfizetés akkor is kötelező, ha már csak az egyik biztosított él, de kisebb díjat kell fizetni.

Az eddig tárgyalt egyszeri díjas biztosítások rendszeres nettó díjainak képletét a függelékben találja az Olvasó. A szokásos (40,35) éves belépési korra 5 év tartamra az alábbi táblázat foglalja össze néhány eddig tárgyalt módozat rendszeres díjait:

| Módozat | Biztosítási összeg | Rendszeres díj |
|---|---|---|
| Kockázati | 1.000.000 Ft | 4.469 Ft |
| Elérési | 1.000.000 Ft | 180.600 Ft |
| Vegyes | 500.000 Ft haláleseti,<br>1.000.000 Ft elérési | 182.834 Ft |
| Term fix | 1.000.000. Ft | 184.848 Ft |

6. táblázat. Rendszeres díjak

A kockázati és az elérési biztosításon egyaránt az alap biztosítást értettük, vegyes biztosításon pedig ilyen biztosítások összegét.

A díjkalkulációs fejezetben elkészítettem a két életre szóló halandósági táblát és kihalási rendet, mely modellezi a férj és feleség közötti kapcsolatot. Utána felvázoltam többféle két életre köthető lehetséges módozatot és megkonstruáltam a hozzájuk tartozó aktuáriusi díjképleteket.

A tartalékszámítás az egy életre szóló biztosításokkal analóg módon két élet esetén is prospektíven történik. Az egy életre szóló általános tartalékképlet kiterjeszthető két életre:

$$V_t = A_{x+t,y+t:n-t} - \ddot{a}_{x+t,y+t:m-t} \cdot P_{x,y:m}, \tag{57}$$

ahol $V_t$ a biztosítás $t$. évében a tartalék, $n$ a biztosítási tartam, $m$ a díjfizetés tartama, a biztosítottak belépési kora $(x, y)$, az egyszeri nettó díj $A_{x,y:n}$, a járadéktag $\ddot{a}_{x,y:m}$ és a rendszeres díj $P_{x,y:m}$.

A zillmerezés és az inflációkezelés különböző technikái ugyanúgy működnek egy két életre szóló szerződés esetén, mint egy egy életre szólónál.

# 5. Összegzés

Dolgozatomban áttekintettem a kopulákhoz kapcsolódó fontosabb fogalmakat, tulajdonságokat és bemutattam néhány kopulát, melyet későbbi munkám során felhasználtam.

Miután felmértem a rendelkezésemre álló adatokat, olyan formára hoztam őket, hogy kopulát tudjak illeszteni rájuk. Ezután következett a kopulaillesztés részletes leírása és annak tesztelése, hogy melyik kopula illeszkedik az adatokhoz. Két ilyen kopula adódott a Clayton és az Ali-Mikhail-Haq kopula. Mivel a Clayton kopula eredményei jobbak voltak, ezért ezt választottam további számolásaimhoz.

A díjkalkulációs fejezetben létrehoztam két halandósági táblát. Az egyiket a becsült Clayton kopula alapján, a másikat függetlenséget feltételezve a függetlenségi kopula segítségével, azért, hogy össze tudjam hasonlítani az összefüggőség és függetlenség feltételezése mellett számolt díjakat. Az volt a célom, hogy megmutassam, érdemes a független változók helyett a valódi függőséget modellező változókat használni. Hiszen a díjban is megjelenik az élettartamok kapcsolata, ezáltal, ha ezt nem vesszük figyelembe, akkor hibás díjakat kapunk.

A számolások eredményei alapján az rajzolódott ki, hogy a kockázati biztosítások független élettartamok feltételezése mellett felülkalkuláltak, míg az elérési típusúak (járadékot is ideértve) alulkalkuláltak. Természetesen minél hosszabb tartamokra és minél nagyobb biztosítási összegekre számolunk, annál nagyobb eltéréseket fogunk tapasztalni szerződésenként. A dolgozatban csak rövid tartamokra számoltam az Exceles számítási nehézségek miatt. De bizonyos esetekben már így is jelenetős különbségeket tapasztaltam, ami állományi szinten számottevő lehet.

Az eredményeim a kis adathalmaz és annak esetleges nem reprezentatívsága miatt megkérdőjelezhetőek. Érdemes lenne egy jóval nagyobb és erre alkalmas adatsoron elvégezni a kopulaillesztést és a dolgozatban használt kopulát erre az új kopulára cserélve megnézni, hogy mekkora díjakat kapunk a különféle módozatokra a már elkészített díjképletek alapján. Ezek a díjképletek függetlenül a számolások esetleges pontatlanságától érvényesek az ismertetett két életre megfogalmazott életbiztosításokra.

Egy másik változatás lehetne a peremeloszlások kicserélése házas férfiak és nők egy dimenziós halálozási valószínűségeire (ha létezik ilyen), ugyanis a statisztikák alapján házasságban élők hosszabb ideig élnek, mint az egyedül élők. A kopula nem befolyásolja a peremeloszlásokat, ezért érdemes lenne ezt a speciális peremeloszlást használni az általános helyett.

Hamarosan a peremeloszlásokkal kapcsolatban egyéb változtatásokra is szükség lesz. Idén az Európai Bíróság azt a határozatot hozta, hogy a biztosítóknak tilos nemek szerint különbséget tenniük ügyfeleik között. 2013-ra unisex díjakat köteles az új szerzésekre megállapítani minden magyar biztosító. Ez olyan szempontból érinti az ismertetett módszert és biztosításokat, hogy a peremeloszlásokat le kell cserélni az unisex peremeloszlásokra. A két élet közötti kapcsolat szerencsére továbbra is megőrződik a halandósági táblában - közvetve a díjakban - a kopulának köszönhetően.

## Köszönetnyilvánítás

Dolgozatom végére érve szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Vékás Péternek segítőkészségéért, jó meglátásaiért és inspiráló ötleteiért. Köszönettel tartozom továbbá Tusnády Paulának az adatokért, melyeket rendelkezésemre bocsátott.

# 6. Függelék

## Kockázati életbiztosítás rendszeres nettó díja

$$P^{1}_{x,y:m} = SA \cdot \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(l_{x+i-1,y+i-1} - l_{x+i,y+i}\right) v^i\right]}{\sum_{i=0}^{m-1} \left[l_{x+i,y+i} \cdot v^i\right]} \tag{58}$$

## Elérési életbiztosítás rendszeres nettó díja

$$P_{x,y:\overset{1}{m}} = SA \cdot \frac{l_{x+n,y+n} \cdot v^n}{\sum_{i=0}^{m-1} \left[l_{x+i,y+i} \cdot v^i\right]} \tag{59}$$

## Vegyes életbiztosítás rendszeres nettó díja

$$P_{x,y:m} = SA \cdot \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(l_{x+i-1,y+i-1} - l_{x+i,y+i}\right) v^i\right] + l_{x+n,y+n} \cdot v^n}{\sum_{i=0}^{m-1} \left[l_{x+i,y+i} \cdot v^i\right]} \tag{60}$$

## Term fix életbiztosítás rendszeres nettó díja

$$P_{x:y,m} = SA \cdot \frac{v^n}{\sum_{i=0}^{m-1} \left[l_{x+i,y+i} \cdot v^i\right]} \tag{61}$$

**6.1. Megjegyzés.** A fenti biztosítások mind az alap biztosítások közé tartoznak, csak egy biztosítási összeggel rendelkeznek. A díjfizetés addig tart, amíg mindkét biztosított él, ezért a járadéktag is az alaptípusú járadékból ered. A többi kombináció ezekhez hasonlóan írható fel.

| férfi \ nő | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **30** | 7 642 | 7 964 | 8 314 | 8 693 | 9 101 | 9 554 | 10 079 | 10 741 | 11 560 | 12 567 | 13 746 | 15 072 | 16 491 | 17 993 | 19 552 | 21 169 | 22 838 | 24 570 | 26 358 | 28 196 | 30 095 |
| **31** | 8 053 | 8 374 | 8 724 | 9 103 | 9 511 | 9 964 | 10 488 | 11 150 | 11 968 | 12 975 | 14 153 | 15 479 | 16 897 | 18 399 | 19 957 | 21 574 | 23 241 | 24 973 | 26 760 | 28 597 | 30 495 |
| **32** | 8 600 | 8 921 | 9 271 | 9 650 | 10 057 | 10 510 | 11 034 | 11 695 | 12 514 | 13 519 | 14 697 | 16 022 | 17 440 | 18 941 | 20 498 | 22 113 | 23 780 | 25 510 | 27 297 | 29 133 | 31 029 |
| **33** | 9 316 | 9 637 | 9 987 | 10 365 | 10 772 | 11 224 | 11 748 | 12 409 | 13 227 | 14 231 | 15 409 | 16 732 | 18 149 | 19 648 | 21 204 | 22 818 | 24 484 | 26 213 | 27 998 | 29 833 | 31 728 |
| **34** | 10 241 | 10 562 | 10 911 | 11 289 | 11 696 | 12 148 | 12 671 | 13 331 | 14 148 | 15 152 | 16 327 | 17 650 | 19 065 | 20 563 | 22 117 | 23 730 | 25 394 | 27 121 | 28 904 | 30 737 | 32 630 |
| **35** | 11 395 | 11 715 | 12 064 | 12 442 | 12 848 | 13 299 | 13 822 | 14 481 | 15 297 | 16 299 | 17 474 | 18 795 | 20 208 | 21 704 | 23 256 | 24 867 | 26 529 | 28 254 | 30 035 | 31 865 | 33 756 |
| **36** | 12 787 | 13 106 | 13 455 | 13 832 | 14 237 | 14 688 | 15 210 | 15 868 | 16 683 | 17 684 | 18 856 | 20 175 | 21 586 | 23 080 | 24 630 | 26 238 | 27 898 | 29 620 | 31 399 | 33 226 | 35 114 |
| **37** | 14 410 | 14 729 | 15 077 | 15 454 | 15 858 | 16 308 | 16 829 | 17 486 | 18 299 | 19 298 | 20 469 | 21 786 | 23 194 | 24 685 | 26 233 | 27 838 | 29 494 | 31 214 | 32 989 | 34 813 | 36 698 |
| **38** | 16 279 | 16 597 | 16 944 | 17 320 | 17 724 | 18 173 | 18 693 | 19 348 | 20 160 | 21 157 | 22 325 | 23 639 | 25 045 | 26 533 | 28 077 | 29 679 | 31 332 | 33 048 | 34 820 | 36 641 | 38 522 |
| **39** | 18 416 | 18 734 | 19 080 | 19 455 | 19 858 | 20 305 | 20 824 | 21 478 | 22 288 | 23 283 | 24 448 | 25 759 | 27 161 | 28 646 | 30 187 | 31 785 | 33 434 | 35 146 | 36 914 | 38 730 | 40 607 |
| **40** | 20 834 | 21 151 | 21 496 | 21 870 | 22 272 | 22 719 | 23 236 | 23 888 | 24 696 | 25 688 | 26 851 | 28 158 | 29 556 | 31 038 | 32 574 | 34 168 | 35 813 | 37 521 | 39 283 | 41 095 | 42 967 |
| **41** | 23 565 | 23 881 | 24 225 | 24 598 | 24 999 | 25 444 | 25 960 | 26 610 | 27 415 | 28 404 | 29 563 | 30 867 | 32 261 | 33 738 | 35 270 | 36 859 | 38 499 | 40 201 | 41 959 | 43 765 | 45 631 |
| **42** | 26 673 | 26 987 | 27 331 | 27 702 | 28 101 | 28 545 | 29 059 | 29 707 | 30 510 | 31 496 | 32 650 | 33 950 | 35 339 | 36 811 | 38 338 | 39 921 | 41 556 | 43 252 | 45 004 | 46 804 | 48 664 |
| **43** | 30 208 | 30 521 | 30 863 | 31 233 | 31 631 | 32 073 | 32 585 | 33 231 | 34 030 | 35 012 | 36 162 | 37 456 | 38 840 | 40 306 | 41 827 | 43 405 | 45 033 | 46 723 | 48 468 | 50 261 | 52 113 |
| **44** | 34 186 | 34 498 | 34 838 | 35 207 | 35 603 | 36 043 | 36 553 | 37 195 | 37 991 | 38 969 | 40 114 | 41 402 | 42 780 | 44 240 | 45 754 | 47 325 | 48 946 | 50 628 | 52 365 | 54 151 | 55 995 |
| **45** | 38 579 | 38 889 | 39 228 | 39 595 | 39 989 | 40 427 | 40 934 | 41 574 | 42 365 | 43 338 | 44 478 | 45 760 | 47 131 | 48 584 | 50 091 | 51 654 | 53 267 | 54 941 | 56 670 | 58 446 | 60 282 |
| **46** | 43 292 | 43 601 | 43 938 | 44 303 | 44 695 | 45 131 | 45 635 | 46 271 | 47 059 | 48 027 | 49 161 | 50 436 | 51 800 | 53 245 | 54 744 | 56 299 | 57 903 | 59 569 | 61 288 | 63 056 | 64 882 |
| **47** | 48 239 | 48 547 | 48 882 | 49 244 | 49 634 | 50 068 | 50 569 | 51 202 | 51 985 | 52 948 | 54 075 | 55 343 | 56 700 | 58 137 | 59 627 | 61 174 | 62 769 | 64 426 | 66 136 | 67 893 | 69 709 |
| **48** | 53 360 | 53 666 | 53 999 | 54 360 | 54 747 | 55 178 | 55 677 | 56 306 | 57 084 | 58 041 | 59 162 | 60 423 | 61 772 | 63 201 | 64 683 | 66 220 | 67 807 | 69 454 | 71 154 | 72 901 | 74 707 |
| **49** | 58 605 | 58 909 | 59 240 | 59 598 | 59 984 | 60 412 | 60 908 | 61 533 | 62 307 | 63 258 | 64 373 | 65 626 | 66 967 | 68 387 | 69 860 | 71 389 | 72 966 | 74 603 | 76 293 | 78 030 | 79 825 |
| **50** | 63 944 | 64 246 | 64 575 | 64 931 | 65 314 | 65 740 | 66 233 | 66 854 | 67 623 | 68 569 | 69 676 | 70 922 | 72 255 | 73 666 | 75 131 | 76 650 | 78 217 | 79 845 | 81 525 | 83 251 | 85 035 |

7. táblázat. 1.000.000 Ft-ra szóló 5 éves alap kockázati biztosítás díjtáblája

| férfi \ nő | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **30** | 859 564 | 859 258 | 858 926 | 858 567 | 858 181 | 857 751 | 857 251 | 856 617 | 855 834 | 854 873 | 853 752 | 852 494 | 851 152 | 849 732 | 848 259 | 846 730 | 845 153 | 843 517 | 841 827 | 840 091 | 838 297 |
| **31** | 859 171 | 858 865 | 858 533 | 858 174 | 857 789 | 857 359 | 856 858 | 856 226 | 855 443 | 854 482 | 853 361 | 852 104 | 850 763 | 849 343 | 847 871 | 846 343 | 844 766 | 843 131 | 841 442 | 839 707 | 837 913 |
| **32** | 858 644 | 858 338 | 858 006 | 857 648 | 857 263 | 856 833 | 856 333 | 855 701 | 854 918 | 853 958 | 852 838 | 851 582 | 850 241 | 848 823 | 847 351 | 845 824 | 844 248 | 842 614 | 840 926 | 839 192 | 837 400 |
| **33** | 857 956 | 857 651 | 857 320 | 856 961 | 856 577 | 856 147 | 855 647 | 855 016 | 854 234 | 853 275 | 852 155 | 850 900 | 849 560 | 848 143 | 846 672 | 845 147 | 843 572 | 841 939 | 840 253 | 838 520 | 836 729 |
| **34** | 857 072 | 856 767 | 856 436 | 856 078 | 855 694 | 855 265 | 854 766 | 854 134 | 853 353 | 852 395 | 851 277 | 850 023 | 848 685 | 847 269 | 845 800 | 844 276 | 842 703 | 841 071 | 839 387 | 837 656 | 835 867 |
| **35** | 855 972 | 855 668 | 855 337 | 854 980 | 854 596 | 854 168 | 853 669 | 853 038 | 852 258 | 851 302 | 850 185 | 848 933 | 847 596 | 846 182 | 844 715 | 843 192 | 841 622 | 839 992 | 838 310 | 836 581 | 834 795 |
| **36** | 854 646 | 854 342 | 854 012 | 853 655 | 853 272 | 852 844 | 852 346 | 851 717 | 850 938 | 849 983 | 848 868 | 847 617 | 846 283 | 844 871 | 843 406 | 841 886 | 840 318 | 838 691 | 837 011 | 835 285 | 833 501 |
| **37** | 853 100 | 852 797 | 852 467 | 852 111 | 851 729 | 851 302 | 850 805 | 850 176 | 849 399 | 848 445 | 847 332 | 846 084 | 844 752 | 843 343 | 841 880 | 840 363 | 838 798 | 837 174 | 835 497 | 833 774 | 831 994 |
| **38** | 851 323 | 851 021 | 850 692 | 850 336 | 849 954 | 849 528 | 849 032 | 848 405 | 847 629 | 846 678 | 845 567 | 844 322 | 842 993 | 841 586 | 840 127 | 838 613 | 837 051 | 835 430 | 833 757 | 832 038 | 830 261 |
| **39** | 849 294 | 848 992 | 848 664 | 848 309 | 847 928 | 847 503 | 847 008 | 846 383 | 845 609 | 844 660 | 843 551 | 842 309 | 840 983 | 839 580 | 838 124 | 836 614 | 835 055 | 833 438 | 831 769 | 830 054 | 828 281 |
| **40** | 846 998 | 846 697 | 846 370 | 846 016 | 845 636 | 845 213 | 844 719 | 844 095 | 843 323 | 842 377 | 841 271 | 840 033 | 838 710 | 837 311 | 835 859 | 834 352 | 832 798 | 831 186 | 829 521 | 827 811 | 826 043 |
| **41** | 844 404 | 844 104 | 843 777 | 843 425 | 843 046 | 842 624 | 842 132 | 841 510 | 840 740 | 839 796 | 838 695 | 837 460 | 836 141 | 834 746 | 833 299 | 831 797 | 830 247 | 828 640 | 826 980 | 825 275 | 823 512 |
| **42** | 841 450 | 841 151 | 840 825 | 840 474 | 840 097 | 839 676 | 839 185 | 838 566 | 837 799 | 836 858 | 835 760 | 834 530 | 833 216 | 831 825 | 830 383 | 828 887 | 827 343 | 825 741 | 824 087 | 822 388 | 820 631 |
| **43** | 838 090 | 837 792 | 837 468 | 837 118 | 836 742 | 836 323 | 835 835 | 835 218 | 834 454 | 833 517 | 832 423 | 831 198 | 829 889 | 828 504 | 827 068 | 825 577 | 824 039 | 822 444 | 820 797 | 819 104 | 817 355 |
| **44** | 834 313 | 834 017 | 833 694 | 833 346 | 832 971 | 832 554 | 832 068 | 831 454 | 830 693 | 829 761 | 828 672 | 827 452 | 826 149 | 824 770 | 823 340 | 821 857 | 820 326 | 818 737 | 817 098 | 815 413 | 813 671 |
| **45** | 830 150 | 829 854 | 829 533 | 829 187 | 828 814 | 828 399 | 827 916 | 827 304 | 826 547 | 825 620 | 824 536 | 823 322 | 822 026 | 820 654 | 819 231 | 817 755 | 816 232 | 814 651 | 813 020 | 811 343 | 809 611 |
| **46** | 825 691 | 825 397 | 825 078 | 824 733 | 824 363 | 823 950 | 823 469 | 822 861 | 822 108 | 821 185 | 820 108 | 818 900 | 817 611 | 816 247 | 814 831 | 813 363 | 811 848 | 810 276 | 808 653 | 806 986 | 805 262 |
| **47** | 821 018 | 820 726 | 820 409 | 820 066 | 819 698 | 819 287 | 818 809 | 818 204 | 817 456 | 816 538 | 815 467 | 814 266 | 812 984 | 811 627 | 810 220 | 808 760 | 807 254 | 805 691 | 804 077 | 802 419 | 800 705 |
| **48** | 816 185 | 815 895 | 815 580 | 815 239 | 814 873 | 814 464 | 813 989 | 813 388 | 812 644 | 811 732 | 810 667 | 809 473 | 808 198 | 806 850 | 805 451 | 803 999 | 802 502 | 800 948 | 799 344 | 797 695 | 795 992 |
| **49** | 811 237 | 810 948 | 810 634 | 810 296 | 809 932 | 809 526 | 809 053 | 808 456 | 807 717 | 806 810 | 805 751 | 804 565 | 803 298 | 801 958 | 800 567 | 799 124 | 797 636 | 796 092 | 794 497 | 792 859 | 791 165 |
| **50** | 806 199 | 805 912 | 805 601 | 805 264 | 804 903 | 804 499 | 804 029 | 803 436 | 802 701 | 801 800 | 800 748 | 799 569 | 798 310 | 796 978 | 795 596 | 794 162 | 792 683 | 791 148 | 789 564 | 787 935 | 786 253 |

8. táblázat. 1.000.000 Ft-ra szóló 5 éves alap elérési biztosítás díjtáblája

| férfi \ nő | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 859 564 | 859 258 | 858 926 | 858 567 | 858 181 | 857 751 | 857 251 | 856 617 | 855 834 | 854 873 | 853 752 | 852 494 | 851 152 | 849 732 | 848 259 | 846 730 | 845 153 | 843 517 | 841 827 | 840 091 | 838 297 |
| 31 | 859 171 | 858 865 | 858 533 | 858 174 | 857 789 | 857 359 | 856 858 | 856 226 | 855 443 | 854 482 | 853 361 | 852 104 | 850 763 | 849 343 | 847 871 | 846 343 | 844 766 | 843 131 | 841 442 | 839 707 | 837 913 |
| 32 | 858 644 | 858 338 | 858 006 | 857 648 | 857 263 | 856 833 | 856 333 | 855 701 | 854 918 | 853 958 | 852 838 | 851 582 | 850 241 | 848 823 | 847 351 | 845 824 | 844 248 | 842 614 | 840 926 | 839 192 | 837 400 |
| 33 | 857 956 | 857 651 | 857 320 | 856 961 | 856 577 | 856 147 | 855 647 | 855 016 | 854 234 | 853 275 | 852 155 | 850 900 | 849 560 | 848 143 | 846 672 | 845 147 | 843 572 | 841 939 | 840 253 | 838 520 | 836 729 |
| 34 | 857 072 | 856 767 | 856 436 | 856 078 | 855 694 | 855 265 | 854 766 | 854 134 | 853 353 | 852 395 | 851 277 | 850 023 | 848 685 | 847 269 | 845 800 | 844 276 | 842 703 | 841 071 | 839 387 | 837 656 | 835 867 |
| 35 | 855 972 | 855 668 | 855 337 | 854 980 | 854 596 | 854 168 | 853 669 | 853 038 | 852 258 | 851 302 | 850 185 | 848 933 | 847 596 | 846 182 | 844 715 | 843 192 | 841 622 | 839 992 | 838 310 | 836 581 | 834 795 |
| 36 | 854 646 | 854 342 | 854 012 | 853 655 | 853 272 | 852 844 | 852 346 | 851 717 | 850 938 | 849 983 | 848 868 | 847 617 | 846 283 | 844 871 | 843 406 | 841 886 | 840 318 | 838 691 | 837 011 | 835 285 | 833 501 |
| 37 | 853 100 | 852 797 | 852 467 | 852 111 | 851 729 | 851 302 | 850 805 | 850 176 | 849 399 | 848 445 | 847 332 | 846 084 | 844 752 | 843 343 | 841 880 | 840 363 | 838 798 | 837 174 | 835 497 | 833 774 | 831 994 |
| 38 | 851 323 | 851 021 | 850 692 | 850 336 | 849 954 | 849 528 | 849 032 | 848 405 | 847 629 | 846 678 | 845 567 | 844 322 | 842 993 | 841 586 | 840 127 | 838 613 | 837 051 | 835 430 | 833 757 | 832 038 | 830 261 |
| 39 | 849 294 | 848 992 | 848 664 | 848 309 | 847 928 | 847 503 | 847 008 | 846 383 | 845 609 | 844 660 | 843 551 | 842 309 | 840 983 | 839 580 | 838 124 | 836 614 | 835 055 | 833 438 | 831 769 | 830 054 | 828 281 |
| 40 | 846 998 | 846 697 | 846 370 | 846 016 | 845 636 | 845 213 | 844 719 | 844 095 | 843 323 | 842 377 | 841 271 | 840 033 | 838 710 | 837 311 | 835 859 | 834 352 | 832 798 | 831 186 | 829 521 | 827 811 | 826 043 |
| 41 | 844 404 | 844 104 | 843 777 | 843 425 | 843 046 | 842 624 | 842 132 | 841 510 | 840 740 | 839 796 | 838 695 | 837 460 | 836 141 | 834 746 | 833 299 | 831 797 | 830 247 | 828 640 | 826 980 | 825 275 | 823 512 |
| 42 | 841 450 | 841 151 | 840 825 | 840 474 | 840 097 | 839 676 | 839 185 | 838 566 | 837 799 | 836 858 | 835 760 | 834 530 | 833 216 | 831 825 | 830 383 | 828 887 | 827 343 | 825 741 | 824 087 | 822 388 | 820 631 |
| 43 | 838 090 | 837 792 | 837 468 | 837 118 | 836 742 | 836 323 | 835 835 | 835 218 | 834 454 | 833 517 | 832 423 | 831 198 | 829 889 | 828 504 | 827 068 | 825 577 | 824 039 | 822 444 | 820 797 | 819 104 | 817 355 |
| 44 | 834 313 | 834 017 | 833 694 | 833 346 | 832 971 | 832 554 | 832 068 | 831 454 | 830 693 | 829 761 | 828 672 | 827 452 | 826 149 | 824 770 | 823 340 | 821 857 | 820 326 | 818 737 | 817 098 | 815 413 | 813 671 |
| 45 | 830 150 | 829 854 | 829 533 | 829 187 | 828 814 | 828 399 | 827 916 | 827 304 | 826 547 | 825 620 | 824 536 | 823 322 | 822 026 | 820 654 | 819 231 | 817 755 | 816 232 | 814 651 | 813 020 | 811 343 | 809 611 |
| 46 | 825 691 | 825 397 | 825 078 | 824 733 | 824 363 | 823 950 | 823 469 | 822 861 | 822 108 | 821 185 | 820 108 | 818 900 | 817 611 | 816 247 | 814 831 | 813 363 | 811 848 | 810 276 | 808 653 | 806 986 | 805 262 |
| 47 | 821 018 | 820 726 | 820 409 | 820 066 | 819 698 | 819 287 | 818 809 | 818 204 | 817 456 | 816 538 | 815 467 | 814 266 | 812 984 | 811 627 | 810 220 | 808 760 | 807 254 | 805 691 | 804 077 | 802 419 | 800 705 |
| 48 | 816 185 | 815 895 | 815 580 | 815 239 | 814 873 | 814 464 | 813 989 | 813 388 | 812 644 | 811 732 | 810 667 | 809 473 | 808 198 | 806 850 | 805 451 | 803 999 | 802 502 | 800 948 | 799 344 | 797 695 | 795 992 |
| 49 | 811 237 | 810 948 | 810 634 | 810 296 | 809 932 | 809 526 | 809 053 | 808 456 | 807 717 | 806 810 | 805 751 | 804 565 | 803 298 | 801 958 | 800 567 | 799 124 | 797 636 | 796 092 | 794 497 | 792 859 | 791 165 |
| 50 | 806 199 | 805 912 | 805 601 | 805 264 | 804 903 | 804 499 | 804 029 | 803 436 | 802 701 | 801 800 | 800 748 | 799 569 | 798 310 | 796 978 | 795 596 | 794 162 | 792 683 | 791 148 | 789 564 | 787 935 | 786 253 |

9. táblázat. Évi 200.000 Ft-ra szóló 5 éves alap járadékbiztosítás díjtáblája

# Hivatkozások


[1] Panjer, Harry H.: *Operational Risk: Modeling Analytics*, John Wiley & Sons, Inc., 2006.

[2] Banyár József: *Életbiztosítás*, Aula, 2003.

[3] Brown, Jeffrey R. & Poterba, James M.: *Joint life annuities and annuity demand by married couples*, NBER Working Paper Series, 1999.

[4] Frees, Edward W.& Carriere, Jacques& Valdez, Emiliano: *Annuity valuation with dependent mortality*, Actuarial Reserch Clearing House, 1995.

[5] Faragó Miklós: *Családi állapottól függő halandósági táblák Magyarországon (A házasságok várható tartama, túlélése*, Központi Statisztikai Hivatal, Budapest, 2009.

[6] Das, Shubhabrata: *Differential share of premiums in joint life insurance policy with dependency in life distributions*, Indian Institute of Management Bangalore

[7] Yogo Purwono: *Copula inference for mutiple lives analysis-preliminaries*, 13. East Asian Actuarial Conference, 2005.

[8] Clayton, D.: *A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies os familial tendency in chronic desease incidence*, Biometrika, 65, 141-151.

[9] Frees, Edward W.& Valdez, Emiliano: *Understanding relationships using copulas*, North American Actuarial Journal, 2, 1-25.

[10] Klugman, S. & Parsa, A.: *Fitting bivariate distributions with copulas*, Insurance: Mathematics and Economics, 24, 139-148.

[11] Gerber, Hans U.: *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag GmbH, 2006.