Extrém sportok a balesetbiztosításban

Szakdolgozat

Írta: Csépány Viktória

Biztosítási- és pénzügyi matematika MSc

Aktuárius szakirány

Témavezető:

Arató Miklós, egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2012.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni Arató Miklós Tanár Úrnak, aki mindig szakított rám időt sok elfoglaltsága mellett is. Hasznos tanácsokkal segítette munkámat, és rendkívüli türelemről tett tanúbizonyságot.
Köszönetemet szeretném még kifejezni családomnak és páromnak, akik mindvégig támogattak tanulmányaim során.

Bevezetés

A kötelező egészségbiztosítási ellátásokról (továbbiakban Ebtv.) szóló 1997.évi LXXXIII. törvény 2006-os módosítása[1] miatt - a különösen veszélyes (extrém) sporttevékenységet űző személyek elesnek a kötelező egészségbiztosítás ingyenes egészségügyi szolgáltatásaitól, vagyis fizetniük kell az egészségügyi ellátásokért, ha az extrémsport tevékenység közben sportbalesetet szenvednek. A hivatkozott jogszabály[2] szerint extrém sportnak minősülnek:

a) vízisízés,

b) jet-ski,

c) vadvízi evezés,

d) hegy- és sziklamászás az V. foktól,

e) magashegyi expedíció,

f) barlangászat,

g) bázisugrás, mélybe ugrás (bungee jumping),

h) falmászás,

i) roncsautó (auto-crash) sport, rally,

j) hőlégballonozás,

k) félkezes és nyílttengeri vitorlázás,

l) sárkányrepülés, ejtőernyőzés, paplanernyőzés, műrepülés.

[1] 1997. évi LXXXIII. törvény a kötelező egészségbiztosítás ellátásairól 18.§-ának (6) bekezdésének e) pontja szerint: "Nem vehetők igénybe az Egészségbiztosítási Alap terhére:a külön jogszabályban meghatározott különösen veszélyes (extrém) sportolás, szórakoztató-szabadidős tevékenység közben bekövetkezett baleset miatt szükségessé vált ellátások.„

[2] 217/1997. (XII. 1.) Korm. rendelet a kötelező egészségbiztosítás ellátásairól szóló 1997. évi LXXXIII. törvény végrehajtásáról, ennek 5/B.§-ának (1) bekezdése

Az Ebtv szerint extrém sport baleset esetén térítési díj mellett lehet igénybe venni a háziorvosi ellátást, a fogászati ellátást, a járóbeteg-szakellátást, a fekvőbeteg-gyógyintézeti ellátást, a rehabilitációs ellátásokat és a betegszállítást, mentést. Ha belegondolunk, ezek közül néhány igen jelentős összegbe kerülhet a sportoló számára. Továbbá nem jár extrémsport baleset esetén a sportolónak gyógyszerár-támogatás, gyógyászati segédeszközök árához nyújtott támogatás és utazási költségtérítés sem, melyek szintén nem pár forintos tételek. Táppénzben és rokkantsági nyugdíjban viszont részesülnek azok, akik extrémsport baleset miatt keresőképtelenné vagy rokkanttá válnak. Extrém sportok esetében a szükségessé vált életmentő műtétek költségeit az Egészségbiztosítási Alap finanszírozza, ezek költségeit a sportolónak később sem kell megtérítenie. Ezen beavatkozások felsorolását[3] rendelet tartalmazza (pl.: eszméletlen állapotok, életveszélyes allergiás állapotok, amputációk, áramütés, akut légzési elégtelenség, stb.). A nem életmentő beavatkozások esetén a térítés mértékét kormányrendelet[4] szerint az egészségügyi szolgáltatók maguk határozzák meg.

Ezért egyes biztosítók olyan biztosítási terméket dolgoztak ki az extrém sportot űző ügyfeleik számára, mely fedezi az extrém sportolásból adódó balesetek egészségügyi ellátásának költségeit. Magyarországon csupán egyetlen biztosító[5] kínál ilyen típusú terméket. Nagyszámban vannak a piacon viszont olyan biztosítások, amelyek alapvetően néhány napra érvényes utasbiztosítások, de felár ellenében kérhető hozzájuk extrémsportokra vonatkozó kiegészítő biztosítás is. Szakdolgozatomban nem ezekkel foglalkozok, hanem olyan biztosítással, melyet a rendszeresen extrémsportolók köthetnének.

Ha megnézzük a magyarországi piacon előforduló egyetlen ilyen típusú terméket, amely kimondottan azokat a sportolókat célozza meg, akik nem csak alkalomszerűen, hanem rendszeresen űzik az extrém sportokat, láthatjuk, hogy van egy alapbiztosítás és ehhez választható kétféle kiegészítő biztosítás. Az alapbiztosítás az orvosi költségek térítésére szolgál, vagyis azon korábban felsorolt ellátások finanszírozását vállalja át a biztosító,

[3] 52/2006. (XII. 28.) Egészségügyi Minisztériumi rendelet a sürgős szükség körébe tartozó egyes egészségügyi szolgáltatásokról

[4] 284/1997. (XII. 23.) Kormányrendelet térítési díj ellenében igénybe vehető egyes egészségügyi szolgáltatások térítési díjáról

melyek az extrém sportolás közben elszenvedett balesetek esetén az ügyfél/sportoló által térítendők (ezek a fogászati ellátás, a járóbeteg-szakellátás, a fekvőbeteg-gyógyintézeti ellátás, a rehabilitációs ellátások és a betegszállítás, mentés). Kiegészítő biztosításként pedig választható gyógyszer-, gyógyászati segédeszköz-ártámogatásra és utazási költségtérítésre vonatkozó biztosítás; vagy baleseti halálra és 30%-ot elérő baleseti rokkantságra vonatkozó balesetbiztosítás, vagy esetleg mindkettő egyszerre.
A sportoló/ügyfél kétféle csomag közül választhat: alap és extra csomag, amelyek mindössze a szolgáltatás összegének felső határában különböznek.
A biztosítás tartamát illetően éves és napidíjas biztosítás választható, első esetén minden biztosítási évfordulón újraköthető, utóbbi esetében pedig meghatározható a biztosítandó napok száma.
Lehetséges még ezen típusú biztosítás csoportos biztosítás formájában történő megkötése, így sportegyesületek is könnyen biztosíthatják magukat sportolásuk során.

Szakdolgozatomban egy ehhez hasonló -de néhány tekintetben egyszerűsített- extrémsport biztosítást modellezek, annyi különbséggel, hogy kiválasztok egy extrémsportot -az ejtőernyőzést-, és ezen mutatom be, hogy határozható meg a biztosítás díja, mit kell figyelembe venni, valamint, hogy a biztosító részéről milyen bevétellel járhat egy extrémsport biztosítás.
Modellemet az alapoktól kezdve építem fel. Ezalatt azt értem, hogy nem állnak rendelkezésemre konkrét magyarországi ejtőernyőzésre vonatkozó halálozási- és sérülési valószínűségek, tehát ezek becslésére is külföldi adatokból kerül sor. Meg kell említenem, hogy sajnos így sem sikerült túl sok adathoz hozzájutnom, de a számítás így is lehetséges. A valószínűségek meghatározása után -már ezeket használva- kiszámolom egy ejtőernyős biztosítás éves díját, valamint a biztosító eredményét egy ilyen típusú biztosítási állományon.
Dolgozatom második részében a piaci alapú árazás alapján is meghatározom egy ilyen típusú biztosítás díját.

1. fejezet

Adatok elemzése

A számításokhoz szükségünk van a magyarországi ejtőernyőzés halál- és sérülés valószínűségeire. Mint már említettem, ilyen adatok nem állnak rendelkezésünkre -legalább is, ahol én kerestem, nem találtam; még a Központi Statisztikai Hivatal sem tudott efféle kimutatással szolgálni-, ezért néhány másik európai ország adatát használjuk fel Magyarország paramétereinek becsléséhez. Svédország, Dánia, Hollandia, valamint egy általános, a világ különböző pontjairól származó ejtőernyősök ugrásainak „eredménye" alapján számolok. Ezekre az országokra olyan tanulmányok készültek, melyek tartalmazzák a vizsgált ejtőernyős ugrások számát, ezen belül a sérüléses és a

Ország	Időszak	Vizsgált ugrások	Sérüléses ugrások	Halálos ugrások
Dánia[6]	1979-1983	110 000	161	6
Hollandia[7]	1981-1985	193 611	267	4
Svédország[8]	1964-1973	58 215	-	5
Svédország[8]	1974-1983	262 037	-	13
Svédország[8]	1984-1993	703 782	-	10
Svédország[8]	1994-2003	1 126 704	-	9
Svédország[9]	1999-2003	539 885	257	-
Világ[10]	2000-2001	117 000	204	1

1.1. táblázat. *Ejtőernyős ugrások a különböző országokban, ottani sérülés- és halálszámok* halálos kimenetelűek számát. Ezen adatokat az (1.1) táblázat tartalmazza. Mielőtt a valószínűségek konkrét becslését elkezdenénk, vizsgáljuk meg kicsit közelebbről a rendelkezésre álló adatokat. Két kérdés merülhet fel bennünk:

- *homogénnek tekinthetők-e a különböző országok azonos időszakra vonatkozó adatai;*
- *homogénnek tekinthetők-e egy országon belüli, de különböző időszakokra vonatkozó adatok?*

Homogenitásvizsgálatok

Az előzőekben feltett két kérdést külön kell választanunk a halál és a sérülés adatainkra. Halál esetén az első kérdésre a választ a következő 4 homogenitásvizsgálat adja: mivel a Hollandiára vonatkozó számok 1981 – 1985-ből valók, ezért mindkét olyan svédországi adattal össze kell hasonlítani, ami ebbe a korszakba belenyúlik. Így lesz két χ^2-statisztika érték a svéd-holland homogenitásra (1974 – 1983 és 1984 – 1993), és további két χ^2-statisztika érték a svéd-dán és svéd-világ homogenitásra. A homogenitásvizsgálathoz szükséges számokat és párokat az (1.2) és (1.3) táblázat tartalmazza.

	Túlélt	Halálos	Össz.:		Túlélt	Halálos	Össz.:
svéd	262 024	13	262 037	svéd	703 772	10	703 782
holland	193 607	4	193 611	holland	193 607	4	193 611

1.2. táblázat. *Azonos időszaki halálszámok összehasonlítása (Svédország-Hollandia)*

	Túlélt	Halálos	Össz.:		Túlélt	Halálos	Össz.:
svéd	262 024	13	262 037	svéd	1 126 695	9	1 126 704
dán	109 994	6	110 000	világ	116 999	1	117 000

1.3. táblázat. *Azonos időszaki halálszámok összehasonlítása (Svédország-Dánia, Svédország-világ)*

A statisztika értékeit a

$$\chi^2 = nm \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\frac{N_i}{n} - \frac{M_i}{m}\right)^2}{N_i + M_i} \tag{1}$$

képlet adja, ahol r az osztályok száma. Minden esetben a nullhipotézisünk az, hogy a halálozás valószínűsége azonosnak tekinthető páronként. Az (1) alapján számolt statisztika értékek: $\chi^2_{\textit{svéd-holland 1}} = 2.5$, $\chi^2_{\textit{svéd-holland 2}} = 0.41$, $\chi^2_{\textit{svéd-dán}} = 0.04$, $\chi^2_{\textit{svéd-világ}} = 0.004$. Ezeket az értékeket hasonlítjuk össze a χ^2-próba, 1 szabadságfokú, 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű értékével, ami 2.71. Mivel ezek mindegyike kisebb ennél, ezért elmondható, hogy 10%-os elsőfajú hibavalószínűség mellett elfogadjuk a nullhipotézist, vagyis az azonos időszaki halálozási valószínűségek homogénnek tekinthetők.

Továbbra is a halálra vonatkozó számokat vizsgálva, és a második kérdésre válaszolva újabb nyolc[1] homogenitásvizsgálat elvégzésére van szükségünk, melynek során kiderül, hogy az egyes időszakok halálozási adatai homogénnek tekinthetők-e? És ha nem, esetleg felfedezhető-e bennük valami javuló vagy romló tendencia? Például történt-e valami az ejtőernyős felszerelés biztonságosabbá tétele érdekében, aminek következtében kevesebb halál következett be az idő előrehaladtával? Vagy javult esetleg az ugrásokra vonatkozó oktatás minősége? A homogenitásvizsgálathoz szükséges adatokat az (1.4) és (1.5) táblázat tartalmazza.

	Túlélt	Halálos	Össz.:		Túlélt	Halálos	Össz.:
svéd 1.	58 210	5	58 215	svéd 3.	703 772	10	703 782
svéd 2.	262 024	13	262 037	svéd 4.	1 126 695	9	1 126 704

1.4. táblázat. *Halálszámok összehasonlítása Svédország egyes időszakai között*

Az (1) képlet alapján a χ^2-statisztika értékei: $\chi^2_{\textit{svéd1-svéd2}} = 1.12$, $\chi^2_{\textit{svéd3-svéd4}} = 1.62$, $\chi^2_{\textit{svéd1-svéd3}} = 14.03$, $\chi^2_{\textit{svéd2-svéd4}} = 23.25$, $\chi^2_{\textit{svéd1-svéd4}} = 28.43$, $\chi^2_{\textit{svéd2-svéd3}} = 10.05$,

[1]Ebből hat kizárólaga svéd adatokra vonatkozik, amikből egyértelműen látszik, hogy a halálozást illetően két nagy korszak különíthető el (1984 előtt és 1984-től). Mivel Dánia adatai az első korszakból valók, ezért külön megvizsgálom a két későbbi svéd korszakkal való homogenitását azzal a céllal, hogy esetleg fel tudom-e használni Dánia halálozását is a magyarországi adatokhoz, hogy minél több adattal dolgozzak. De sajnos nem.

	Túlélt	Halálos	Össz.:		Túlélt	Halálos	Össz.:
dán	109 994	6	110 000	dán	109 994	6	110 000
svéd 3.	703 772	10	703 782	svéd 4.	1 126 695	9	1 126 704

1.5. táblázat. *Halálszámok összehasonlítása (Dánia-Svédország 3., Dánia-Svédország 4.)*

$\chi^2_{dán\text{-}svéd3} = 7.87$ és $\chi^2_{dán\text{-}svéd4} = 17.91$. Ezeket az értékeket kell az 1 szabadságfokú χ^2 eloszlás 10%-os elsőfajú hibavalószínűségű értékével, 2.71-gyel összehasonlítani. Látható, hogy az első két érték kivételével a többi lényegesen nagyobb, vagyis csak az első két esetben mondható, hogy a halálozási arányok azonosnak tekinthetők. Ez pedig azt jelenti, hogy a halálesetek száma az ejtőernyőzés sportágban jelentősen függ a bekövetkezés időpontjától. Az 1960-1970-es években lényegesen több halál jutott ugyanannyi ugrásra. Ez abból is látszik, ha megnézzük mind a négy időszakra, hogy 1000 ugrásra hány halállal végződő ugrás jut (1.6 táblázat). Látható, hogy a vizsgált 40 év alatt körülbelül 10-ed részére csökkent a halálos ugrások száma. Ezt a Magyarországra vonatkozó halálozási valószínűség megállapításánál is figyelembe vesszük.

Időszakok	Halálozások
1964-1973	0,0859
1974-1983	0,0496
1984-1993	0,0142
1994-2003	0,0080

1.6. táblázat. *Adott időszakban 1000 ejtőernyős ugrásra jutó halálozások száma*

Térjünk át a sérülésszámok vizsgálatára. Azokra a korábban feltett kérdésekre keressük a válaszokat, hogy a különböző országokból, de azonos időszakokból származó sérülésszámok homogénnek tekinthetők-e, valamint, hogy adott ország különböző időszakainak adataira is igaz-e ez?

Először vizsgáljuk meg az azonos időszakból valókat (1.7 táblázat). A már ismert képlet alapján, a statisztika értékek a következők: $\chi^2_{svéd\text{-}világ} = 220.307$ és $\chi^2_{dán\text{-}holland} = 0.357$.

Ismételten χ^2-eloszlás megfelelő kvantiliseivel kell összehasonlítanunk a kapott értékeket. Dánia és Hollandia ejtőernyős ugrásainak sérülési aránya azonosnak tekinthető, a másik párosítással(svéd-világ), viszont gond van. Ezért vizsgáljuk meg, mi történik ha Svédország adatait hasonlítjuk Dániával, Hollandiával, valamint ugyanezt tesszük a világ adatokkal is (1.8 és 1.9 táblázatok). χ^2 értékeink: $\chi^2_{\textit{svéd-dán}} = 138.67$, $\chi^2_{\textit{svéd-holland}} = 162.78$, $\chi^2_{\textit{holland-világ}} = 6.4$, és $\chi^2_{\textit{dán-világ}} = 2.77$. Látható, hogy Svédország eredménye semelyik másikkal nem tekinthető azonosnak, a világ eredmény azonos eloszlásúságát Dániával és Hollandiával viszont 1%-os elsőfajú hibavalószínűség mellett még elfogadjuk.

	Épségben	Sérüléses	Össz.:		Épségben	Sérüléses	Össz.:
svéd	539 628	257	539 885	dán	109 839	161	110 000
világ	116 796	204	117 000	holland	193 344	267	193 611

1.7. táblázat. *Azonos időszaki sérülésszámok összehasonlítása (Svédország-világ, Dánia-Hollandia)*

	Épségben	Sérüléses	Össz.:		Épségben	Sérüléses	Össz.:
svéd	539 628	257	539 885	svéd	539 628	257	539 885
dán	109 839	161	110 000	holland	193 344	267	193 611

1.8. táblázat. *Sérülésszámok összehasonlítása (Svédország-Dánia, Svédország-Hollandia)*

	Épségben	Sérüléses	Össz.:		Épségben	Sérüléses	Össz.:
holland	193 344	267	193 611	dán	109 839	161	110 000
világ	116 796	204	117 000	világ	116 796	204	117 000

1.9. táblázat. *Sérülésszámok összehasonlítása (Hollandia-világ, Dánia-világ)*

Összességében tehát azt kaptuk, hogy a Magyarországra vonatkozó ejtőernyőzés sportág halálozási valószínűségének megállapításakor célszerű csak Svédország utolsó két időszaki, Hollandia és a világra vonatkozó adatatokat teljesen figyelembe venni, mivel a korábbiak lényegesen más arányokat adnának. Továbbá láthattuk, hogy az idő nem befolyásolja a sérülésszámot, így a sérülés valószínűségét Dánia, Hollandia és a világ adatai alapján becsülhetjük.

Magyarországi ejtőernyősökre vonatkozó halál- és sérülésvalószínűségek

Mivel kevés ország adata áll rendelkezésünkre -és mint láttuk az előző részben, azokból sem praktikus mindent felhasználnunk-, a következőképpen határozzuk meg a számunkra szükséges valószínűségeket. Feltesszük, hogy minden országnak van egy θ_i paramétere, amelyből a rá jellemző ejtőernyős balesetből származó halál valószínűsége számítható. Továbbá azt is feltesszük, hogy ez a valószínűségi változó Gamma-eloszlású, és a következő transzformációval kapjuk meg belőle a konkrét halálozási valószínűségeket:

$$p_i = \frac{\theta_i}{1+\theta_i}. \tag{2}$$

Ha ezt feltételezzük Magyarország paraméteréről is, már csak a gamma-eloszlás α-ját és λ-ját kell meghatároznunk.

Legyen θ_1 a hollandok, θ_2 a svédek, θ_3 a világ, és θ_4 a magyarok paramétere.

Határozzuk meg az egyes országok halálozási valószínűségeinek maximum-likelihood becslését. Mivel egy halálozást modellező valószínűségi változó binomiális eloszlású, így a $Bin(m,p)$-eloszlás p paraméterének becslésére van szükségünk, feltéve, hogy m ismert.

A binomiális eloszlás:

$$P(X_i = k_i) = \binom{m}{k_i} p^{k_i}(1-p)^{m-k_i},$$

likelihood függvénye n elemű mintára:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} \binom{m}{k_i} p^{k_i}(1-p)^{m-k_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} \binom{m}{k_i}\right) p^{\sum_{i=1}^{n} k_i}(1-p)^{nm-\sum_{i=1}^{n} k_i}.$$

Ennek logaritmusa:

$$l(p) = \sum_{i=1}^{n} log\binom{m}{k_i} + logp\sum_{i=1}^{n} k_i + log(1-p)(nm - \sum_{i=1}^{n} k_i).$$

Deriváljuk p szerint:

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{p} - \frac{nm - \sum_{i=1}^n k_i}{1-p} = 0.$$

Rendezve:

$$\sum_{i=1}^n k_i - p\sum_{i=1}^n k_i - pnm + p\sum_{i=1}^n k_i = 0.$$

Innen:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{nm} = \frac{\bar{x}}{m}.$$

Vagyis a binomiális eloszlás p paraméterének maximum-likelihood becslése a „halállal végződő ugrások száma / az összes ugrás száma”. Mivel $X_{Hollandia} \sim Bin(193611, \hat{p})$, $X_{Svédország} \sim Bin(1830486, \hat{p})$ és $X_{világ} \sim Bin(117000, \hat{p})$, ezért $\hat{p_1} = 0.00002065999$, $\hat{p_2} = 0.00001037975$ és $\hat{p_3} = 0.00000854700$. (2) alapján kapjuk a $\theta_1 = 0.00002066041$, $\theta_2 = 0.00001037986$, és $\theta_3 = 0.00000854708$ becsléseket. Ezek alapján becsüljük θ_4 várható értékét és szórást:

$$\hat{E}\theta_4 = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{3} = 0.00001319579, \quad D^2\theta_i = 0.0000000000284202.$$

A $\Gamma(\alpha, \lambda)$ paramétereinek becslését momentumok módszerével végezzük.

$$m_1(\alpha, \lambda) = E_{\alpha,\lambda}\theta_i = \frac{\alpha}{\lambda},$$

$$m_2(\alpha, \lambda) = E_{\alpha,\lambda}\theta_i^2 = D^2_{\alpha,\lambda}\theta_i + (E_{\alpha,\lambda}\theta_i)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Innen $\hat{\alpha} = \frac{\bar{\theta_i}}{S_n^2}$, valamint $\hat{\lambda} = \frac{1}{S_n^2}$, ahol S_n^2 a tapasztalati szórásnégyzet. $\bar{\theta} = 0,000013195785$ és $S_n^2 = 0,0000000000284202$. Kiszámítva, Magyarország paramétere $\theta_4 \sim \Gamma(6.13; 464310.76)$ eloszlású valószínűségi változó. Az előbbi számítás nem tekinthető teljesen precíznek, hiszen különböző módszereket alkalmaztunk. Azt gondoltuk azonban, hogy α-ra és λ-ra pontosan felírni a likelihood vagy momentum egyenleteket aránytalanul nagy munkát jelentett volna.

Az eloszlás $99,5\%$-os kvantilise: 0.00003089. Kiszámolható továbbá, hogy a legnagyobb olyan $p_{halál}$ valószínűség, amelyre 1%-os elsőfajú hibavalószínűség mellett egyik olyan hipotézist sem tudjuk elutasítani, mely szerint Magyarország valószínűsége homogén marad a többi országéval, az a valószínűség $p_{halál} = 0,0000207589$.

A sérülésvalószínűségek meghatározásánál hasonlóan járunk el. Legyen ξ_i az egyes országok paramétere, melyből a sérülés valószínűségek számíthatók. A becsléshez felhasznált országok: Dánia, Hollandia és a világ. A ξ_1 Dánia, ξ_2 Hollandia, ξ_3 a világ és ξ_4 Magyarország paramétere. Egy sérülést modellező valószínűségi változóról -ha csak a sérülés tényét vesszük figyelembe-,ugyanúgy elmondható, hogy binomiális eloszlású, vagyis az előbbieket egy az egyben felhasználhatjuk a sérülés adatainkra. Mivel $X_{Dánia} \sim Bin(110000, \hat{p})$, $X_{Hollandia} \sim Bin(193611, \hat{p})$ és $X_{világ} \sim Bin(117000, \hat{p})$, ezért $\hat{p_1} = 0.001463636$, $\hat{p_2} = 0.001379054$ és $\hat{p_3} = 0.00174359$. Innen a $p_i = \frac{\xi_i}{1+\xi_i}$ transzformációval adódnak: $\xi_1 = 0.001465782$, $\xi_2 = 0.001380958$ és $\xi_3 = 0.001746635$. Magyarország paraméterének várható értékének becslése:

$$\hat{E}\xi_4 = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3} = 0.001531125.$$

A Gamma-eloszlás paramétereinek becsléséhez $\bar{\xi_i} = 0.001531125$ és $D^2\xi_i = 0.00000002442$, amiből $\hat{\alpha} = 95.99520109$ és $\hat{\lambda} = 62695.85906$.

A magyarországi ejtőernyőzésre vonatkozó sérülésvalószínűséget meghatározó paraméter, $\xi_4 \sim \Gamma(96; 62695.86)$ eloszlású valószínűségi változó. Az eloszlás $99,5\%$-os kvantilise 0.0019635. Kiszámolható továbbá, hogy a legnagyobb olyan $p_{sérülés}$ valószínűség, amelyre 1%-os elsőfajú hibavalószínűség mellett egyik olyan hipotézist sem tudjuk elutasítani, mely szerint Magyarország valószínűsége homogén marad a többi országéval, az a valószínűség $p_{sérülés} = 0.0016775933$.

2. fejezet

Extrém sport biztosítás díja 1.

Ebben a részben az imént megbecsült -vagyis, a magyarországi ejtőernyősökre vonatkozó halál és sérülés- valószínűségek várható értékét felhasználva kiszámoljuk egy ejtőernyőzésre -mint extrém sportra- vonatkozó balesetbiztosítás díját.

A modell megalapozása

Biztosításunk olyan sportolókat céloz meg, akik nem csak alkalomszerűen, hanem rendszeresen ejtőernyőznek. Mivel a TB az ő sportbalesetből adódó egészségügyi ellátásuk költségét megtéríttети velük, szükségük van olyan biztosításra, mely szükség esetén helyettük fizeti az egyáltalán nem olcsó ellátás költségeit. Termékünk tehát fedezetet nyújt baleseti halálra, balesetből eredő rokkantságra legalább 40%-os rokkantság esetén, és sérülések esetén az orvosi ellátások költségeire.
Vizsgáljuk meg ezeket kicsit részletesebben.

Orvosi ellátások költségei

Biztosításunkban az orvosi költségek térítését 10 millió Ft-ig vállaljuk. Első hallásra ez soknak tűnhet, de ha kicsit belegondolunk, milyen ellátásokra is lehet szükség, és ezek valós árainak utánajárunk, láthatjuk, hogy egyáltalán nem elérhetetlen összegről van szó. Az egyik magyarországi kórház honlapján[11] mindenki számára elérhetők a térítésköteles ellátások, árakkal együtt. Ugyanitt külön pont vonatkozik az extrém sportolókra, leírva, hogy a rajtuk végrehajtott beavatkozásokért mekkora összeget fizettetnek meg velük. Célom nem a pontos összegek ismertetése, inkább csak a nagyságrendeké, hogy egy extrém sport balesetben elszenvedhető sérülés kezelése forintban hogyan mérhető, milyen összegek körül mozog.

Ellátás típusa járóbetegnél	Ár
Ultrahangos vizsgálat	2-10 000 Ft
Röntgen	8 000Ft-tól/db
CT	16-75 000Ft/db
Gipszelés	1-30 000Ft/db
Varratkészítés, szedés	1-2 000Ft
EKG	1-10 000Ft
Laborvizsgálatok	1 000Ft/db
MR vizsgálat kontrasztanyaggal	150 000Ft/db
Ellátás típusa fekvőbetegnél	**Ár**
Ápolás szobában[1]	20-28 000Ft/nap
Ápolás szobában[2]	110 000Ft/nap
Műtét nélkül, gipszrögzítés	10 000 Ft/db
Egyszerű műtét	25 000 Ft/db
Közepes műtét	60 000Ft/db
Nagyműtét	125 000Ft/db
Speciális műtét	200 000Ft/db
Érzéstelenítés	10-50 000Ft/db

2.1. táblázat. *Orvosi ellátások költségei*

Ejtőernyős baleset során egyaránt szerezhető olyan sérülés, mely miatt járóbeteg szakellátásra van szüksége a biztosítottnak, és olyan sérülés is, mely fekvőbeteg ellátást igényel. A (2.1) táblázatban olyanokat sorolok fel mindkét kategóriából, melyek szerin-

[1] Baleseti vagy idegsebészeten, 4 ágy feletti szobában

[2] Intenzív osztályon, 4 ágy feletti szobában

tem egy ejtőernyős baleset során elképzelhető ellátások közé tartoznak, természetesen a teljesség igénye nélkül, és kizárólag a nagyságrendek ismertetése végett. Egy kis magyarázat, hogy az egyes kategóriákba milyen típusú műtéteket sorolnak:

Egyszerű beavatkozások például: ficamok helyretétele, törések rögzítése, perifériás sérülések ellátása, kis kötőhártya- illetve szemhéji sebzés ellátása, ujj amputáció.

Közepes beavatkozásnak számítanak például: műtét a nyelőcső nyaki szakaszán, végtag csonkolása, idegen test eltávolítása, ízületi szalagok varrata, perifériás idegműtétek, koponyacsont plasztika, csonttörés feltárás.

Nagy műtétek például: combnyaktáji szegezés, lemezes csontegyenesítés, áthatoló mellkasi sérülés műtéte, áthatoló hasi sérülés műtéte, mellkasi szervek fedett sérülésének műtéte, hasi szervek fedett sérülésének műtéte, vállficam műtét, nyaki gerincsérülés műtéte, koponyaűri sérülés, végtag aneurizma.

Különleges műtétek például: súlyos végtagsérülés ellátása, műtétek mellkasi, hasi nagyereken.

És ezekben a költségekben még nem szerepelnek az esetleges rehabilitációs költségek (amelyek költsége 25-30 000Ft/nap is lehet [12]), valamint a kezelés idejére a munkából való kiesés miatti bércsökkenés sem, amelyek egy hónap esetén is jelentősek, nem hogy egy több hónapig tartó felépülés során. Továbbá, ha a baleset nehezen megközelíthető helyen történt, akkor pluszban még betegszállítási és mentési költségek is felmerülhetnek. Az adatokból látható, hogy már néhány intenzív osztályon töltött nap, és néhány műtét esetén a költségek gyorsan az egekbe szökhetnek. A [13] cikkből tudjuk, hogy egy ejtőernyős sérülés átlagosan 3 000 000Ft, vagyis ha valaki megsérül és ellátásra szorul, igen nagy összegek terhelhetik.

Rokkantság

Baleseti rokkantságnak az minősül, ha a biztosított akaratától független, hirtelen fellépő, külsö behatás következtében egy éven belül súlyos, és maradandó károsodást szenved. Biztosításunk arra az esetre térít, ha a rokkantság mértéke legalább 40%-os. Hogy ez pontosan mit is jelenthet, milyen testrészek mennyire károsodhatnak, a (2.2) táblázat tartalmazza.

Testrészek egészségkárosodása	Rokkantság foka
Egyik felső végtag vállízülettől való teljes elvesztése vagy teljes működésképtelensége	70%
Egyik felső végtag könyökízület fölött való teljes elvesztése vagy teljes működésképtelensége	65%
Egyik felső végtag könyökízület alatt való teljes elvesztése/működésképtelensége vagy egyik kéz teljes elvesztése/működésképtelensége	60%
Egyik hüvelykujj teljes elvesztése vagy működésképtelensége	20%
Egyik mutatóujj teljes elvesztése vagy működésképtelensége	10%
Bármely más ujj teljes elvesztése vagy működésképtelensége	5%
Egyik alsó végtag combközép fölött való teljes elvesztése vagy működésképtelensége	70%
Egyik alsó végtag combközépig való teljes elvesztése vagy működésképtelensége	70%
Egyik alsó végtag lábszár közepéig való, vagy egyik lábfej teljes elvesztése vagy működésképtelensége	50%
Egyik lábfej boka szintjében való elvesztése vagy teljes működésképtelensége	30%
Egyik nagylábujj teljes elvesztése vagy működésképtelensége	5%
Bármely más lábujj teljes elvesztése vagy működésképtelensége	2%
Mindkét szem látóképességének teljes elvesztése	100%
Egyik szem látóképességének teljes elvesztése	35%
Amennyiben a biztosított a másik szem látóképességét már a biztosítási eseményt megelőzően elvesztette	65%
A beszélőképesség teljes elvesztése	60%
A szaglóérzék teljes elvesztése	10%
Az ízlelőképesség teljes elvesztése	5%

2.2. táblázat. *Csonkolási táblázat[14]*

Baleseti halál

Baleseti halál definíciója általában, ha a biztosított akaratától független, hirtelen fellépő, külsö behatás következtében egy éven belül meghal.

A modell

Adottak egy ejtőernyős ugrás esetén a következő valószínűségek: halál valószínűsége: $\hat{p}_{halál} = 0,00001320$, sérülés valószínűsége: $\hat{p}_{sérülés} = 0,001528$. A biztosítás tartama 1 év. A tartam végén újraköthető a következő évre. A számítások könnyebb elvégezhetősége miatt feltesszük, hogy minden szerződés január 1. - december 31. időszakra szól. A díj január 1-jén esedékes. A biztosítási összeg ejtőernyős balesetből származó halál esetén *5 millió Ft*. A biztosítási összeg ejtőernyős balesetből származó, legalább 40%-os rokkantság esetén legfeljebb *10 millió Ft*. Az orvosi költségek térítése legfeljebb *10 millió Ft*-ig történik. Minden szerződésre a lehetséges kifizetés nagysága 0-10 000 000Ft-ig terjed. Ezt legjobban folytonos valószínűségi változóval lehetne leírni, de a könnyebb számítás érdekében diszkretizáljuk: az i. szerződés kárkifizetését leíró X_i valószínűségi változó a következőképpen néz ki:

$$X_i = \begin{cases} 10\,\text{millió Ft} & 0,00001529 \\ 9\,\text{millió Ft} & 0,00004586 \\ 8\,\text{millió Ft} & 0,00007644 \\ 7\,\text{millió Ft} & 0,00007644 \\ 6\,\text{millió Ft} & 0,00009173 \\ 5\,\text{millió Ft} & 0,00001320 \quad \text{valószínűséggel.} \\ 4\,\text{millió Ft} & 0,00015288 \\ 3\,\text{millió Ft} & 0,00022932 \\ 2\,\text{millió Ft} & 0,00018345 \\ 1\,\text{millió Ft} & 0,00065738 \\ 0\,\text{millió Ft} & 0,99845802 \end{cases}$$

Látható, hogy 5 millió Ft-ot csak halál esetén fizetünk ki, a többi érték sérülés és rokkantság esetén kerül kifizetésre. Ezeken belül az eloszlás úgy lett meghatározva, hogy a már említett 3 millió Ft-os várható értéket kapjuk.

A biztosító szerződéssel kapcsolatos költségei a következők:

-Ügynököknek járó kezdeti jutalék: 30%

-Ügynököknek járó folyamatos jutalék: 10%

-Kezdeti költség: 30%

-Folyamatos költség: 15%

-Kezdeti darab költség: *5000Ft*

-Folyamatos darab költség: *1000Ft.*

A törlést -vagyis a biztosítás felmondásának valószínűségét- fixnek tekintjük, 30%-os értékkel minden évre. A törlések közé tartoznak azok a szerződések is, amelyek természetes halál miatt szűnnek meg. Technikai kamatláb 5%. Kezdeti állományunk *10 ezer darab* szerződésből áll. Modellünkben kizárólag ezekkel a szerződésekkel végzünk számításokat, először egy évre, majd kifutásig. Feltételezzük, hogy a biztosító most vezeti be az extrém sport biztosítás terméket, ezzel a kezdeti állománnyal, és erre végzi a kalkulációt.

Első lépésként modellezzük 20 évre előre biztosítási állományunkat. Az állományt a törlés, és a baleseti halál következtében megszűnt szerződések csökkentik. Fix törlési százalék mellett a 20.év végére a 10 ezres állományból várhatóan csupán 8 szerződés marad életben, nincs is értelme hosszabb távra nézni. A (2.3) táblázat tartalmazza állományunk alakulását évről-évre.

Második lépésként kiszámítjuk a várható jövőbeli bevételeket és a várható jövőbeli kiadásokat. Ezen termék esetében a bevétel kizárólag díjbevételből áll, meghatározásához szükségünk van a biztosítás díjára, amit egyelőre még nem tudunk. Állítsuk ezt kezdetben 20 000Ft-ra, majd a későbbiekben módosítjuk a feltételeknek megfelelően. Az

$$\textit{éves díjbevétel} = \textit{állomány év elején} \times \textit{biztosítás díja}$$

képlet alapján mind a 20 évre kiszámítjuk a várható díjbevételeket, majd meghatározzuk ezek diszkontált értékeit is az 5%-os technikai kamatláb segítségével.

Év	Év elején	Törlés	Baleseti halál miatti megszűnés	Év végén
1.év	10000,000	3000,000	0,132	6999,868
2.év	6999,868	2099,960	0,092	4899,815
3.év	4899,815	1469,945	0,065	3429,806
4.év	3429,806	1028,942	0,045	2400,819
5.év	2400,819	720,246	0,032	1680,542
6.év	1680,542	504,162	0,022	1176,357
7.év	1176,357	352,907	0,016	823,434
8.év	823,434	247,030	0,011	576,393
9.év	576,393	172,918	0,008	403,468
10.év	403,468	121,040	0,005	282,422
11.év	282,422	84,727	0,004	197,692
12.év	197,692	59,308	0,003	138,382
13.év	138,382	41,514	0,002	96,865
14.év	96,865	29,060	0,001	67,804
15.év	67,804	20,341	0,001	47,462
16.év	47,462	14,239	0,001	33,223
17.év	33,223	9,967	0,000	23,256
18.év	23,256	6,977	0,000	16,279
19.év	16,279	4,884	0,000	11,395
20.év	11,395	3,418	0,000	7,976

2.3. táblázat. *A biztosítási állomány alakulása*

A várható jövőbeli kiadásokat már több tag összege adja. Egyrészt állnak a biztosító kárkifizetéseiből, másrészt a költségekből. A kárkifizetések nem egyösszegben történnek, hanem három részletben: első évben a kár nagyságának 60%-át, második évben a kár nagyságának 30%-át, és harmadik évben a fennmaradó 10%-ot fizetjük ki. Ezek alapján:

$$\textit{éves haláleseti kárkifizetés} = \sum_{\textit{utolsó 3 évre}} \textit{állomány év elején} \times \textit{halál valószínűsége} \times \\ \times \textit{halál eseti biztosítási összeg} \times \textit{kárkifizetés aránya}$$

$$\begin{aligned} \textit{éves sérüléses kárkifizetés} &= \sum_{\textit{utolsó 3 évre}} \textit{állomány év elején} \times \textit{sérülés valószínűsége} \times \\ &\times \textit{sérülés esetén a várható kárnagyság} \times \textit{kárkifizetés aránya} \end{aligned}$$

Így kiszámítjuk mind a 20 évre a várható kárkifizetéseket halálra és sérülésre egyaránt.
A költségeknél is az év elején meglévő szerződésekre kell minden egyes költséget számolni.
Végül a várható kiadásokat évenként összeadjuk, és technikai kamatláb segítségével kiszámítjuk a jelenértéküket.

Mielőtt tovább építenénk modellünket, a biztosítás díjára vonatkozó egyik elvárásunk alapján -vagyis, hogy a 0. időpillanatban „a várható jövőbeli kiadások jelenértéke” – „a várható jövőbeli bevételek jelenértéke” ≤ 0[1]-, már meg tudunk határozni egy körülbelüli, még nem végleges díjat. Excel solver segítségével kiszámítva az eddig $20000 Ft$-ra állított díj lecsökken $13110 Ft$-ra.
Kiszámíthatóak az egy éves várható eredmények is, minden egyes évre „az adott évi várható kiadások” – „az adott évi várható bevételek”. Rögtön ellenőrizni is tudjuk, hogy az eddig meghatározott díj tényleg megfelelő-e, ugyanis az összes egy éves eredmény összegének a gazdasági tartalék 0. időpontbeli értékével kell megegyeznie, ami most 0, és az összeg is 0, vagyis a díj megfelelő.
Folytassuk a modell felépítését a végleges díj meghatározásához.

Harmadik lépésben meghatározzuk a kárkifizetések 99.5%-os kvantilisét: minden i szerződés kifizetéseit a fejezet elején megadott X_i valószínűségi változó modellezi. A valószínűségi változónk 11 értéket vehet fel a megadott valószínűségekkel. Minden év elején a szerződésszámnak megfelelő darabszámú ilyen típusú valószínűségi változónk van. Arra vagyunk kíváncsiak minden évre, hogy az összes szerződésre nézve mekkora

[1] Ezt nevezzük a későbbiekben gazdasági tartaléknak.

az az összeg, melynél nagyobb összkifizetés valószínűsége legfeljebb[2] 0.5%, vagyis

$$Y_{99.5\%} = max\left\{Y_{\textit{kifizetés}} | P(Y \geq Y_{\textit{kifizetés}}) \leq 0.5\%\right\},$$

ahol Y az egész állományra vonatkozó kárkifizetés adott évre. Tehát minden évre annyi ugyanolyan X_i változó konvolucióját kell meghatároznunk, és ezek alapján a kvantilist kiszámolnunk, amennyi szerződésünk év elején még életben van. A konvolució számításához egy excel makrót írok, és ez számítja ki mind a 20 évre a kifizetések 99.5%-os kvantiliseit. Ezeket az értékeket a (2.4) táblázat tartalmazza.

Általánosságban a tőkeszükséglet fejezi ki annak a pénzmennyiségnek az értékét, amellyel a biztosítónak rendelkeznie kell a díjbevételeken és kamatokon felül, hogy kiadásait fedezni tudja. Modellünkben kétféle tőkeszükségletet számolunk:
Gazdasági tőkeszükséglet: kiszámítjuk, hogy mekkora az a tőkenagyság, amit az a biztosítónak minden egyes évben hozzá kell tennie a meglévő tőkéjéhez, hogy a kifizetéseit minden évben, a legrosszabbakat feltételezve is teljesíteni tudja. Minden évre a:

$$\begin{aligned} \textit{gazdasági tőkeszükséglet} &= max\{0, \\ &\qquad Y_{99.5\%} + \textit{költségek az egész állományra} - \textit{díjbevételek}\}. \end{aligned}$$

Törvényi tőkeszükséglet esetén egy egyszerűsítéssel élünk a valóságban számolthoz képest: legyen az első évben 0, a második évtől kezdve pedig:

$$\begin{aligned} \textit{törvényi tőkeszükséglet} &= max\{0.18 \times \textit{előző évi díjbevétel}, \\ &\qquad 0.28 \times \textit{előző évek átlagos kárfelhasználása}\}. \end{aligned}$$

A biztosító a várható kifizetésein túl egy ún. *kockázati többlet*et is számít, arra az esetre, ha mégsem lenne elegendő a kifizetésekre megképzett tőke. Ennek mértéke az előző két tőkeszükséglet maximumának 2.5%-a.
A kockázati többletekből kiszámítható a *kockázati tartalék* nagysága: minden év elejére

[2]Mivel diszkretizáltuk a kifizetést modellező valószínűségi változónkat, emiatt az $Y_{\textit{kifizetés}}$ csak egész értékeket vehet fel, ezért nem biztos, hogy egyenlőség teljesül, amikor a 99.5%-os kvantilist keressük, ezért engedjük meg, hogy $\leq 0.5\%$ legyen a valószínűség.

Év	Összkárkifizetések 99.5%-os kvantilise
1.év	92 *millió Ft*
2.év	53 *millió Ft*
3.év	39 *millió Ft*
4.év	32 *millió Ft*
5.év	27 *millió Ft*
6.év	24 *millió Ft*
7.év	22 *millió Ft*
8.év	20 *millió Ft*
9.év	17 *millió Ft*
10.év	15 *millió Ft*
11.év	13 *millió Ft*
12.év	11 *millió Ft*
13.év	10 *millió Ft*
14.év	9 *millió Ft*
15.év	9 *millió Ft*
16.év	8 *millió Ft*
17.év	7 *millió Ft*
18.év	6 *millió Ft*
19.év	5 *millió Ft*
20.év	4 *millió Ft*

2.4. táblázat. *A éves összkárkifizetések* 99.5%*-os kvantilisei*

a hátralevő évek kockázati többletei jelenértékeinek összege.

A *gazdasági eredmény:* „díjbevételek" - „kiadások" - „kockázati többlet".

Az *összesített eredmény* minden évre: a hátralevő évek gazdasági eredményei jelenértékeinek összege.

Elérkeztünk ahhoz a ponthoz, ahol a végleges biztosítási díjat meg tudjuk határozni: az összesített eredménynek a 0. időpillanatban nullának kell lennie. Ez most még nem

teljesül, egyelőre még negatív. Excel solver segítségével viszont könnyen nullává tehető.
Így a biztosítás végső díja: **14 225Ft.**
A (2.1) ábra tartalmazza ezen díj mellett az eddig kiszámoltakat.

A biztosítás díja

Láthatjuk, hogy a biztosítási díj meghatározása „visszafelé" történik. Kezdetben megadunk egy „tetszőleges" biztosítási díjat, amivel felépítjük modellünket, majd két lépésben excel solver segítségével meghatározzuk az optimális, feltételeket teljesítő díjat.
A két teljesítendő feltétel:
-A 0. időpillanatban „a várható jövőbeli kiadások jelenértéke" – „a várható jövőbeli bevételek jelenértéke" ≤ 0, és
-Az összesített eredmény a 0. időpillanatban ≥ 0.
Ezek alapján egy ejtőernyőzésre vonatkozó extrém sport biztosítás díja $14225Ft$.

Most egy második, részben hasonló módon is meghatározzuk a biztosítás díját. Eddig ugyanis még nem használtuk ki, hogy halálozási- és sérülés valószínűségeinket gamma-eloszlású valószínűségi változók várható értékeiből transzformáltuk. Ezt figyelembe véve, egy 50 ezres szimulációval határozzuk meg a biztosítás díját.
Emlékeztetőül: θ_i-vel jelöltük a halálozási valószínűségeket előállító valószínűségi változókat, és ξ_i-vel a sérülési valószínűséget előállító, gamma-eloszlású valószínűségi változókat.
Szimulációnk lépései: minden egyes szimulációban

1. „kisorsolunk" θ_i és ξ_i-ket,
2. ezekből előállítjuk a nekik megfelelő halál és sérülés valószínűségeket a már ismert transzformációval,
3. majd ezeket használva „kisorsolunk" konkrét halál és sérülésszámokat minden egyes évre, amikből az adott évi kárkifizetéseket meg tudjuk határozni.

Ezt elvégezzük 50 ezerszer.

Végül az 50 ezer eredményt évenként sorbarendezve meghatározzuk a kárkifizetések évenkénti 99.5%-os kvantilisét -(2.5) táblázat-, melyet beírva az előző modell kvantiliseinek helyébe, és a összesített eredményt legalább 0-ra állítva (excel solver segítségével) megkapjuk, hogy a biztosítás díja **14 124Ft.** Ezen díj mellett az eredményeket a (2.2) ábra tartalmazza.

Év	Összkárkifizetések 99.5%-os kvantilise
1.év	78 *millió Ft*
2.év	59 *millió Ft*
3.év	45 *millió Ft*
4.év	33 *millió Ft*
5.év	27 *millió Ft*
6.év	21 *millió Ft*
7.év	15 *millió Ft*
8.év	12 *millió Ft*
9.év	9 *millió Ft*
10.év	6 *millió Ft*
11.év	6 *millió Ft*
12.év	3 *millió Ft*
13.év	3 *millió Ft*
14.év	3 *millió Ft*
15.év	3 *millió Ft*
16.év	0 *millió Ft*
17.év	0 *millió Ft*
18.év	0 *millió Ft*
19.év	0 *millió Ft*
20.év	0 *millió Ft*

2.5. táblázat. *A éves összkárkifizetések* 99.5%*-os kvantilisei*

Év	Gazdasági tartalék	1 éves várható eredmény	Y_99,5%/1M	Gazdasági tőkeszükséglet	Törvényi tőkeszükséglet	Kockázati többlet	Kockázati tartalék	Gazdasági eredmény	Összesített eredmény
1.év	-18 401 711	66 575 670	92	130 661 684	-	3 266 542	18 401 711	-69 842 212	-0
2.év	-84 977 381	-32 558 490	53	-	25 605 979	1 723 562	15 135 169	32 462 853	69 842 212
3.év	-52 418 891	-17 485 450	39	-	17 923 847	4 783 143	13 493 682	14 494 565	38 925 209
4.év	-34 933 441	-11 656 747	32	-	12 546 457	3 173 763	9 155 229	10 320 378	25 778 212
5.év	-23 276 694	-7 771 018	27	3 786 102	8 782 354	2 124 919	6 413 614	7 320 802	16 863 081
6.év	-15 505 676	-5 180 581	24	7 750 578	6 885 040	1 463 845	4 665 437	5 148 035	10 840 239
7.év	-10 325 095	-3 453 656	22	10 625 619	6 187 286	1 114 117	3 518 476	3 514 112	6 806 619
8.év	-6 871 440	-2 302 394	20	12 038 083	5 573 234	872 913	2 687 105	2 366 786	4 184 334
9.év	-4 569 046	-1 534 900	17	11 426 763	5 041 857	672 887	2 066 743	1 594 860	2 502 303
10.év	-3 034 146	-1 023 247	15	11 098 808	4 584 488	539 567	1 611 307	1 047 826	1 422 840
11.év	-2 010 899	-682 152	13	10 269 217	4 190 826	435 416	1 263 497	675 738	747 402
12.év	-1 328 746	-454 760	11	9 088 488	3 851 069	349 528	996 189	428 265	332 557
13.év	-873 987	-303 167	10	8 661 967	3 556 600	300 463	791 827	243 982	82 159
14.év	-570 820	-202 108	9	8 063 394	3 300 108	260 307	624 519	120 797	-53 699
15.év	-368 712	-134 736	9	8 344 388	3 075 496	250 166	486 472	16 602	-117 760
16.év	-233 976	-89 822	8	7 541 081	2 877 721	219 471	360 121	-32 737	-126 145
17.év	-144 154	-59 880	7	6 678 762	2 702 627	189 641	254 552	-58 930	-110 398
18.év	-84 273	-39 920	6	5 775 138	2 546 787	161 068	167 675	-69 572	-83 402
19.év	-44 354	-26 612	5	4 842 600	2 407 373	133 332	97 401	-69 286	-53 048
20.év	-17 741	-17 741	4	3 889 822	2 282 045	106 130	41 999	-61 298	-24 258

2.1. ábra. *14 225Ft-os díj mellett az eredmény*

Év	Gazdasági tartalék	1 éves várható eredmények	X_99,5%/1M	Gazdasági tőkeszükséglet	Törvényi tőkeszükséglet	Kockázati többlet	Kockázati tartalék	Gazdasági eredmény	Összesített eredmény
1.év	- 16 719 819,97	66 728 639,74	78,00	116 814 653,97	-	2 920 366,35	16 719 819,97	- 69 649 006,09	- 0,00
2.év	- 83 448 459,71	- 32 048 600,69	59,00	-	25 422 415,24	1 617 569,70	13 799 453,62	32 033 461,02	69 649 006,09
3.év	- 51 399 859,02	- 17 145 529,70	45,00	-	17 795 355,21	4 698 185,35	12 258 911,05	14 204 761,15	39 140 947,97
4.év	- 34 254 329,32	- 11 430 137,66	33,00	98 992,26	12 456 513,82	3 116 315,06	7 997 518,44	10 115 498,05	26 256 810,88
5.év	- 22 824 191,66	- 7 619 948,13	27,00	3 969 728,73	8 719 395,30	2 086 517,10	5 305 528,32	7 175 577,47	17 518 663,34
6.év	- 15 204 243,53	- 5 079 869,66	21,00	4 879 114,01	6 885 040,45	1 417 661,45	3 588 945,54	5 065 682,54	11 615 297,99
7.év	- 10 124 373,87	- 3 386 515,93	15,00	3 715 592,53	6 187 285,67	985 777,39	2 478 170,70	3 552 477,85	7 646 203,17
8.év	- 6 737 857,94	- 2 257 634,73	12,00	4 101 063,68	5 573 233,80	694 838,41	1 742 568,43	2 481 880,37	4 995 289,51
9.év	- 4 480 223,21	- 1 505 061,45	9,00	3 470 848,80	5 041 857,19	497 681,25	1 248 759,75	1 725 979,98	3 231 463,46
10.év	- 2 975 161,76	- 1 003 355,38	6,00	2 129 667,12	4 584 488,30	363 507,43	911 909,49	1 193 026,09	2 063 252,27
11.év	- 1 971 806,38	- 668 890,98	6,00	3 290 818,06	4 190 825,85	271 704,11	677 589,36	817 848,82	1 294 217,02
12.év	- 1 302 915,40	- 445 918,91	3,00	1 103 608,39	3 851 068,61	208 452,24	510 786,61	554 220,43	792 128,79
13.év	- 856 996,49	- 297 273,67	3,00	1 672 550,90	3 556 599,66	164 483,37	388 908,90	369 377,43	468 087,59
14.év	- 559 722,81	- 198 178,71	3,00	2 070 803,14	3 300 107,75	133 576,69	297 318,40	240 118,83	262 404,41
15.év	- 361 544,10	- 132 116,65	3,00	2 349 574,46	3 075 495,79	111 552,37	226 479,83	150 029,56	135 064,27
16.év	- 229 427,45	- 88 076,11	0,00	-	2 877 721,15	95 597,85	170 138,31	87 506,05	59 289,14
17.év	- 141 351,34	- 58 716,30	0,00	-	2 702 626,82	83 816,94	124 154,11	44 353,38	17 197,24
18.év	- 82 635,05	- 39 143,46	0,00	-	2 546 786,85	74 928,09	85 756,60	14 789,44	- 3 121,55
19.év	- 43 491,59	- 26 095,15	0,00	-	2 407 373,28	68 062,49	53 065,73	- 5 261,40	- 9 574,14
20.év	- 17 396,44	- 17 396,44	0,00	-	2 282 045,17	62 628,83	24 784,36	- 18 668,90	- 7 387,92

2.2. ábra. *14 124Ft-os díj mellett az eredmény*

3. fejezet

Piaci alapú árazás

Ebben a fejezetben egy olyan módszert szeretnék bemutatni, mely nemcsak megadja egy biztosítási termék árát, de közben maximalizálja a biztosító hasznosságát. Bemutatjuk a tőkepiaci modellt, ezt hasonlítjuk össze a biztosítási piaci modellel. Ennek során láthatjuk majd, hogy míg a tőkepiaci modell teljes, ugyanez nem mondható el a biztosítási piacról, ugyanis a biztosításban előforduló káresemények nem feleltethetők meg semmilyen olyan eszköznek, melyekkel a tőkepiacon kereskedhetünk. A teljesség itt tulajdonképpen a „kiszámíthatalanság, bizonytalanság" hiányát jelenti. Míg egy kötvény élete „előre meghatározott", egy biztosításnak nem tudhatjuk a jövőbeli kimenetelét.
A bemutatásnál a [15] cikket követtem.

A tőkepiaci modell

Rögzítsük az $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ valószínűségi mezőt, és tekintsük a $\mathcal{B}$ leíró σ-algebrával asszociált $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ filtrációt. Ekkor az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ *tőkepiaci modell*hez jutunk.

1. Feltevés. *A rögzített $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ tőkepiacon létezik L darab, $\mathcal{F}$-adaptált pénzügyi eszköz, $A_1, \dots, A_L$, amikkel kereskedünk. A piacon más eszköz nincs.*

Egy A_j pénzügyi eszközt, $j = 1, \dots L$, két pozitív folyamat karakterizál:

- *árfolyamat*: $\mathbf{q}_j = (q_{j,t} : t = 0, \dots, T)$, és
- *jutalék-kifizetési folyamat*: $\mathbf{D}_j = (D_{j,t} : t = 0, \dots, T)$.

Az árfolyamat meghatározza, hogy az eszköz az adott pillanatban mennyit ér, a jutalék-kifizetési folyamat pedig megadja, hogy az egyes pillanatokban mennyit fizet az eszköz. Például egy elemi kötvény esetén a jutalék-kifizetési folyamat a lejáratkor a kötvény névértéke, a többi pillanatban 0.

Egy $\mathcal{F}$*-adaptált portfólió kereskedési stratégia* egy L dimenziós $\mathcal{F}$-adaptált

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_L)$$

folyamat, ahol $\mathbf{x}_j = (x_{j,0}, ..., x_{j,T-1}, 0)$. Az A_j eszközből a $(t, t+1)$ intervallumban birtokolt részvények számát $x_{j,t}$ jelöli. A T. időpontban már nem fektetünk be, ezt jelzi, hogy az $\mathbf{x}_j$ utolsó komponense 0.

2. Definíció. *Az $\boldsymbol{x}$ portfólió kereskedési stratégia által generált $\boldsymbol{D_x}$ jutalékfolyamat*

$$D_{x,t} = \sum_{j=1}^{L} (D_{j,t} + q_{j,t}) x_{j,t-1} - \sum_{j=1}^{L} q_{j,t} x_{j,t}, \qquad ha \quad t = 1, ..., T,$$

és

$$D_{x,0} = -\sum_{j=1}^{L} q_{j,0} x_{j,0}, \qquad ha \quad t = 0.$$

Tulajdonképpen $D_{x,t}$ a „$t-1$-beli befektetések eredménye t-ben" – a „t-beli időszak befektetései".

Deflátorok

Egy $\mathcal{F}$-adaptált $\mathbf{M} = (M_t)_{t=0,...,T}$ folyamatot *deflátor*nak nevezünk az $(M, \mathcal{F})$ tőkepiacon, ha

$$M_t q_{j,t} = E\left[M_{t+1}(q_{j,t+1} + D_{j,t+1}) | \, \mathcal{F}_t\right], \tag{1}$$

minden $j = 1, ..., L$ és $t = 0, ..., T-1$-re.

3. Feltevés. *Az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ tőkepiac teljes és arbitrázs-mentes, ekkor ugyanis egyéetelműen létezik egy $\boldsymbol{M} = (M_t)_{t=0,...,T}$ deflátor, mely kielégíti az (1) definíciót.*

Maximális elvárt hasznosság és optimális fogyasztás

Tegyük fel, hogy pénzügyi vállalatunk egy $\mathcal{F}$-adaptált járadékot kap. Jelölje ezt $\mathbf{w} = (w_t)_{t=0,\dots,T}$. Pénzügyi vállalat révén ezen a pénzen eszközöket vásárolunk, és kereskedünk velük a tőkepiacon. Választunk egy $\mathbf{x}$ portfólió kereskedési stratégiát, és a befektetések eredményeit mind „elfogyasztjuk". Ezt nevezzük *fogyasztási folyamatnak.*

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = \mathbf{c}(0, 0, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = (c_t)_{t=0,\dots,T} = \mathbf{w} + \mathbf{D}_{\mathbf{x}}.$$

Vagyis, a $\mathbf{c}$ fogyasztási folyamat a járadékfolyamat és a jutalék-kifizetési folyamat összegeként írható fel. Mivel $x_{j,T} = 0$, ezért a T-beli fogyasztás megegyezik a végső vagyonnal.

A piacon való kereskedéssel a vállalatok célja profitjuk maximalizálása. Tekintsünk egy részvényest, legyen az ő hasznosságfüggvénye $c > 0$-ra a következő:

$$U(\mathbf{c}) = E\left[\sum_{t=0}^{T} u_{\rho,\gamma}(t, c_t)\right] = E\left[\sum_{t=0}^{T} e^{-\rho t} u(c_t)\right] = E\left[\sum_{t=0}^{t} e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right], \tag{2}$$

ahol $\gamma > 0$ jelöli a részvényes kockázatkerülési együtthatójátt, ρ pedig a türelmetlenségét.

4. Definíció. *Legyen $\boldsymbol{w} = (w_t)_{t=0,\dots,T}$ egy részvényes járadéka, $c(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{c}(0, 0, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}} > 0$ pedig a fogyasztási folyamata. Ekkor a részvényes hasznosságmaximalizációs problémája:*

$$U^{max}(\boldsymbol{w}) = \max_{\boldsymbol{x}} U(\boldsymbol{c}(0, 0, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x})) = \max_{\boldsymbol{x}} U(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{x}}).$$

5. Lemma. *U^{max} szigorúan növő és konkáv.*

A biztosítási piaci modell

Az eddigiekkel ellentétben a *biztosítási piac* nem teljes, ugyanis ezen a piacon megjelennek a véletlentől függő események. Ezért nem elég, amit eddig tudunk, ugyanis a biztosításbeli káresemények nem lesznek $\mathcal{F}$-adaptáltak, egyetlen tőkepiacon használt eszközzel sem modellezhetők. Valamint, a biztosítási piacon -az eddigieken kívül- egy $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t=0,\dots,T} \geq 0 (Y_0 = 0)$ *kárkifizetési folyamat* is megjelenik, valamint egy $\Pi = (\Pi_t)_{t=0,\dots,T}$ *díjáram.* Az így kapott modellünk már nem $\mathcal{F}$-adaptált, ezért be kell vezetnünk egy bővebb, $\mathcal{B}$ leíró σ-algebrával asszociált $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t=0,...,T}$ filtrációt. Ez a filtráció olyan, hogy tartalmaz minden információt a pénzügyi és a biztosítási piacról. Feltehető, hogy

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t, \qquad \text{minden} \qquad t = 1, ..., T - \text{re} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

A $\mathcal{G}_t$ σ-algebra véges minden $t = 0, ..., T$-re. Így megkaptuk a számunkra alkalmas $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ *biztosítási piaci modell*t.

Biztosítási díj

A biztosító az $\mathbf{Y}$ kárkifizetés ellenében Π *biztosítási díj*at szed be, $\Pi = (\Pi_t)_{t=0,...,T}$. Ekkor a módosított $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\Pi, \mathbf{Y}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = (c_t)_{t=0,...,T}$ fogyasztási folyamat a következőképpen néz ki:

$$\mathbf{c} = \mathbf{w} + \Pi + \mathbf{D_x} - \mathbf{Y} = (\mathbf{w} + \Pi - \mathbf{Y}) + \mathbf{D_x}. \tag{3}$$

Az (3) felírásból következik, hogy ha az eddigi tőkepiaci modellünket szeretnénk biztosítási piaci modellé bővíteni, akkor egy módosított járadék folyamatra van szükségünk, ami:

$$\mathbf{w} \longmapsto \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} + \Pi - \mathbf{Y}, \tag{4}$$

ahol az $\mathbf{Y}$ és a Π folyamatok $\mathcal{G}$-mérhetőek, így a $\tilde{\mathbf{w}}$ is $\mathcal{G}$-adaptált.
Kérdés, hogy ez elég-e számunkra?

Egyszeri díjas biztosítás díja

Az egyszeri díjas biztosítás díja megfeleltethető a $\Pi_0 = (\pi_0, 0, ..., 0)$ díjáramnak, ahol π_0 $\mathcal{G}_0$-mérhető. Vagyis egyetlen befizetés érkezik, az is a biztosítás tartamának legelején. Az egyszeri díjas biztosítás $\mathbf{c}(\Pi_0, \mathbf{Y}, \mathbf{w}, \mathbf{x})$ fogyasztási folyamata ekkor

$$c_0 = w_0 + D_{x,0} + \pi_0 \qquad \text{ha} \qquad t = 0, \qquad \text{és} \tag{5}$$

$$c_t = w_t + D_{x,t} - Y_t \qquad \text{ha} \qquad t \geq 1. \tag{6}$$

6. Definíció. *Legyen $\boldsymbol{w}$ egy $\mathcal{G}$-adaptált járadékfizetési folyamat. A $\mathcal{G}_0$-mérhető Π_0 egyszeri díj az $\boldsymbol{Y}$ kárkifizetési folyamat esetén piackonzisztens, ha*

$$U^{max}(\boldsymbol{w} + \Pi_0 - \boldsymbol{Y}) = U^{max}(\boldsymbol{w}).$$

7. Állítás. *A Π_0 piackonzisztens egyszeri díj egyértelműen létezik, és az $\boldsymbol{Y}$ kárkifizetési folyamat konvex függvénye. Továbbá, ha $\boldsymbol{Y}^{(1)} \leq \boldsymbol{Y}^{(2)}$ majdnem mindenütt, akkor $\pi_0(\boldsymbol{Y}^{(1)}) \leq \pi_0(\boldsymbol{Y}^{(2)})$.*

Rendszeres díjas biztosítás díja

A rendszeres díjas biztosítás esete megfeleltethető a $\Pi_{évi} = (0, \pi_{évi}, ..., \pi_{évi})$ díjáramnak, ahol $\pi_{évi}$ $\mathcal{G}_0$-mérhető.

A rendszeres díjas esetben a következő $\mathbf{c}(\Pi_0, \mathbf{Y}, \mathbf{w}, \mathbf{x})$ fogyasztási folyamatot kapjuk:

$$c_0 = w_0 + D_{x,0} \quad \text{ha} \quad t = 0, \quad \text{és} \tag{7}$$

$$c_t = w_t + \pi_{évi} + D_{x,t} - Y_t \quad \text{ha} \quad t \geq 1. \tag{8}$$

8. Definíció. *Legyen $\boldsymbol{w}$ egy $\mathcal{G}$-adaptált járadékfizetési folyamat. A $\mathcal{G}_0$-mérhető $\Pi_{évi}$ rendszeres díj az $\boldsymbol{Y}$ kárkifizetési folyamat esetén piackonzisztens, ha*

$$U^{max}(\boldsymbol{w} + \Pi_{évi} - \boldsymbol{Y}) = U^{max}(\boldsymbol{w}). \tag{9}$$

9. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ tőkepiac teljes, ekkor*

$$\pi_0 = \pi_{évi} \sum_{t=1}^{T} E[M_t],$$

mivel teljes piac esetén tudjuk, hogy egyértelműen létezik az M_t.

Piaci alapú ár

Ha $\mathbf{Y}$ $\mathcal{F}$-adaptált kárkifizetési folyamat lenne, egy eszköz ára a következőképp adódna:

$$y_0 = E\left[\sum_{t=1}^{T} M_t Y_t\right]. \tag{10}$$

Emiatt, egy Π díjáram igazságos akkor és csak akkor, ha

$$y_0 = E\left[\sum_{t=1}^{T} M_t \Pi_t\right]. \tag{11}$$

Esetünkben a Π díjáram azonban $\mathcal{G}$-adaptált, vagyis nem árazható a fenti (10) képlet alapján. A (10) szerinti ár tulajdonképpen kockázatmentes igazságos árnak tekinthető, azaz a piackonzisztens ár, amit a kockázatsemleges biztosító elvár. Azonban, ha a biztosító kockázatkerülő ($\gamma > 0$), egy extra díjat számít fel a kockázat átvállalásáért. Vagyis a következő igaz:

10. Állítás. *Minden $\mathcal{G}$-adaptált Π díjáramra, ha*

$$U^{max}(\boldsymbol{w} + \Pi - \boldsymbol{Y}) = U^{max}(\boldsymbol{w}),$$

akkor

$$E\left[\sum_{t=1}^{T} M_t \Pi_t\right] \geq y_0 = E\left[\sum_{t=1}^{T} M_t Y_t\right].$$

A (10.) állítás kimondja, hogy kockázatkerülés esetén az elvárt biztosítási díj nagyobb, mint az $\mathbf{Y}$ kárkifizetési folyamat diszkontált értéke. Például, a (10.) állítás a

$$\pi_0 \geq E\left[\sum_{t=1}^{T} M_t Y_t\right] = y_0$$

egyenlőtlenséget adja. Az egyenlőtlenség két oldala közti különbség a biztosító által felszámolt kockázati díj, ami függ a kockázatkerülés mértékétől, γ-tól.
A kockázatkerülést végtelennek tekintve kapjuk a következőt:

11. Tétel. *Legyen $Y_{T+1}^{sup} = 0$, és induktívan minden $t \leq T$ értékre*

$$Y_t^{sup} = esssup\left[Y_t + M_t^{-1} E\left[Y_{t+1}^{sup} M_{t+1} \middle| \mathcal{G}_t\right] \middle| \mathcal{F}_t, \mathcal{G}_{t-1}\right].$$

Ekkor

$$E\left[\sum_{t=1}^{T} M_t Y_t\right] = \lim_{\gamma \downarrow 0} \pi_0(\gamma) \leq \pi_0(\gamma) \leq \lim_{\gamma \uparrow \infty} \pi(\gamma) = Y_0^{sup}.$$

12. Megjegyzés. *Minden $\mathcal{F}$-adaptált $\boldsymbol{Y}$ kárkifizetési folyamatra*

$$Y_0^{sup} = y_0 = E\left[\sum_{t=1}^{T} M_t Y_t\right].$$

13. Megjegyzés. *A biztosítási díj γ monoton növő függvénye.*

A biztosítási piac nemteljessége

14. Állítás. *Tegyük fel, hogy van egy $\mathcal{F}$-adaptált $\boldsymbol{w}$ járadékfolyamatunk az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ tőkepiacon. Ekkor egyértelműen létezik egy $\mathcal{F}$-adaptált $c(0,0,\boldsymbol{w},\boldsymbol{x})$ fogyasztási folyamat, mely kielégíti a (2) feltételt, és a következő alakban írható:*

$$c_t = c_0 e^{-\rho t/\gamma} M_t^{-1/\gamma}. \tag{12}$$

Mivel a biztosítási piac nem teljes, ezért nem adható meg egyértelműen egy M_t deflátor folyamat, és így optimális fogyasztási folyamat sem. Ezért tegyük fel a következőt:

15. Feltevés. *Minden $t = 0, \ldots, T-1$-re és minden integrálható $\mathcal{F}_{t+1}$-mérhető Y valószínűségi változóra*

$$E\left[Y|\mathcal{F}_t\right] = E\left[Y|\mathcal{G}_t\right].$$

Vagyis a t. időpillanatban ismert biztosítási információk semmilyen információt nem adnak a $t+1$. időpillanatbeli pénzügyi eseményekről.

16. Állítás. *Felhasználva az (1.), (3.), és (15.) feltevéseinket, az $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ biztosítási piac arbitrázsmentes, vagyis létezik egy $(R_t)_{t=0,\ldots,T}$ deflátor folyamat, ami teljesíti az*

$$R_t q_{j,t} = E\left[R_{t+1}(q_{j,t+1} + D_{j,t+1}) \middle| \mathcal{G}_t\right] \tag{13}$$

feltételt minden $j = 1, \ldots, L$ és minden $t = 0, \ldots, T-1$-re.

Általában $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ nem teljes, ezért több deflátor folyamat létezik, mely kielégíti a (1) definíciót, ha $\mathcal{F}_t$ helyére $\mathcal{G}_t$-t írunk, és nekünk ezek közül kell kiválasztani a maximális hasznosságút.

Legyen $\mathbf{x}$ egy $\mathcal{G}$-adaptált portfólió kereskedési stratégia, és definiáljuk a *pénzügyi tőke folyamat*ot a következőképpen:

$$X_t = \sum_{j=1}^{L} \left(D_{j,t} + q_{j,t}\right) x_{j,t-1}.$$

Vezessünk be egy új $\mathcal{H}_t$ σ-algebrát, mely a következő:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_0, \;\; \textit{és}\; \mathcal{H}_t = \sigma\left(\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_{t-1}\right) \;\; \textit{minden}\;\; t = 1, \ldots, T-re.$$

17. Lemma. *Az X_t pénzügyi tőke folyamat $\mathcal{H}_t$-mérhető, és bármely $\mathcal{H}_t$-adaptált X_t folyamatra létezik egy $\mathcal{G}$-adaptált $\boldsymbol{x}$ portfóliókezelési stratégia, melynek X_t a pénzügyi tőke folyamata. Az ennek megfelelő jutalék kifizetési folyamatra igaz, hogy*

$$\begin{aligned} D_{x,t} &= \sum_{j=1}^{L} (D_{j,t} + q_{j,t})\, x_{j,t-1} - \sum_{j=1}^{L} q_{j,t} x_{j,t-1} = \\ &= X_t - E\left[\frac{X_{t+1} M_{t+1}}{M_t} \middle| \mathcal{G}_t \right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Ahhoz, hogy megtaláljuk a bővebb $\mathcal{G}$ σ-algebrában is az optimális fogyasztási folyamatot, ebben segít nekünk a következő állítás.

18. Állítás. *Egyértelműen létezik a $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ biztosítási piacon egy $\mathcal{G}$-adaptált*

$$c_t = w_t + D_{x,t} = w_t + X_t - E\left[\frac{X_{t+1} M_{t+1}}{M_t} \middle| \mathcal{G}_t \right] > 0$$

optimális fogyasztási folyamat, ami maximalizálja (2)-t, és meghatározható az

$$e^{-\rho} E\left[c_t^{-\gamma} M_t^{-1} \middle| \mathcal{H}_t \right] = c_{t-1}^{-\gamma} M_{t-1}^{-1}$$

egyenlőségből.

Induktív struktúra

Teljes piac esetén az $\mathcal{F}$-adaptált fogyasztási folyamat könnyen számolható (12) alapján. A nem-teljes piac ennél sokkal bonyolultabb. Tegyük fel egyrészről, hogy az $\mathcal{F}$-adaptált járadékfolyamat $\mathcal{G}$-adaptálttá tehető a (4) transzformációval. Másrészről, a portfólióstratégiánkat $\mathcal{G}$-nek megfelelően válasszuk meg. Most tekintsük a fogyasztási folyamatunkat egy nem-teljes $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ biztosítási piacon. A kiszámításához egy olyan induktív struktúrát adunk meg, amellyel explicit számolható az optimális fogyasztási folyamat, amelyből pedig megkapjuk az egyszeri biztosítási díjat, Π_0-t.

Ehhez néhány függvény bevezetésére van szükségünk.

Legyen $x \in \mathbb{R}$. Legyen $G_{T+1}(x, \mathbf{w}) \equiv 0$. Minden $t = T, ..., 1$ értékre induktívan megadunk egy $\mathcal{H}_t$-mérhető random függvényt, $F_t(x, \mathbf{w})$-et, ami az

$$e^{-\rho} E\left[(w_t + F_t(x, \mathbf{w}) - G_{t+1}(F_t(x, \mathbf{w}), \mathbf{w}))^{-\gamma} M_t^{-1} \mid \mathcal{H}_t \right] = (w_{t-1} + x)^{-\gamma} M_{t-1}^{-1} \tag{15}$$

egyenlet megoldása, egy $\mathcal{G}_{t-1}$-mérhető random függvényt, $G_t(x, \mathbf{w})$-t, amire teljesül, hogy

$$G_t(x, \mathbf{w}) - E\left[\frac{M_t}{M_{t-1}} F_t\left(x - G_t(x, \mathbf{w}), \mathbf{w}\right) \middle| \mathcal{G}_{t-1}\right] = 0, \tag{16}$$

és egy $\mathcal{H}_t$-mérhető random függvényt, H_t-t, amit így definiálunk:

$$H_t(x, \mathbf{w}) = F_t\left(x - G_t(x, \mathbf{w}), \mathbf{w}\right). \tag{17}$$

19. Lemma. *Tegyük fel, hogy $w_t > 0$ majdnem mindenütt, minden $t = 0, ..., T$ értékre. Ekkor a fent definiált (15)-(17) random függvények léteznek.*

20. Tétel. *Az optimális $(X_t)_{t=0,...,T}$ pénzügyi folyamatot iteratívan kapjuk meg a $\mathcal{G}$-adaptált járadékfolyamatból, úgy, hogy $X_0 = 0$ és*

$$X_t = H_t(X_{t-1}, \boldsymbol{w}) \qquad \textit{minden} \qquad t = 1, ..., T\textit{-re}. \tag{18}$$

A (18) egyenletből már kiszámítható a Π_0. Számításaink során szeretnénk, hogy az elvárt hasznosság ne változzon az $\mathbf{Y}$ kárkifizetési folyamat bevezetésével. Ez azt jelenti, hogy ha megbecsüljük az optimális fogyasztási folyamatot a teljes piacra, akkor a biztosítási piacra vonatkozó fogyasztási folyamat az

$$\tilde{X}_t = H_t(X_{t-1}, \mathbf{w} + \Pi_0 - \mathbf{Y}) \tag{19}$$

képletből adódik, amiből meghatározható π_0 úgy, hogy az elvárt hasznosság ne változzon. Ezek után az optimális fogyasztási folyamat:

$$c_t = \mathbf{w}_t + X_t - e\left(\frac{M_{t+1}}{M_t} X_{t+1} \middle| \mathcal{G}_t\right). \tag{20}$$

4. fejezet

Extrém sport biztosítás díja 2.

Ebben a részben az előző fejezetben leírt, „induktív struktúra" alapján is kiszámítjuk egy ejtőernyős biztosítás éves díját.
Modellünkben 3 lehetséges kimenet van[1]:

$$\textit{halál}(D), \quad \textit{sérülés}(S), \quad \textit{sérülés nélküli túlélés}(L).$$

Ismerjük az ezekre vonatkozó valószínűségeket:

$$p_D = 0.0000132, \quad p_S = 0.00152878 \quad \textit{és} \quad p_L = 1 - p_D - p_S = 0.998458.$$

Mivel a biztosítás tartama 1 év, ezért $T = 1$[2]. Feltesszük, hogy a biztosítási díj év elején érkezik, és minden kifizetés év végén történik. A biztosítási összegek ennek megfelelően az első év végén:

$$L_1 = 0, \quad D_1 = 5, \quad S_1 = 3$$

lehetnek (az értékek millió Ft-ban értendők). Szükségünk van még egy külsö járadék-folyamatra, ez legyen:

$$w_0 = 1 \quad \textit{és} \quad w_1 = 0.$$

A deflátor folyamatunk:

$$M_0 \equiv 1, \quad M_1(D_1) = 1.2, \quad M_1(S_1) = 1.1 \quad \textit{és} \quad M_1(L_1) = 1.$$

[1] Sérülésekhez soroljuk a balesetből eredő rokkantságos eseteket is.
[2] Itt a korábbiaktól eltérően csak az első évvel foglalkozunk.

A kockázatkerülés mértéke $\gamma = 0.5$, és a biztosító türelmetlensége $\rho = 1$.

Az induktív struktúrában T-től visszafelé kell az első időpontig eljutni, nekünk viszont $T = 1$, így feladatunk csupán $F_1(x)$, $G_1(x)$ és $H_1(x)$ meghatározása. Tudjuk, hogy $G_{T+1} \equiv 0$ miatt $G_2 \equiv 0$. Határozzuk most meg $F_1(x)$-et a (15) képlet alapján, ami azt jelenti, hogy az

$$e^{-\rho} E\left[(w_t + F_t(x, \mathbf{w}) - G_{t+1}(F_t(x, \mathbf{w}), \mathbf{w}))^{-\gamma} M_t^{-1} \mid \mathcal{H}_t\right] = (w_{t-1} + x)^{-\gamma} M_{t-1}^{-1}$$

egyenlet $F_1(x)$ megoldását keressük. $t = 1$-et helyettesítve és kihasználva hogy F_1 $\mathcal{H}_1$-mérhető, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{e}(w_1 + F_1(x))^{-1} E\left(\frac{1}{M_1}\middle| \mathcal{H}_1\right) = (w_0 + x)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{M_0}.$$

Innen átrendezve, $F_1(x)$-et kifejezve, kapjuk, hogy

$$F_1(x) = \frac{w_0 + x}{e^2} E^2\left(\frac{M_0}{M_1}\middle| \mathcal{H}_1\right) - w_1.$$

Most x helyére $x - G_1(x)$-et írva:

$$F_1(x - G_1(x)) = \frac{1 + x - G_1(x)}{e^2} E^2\left(\frac{M_0}{M_1}\middle| \mathcal{H}_1\right).$$

A (16) egyenlet alapján felírhatjuk $G_1(x)$-et:

$$G_1(x) = E\left(\frac{M_1}{M_0} \frac{1 + x - G_1(x)}{e^2} E^2\left(\frac{M_0}{M_1}\middle| \mathcal{H}_1\right)\middle| \mathcal{G}_0\right).$$

Átrendezve és a mérhetőségeket kihasználva:

$$G_1(x) = \frac{E^2\left(\frac{M_0}{M_1}\middle| \mathcal{H}_1\right) E\left(\frac{M_1}{M_0}\middle| \mathcal{G}_0\right) + E\left(\frac{M_0}{M_1}\middle| \mathcal{H}_1\right) E\left(\frac{M_1}{M_0}x\middle| \mathcal{G}_0\right)}{e^2 + E^2\left(\frac{M_0}{M_1}\middle| \mathcal{H}_1\right) E\left(\frac{M_1}{M_0}\middle| \mathcal{G}_0\right)}.$$

Határozzuk meg a konkrét várható értékeket:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{M_0}{M_1}\middle| \mathcal{H}_1\right) &= 0.998458\left(\frac{1 \cdot 0.998458 + 1 \cdot 0.00152878}{1}\right) + \\ &+ 0.0000132\left(\frac{1 \cdot 0.998458 + 1 \cdot 0.00152878}{1.2}\right) + \\ &+ 0.998458\left(\frac{1 \cdot 0.00152878 + 1 \cdot 0.00152878}{1.1}\right) = 0.9998, \end{aligned}$$

$$E\left(\frac{M_1}{M_0}\middle|\mathcal{H}_1\right) = 0.998458\left(\frac{1}{1\cdot 0.998458 + 1\cdot 0.00152878}\right) + $$
$$+\ 0.0000132\left(\frac{1.2}{1\cdot 0.998458 + 1\cdot 0.00152878}\right) + $$
$$+\ 0.998458\left(\frac{1.1}{1\cdot 0.00152878 + 1\cdot 0.00152878}\right) = 1.000168.$$

Ezeket már vissza tudjuk helyettesíteni korábbi egyenleteinkbe, ezért:

$$G_1(x) = \frac{0.999986^2\cdot 1.000168 + 0.999986\cdot E\left(\frac{M_1}{M_0}x\middle|\mathcal{G}_0\right)}{0.999986^2\cdot 1.000168 + e^2} = 0.1192 + 0.1192\cdot E\left(\frac{M_1}{M_0}x\middle|\mathcal{G}_0\right).$$

Innen már felírható a $H_1(x)$ függvény is:

$$H_1(x) = 0.1353\left(1 + x - \left(0.1192 + 0.1192\cdot E\left(\frac{M_1}{M_0}x\middle|\mathcal{G}_0\right)\right)\right) =$$
$$= 0.1353\left(0.8808 + x - 0.1192\cdot E\left(\frac{M_1}{M_0}x\middle|\mathcal{G}_0\right)\right)$$

Most határozzuk meg a pénzügyi tőke folyamatot. Tudjuk, hogy $X_0 = 0$, és hogy $X_1 = H_1(X_0, \mathbf{w})$.

$$X_1 = H_1(X_0) = 0.1353(0.8808 + 0 - 0.1192\cdot 0) = 0.1353\cdot 0.8808 = 0.1192$$

Határozzuk meg az optimális fogyasztási folyamatot a (20) alapján:

$$c_0 = 1 + 0 - 0.1192\cdot 1.000168 = 0.88$$
$$c_1 = 0 + 0.1192 - 0 = 0.1192.$$

Eddig a tőkepiacra alkotott modellben számoltunk. Most következik a biztosítási piacon lévő optimális fogyasztási folyamat meghatározása. Ehhez először fel kell írnunk a módosított járadék folyamatot, a $\tilde{w}_i = w_i + \pi_i - Y_i$ alapján. Feltevéseink szerint a 0. pillanatban megérkezik a díj, és a külső forrásból származó járadék, kifizetés ekkor még biztosan nincs. Az első év végén a módosított járadékfolyamat meghatározása ennél bonyolultabb. A problémát az jelenti, hogy az első év végén nem tudjuk biztosra azt mondani, hogy lesz x millió Ft kifizetésünk, hiszen ha nem történik sem halál sem baleset, akkor nincs kifizetés. Ezért ott a várható kifizetés értékével számolunk. Vagyis

$$\tilde{w}_0 = 1 + \Pi_0, \qquad \tilde{w}_1 = -(0.998458\cdot 0 + 0.0000132\cdot 5 + 0.00152878\cdot 3) = -0.00465.$$

Most pedig kezdhetjük az induktív struktúra felépítését a legelejéről, a módosított járadék folyamatot használva. Első lépés a következő egyenlet $F_1(x)$ gyökének megtalálása:

$$\frac{1}{e}\left(\tilde{w}_1 + F_1(x)\right)^{-\frac{1}{2}} E\left(\frac{1}{M_1}\middle|\,\mathcal{H}_1\right) = (\tilde{w}_0 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{M_0}.$$

Mivel F_1 $\mathcal{H}_1$-mérhető, a következő adódik:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{E^2\left(\frac{M_0}{M_1}\middle|\,\mathcal{H}_1\right)(\tilde{w}_0 + x)}{e^2} - \tilde{w}_1, \\ F_1(x) &= \frac{x + 1 + \Pi_0}{e^2} E^2\left(\frac{M_0}{M_1}\middle|\,\mathcal{H}_1\right) + 0.00465 = 0.1353(x + 1 + \Pi_0) + 0.00465. \end{aligned}$$

Ismét x helyére $x - G_1(x)$-et helyettesítve:

$$\begin{aligned} F_1(x - G_1(x)) &= \frac{x + 1 + \Pi_0 - G_1(x)}{e^2} E^2\left(\frac{M_0}{M_1}\middle|\,\mathcal{H}_1\right) + 0.00465 \\ &= 0.1353(x + 1 + \Pi_0 - G_1(x)) + 0.00465. \end{aligned}$$

Újraszámoljuk $G_1(x)$-et is:

$$G_1(x) = \frac{0.1353 E\left(\frac{M_1}{M_0}(1 + x + \Pi_0)\middle|\,\mathcal{G}_0\right) + 0.00465 E\left(\frac{M_1}{M_0}\middle|\,\mathcal{G}_0\right)}{1 + 0.1353 \cdot E\left(\frac{M_1}{M_0}\middle|\,\mathcal{G}_0\right)}.$$

Behelyettesítve a már korábban kiszámolt várható értékeket, $G_1(x)$ egyszerűbb alakra hozható:

$$G_1(x) = 0.1192 E\left(\frac{M_1}{M_0}(1 + x + \Pi_0)\middle|\,\mathcal{G}_0\right) + 0.0041.$$

Felírjuk $H_1(x)$-et is:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= 0.1353\left(1 + x + \Pi_0 - \left(0.1192 E\left(\frac{M_1}{M_0}\middle|\,\mathcal{G}_0\right) + 0.0041\right)\right) + 0.0041 = \\ &= 0.1353\left(x + \Pi_0 - 0.1192 E\left(\frac{M_1}{M_0}(1 + x + \Pi_0)\middle|\,\mathcal{G}_0\right)\right) + 0.1388. \end{aligned}$$

Meghatározzuk a pénzügyi tőke folyamatot, felhasználva, hogy $X_0 = 0$ és $X_1 = H_1(X_0)$:

$$\begin{aligned} X_1 &= H_1(X_0) = 0.1353\left(0 + \Pi_0 - 0.1192 E\left(\frac{M_1}{M_0}(1 + 0 + \Pi_0)\middle|\,\mathcal{G}_0\right)\right) + 0.1388 = \\ &= 0.119\Pi_0 + 0.1226. \end{aligned}$$

Most már számítható az optimális fogyasztási folyamat is:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 + \Pi_0 - (0.1191\Pi_0 + 0.1226) \cdot 1.000168 = 0.8808\Pi_0 + 0.8774. \\ c_1 &= Y_1 + (0.1191\Pi_0 + 0.1226) - 0 = 0.0091\Pi_0 + 0.12725. \end{aligned}$$

Meghatározzuk az eredeti -tőkepiaci modellben számolt- optimális fogyasztási folyamat hasznosságát (12) alapján, majd ezek alapján úgy határozzuk meg a Π_0 díjat, hogy a biztosítási piacon számolt optimális fogyasztási folyamat hasznossága ezzel megegyezzen.

$$U(c)=\sum_{t=0}^{1} e^{-t}\frac{c_t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{c_0}+2\frac{\sqrt{c_1}}{e}=2\sqrt{0.88}+2\frac{\sqrt{0.1192}}{e}=2.141$$

A tőkepiaci modellben számolt optimális fogyasztási folyamat esetén a hasznosság 2.141. Ugyanezt a hasznosságot kell tehát elérnünk (9) alapján úgy is, hogy díjat szedünk be és kárkifizetéseink lehetnek.

$$2\left(\sqrt{0.8808\Pi_0+0.8774}+\frac{0.1191\Pi_0+0.12725}{e}\right)=2.141.$$

Ezt megoldva, felszorozva 1 000 000-val kapjuk, hogy az ejtőernyős biztosítás éves díja:

$$\Pi_0=13300Ft.$$

Összegzés

Szakdolgozatomban egy rendszeresen extrém sportot űzők számára készített biztosítás díjának meghatározását szerettem volna bemutatni, a felmerülő nehézségekkel együtt. Mivel nagyon nehéz volt adatokat gyűjteni, le kellett szűkítenem a tervezett extrém sport biztosítást ejtőernyőzésre vonatkozó biztosításra, mivel erre a sportágra volt elfogadható mennyiségű adat, ezek is csak külföldről.

Az adatok rostálása után megbecsültem a magyarországi ejtőernyősökre vonatkozó halál- és sérülés valószínűségeket meghatározó valószínűségi változókat. Majd ezeket használva felépítettem egy 10 ezer szerződésre vonatkozó egyszerűsített modellt, mellyel a biztosítás éves díját meghatároztam. Ez 14225Ft lett.

Ezután, részben ugyanezt a modellt használva, egy 50 ezres nagyságú szimulációval -kihasználva a szükséges valószínűségeket előállító változók „véletlen" tulajdonságát-, „kisorsoltam" minden alkalommal egy sérülés és egy halál valószínűséget, ezekre konkrét halál és sérülésszámokat, meghatároztam ezek alapján is az éves díjat, ami 14124Ft lett.

A következő részben bemutattam a piaci alapú árazás elméletét, mely alapján szintén kiszámoltam egy ejtőernyős biztosítás díját. Ennek eredménye 13300Ft lett.

Látható, hogy bár 3 különböző módszerrel számoltam, az eredmények -főleg az első két esetben-, igen hasonlóak.

A második fejezetben leírt modellt persze lehetett volna még bonyolítani további véletlenek bevezetésével. Például a törlést nem fixnek venni, hanem valószínűségi változóként kezelni, vagy új szerződések megjelenésével az állományt növelni, stb. De célom inkább az volt, hogy az ilyen típusú biztosítások szükségességét és a konstrukciójukkal kapcsolatos nehézségeket bemutassam.

Remélem, hogy a jövőben növekszik ezen típusú biztosítások piaca.

Irodalomjegyzék

[1] *1997. évi LXXXIII. törvény a kötelező egészségbiztosítás ellátásairól, 18.§. (6) bekezdés*

[2] *217/1997. (XII. 1.) Korm. rendelet a kötelező egészségbiztosítás ellátásairól szóló 1997. évi LXXXIII. törvény végrehajtásáról, 5/B.§. (1) bekezdése*

[3] *52/2006. (XII. 28.) Egészségügyi Minisztériumi rendelet a sürgős szükség körébe tartozó egyes egészségügyi szolgáltatásokról*

[4] *284/1997. (XII. 23.) Kormányrendelet térítési díj ellenében igénybe vehető egyes egészségügyi szolgáltatások térítési díjáról*

[5] *www.generali.hu/Szolgaltatasok/Egeszseg_es_baleset/Extrem_sportokra.aspx*

[6] N. Ellitsgaard: *Parachuting injuries: A study of 110,000 sports jumps,* pp. 13-17. Brit. J. Sports Med. - Vol. 21, No.1, 1987.

[7] P.J. Steinberg: *Injuries to Dutch sport parachutists,* pp. 25-30. Brit. J. Sports Med. - Vol.22, No.1, 1988.

[8] A. Westman, U. Björnstig: *Fatalities in Swedish skydiving,* pp. 1040-1048. Accident Analysis and Prevention 37, 2005.

[9] A. Westman, U. Björnstig: *Injuries in Swedish skydiving,* pp. 356-364. Brit. J. Sports Med. - Vol. 41, No.6, 2007.

[10] Thomas H. Barrows, Trevor J. Mills, and Scott D. Kassing: *The epidemiology of skydiving injuries: World freefall convention, 2000-2001,* pp. 63-68. The Journal of Emergency Medicine - Vol.28, No.1, 2004.

[11] *www.kmk.hu weboldalon: Közérdekű adatok közzétételi listája/Térítésköteles ellátások*

[12] *http://orfi.wertz.hu/szabalyzatok/Teritesi%20Szabalyzat.pdf*

[13] D.S.R. Baiju, L.A. James: *Parachuting: a sport of chance and expense,* pp. 215-217. Injury Volume 34, Issue 3, 2003.

[14] Banyár József: *Életbiztosítás,* pp. 121. Aula, 2003.

[15] S. Malamud, E. Trubowitz and Mario V. Wüthrich: *Market Consistent Pricing of Insurance Products,* pp. 1-20. Astin Bulletin, 2008.

NYILATKOZAT

Név: CSÉPÁNY VIKTÓRIA

ELTE Természettudományi Kar, szak:

BIZTOSÍTÁSI- ÉS PÉNZÜGYI MATEMATIKA MSC, Aktuárius szakirány

ETR azonosító: CSVNAAT.ELTE

Szakdolgozat címe:

EXTRÉM SPORTOK A BALESETBIZTOSÍTÁSBAN

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2012. június 6.

.

. *a hallgató aláírása*