Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

Függőségek hatása a csődvalószínűségekre

Szakdolgozat

Írta: Kocsis Orsolya
Biztosítási és pénzügyi matematika MSc,
Aktuárius szakirány

Témavezető:
Arató Miklós, egyetemi docens
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

2012

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatom célja az összetett kockázati modell esetében annak vizsgálata, hogy milyen hatással van a jövőbeni káralakulásra és a kvantilisek nagyságára az, ha függőséget tételezünk fel a károk száma és a kárkifizetések között. A szakirodalom többnyire függetlenséget tételez fel ezen változók között. A valóság azonban nem mindíg írható le ilyen szépen.

Az első bevezető fejezetben röviden ismertetem az összetett kockázat modelljét [2] alapján, majd a Sarmanov eloszlások családját az [1] irodalomra alapozva. A Sarmanov egy olyan kétváltozós eloszláscsalád, mely jól használható két valószínűségi változó közötti függőség modellezésére. A mi esetünkben ezek a változók a kárdarabszámok és kárkifizetések lesznek.

A második fejezetben [1] alapján ismertetésre kerül az alapmodell. Ezt követően az előző év káradatait figyelembe véve Bayes becslést adtam a következő évben várható kárszámra. A becslést elvégeztem 1 és $t \geq 1$ szerződésre is. A kapott eredményeket összehasonlítottam a független esettel. A fejezet következő szakaszában azzal foglalkoztam, hogy ha veszünk egy portfóliót, ahol minden szerződés összkára Sarmanov eloszlásból származik, akkor a teljes portfólió aggregált összkára szintén származtatható e Sarmanov eloszlásból. Itt két esetet különböztettem meg. Az első esetben a rizikóparaméterek minden szerződésre ugyanazok lesznek, a második esetben pedig szerződésenként eltérő paraméterekkel fogunk számolni.

A harmadik fejezetben a hangsúly a gyakorlati megvalósításokon van, ellentétben a második fejezettel, ami az elméleti eredményeket tárgyalja. Ebben a fejezetben ismertetésre kerül az a folyamat, hogy miként tudunk kopula segítségével szimulálni kétváltozós Sarmanov eloszlásokat, és Sarmanov eloszlásból származó aggregált károkat. Mindez konkrét példákon keresztül kerül bemutatásra.

A negyedik fejezetben először a második fejezet egy meg nem oldott problémáját látjuk be, amihez szükségünk van Sarmanov eloszlásból származó mintára, majd a második fejezetben kapott becslésekre adunk konkrét eredményeket az R programcsomag sagítségével. Végül kvantiliseket fogunk számolni a károkra.

1.1. Összetett kockázat modellje

Egy adott időszak (pl. egy év) összkárát viszgáljuk. Feltesszük, hogy az időszak kárainak száma valószínűségi változó, melynek ismerjük az eloszlását. Jelölje a kárszámot N. X_i legyen az i. kárra jutó kifizetés. Az X_i valószínűségi változókról feltesszük, hogy függetlenek egymástól és N-től, illetve ismert, azonos eloszlásból származnak. Az összkár ekkor a következő módon áll elő:

$$S = X_1 + X_2 \cdots + X_N.$$

Ha N-nek és minden X_i-nek véges a várható értéke, akkor az összkár várható értéke:

$$E(S) = E(X_1)E(N).$$

Ha X_i-k még véges szórásúak is, akkor az összkár szórásnégyzete:

$$D^2(S) = E(N)D^2(X_1) + (D^2N)(E(X_1))^2.$$

Ezt a két fontos jellemzőt könnyen megkaphatjuk a teljes várható érték tétel segítségével.

1.2. Sarmanov féle eloszláscsalád

A róla elnevezett eloszláscsaládot Sarmanov 1966-ban definiálta. A Sarmanov féle eloszlásokat leginkább valószínúségi változók közötti függőségek modellezésére lehet kiválóan használni. Fontosságuk ebben a témakörben mutatkozik meg a legjobban. Az alábbiakban ismertetésre kerül, hogy hogyan is tudunk ilyen eloszlást konstruálni.

Legyen $f_1(x_1)$ és $f_2(x_2)$ egyváltozós sűrűségfüggvények, melyek az $A_1 \subseteq \mathbb{R}$ és $A_2 \subseteq \mathbb{R}$ halmazon vannak értelmezve. Vegyünk továbbá olyan $\phi_1(x_1)$ és $\phi_2(x_2)$ függvényeket, melyek korlátosak, nem konstansok, és kielégítik a következő feltételeket:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t) f_1(t) dt = 0, \tag{1.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(t) f_2(t) dt = 0. \tag{1.2}$$

Feltétel továbbá, hogy ω olyan valós szám legyen, mely eleget tesz az

$$1 + \omega \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \geq 0$$

egyenlőtlenségnek minden x_1 és x_2-re. Ekkor igaz, hogy

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)[1 + \omega \phi_1(x_1) \phi_2(x_2)] \tag{1.3}$$

egy kétváltozós együttes sűrűségfüggvény $f_1(x_1)$ és $f_2(x_2)$ marginálisokkal, hiszen nem negatív, és integrálja a teljes számegyenesen 1.

Amennyiben egy $f(x_1, x_2)$ sűrűségfüggvény a fenti feltételeknek eleget tesz, akkor Sarmanov sűrűségfüggvénynek nevezik.

Az X_1 és X_2 változók közötti függőséget ω szabályozza. Tekintsük azt az esetet, amikor $\omega = 0$. Ekkor $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$, vagyis az együttes sűrűségfüggvény a marginálisok szorzata, azaz a változók függetlenek. Minden más ω esetén igaz az, hogy függés van a változók között.

2. fejezet

A modell

Ebben a részben [1] alapján egy olyan modellt fogunk ismertetni, mely használható függőségek leírására az összetett kockázat modelljében. A fejezet további részei saját elemzések.

A Bevezetésben tárgyalt összetett kockázati modell jelöléseit használva legyen N a károk száma, X_i pedig az i. kárkifizetés nagyságát jelölő valószínűségi változó. A könnyebb numerikus számolás és a modellek egyszerűbb leírása érdekében általában feltételezik, hogy ezen változók egymástól függetlenek. A gyakorlatban azonban ez nincs mindig így, sőt! Megfigyelhető például, hogy kisebb vihar esetén több kis kár következik be, földrengés és árvíz esetén pedig mind a károk száma, mind a károk mértéke nagyméretű. Kézenfekvőnek tűnik tehát a valóság pontosabb leírására törekedve függőséget feltételezni a kárszám és a kárkifizetések között.

Korábbi évek tapasztalata alpján következtethetünk N és X_i-k eloszlására. Ám mivel a megfigyelt adatok általában nagyon ingadoznak, az eloszlások paramétereit nem fogjuk rögzíteni, hanem valószínűségi változóknak tekintjük őket. A szakirodalom többsége, beleértve a forrásként szolgáló [1] cikket is, az N kárszámot θ_1-Poisson eloszlásúnak, az X_i kárkifizetéseket pedig θ_2-exponenciális eloszlásúnak tekinti. Ezen eloszlások használata gyakorlati tapasztalatokon alapszik. θ_1 és θ_2 valószínűségi változó, melyeket a továbbiakban rizikóparaméternek fogunk nevezni. Feltesszük továbbá, hogy θ_1 $\Gamma_{a,b}$, θ_2 pedig $\Gamma_{c,d}$ eloszlású, $\theta_1 > 0, \theta_2 \geq 0$, $a, b, c, d > 0$. Modellünkben [1] alapján az N kárszám és az X_i kárnagyságok közti függőséget eloszlásaik paramétere, vagyis a rizikóparaméterek közötti függőség feltételezésével modellezzük. Az X_i valószínűségi változókat és az N kárszámot tehát feltételesen függetlennek tekintjük, ha ismerjük eloszlásaik paraméterét. Továbbá az X_i kárkifizetéseket is függetlennek tekintjük egymástól.

A következő lemma, mely szintén a már említett [1] cikkben található, meg fogja mutatni, hogy ha (θ_1, θ_2) Sarmanov eloszlású $\Gamma_{a,b}$ és $\Gamma_{c,d}$ peremeloszlásokkal, akkor hogyan néz ki (θ_1, θ_2) sűrűségfüggvénye.

2.1. Lemma. *Ha θ_1 $\Gamma_{a,b}$, θ_2 $\Gamma_{c,d}$ eloszlású, összefüggőek, és közös sűrűségfüggvényük*

$$f(\vartheta_1, \vartheta_2) = f_1(\vartheta_1) f_2(\vartheta_2)[1 + \omega(e^{-\vartheta_1} - k_1)(e^{-\vartheta_2} - k_2)], \tag{2.1}$$

ahol $k_1 = \left(\frac{b}{b+1}\right)^a$, $k_2 = \left(\frac{d}{d+1}\right)^c$, ω pedig eleme az $[\omega_1, \omega_2]$ intervallumnak, ahol $\omega_1 = \frac{-1}{\max[k_1 k_2; (1-k_1)(1-k_2)]} < 0$, $\omega_2 = \frac{1}{\max[(1-k_1)k_2; k_1(1-k_2)]} > 0$, akkor 2.1 (θ_1, θ_2) Sarmanov eloszlású sűrűségfüggvénye.

A Sarmanov eloszlás definíciójából adódik, hogy $f_1(\vartheta_1)$ és $f_2(\vartheta_2)$ 2.1 marginálisai.

2.1. Várható kárszám becslése

Ebben a részben azzal fogunk foglalkozni, hogy ha ismerjük egy vagy több szerződés káralakulását egy adott évben, akkor ez alapján mit tudunk mondani a következő év kárszámáról. Azaz várhatóan hány kárral kell számolnunk a következő évben. Ki fogjuk számolni numerikusan a várható kárszámot abban az egyszerű esetben, ha nincs összefüggés a károk száma és nagysága között, illetve a dolgozat tárgyát képező összefüggő esetben, mikor a károk száma és nagysága között összefüggést tételezünk fel a rizikóparamétereiken keresztül. Az egyszerűbb, tehát a független esettel kezdünk, majd a kissé komplikáltabb összefüggő eset fog következni. Mindkét esetben 1 és $t \geq 1$ szerződésre is megfogjuk határozni a károk várható számát adott minta ismeretében a következő évre vonatkozóan. A kapott eredményeket konkrét adatokkal is alá fogjuk támasztani a következő fejezetben.

2.1.1. Független eset

1 szerződésre

Tekintsünk egy biztosítási szerződést. Az N valószínűségi változó jelölje az 1 év alatt bekövetkezett károk számát, X_i az i. kár nagyságát (vagy az i. kárkifizetést) $(i = 1, \ldots, N)$. S

pedig legyen az összkár, vagy más néven aggregált kárösszeg. Igaz tehát, hogy $\sum_{i=1}^{N} X_i = S$. Tegyük fel, hogy a károk exponenciális eloszlást követnek ismeretlen $\theta_2 \geq 0$ paraméterrel, a kárszám pedig Poisson eloszlást, ismeretlen $\theta_1 > 0$ paraméterrel. Legyen továbbá θ_1 $\Gamma_{a,b}$ eloszlású, θ_2 pedig $\Gamma_{c,d}$ eloszlású valószínűségi változó, ahol a,b,c,d mindegyike pozitív paraméter. Feltesszük, hogy a károk (X_i) mind egymástól, mind a kárszámtól (N) függetlenek, és a rizikóparaméterek között sem figyelhető meg összefüggés. Az így kapott minta és feltételek ismeretében Bayes-becslést fogunk adni az ismeretlen θ_1 és θ_2 paraméterekre, majd meghatározzuk a várható értéküket. Először θ_2-t becsüljük, majd θ_1-et.

A károk közös feltételes eloszlása a következő:

$$f_{X_1,\ldots,X_N|\theta_2}(x_1 \ldots, x_n|\vartheta_2) = \prod_{i=1}^{N} f_{X_i|\theta_2}(x_i|\vartheta_2) = \prod_{i=1}^{N} \vartheta_2 e^{-\vartheta_2 x_i} = \vartheta_2^N e^{-\vartheta_2 \sum_{i=1}^{N} x_i}.$$

Bayes-tétele alpján

$$f_{\theta_2|X_1,\ldots,X_N}(\vartheta_2|x_1 \ldots, x_n) = \frac{f_{X_1,\ldots,X_N|\theta_2}(x_1 \ldots, x_n|\vartheta_2) f_2(\vartheta_2)}{\int_0^\infty f_{X_1,\ldots,X_N|\Lambda}(x_1 \ldots, x_n|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\int_0^\infty f_{X_1,\ldots,X_N|\Lambda}(x_1 \ldots, x_n|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda}}_{=C} \left(\vartheta_2^N e^{-\vartheta_2 \sum_{i=1}^{N} x_i} \cdot \frac{d^c \vartheta_2^{c-1} e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c)} \right) =$$

$$= \underbrace{C \cdot \frac{d^c}{\Gamma(c)} \cdot \frac{\Gamma(N+c)}{(d + \sum_{i=1}^{N} x_i)^{N+c}}}_{=C'} \cdot \frac{(d + \sum_{i=1}^{N} x_i)^{N+c} \vartheta_2^{(N+c)-1} e^{-(d+\sum_{i=1}^{N} x_i)\vartheta_2}}{\Gamma(N+c)} =$$

$$= C' \cdot \underbrace{\frac{(d + \sum_{i=1}^{N} x_i)^{N+c} \vartheta_2^{(N+c)-1} e^{-(d+\sum_{i=1}^{N} x_i)\vartheta_2}}{\Gamma(N+c)}}_{\Gamma_{N+c,d+\sum_{i=1}^{N} x_i} \text{eloszlású v.v. sűrűségfüggvénye}}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy θ_2 $(N+c, d+\sum_{i=1}^{N} x_i)$ paraméterű gamma eloszlású a káralakulás ismeretében. Így

$$E(\theta_2|X_1, \ldots, X_N) = \frac{N+c}{d + \sum_{i=1}^{N} x_i} = \frac{N+c}{d+S}. \tag{2.2}$$

Ez a várható érték azonban nem mond semmit a jövőben várható kárnagyságok értékéről, mivel a károk exponenciális eloszlásúak, és így várható értékük a paraméter reciproka. Azaz a $E(\frac{1}{\theta_2}|X_1, \ldots, X_N)$ értékét kell meghatároznunk, hogy meg tudjuk mondani a károk jövöbeni nagyságát.

$$E\left(\frac{1}{\theta_2}\middle|X_1,\ldots,X_N\right)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta_2}f_{\theta_2|X_1,\ldots,X_N}(\vartheta_2|x_1\ldots,x_n)d\vartheta_2=$$

$$C\cdot\frac{d^c}{\Gamma(c)}\cdot\frac{\Gamma(N+c-1)}{(d+\sum_{i=1}^N x_i)^{N+c-1}}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{(d+\sum_{i=1}^N x_i)^{N+c-1}\vartheta_2^{(N+c-1)-1}e^{-(d+\sum_{i=1}^N x_i)\vartheta_2}}{\Gamma(N+c-1)}}_{=1}d\vartheta_2=$$

$$C\cdot\frac{d^c\Gamma(N+c-1)}{(d+\sum_{i=1}^N x_i)^{N+c-1}\Gamma(c)}.$$

Ez azt jelenti, hogy a következő évben várhatóan $C\cdot\frac{d^c\Gamma(N+c-1)}{(d+\sum_{i=1}^N x_i)^{N+c-1}\Gamma(c)}$ nagyságú káraink lesznek az elmúlt évi káradatokat figyelembe véve.

A kárszám feltételes eloszlása a következőképpen írható fel:

$$P(N=n|\theta_1=\vartheta_1)=\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}. \tag{2.3}$$

Bayes-tétele alapján

$$P(\theta_1=\vartheta_1|N=n)=\frac{P(N=n|\theta_1=\vartheta_1)f_1(\vartheta_1)}{\int_0^{\infty}P(N=n|\Lambda=\lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\int_0^{\infty}P(N=n|\Lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda}}_{=D}\cdot\left(\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\cdot\frac{b^a\vartheta_1^{a-1}e^{-b\vartheta_1}}{\Gamma(a)}\right)=$$

$$=\underbrace{D\frac{b^a\Gamma(a+n)}{(b+1)^{a+n}\Gamma(a)n!}}_{=D'}\underbrace{\frac{(b+1)^{a+n}\vartheta_1^{(a+n)-1}e^{-\vartheta_1(b+1)}}{\Gamma(a+n)}}_{\Gamma_{a+n,b+1}\text{eloszlású v.v. sűrűségfüggvénye}}.$$

Ezek szerint a várható érték:

$$E(\theta_1|N)=\frac{a+n}{b+1}. \tag{2.4}$$

Ez azt jelenti, hogy a következő 1 évben várhatóan $\frac{a+n}{b+1}$ kár fog bekövetkezni, ha az előző évben n volt.

t szerződésre

Ebben a részben t szerződésre számoljuk végig az előző részben tárgyaltakat. Feltesszük, hogy a vizsgált periódus ismét 1 év. Jelöléseink egy kicsit megváltoznak. $X_{i,j}$ jelölje az i.

szerződés j. kárnagyságát, amely θ_2-exponenciális eloszlású. N_i az i. szerződés kárszámát fogja jelölni, ami pedig θ_1-Poisson eloszlású valószínűségi változó lesz, ahol $i = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, N_i$. A Poisson és exponenciális eloszlások paraméterének eloszlása megegyezik az előző részben meghatározottakkal, vagyis adott paraméterű gammák. $S = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} X_{i,j}$ továbbra is az összkárt, $N = \sum_{i=1}^{t} N_i$ pedig az összkárszámot jelenti a t darab szerződésre. A károk közös feltételes eloszlása a következő:

$$f_{X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}|\theta_2}(x_{1,1}, \ldots, x_{t,n_t}|\vartheta_2) = \prod_{i=1}^{t} \prod_{j=1}^{N_i} f_{X_{i,j}|\theta_2}(x_{i,j}|\vartheta_2) =$$

$$= \prod_{i=1}^{t} \prod_{j=1}^{N_i} \vartheta_2 e^{-\vartheta_2 x_{i,j}} = \vartheta_2^{\sum_{i=1}^{t} N_i} e^{-\vartheta_2 \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} x_{i,j}}.$$

Bayes-tétele ismét használható:

$$f_{\theta_2|X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}}(\vartheta_2|x_{1,1}, \ldots, x_{t,N_t}) = \frac{f_{X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}|\theta_2}(x_{1,1}, \ldots, x_{t,N_t}|\vartheta_2) f_2(\vartheta_2)}{\int_0^\infty f_{X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}|\Lambda}(x_1 \ldots, x_n|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\int_0^\infty f_{X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}|\Lambda}(x_{1,1}, \ldots, x_{t,N_t}|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda}}_{=C} \left(\vartheta_2^{\sum_{i=1}^{t} N_i} e^{-\vartheta_2 \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} x_{i,j}} \frac{d^c \vartheta_2^{c-1} e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c)} \right) =$$

$$= \underbrace{C \frac{d^c}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{t} N_i + c)}{(d + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} x_{i,j})^{\sum_{i=1}^{t} N_i + c}}}_{=C'} \cdot$$

$$\cdot \frac{(d + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} x_{i,j})^{\sum_{i=1}^{t} N_i + c} \vartheta_2^{(\sum_{i=1}^{t} N_i + c) - 1} e^{-(d + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} x_{i,j})\vartheta_2}}{\Gamma(\sum_{i=1}^{t} N_i + c)} =$$

$$= C' \underbrace{\frac{(d + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} x_{i,j})^{\sum_{i=1}^{t} N_i + c} \vartheta_2^{(\sum_{i=1}^{t} N_i + c) - 1} e^{-(d + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} x_{i,j})\vartheta_2}}{\Gamma(\sum_{i=1}^{t} N_i + c)}}_{\Gamma_{\sum_{i=1}^{t} N_i + c, d + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} x_{i,j}} \text{ eloszlású v.v. sűrűségfüggvénye}}.$$

Így a várható érték:

$$E(\theta_2|X_{1,1}, \ldots, X_{t,N_t}) = \frac{\sum_{i=1}^{t} N_i + c}{d + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} x_{i,j}} = \frac{N + c}{S + d}.$$

Ez az érték ismét nem elég, $\frac{1}{\theta_2}$ feltételes várható értéket kell kiszámolnunk.

$$E\left(\frac{1}{\theta_2}\middle| X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}\right)=\int_0^\infty \frac{1}{\theta_2} f_{\theta_2|X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}}(\vartheta_2|x_{1,1},\ldots,x_{t,N_t})d\vartheta_2=$$

$$=C\frac{d^c}{\Gamma(c)}\frac{\Gamma(\sum_{i=1}^t N_i+c-1)}{(d+\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{N_i}x_{i,j})^{\sum_{i=1}^t N_i+c-1}}$$

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{(d+\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{N_i}x_{i,j})^{\sum_{i=1}^t N_i+c-1}\vartheta_2^{(\sum_{i=1}^t N_i+c-1)-1}e^{-(d+\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{N_i}x_{i,j})\vartheta_2}}{\Gamma(\sum_{i=1}^t N_i+c-1)}}_{=1}d\vartheta_2=$$

$$C\frac{\Gamma(\sum_{i=1}^t N_i+c-1)d^c}{\Gamma(c)(d+\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{N_i}x_{i,j})^{\sum_{i=1}^t N_i+c-1}}.$$

Ez azt jelenti, hogy az előző évek káralakulását alapul véve egy t szerződésből álló portfólióra, a következő évben egy ugyan ilyen paraméterekkel rendelkező portfólió szerződéseire $C\frac{\Gamma(\sum_{i=1}^t N_i+c-1)d^c}{\Gamma(c)(d+\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{N_i}x_{i,j})^{\sum_{i=1}^t N_i+c-1}}$ nagyságú károkkal kell számolni.

A kárszámok közös feltételes eloszlása a következőképpen írható fel:

$$P(N_1=n_1,\ldots,N_t=n_t|\theta_1=\vartheta_1)=\prod_{i=1}^t P(N_i=n_i|\theta_1=\vartheta_1)=\prod_{i=1}^t\frac{\vartheta_1^{n_i}e^{-\vartheta_1}}{n_i!}=$$

$$=\frac{\vartheta_1^{\sum_{i=1}^t n_i}e^{-t\vartheta_1}}{\prod_{i=1}^t n_i!}$$

Bayes-tétele alapján

$$P(\theta_1=\vartheta_1|N_1=n_1,\ldots,N_t=n_t)=\frac{P(N_1=n_1,\ldots,N_t=n_t|\theta_1=\vartheta_1)f_1(\vartheta_1)}{\int_0^\infty P(N_1=n_1,\ldots,N_t=n_t|\Lambda=\lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\int_0^\infty P(N_1=n_1,\ldots,N_t=n_t|\Lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda}}_{=K}\left(\frac{\vartheta_1^{\sum_{i=1}^t n_i}e^{-t\vartheta_1}}{\prod_{i=1}^t n_i!}\frac{b^a\vartheta_1^{a-1}e^{-b\vartheta_1}}{\Gamma(a)}\right)=$$

$$=\underbrace{K\frac{b^a}{\left(\prod_{i=1}^t n_i\right)\Gamma(a)}}_{=K'}\frac{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}}\frac{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_1^{(a+\sum_{i=1}^t n_i)-1}e^{-(b+t)\vartheta_1}}{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}=$$

$$K'\underbrace{\frac{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_1^{(a+\sum_{i=1}^t n_i)-1}e^{-(b+t)\vartheta_1}}{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}}_{\Gamma_{a+\sum_{i=1}^t n_i,b+t}\text{elsozlású v.v. sűrűségfüggvénye}}.$$

Ezek szerint a várható érték:

$$E(\theta_1|N_1,\ldots,N_t) = \frac{a+\sum_{i=1}^{t} n_i}{b+t}. \tag{2.5}$$

Ez azt jelenti, hogy a következő 1 évben várhatóan $\frac{a+\sum_{i=1}^{t} n_i}{b+t}$ kár fog bekövetkezni egy t darab szerződésből álló portfólió egy szerződésére.

2.1.2. Összefüggő eset

1 szerződésre

Adott egy biztosítási szerződés, melynek ismerjük a káralakulását és a kárszámát. Vagyis $X_1,\ldots,X_N,N$ adott minta. Tegyük fel, hogy a károk és a kárszám között összefüggés figyelhető meg, melyet az eloszlásaik paramétere közti függőség feltételezésével modellezünk. Ez azt jelenti, hogy θ_1 és θ_2 összefüggő, de N és X_i feltételesen független, ha ismerjük a rizikóparamétereket. A (θ_1,θ_2) párról továbbá tegyük fel, hogy Sarmanov eloszlásból származik, és eloszlásfüggvénye 2.1 alakú. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy a következő 1 évben átlagosan hány kár fog bekövetkezni, ha rendelkezésünkre áll egy minta az előző évből. Az átlagos károk száma pedig nem más, mint a kárszám várható értéke. A várható érték meghatározásához jó lenne tudni azt, hogy milyen eloszlásból származik az ismeretlen rizikóparaméter, mert ha egy ismert eloszlásból származik, akkor rögtön megtudjuk mondani a várható értékét. Mivel a kárszám θ_1 paraméterű Poisson eloszlású, és a Poisson eloszlás várható értéke maga a paraméter, ezért ha meghatározzuk, pontosabban fogalmazva megbecsüljük θ_1-et egy adott minta ismeretében, akkor készen is vagyunk.

A minta sűrűségfüggvénye $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ paraméter mellett: $f_{N,X_1,\ldots,X_N|\theta}(n,x_1,\ldots,x_n|\vartheta)$. A (2.1) lemma alapján azt mondhatjuk, hogy (θ_1,θ_2) eloszlásfüggvénye 2.1 alakú adott paraméterű gamma marginálisokkal.

Bayes-tétele alapján a mintabeli és a mintán kívüli információk egyesíthetők a következő a posteriori sűrűségfüggvénybe:

$$f_{\theta|N,X_1,\ldots,X_N}(\vartheta|n,x_1,\ldots,x_n) = \frac{f_{N,X_1,\ldots,X_N|\theta}(n,x_1,\ldots,x_n|\vartheta)f_\theta(\vartheta)}{\int_0^\infty\int_0^\infty f_{N,X_1,\ldots,X_N|\Gamma}(n,x_1,\ldots,x_n|\gamma)f_\Gamma(\gamma)d\gamma}. \tag{2.6}$$

A számlálóban lévő sűrűségfüggvények eddigi ismereteink alapján a következő alakban írhatók fel:

$$f_{N,X_1,\dots,X_N|\vartheta}(n,x_1,\dots,x_n|\theta)=$$
$$=P(N=n|\vartheta_1)\prod_{i=1}^{n}f_{x_i}(x_i|\vartheta_2)=\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\prod_{i=1}^{n}\vartheta_2 e^{-\vartheta_2 x_i}=\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\vartheta_2^n e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$f_\theta(\vartheta)=f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)[1+\omega\phi_1(\vartheta_1)\phi_2(\vartheta_2)]=f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)+\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)\phi_2(\vartheta_2).$$

Ezek alapján a számláló:

$$f_{N,X_1,\dots,X_N|\vartheta}(n,x_1,\dots,x_n|\vartheta)f_\theta(\vartheta)=$$
$$=f_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\vartheta_2^n e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^n x_i}f_2(\vartheta_2)+\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\vartheta_2^n e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^n x_i}f_2(\vartheta_2)\phi_2(\vartheta_2).$$

θ_1 becsléséhez a 2.6-ben felírt a posterior sűrűségfüggvényt kell kiintegrálni θ_2 szerint annak értelémezési tartományán, vagyis a $(0,\infty)$ intervallumon. A következőt kapjuk:

$$\int_0^\infty f_{\theta|N,X_1,\dots,X_N}(\vartheta|n,x_1,\dots,x_n)d\vartheta_2=\underbrace{\frac{1}{\int_0^\infty\int_0^\infty f_{N,X_1,\dots,X_N|\Gamma}(n,x_1,\dots,x_n|\gamma)f_\Gamma(\gamma)d\gamma}}_{=A}$$

$$\Bigg(f_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\int_0^\infty \vartheta_2^n e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^n x_i}f_2(\vartheta_2)d\vartheta_2+$$
$$+\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\int_0^\infty \vartheta_2^n e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^n x_i}f_2(\vartheta_2)\phi_2(\vartheta_2)d\vartheta_2\Bigg)=$$
$$=A\Bigg(f_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\int_0^\infty \vartheta_2^n e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^n x_i}\frac{d^c\vartheta_2^{c-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c)}d\vartheta_2+$$
$$+\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\int_0^\infty \vartheta_2^n e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^n x_i}\frac{d^c\vartheta_2^{c-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c)}\left(e^{-\vartheta_2}-\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\right)d\vartheta_2\Bigg)=$$
$$=A\Bigg(f_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i+d)^{c+n}}\underbrace{\int_0^\infty\frac{(\sum_{i=1}^n x_i+d)^{c+n}\vartheta_2^{c+n-1}e^{-\vartheta_2(\sum_{i=1}^n x_i+d)}}{\Gamma(c+n)}d\vartheta_2}_{=1}+$$

$$+\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i+d+1)^{n+c}}$$

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{(\sum_{i=1}^n x_i+d+1)^{n+c}\vartheta_2^{n+c-1}e^{-\vartheta_2(\sum_{i=1}^n x_i+d+1)}}{\Gamma(n+c)}d\vartheta_2}_{=1} -$$

$$-\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i+d)^{n+c}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c$$

$$\left.\underbrace{\int_0^\infty \frac{(\sum_{i=1}^n x_i+d)^{n+c}\vartheta_2^{n+c-1}e^{-\vartheta_2(\sum_{i=1}^n x_i+d)}}{\Gamma(n+c)}d\vartheta_2}_{=1}\right) =$$

$$= A\Bigg(f_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i+d\right)^{c+n}} +$$

$$+\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i+d+1)^{n+c}} -$$

$$-\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)\frac{\vartheta_1^n e{-}\vartheta_1}{n!}\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i+d)^{n+c}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\Bigg) =$$

$$= A\Bigg(\frac{b^a\vartheta_1^{a-1}e^{-b\vartheta_1}}{\Gamma(a)}\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i+d\right)^{c+n}} +$$

$$+\omega\frac{b^a\vartheta_1^{a-1}e^{-b\vartheta_1}}{\Gamma(a)}\left(e^{-\vartheta_1}-\left(\frac{b}{b+1}\right)^a\right)\frac{\vartheta_1^n e^{-\vartheta_1}}{n!}\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(c)}$$

$$\left(\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i+d+1\right)^{c+n}}-\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i+d\right)^{c+n}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\right)\Bigg) =$$

$$= A\Bigg(\frac{(b+1)^{a+n}\vartheta_1^{a+n-1}e^{-(b+1)\vartheta_1}}{\Gamma(a+n)}\frac{\Gamma(a+n)}{(b+1)^{a+n}}\frac{b^a}{\Gamma(a)n!}\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i+d)^{c+n}} +$$

$$+\frac{(b+2)^{a+n}\vartheta_1^{a+n-1}e^{-(b+2)\vartheta_1}}{\Gamma(a+n)}\frac{\Gamma(a+n)}{(b+2)^{a+n}}\frac{b^a}{\Gamma(a)n!}\omega\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}$$

$$\left(\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i+d+1\right)^{c+n}}-\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i+d\right)^{c+n}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\right) -$$

$$-\frac{(b+1)^{a+n}\vartheta_1^{a+n-1}e^{-(b+1)\vartheta_1}}{\Gamma(a+n)}\frac{\Gamma(a+n)}{(b+1)^{a+n}}\frac{b^a}{\Gamma(a)n!}\omega\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}\left(\frac{b}{b+1}\right)^a$$

$$\left(\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i+d+1\right)^{c+n}}-\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i+d\right)^{c+n}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\right)\Bigg) =$$

$$= A\Bigg(\underbrace{\frac{(b+1)^{a+n}\vartheta_1^{a+n-1}e^{-(b+1)\vartheta_1}}{\Gamma(a+n)}}_{\Gamma_{a+n,b+1}\text{eloszlású v.v. sűrűségfüggvénye}} \frac{\Gamma(a+n)}{(b+1)^{a+n}}\frac{b^a}{\Gamma(a)n!}\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}$$

$$\left(\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i + d)^{c+n}} - \omega\left(\frac{b}{b+1}\right)^a \left(\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i + d + 1\right)^{c+n}} - \frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i + d)^{c+n}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\right)\right) +$$

$$+ \quad \underbrace{\frac{(b+2)^{a+n}\vartheta_1^{a+n-1}e^{-(b+2)\vartheta_1}}{\Gamma(a+n)}}_{\Gamma_{a+n,b+2}\text{eloszlású v.v. sűrűségfüggvénye}} \frac{\Gamma(a+n)}{(b+2)^{a+n}}\frac{b^a}{\Gamma(a)n!}\omega\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}$$

$$\left(\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i + d + 1\right)^{c+n}} - \frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i + d)^{c+n}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\right)\Bigg) =$$

$$= A(C_1 f_{Y_1} + C_2 f_{Y_2}) = C_1' f_{Y_1} + C_2' f_{Y_2},$$

ahol $Y_1 \sim \Gamma_{a+n,b+1}$, $Y_2 \sim \Gamma_{a+n,b+2}$.

Tehát θ_1 eloszlása az $N, X_1, \ldots, X_N$ minta ismeretében egy keverék gamma eloszlás lesz, mely

$$C_1' = A\Bigg(\frac{\Gamma(a+n)}{(b+1)^{a+n}}\frac{b^a}{\Gamma(a)n!}\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i + d)^{c+n}} - \omega\left(\frac{b}{b+1}\right)^a \left(\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i + d + 1\right)^{c+n}} - \frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i + d)^{c+n}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\right)\right)\Bigg)$$

súllyal $\Gamma_{a+n,b+1}$,

$$C_2' = A\left(\frac{\Gamma(a+n)}{(b+2)^{a+n}}\frac{b^a}{\Gamma(a)n!}\omega\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}\left(\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^n x_i + d + 1\right)^{c+n}} - \frac{d^c}{(\sum_{i=1}^n x_i + d)^{c+n}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\right)\right)$$

súllyal pedig $\Gamma_{a+n,b+2}$ eloszlású. Természetesen

$$C_1' + C_2' = A(C_1 + C_2) = 1 \tag{2.7}$$

kell hogy legyen. Így

$$E(\theta_1|N, X_1, \ldots, X_N) = C_1'\frac{a+n}{b+1} + C_2'\frac{a+n}{b+2} = \frac{a+n}{b+1}\left(C_1' + C_2'\frac{b+1}{b+2}\right) = \tag{2.8}$$

$$= \frac{a+n}{b+1}\left(C_1' + C_2'\frac{b+2-1}{b+2}\right) = \frac{a+n}{b+1}\left(C_1' + C_2'\left(1 - \frac{1}{b+2}\right)\right) =$$

$$= \frac{a+n}{b+1}\left(C_1' + C_2' - \frac{C_2'}{b+2}\right) = \frac{a+n}{b+1}\left(1 - \frac{C_2'}{b+2}\right).$$

Látszik, hogy $\omega = 0$ esetén $C_2' = 0$, így a várható kárszám ugyan az, mint független esetben.

t szerződésre

Adott t biztosítási szerződés. Minden szerződésre ismerjük az egyes károk nagyságát, és a károk számát. A kárszám minden szerződésre θ_1 paraméterű Poisson, a károk nagysága pedig ugyan olyan θ_2 paraméterű exponenciális minden szerződés minden kárára. Matematikailag: $N_i \sim$Poisson(θ_1) $\forall i = 1, \ldots, t$; $X_{i,j} \sim$Exp(θ_2) $\forall i = 1, \ldots, t; j = 1, \ldots, N_i$. Ismét a károk számának jövőbeli alakulását fogjuk becsülni a már ismertetett Bayes-i módszerrel. Az a posteriori sűrűségfüggvény adott $N_1, \ldots, N_t, X_{1,1}, \ldots, X_{t,N_t}$ minta mellet:

$$f_{\theta|N_1,\ldots,N_t,X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}}(\vartheta|n_1,\ldots,n_t,x_{1,1},\ldots,x_{t,n_t}) = \frac{f_{N_1,\ldots,N_t,X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}|\theta}(n_1,\ldots,n_t,x_{1,1},\ldots,x_{t,n_t}|\vartheta)f_\theta(\vartheta)}{\int_0^\infty\int_0^\infty f_{N_1,\ldots,N_t,X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}|\Lambda}(n_1,\ldots,n_t,x_{1,1},\ldots,x_{t,n_t}|\lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda}.$$

A számláló tényezői külön-külön kifejtve:

$$f_{N_1,\ldots,N_t,X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}|\theta}(n_1,\ldots,n_t,x_{1,1},\ldots,x_{t,n_t}|\vartheta) =$$
$$P(N_1 = n_1|\vartheta_1)\ldots P(N_t = n_t|\vartheta_1)\prod_{i=1}^t\prod_{j=1}^{N_i} f_{X_{i,j}|\theta_2}(x_{i,j}|\vartheta_2) =$$
$$\prod_{i=1}^t P(N_i = n_i|\vartheta_1)\prod_{i=1}^t\prod_{j=1}^{N_i} f_{X_{i,j}|\theta_2}(x_{i,j}|\vartheta_2) = \prod_{i=1}^t \frac{\vartheta_1^{n_i}e^{-\vartheta_1}}{n_i!}\prod_{i=1}^t\prod_{j=1}^{N_i}\vartheta_2 e^{-\vartheta_2 x_{i,j}} =$$
$$\prod_{i=1}^t \frac{\vartheta_1^{n_i}e^{-\vartheta_1}}{n_i!}\prod_{i=1}^t \vartheta_2^{n_i}e^{-\vartheta_2\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}} = \left(\prod_{i=1}^t \frac{\vartheta_1^{n_i}e^{-\vartheta_1}}{n_i!}\right)\left(\vartheta_2^{\sum_{i=1}^t n_i}e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}}\right),$$

$$f_\theta(\vartheta) = f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)[1+\omega\phi_1(\vartheta_1)\phi_2(\vartheta_2)] = f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2) + \omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)\phi_2(\vartheta_2).$$

θ_1 becsléséhez ismét kiintegráljuk θ_2 szerint az a posteriori sűrűségfüggvényt:

$$\int_0^\infty f_{\theta|N_1,\ldots,N_t,X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}}(\vartheta|n_1,\ldots,n_t,x_{1,1},\ldots,x_{t,n_t})d\vartheta_2 =$$
$$\underbrace{\frac{1}{\int_0^\infty\int_0^\infty f_{N_1,\ldots,N_t,X_{1,1},\ldots,X_{t,N_t}|\Lambda}(n_1,\ldots,n_t,x_{1,1},\ldots,x_{t,n_t}|\lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda}}_{=B}$$

$$\Bigg(f_1(\vartheta_1)\Bigg(\prod_{i=1}^{t}\frac{\vartheta_1^{n_i}e^{-\vartheta_1}}{n_i!}\Bigg)\int_0^\infty f_2(\vartheta_2)\vartheta_2^{\sum_{i=1}^t n_i}e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}}d\vartheta_2+$$

$$+\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)\Bigg(\prod_{i=1}^{t}\frac{\vartheta_1^{n_i}e^{-\vartheta_1}}{n_i!}\Bigg)\int_0^\infty \vartheta_2^{\sum_{i=1}^t n_i}e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}}f_2(\vartheta_2)\phi_2(\vartheta_2)d\vartheta_2\Bigg)=$$

$$=B\Bigg(f_1(\vartheta_1)\Bigg(\prod_{i=1}^{t}\frac{\vartheta_1^{n_i}e^{-\vartheta_1}}{n_i!}\Bigg)\int_0^\infty \frac{d^c\vartheta_2^{c-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c)}\vartheta_2^{\sum_{i=1}^t n_i}e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}}d\vartheta_2+$$

$$+\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)\Bigg(\prod_{i=1}^{t}\frac{\vartheta_1^{n_i}e^{-\vartheta_1}}{n_i!}\Bigg)\int_0^\infty \vartheta_2^{\sum_{i=1}^t n_i}e^{-\vartheta_2\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}}\frac{d^c\vartheta_2^{c-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c)}\Bigg(e^{-\vartheta_2}-\Bigg(\frac{d}{d+1}\Bigg)^c\Bigg)d\vartheta_2\Bigg)=$$

$$=B\Bigg(f_1(\vartheta_1)\Bigg(\prod_{i=1}^{t}\frac{\vartheta_1^{n_i}e^{-\vartheta_1}}{n_i!}\Bigg)\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{\Big(d+\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}\Big)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}$$

$$\underbrace{\int_0^\infty\frac{\Big(d+\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}\Big)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_2^{c+\sum_{i=1}^t n_i-1}e^{-\vartheta_2\left(d+\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}\right)}}{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}d\vartheta_2}_{=1}+$$

$$+\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)\Bigg(\prod_{i=1}^{t}\frac{\vartheta_1^{n_i}e^{-\vartheta_1}}{n_i!}\Bigg)\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{\Big(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d+1\Big)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}$$

$$\underbrace{\int_0^\infty\frac{\Big(d+\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+1\Big)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_2^{c+\sum_{i=1}^t n_i-1}e^{-\vartheta_2\left(d+\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+1\right)}}{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}d\vartheta_2}_{=1}-$$

$$-\omega f_1(\vartheta_1)\phi_1(\vartheta_1)\Bigg(\prod_{i=1}^{t}\frac{\vartheta_1^{n_i}e^{-\vartheta_1}}{n_i!}\Bigg)\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{\Big(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d\Big)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}\Bigg(\frac{d}{d+1}\Bigg)^c$$

$$\underbrace{\int_0^\infty\frac{\Big(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d\Big)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_2^{c+\sum_{i=1}^t n_i-1}e^{-\vartheta_2\left(d+\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}\right)}}{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}d\vartheta_2}_{=1}\Bigg)=$$

$$=B\Bigg(\frac{\vartheta_1^{\sum_{i=1}^t n_i}e^{-t\vartheta_1}}{\prod_{i=1}^t n_i!}\frac{b^a\vartheta_1^{a-1}e^{-b\vartheta_1}}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{\Big(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d\Big)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}+$$

$$+\omega\frac{b^a\vartheta_1^{a-1}e^{-b\vartheta_1}}{\Gamma(a)}\left(e^{-\vartheta_1}-\left(\frac{b}{b+1}\right)^a\right)\frac{\vartheta_1^{\sum_{i=1}^t n_i}e^{-t\vartheta_1}}{\prod_{i=1}^t n_i!}\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}$$

$$\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d+1\right)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}-$$

$$-\omega\frac{b^a\vartheta_1^{a-1}e^{-b\vartheta_1}}{\Gamma(a)}\left(e^{-\vartheta_1}-\left(\frac{b}{b+1}\right)^a\right)\frac{\vartheta_1^{\sum_{i=1}^t n_i}e^{-t\vartheta_1}}{\prod_{i=1}^t n_i!}\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}$$

$$\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d\right)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\Bigg)=$$

$$=B\Bigg(\underbrace{\frac{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_1^{a+\sum_{i=1}^t n_i-1}e^{-\vartheta_1(b+t)}}{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}}_{\Gamma_{\sum_{i=1}^t n_i+a,b+t}\text{eloszlású v.v. sűrűségfüggvénye}}\cdot\frac{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}}\frac{b^a}{\Gamma(a)\left(\prod_{i=1}^t n_i!\right)}$$

$$\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{\left(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d\right)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}+$$

$$+\omega\underbrace{\frac{(b+t+1)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_1^{a+\sum_{i=1}^t n_i-1}e^{-\vartheta_1(b+t+1)}}{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}}_{\Gamma_{\sum_{i=1}^t n_i+a,b+t+1}\text{eloszlású v.v. sűráségfüggvénye}}\cdot\frac{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}{(b+t+1)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}}$$

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)\left(\prod_{i=1}^t n_i!\right)}\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d+1)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}-$$

$$-\omega\underbrace{\frac{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_1^{a+\sum_{i=1}^t n_i-1}e^{-\vartheta(b+t)}}{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}}_{\Gamma_{\sum_{i=1}^t n_i+a,b+t}\text{eloszlású v.v. sűráségfüggvénye}}\frac{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}}$$

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)\left(\prod_{i=1}^t n_i!\right)}\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d+1)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}\left(\frac{b}{b+1}\right)^a-$$

$$-\omega\underbrace{\frac{(b+t+1)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_1^{a+\sum_{i=1}^t n_i-1}e^{-\vartheta(b+t+1)}}{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}}_{\Gamma_{\sum_{i=1}^t n_i+a,b+t+1}\text{eloszlású v.v. sűráségfüggvénye}}\frac{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}{(b+t+1)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}}$$

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)\left(\prod_{i=1}^t n_i!\right)}\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c+$$

$$+\omega \underbrace{\frac{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_1^{a+\sum_{i=1}^t n_i-1}e^{-\vartheta_1(b+t)}}{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}}_{\Gamma_{\sum_{i=1}^t n_i+a,b+t}\text{eloszlású v.v. sűrűségfüggvénye}} \frac{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}}$$

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)\left(\prod_{i=1}^t n_i!\right)}\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}\left(\frac{b}{b+1}\right)^a\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\Bigg) =$$

$$= B\Bigg(\underbrace{\frac{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_1^{a+\sum_{i=1}^t n_i-1}e^{-\vartheta_1(b+t)}}{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}}_{\Gamma_{\sum_{i=1}^t n_i+a,b+t}\text{eloszlású v.v. sűrűségfüggvénye}} \frac{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}}\frac{b^a}{\Gamma(a)\left(\prod_{i=1}^t n_i!\right)}\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}\cdot$$

$$\Bigg[\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}} - \omega\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d+1)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}\left(\frac{b}{b+1}\right)^a +$$

$$+\omega\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}\left(\frac{b}{b+1}\right)^a\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\Bigg] +$$

$$+\underbrace{\frac{(b+t+1)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}\vartheta_1^{a+\sum_{i=1}^t n_i-1}e^{-\vartheta(b+t+1)}}{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}}_{\Gamma_{\sum_{i=1}^t n_i+a,b+t+1}\text{eloszlású v.v. sűrűségfüggvénye}}\omega\frac{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}{(b+t+1)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}}\frac{b^a}{\Gamma(a)\left(\prod_{i=1}^t n_i!\right)}\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}$$

$$\Bigg[\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d+1)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}} - \frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\Bigg]\Bigg) =$$

$$= B(K_1 f_{Z_1} + K_2 f_{Z_2}) = K_1' f_{Z_1} + K_2' f_{Z_2}.$$

Tehát ismét egy keverék eloszlást kaptunk, mint 1 szerződés esetén, csak más paraméterekkel és súlyokkal. Most

$$K_1' = B\Bigg(\frac{\Gamma(a+\sum_{i=1}^t n_i)}{(b+t)^{a+\sum_{i=1}^t n_i}}\frac{b^a}{\Gamma(a)\left(\prod_{i=1}^t n_i!\right)}\frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^t n_i)}{\Gamma(c)}$$

$$\Bigg[\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}} - \omega\left(\frac{b}{b+1}\right)^a$$

$$\Bigg(\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d+1)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}} - \frac{d^c}{(\sum_{i=1}^t\sum_{j=1}^{n_i}x_{i,j}+d)^{c+\sum_{i=1}^t n_i}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\Bigg)\Bigg]\Bigg)$$

súllyal $\Gamma_{\sum_{i=1}^{t} n_i+a, b+t}$,

$$K_2' = B\Bigg(\omega \frac{\Gamma(a+\sum_{i=1}^{t} n_i)}{(b+t+1)^{a+\sum_{i=1}^{t} n_i}} \frac{b^a}{\Gamma(a)\left(\prod_{i=1}^{t} n_i!\right)} \frac{\Gamma(c+\sum_{i=1}^{t} n_i)}{\Gamma(c)}$$
$$\left[\frac{d^c}{(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j}+d+1)^{c+\sum_{i=1}^{t} n_i}} - \frac{d^c}{(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j}+d)^{c+\sum_{i=1}^{t} n_i}}\left(\frac{d}{d+1}\right)^c\right]\Bigg)$$

súllyal pedig $\Gamma_{\sum_{i=1}^{t} n_i+a, b+t+1}$ eloszlást.

Itt is igaz, hogy

$$K_1' + K_2' = B(K_1 + K_2) = 1. \tag{2.9}$$

Várható kárszám az $N_1, \ldots, N_t, X_{1,1}, \ldots, X_{t,N_t}$ minta ismeretében:

$$E(\theta_1 | N_1, \ldots, N_t, X_{1,1}, \ldots, X_{t,N_t}) = K_1' \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i + a}{b+t} + K_2' \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i + a}{b+t+1} = \tag{2.10}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i + a}{b+t}\left(K_1' + K_2' \frac{b+t}{b+t+1}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i + a}{b+t}\left(K_1' + K_2' \frac{b+t+1-1}{b+t+1}\right) =$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i + a}{b+t}\left(K_1' + K_2'\left(1 - \frac{1}{b+t+1}\right)\right) = \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i + a}{b+t}\left(K_1' + K_2' - \frac{K_2'}{b+t+1}\right) =$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i + a}{b+t}\left(1 - \frac{K_2'}{b+t+1}\right).$$

Látszik, hogy $\omega = 0$ esetén $K_2' = 0$, így a várható kárszám itt is ugyanaz, mint független esetben.

A 4.2 alfejezetben mutatom be konkrét számpéldában, hogy milyen hatása van az összefüggésnek a becslésre.

2.2. Sarmanovok összege Sarmanov?

Az eredeti modell röviden úgy szólt, hogy 1 szerződésre feltettük a károk számáról hogy θ_1 paraméterű Poisson, a károk nagyságáról pedig hogy θ_2 paraméterű exponenciális eloszlású. A paraméterek rendre $\Gamma_{a,b}$ és $\Gamma_{c,d}$ eloszlásból származtak. θ_1 és θ_2 között összefüggést tételeztünk fel, továbbá hogy együttesen Sarmanov eloszlásúak, és sűrűségfüggvényük felírható 2.1 alakban. Ha az S összkárt ezekkel az inputokkal képezzük, akkor azt mondjuk, hogy Sarmanov eloszlásból származik.

2.2.1. A rizikóparaméterek szerződésenként megegyeznek

Ebben a részben egy t szerződésből álló portfóliót fogunk vizsgálni. Feltesszük, hogy a portfólió minden eleme független egymástól, továbbá hogy külön-külön az S_i összkárok Sarmanov eloszlásból származnak, az imént összefoglalt modell szerint.

Legyen tehát adott t darab független szerződés. Legyen minden szerződés minden kárszáma - N_i - azonosan θ_1-Poisson eloszlású, ahol $\theta_1 \sim \Gamma_{a,b}$, illetve minden szerződés minden kára - $X_{i,j}$ - azonos, Exp-θ_2 eloszlású, ahol $\theta_2 \sim \Gamma_{c,d}$. Tegyük fel továbbá, hogy az egyes szerződésekhez tartozó (θ_1, θ_2) párok Sarmanov eloszlásból származnak, azaz sűrűségfüggvényük 2.1 alakú. Azt szeretnénk vizsgálni, hogy az aggregált összkár, azaz $S = \sum_{i=1}^{t} S_i$ származtatható e az eredeti modell alapján Sarmanov eloszlásból, azaz felírható e olyan véletlen tagszámú összeg alakjában, ahol az összeadandók száma θ_1'-Poisson, az összeadandók pedig θ_2'-exponenciális eloszlásúak, továbbá θ_1' és θ_2' külön-külön gamma, együttesen pedig Sarmanov eloszlású, sűrűségfüggvénye felírható 1.3 alakban kielégítve a megfelelő feltételeket.

t darab szerződésre az összkárszám, vagyis $N = \sum_{i=1}^{t} N_i$ az előbbiek alapján $t\theta_1$ paraméterű Poisson eloszlású lesz, mivel t darab független θ_1-Poisson összege. Az i. szerződés $S_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_{i,j}$ összkára ismert N_i esetén (N_i, θ_2) paraméterű gamma eloszlású lesz, mivel N_i darab független Exp-θ_2 eloszlású változó összege. Mivel a szerződésekről is feltettük hogy függetlenek, ezért az aggregált kárösszeg, azaz $S = \sum_{i=1}^{t} S_i$ gamma eloszlású lesz $(\sum_{i=1}^{t} N_i, \theta_2) = (N, \theta_2)$ paraméterrel, mert független gammák összege gamma, és a rendek összeadódnak. De mivel a gamma eloszlás az exponenciális eloszlásból származtatható, ezért az aggregált kárösszeg is felírható - S_i-hez hasonlóan - $S = \sum_{l=1}^{N} (Y_{i,j})_l$ alakban, ahol $Y_{i,j} \sim$Exp-θ_2, N pedig $t\theta_1$-Poisson eloszlású, ahol θ_2 $\Gamma_{c,d}$, $t\theta_1$ pedig $\Gamma_{ta,b}$ eloszlású. Még azt kell leellenőrizni, hogy $(t\theta_1, \theta_2)$ közös $\widetilde{f}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ sűrűségfüggvénye Sarmanov sűrűségfüggvény, melynek peremeloszlásai gammák.

$$P(t\theta_1 < \vartheta_1, \theta_2 < \vartheta_2) = P(\theta_1 < \frac{\vartheta_1}{t}, \theta_2 < \vartheta_2) = F\left(\frac{\vartheta_1}{t}, \vartheta_2\right).$$

Ha $F\left(\frac{\vartheta_1}{t}, \vartheta_2\right)$-t lederiváljuk mindkét változója szerint, akkor megkapjuk $(t\theta_1, \theta_2)$ sűrűségfüggvényét.

$$\frac{\partial^2 F\left(\frac{\vartheta_1}{t}, \vartheta_2\right)}{\partial\vartheta_1 \partial\vartheta_2} = \frac{1}{t} f\left(\frac{\vartheta_1}{t}, \vartheta_2\right),$$

ahol $f\left(\frac{\vartheta_1}{t}, \vartheta_2\right)$ az 2.1-ben lévő sűrűségfüggvény a $\left(\frac{\vartheta_1}{t}, \vartheta_2\right)$ helyen. Azaz

$$\widetilde{f}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{1}{t} f_1\left(\frac{\vartheta_1}{t}\right) f_2(\vartheta_2)[1 + \omega(e^{-\frac{\vartheta_1}{t}} - k1)(e^{-\vartheta_2} - k_2)].$$

Ez pedig valóban Sarmanov sűrűségfüggvény gamma peremeloszlásokkal, hiszen $\frac{1}{t} f_1\left(\frac{\vartheta_1}{t}\right)$ $\Gamma_{a,\frac{b}{t}}$ eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{t} f_1\left(\frac{\vartheta_1}{t}\right) = \frac{1}{t} \frac{b^a (\frac{\vartheta_1}{t})^{a-1} e^{-b\frac{\vartheta_1}{t}}}{\Gamma(a)} = \frac{\left(\frac{b}{t}\right)^a \vartheta_1^{a-1} e^{-\frac{b}{t}\vartheta_1}}{\Gamma(a)}$$

miatt, továbbá $f_2(\vartheta_2)$ eleve $\Gamma_{c,d}$ sűrűségfüggvény, és az 1.1, 1.2 feltételek is teljesülnek $f_1(\vartheta_1) = \frac{1}{t} f_1\left(\frac{\vartheta_1}{t}\right)$, $f_2(\vartheta_2) = f_2(\vartheta_2)$, $\phi_1(\vartheta_1) = e^{-\frac{\vartheta_1}{t}} - k_1$, $\phi_2(\vartheta_2) = e^{-\vartheta_2} - k_2$ szereposztással.

Azért számoljuk végig, hogy az 1.1, 1.2 feltételek tényleg teljesülnek.

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} f_1\left(\frac{\vartheta_1}{t}\right)\left(e^{-\frac{\vartheta_1}{t}} - k_1\right) d\vartheta_1 = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{b}{t}\right)^a \vartheta_1^{a-1} e^{-\frac{b}{t}\vartheta_1}}{\Gamma(a)} \left(e^{-\frac{\vartheta_1}{t}} - k_1\right) d\vartheta_1 =$$

$$\frac{\left(\frac{b}{t}\right)^a}{\left(\frac{b+1}{t}\right)^a} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\left(\frac{b+1}{t}\right)^a \vartheta_1^{a-1} e^{-\vartheta_1 \frac{b+1}{t}}}{\Gamma(a)} d\vartheta_1}_{=1} - k_1 \underbrace{\int_0^\infty \frac{\left(\frac{b}{t}\right)^a \vartheta_1^{a-1} e^{-\frac{b}{t}\vartheta_1}}{\Gamma(a)}}_{=1} = \left(\frac{b}{b+1}\right)^a - k_1 = k_1 - k_1 = 0$$

$$\int_0^\infty f_2(\vartheta_2)\left(e^{-\vartheta_2} - k_2\right) d\vartheta_2 = \left(\frac{d}{d+1}\right)^c \underbrace{\int_0^\infty \frac{(d+1)^c \vartheta_1^{c-1} e^{-\vartheta_1(d+1)}}{\Gamma(c)} d\vartheta_1}_{=1} - k_2 \underbrace{\int_0^\infty f_2(\vartheta_2) d\vartheta_2}_{1} =$$

$$\left(\frac{d}{d+1}\right)^c - k_2 = k_2 - k_2 = 0.$$

Így $\widetilde{f}$ tényleg Sarmanov sűrűségfüggvény, bár nem az eredeti modellnek megfelelő alakú.

Azt kaptuk tehát, hogy t darab szerződés esetén, ha a károk és a kárszámok összefüggnek a rizikóparamétereik által, és a kárszámok eloszlásának paramétere minden szerződésre ugyanaz, továbbá utóbbi igaz a károkra is, akkor az összkár leírható Sarmanov eloszlással.

2.2.2. A rizikóparaméterek szerződésenként eltérőek

Ebben a részben azt az általános esetet fogjuk vizsgálni, mikor a rizikóparaméterek szerződésenként változnak. Azaz az i. szerződés N_i kárszáma Poisson-$\theta_{1,i}$ eloszlású, $X_{i,j}$ kárai pedig $\theta_{2,i}$ eloszlásúak, ahol $i = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, N_i$. Feltesszük továbbá, hogy

$(\theta_{1,1}, \theta_{2,1}), (\theta_{1,2}, \theta_{2,2}), \ldots (\theta_{1,t}, \theta_{2,t})$ független és azonos eloszlású. Itt is az a kérdés, hogy az $S = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} X_{i,j} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{N_i} S_i$ aggregált kárösszeg leírható e Sarmanov eloszlással. Ebben az esetben az $N = \sum_{i=1}^{t} N_i$ összkárszám ugyan ismét Poisson eloszlású lesz rögzített rizikóparaméterek esetén, méghozzá $\sum_{i=1}^{t} \theta_{1,i}$ paraméterrel, de az S összkár már nem írható fel olyan véletlen tagszámú összeg alakjában, ahol az összeadandók feltételesen azonos exponenciális eloszlásúak. Tehát az előző részben ismertetett gondolatmenet nem alkalmazható. Más megoldást kell keresnünk.

Határozzuk meg először $N = \sum_{i=1}^{t} N_i$ eloszlását. Mivel a szerződések függetlenek, ezért elég 1 szerződés kárszámának meghatározása.

Először írjuk fel N_i feltételes generátorfüggvényét. Ismert, hogy ha X λ-Poisson eloszlású, akkor generátorfüggvénye: $G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$. Ezt használva

$$G_{N_i|\theta_{1,i}}(z) = E(z^{N_i}|\theta_{1,i} = \vartheta_{1,i}) = e^{\vartheta_{1,i}(z-1)}.$$

Ismert továbbá, hogy egy (α, λ) paraméterű gamma eloszlású valószínűségi változó Laplace-transzformáltja $\left(\frac{\lambda}{\lambda+z}\right)^{\alpha}$. Így a teljes várható érték tétel alapján a feltétel nélküli generátorfüggvény a következő:

$$G_{N_i}(z) = E(z^{N_i}) = E(E(z^{N_i}|\theta_{1,i} = \vartheta_{1,i})) = E(e^{\vartheta_{1,i}(z-1)}) = L_{\theta_{1,i}}(1-z) =$$
$$\left(\frac{b}{b+(1-z)}\right)^{a} = \left(\frac{b+(1-z)}{b}\right)^{-a} = \left(1 + \frac{1}{b}(1-z)\right)^{-a} = \left(1 - \frac{1}{b}(z-1)\right)^{-a}.$$

Ez pedig egy $(a, \frac{1}{1+b})$ paraméterű negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye. Mivel a generátorfüggvény egyértelműen meghatározza egy valószínűségi változó eloszlását, ezért

$$N_i \sim NB\left(a, \frac{1}{1+b}\right)$$

eloszlású lesz. $N = \sum_{i=1}^{t} N_i$ pedig

$$N \sim NB\left(ta, \frac{1}{1+b}\right)$$

eloszlású, mivel független negatív binomiálisok összege szintén negatív binomiális, a rendek összeadódnak.

Határozzuk meg S várható értékét és szórásnégyzetét. Mivel szerződésenként az S_i kárösszegek függetlenek, ezért elég meghatározni 1 szerződés várható összkárát. Először kiszámoljuk S_1 várható értékét, feltéve hogy ismerjük a rizikóparamétereket az első szerződésre. Ezt követően a teljes várható érték tétel segítségével meghatározzuk a feltétel nélküli várható értéket is.

$$E(S_1|\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1}) = E\left(\sum_{j=1}^{N_1} X_{1,j}|\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1}\right) = E(N_1|\vartheta_{1,1})E(X_{2,1}|\vartheta_{1,1}) = \vartheta_{1,1}\frac{1}{\vartheta_{2,1}} = \frac{\vartheta_{1,1}}{\vartheta_{2,1}}.$$

Hagyjuk el a szerződések sorszámát jelölő második indexet az egyszerűbb jelölés érdekében, mert úgy is csak az első szerződéssel dolgozunk. A feltétel nélküli várható érték így a következő:

$$\begin{aligned}
&ES_1 = E(E(S_1|\vartheta_1,\vartheta_2)) = E\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right) = E\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} f(\vartheta_1,\vartheta_2)d\vartheta_1 d\vartheta_1 = \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)(1+\omega(e^{-\vartheta_1}-k_1)(e^{-\vartheta_2}-k_2))d\vartheta_1 d\vartheta_1 = \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)d\vartheta_1 d\vartheta_1 + \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)\omega(e^{-\vartheta_1}-k_1)(e^{-\vartheta_2}-k_2)d\vartheta_1 d\vartheta_1 = \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\vartheta_2} f_2(\vartheta_2)\left(\int_0^\infty \vartheta_1 f_1(\vartheta_1)d\vartheta_1\right)d\vartheta_2 + \\
&+\omega\int_0^\infty \frac{1}{\vartheta_2} f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_2}-k_2)\left(\int_0^\infty \vartheta_1 f_1(\vartheta_1)(e^{-\vartheta_1}-k_1)d\vartheta_1\right)d\vartheta_2 = \\
&= E_{\theta_1}(\vartheta_1)\int_0^\infty \frac{1}{\vartheta_2}\frac{d^c\vartheta_2^{c-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c)}d\vartheta_2 + \\
&+\omega\int_0^\infty \frac{1}{\vartheta_2} f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_2}-k_2)\left(\int_0^\infty \vartheta_1\frac{b^a\vartheta_1^{a-1}e^{-b\vartheta_1}}{\Gamma(a)}e^{-\vartheta_1}d\vartheta_1 - k_1\int_0^\infty \vartheta_1 f_1(\vartheta_1)d\vartheta_1\right)d\vartheta_2 = \\
&= \frac{a}{b}\frac{d}{c-1}\underbrace{\int_0^\infty \frac{d^{c-1}\vartheta_2^{(c-1)-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c-1)}d\vartheta_2}_{=1} +
\end{aligned}$$

$$+\omega\int_0^\infty \frac{1}{\vartheta_2} f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_2}-k_2)\left(\frac{ab^a}{(b+1)^{a+1}}\underbrace{\int_0^\infty \frac{(b+1)^{a+1}\vartheta_1^{(a+1)-1}e^{-\vartheta_1(b+1)}}{\Gamma(a+1)}d\vartheta_1}_{=1} - k_1 E_{\theta_1}(\vartheta_1)\right)d\vartheta_2 =$$

$$= \frac{ad}{b(c-1)} + \omega\left(\frac{ab^a}{(b+1)^{a+1}} - k_1\frac{a}{b}\right)\int_0^\infty \frac{1}{\vartheta_2}\frac{d^c\vartheta_2^{c-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c)}(e^{-\vartheta_2}-k_2)d\vartheta_2 =$$

$$= \frac{ad}{b(c-1)} + \omega\left(\frac{a}{b+1}\underbrace{\left(\frac{b}{b+1}\right)^a}_{=k_1} - k_1\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d^c}{(d+1)^{c-1}(c-1)}\underbrace{\int_0^\infty \frac{(d+1)^{c-1}\vartheta_2^{(c-1)-1}e^{-\vartheta_2(d+1)}}{\Gamma(c-1)}d\vartheta_2}_{=1} -\right.$$

$$\left. -k_2\frac{d}{c-1}\underbrace{\int_0^\infty \frac{d^{c-1}\vartheta_2^{(c-1)-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c-1)}d\vartheta_2}_{=1}\right) =$$

$$= \frac{ad}{b(c-1)} + \omega k_1\left(-\frac{a}{b(b+1)}\right)\left(\underbrace{\left(\frac{d}{d+1}\right)^c}_{=k_2}\frac{d+1}{c-1} - k_2\frac{d}{c-1}\right) = \frac{ad}{b(c-1)} - \omega\frac{ak_1k_2}{b(b+1)(c-1)}.$$

Tehát az S aggregált összkár várható értéke:

$$ES = E(S_1+\cdots+S_t) = tES_1 = t\left(\frac{ad}{b(c-1)} - \omega\frac{ak_1k_2}{b(b+1)(c-1)}\right).$$

S szórásnégyzetét a várható értékéhez hasonlóan fogjuk meghatározni. Itt is elég S_1 szórásnégyzetét kiszámolni, mert S szórásnégyzete ennek a t-szerese lesz a szerződések függetlenségéből kifolyólag.

$$D^2S_1 = E(D^2(S_1|\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1})) + D^2(E(S_1|\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1})) =$$

$$= E\left(D^2\left(\sum_{j=1}^{N_1} X_{1,j}|\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1}\right)\right) + D^2\left(E\left(\sum_{j=1}^{N_1} X_{1,j}|\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1}\right)\right) =$$

$$= E\left\{E\left(D^2\left(\sum_{j=1}^{N_1} X_{1,j}|N_1,\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1}\right)\right) + D^2\left(E\left(\sum_{j=1}^{N_1} X_{1,j}|N_1,\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1}\right)\right)\right\} + D^2\left(\frac{\vartheta_{1,1}}{\vartheta_{2,1}}\right) =$$

$$= E\{E(N_1D^2X_{1,1}) + D^2(N_1EX_{1,1})\} + D^2\left(\frac{\vartheta_{1,1}}{\vartheta_{2,1}}\right) =$$

$$= E\{EN_1D^2X_{1,1} + (EX_{1,1})^2D^2N_1\} + D^2\left(\frac{\vartheta_{1,1}}{\vartheta_{2,1}}\right) =$$

$$= E\left(\vartheta_{1,1}\frac{1}{\vartheta_{2,1}^2} + \vartheta_{2,1}^2\vartheta_{1,1}\right) + D^2\left(\frac{\vartheta_{1,1}}{\vartheta_{2,1}}\right) = E\left(\vartheta_{1,1}\left(\frac{1}{\vartheta_{2,1}^2} + \vartheta_{2,1}^2\right)\right) + D^2\left(\frac{\vartheta_{1,1}}{\vartheta_{2,1}}\right).$$

Hagyjuk el itt is a második, vagyis a szerződések sorszámát jelölő indexet. Az első tag a következőképpen számolható tovább:

$$E\left(\vartheta_1\left(\frac{1}{\vartheta_2^2} + \vartheta_2^2\right)\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty \vartheta_1\left(\frac{1}{\vartheta_2^2} + \vartheta_2^2\right) f(\vartheta_1, \vartheta_2) d\vartheta_1\vartheta_2 =$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \vartheta_1\left(\frac{1}{\vartheta_2^2} + \vartheta_2^2\right) f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)(1 + \omega(e^{-\vartheta_1} - k_1)(e^{-\vartheta_2} - k_2))d\vartheta_1 d\vartheta_2 =$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \vartheta_1\left(\frac{1}{\vartheta_2^2} + \vartheta_2^2\right) f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2 +$$
$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty \vartheta_1\left(\frac{1}{\vartheta_2^2} + \vartheta_2^2\right) f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)\omega(e^{-\vartheta_1} - k_1)(e^{-\vartheta_2} - k_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2 =$$
$$= \int_0^\infty f_2(\vartheta_2)\left(\frac{1}{\vartheta_2^2} + \vartheta_2^2\right)\left(\int_0^\infty \vartheta_1 f_1(\vartheta_1)d\vartheta_1\right)d\vartheta_2 +$$
$$+ \int_0^\infty \omega f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_2} - k_2)\left(\frac{1}{\vartheta_2^2} + \vartheta_2^2\right)\left(\int_0^\infty \vartheta_1 f_1(\vartheta_1)(e^{-\vartheta_1} - k_1)d\vartheta_1\right)d\vartheta_2 =$$
$$= E_{\theta_1}(\vartheta_1)\int_0^\infty f_2(\vartheta_2)\left(\frac{1}{\vartheta_2^2} + \vartheta_2^2\right)d\vartheta_2 +$$
$$+\omega\left(\int_0^\infty \vartheta_1\frac{b^a\vartheta_1^{a-1}e^{-b\vartheta_1}}{\Gamma(a)}e^{-\vartheta_1}d\vartheta_1 - k_1\int_0^\infty \vartheta_1 f_1(\vartheta_1)d\vartheta_1\right)$$
$$\left(\int_0^\infty f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_2} - k_2)\left(\frac{1}{\vartheta_2^2} + \vartheta_2^2\right)d\vartheta_2\right) =$$
$$= \frac{a}{b}\left(\int_0^\infty \frac{d^c\vartheta_2^{c-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c)}\frac{1}{\vartheta_2^2}d\vartheta_2 + \int_0^\infty \frac{d^c\vartheta_2^{c-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c)}\vartheta_2^2 d\vartheta_2\right) -$$
$$-\omega\frac{ak_1}{b(b+1)}\left(\int_0^\infty \frac{1}{\vartheta_2^2}f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_2} - k_2)d\vartheta_2 + \int_0^\infty \vartheta_2^2 f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_2} - k_2)d\vartheta_2\right) =$$
$$= \frac{a}{b}\left(\frac{d^2}{(c-1)(c-2)}\underbrace{\int_0^\infty \frac{d^{c-2}\vartheta_2^{(c-2)-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c-2)}d\vartheta_2}_{=1} + \frac{c(c+1)}{d^2}\underbrace{\int_0^\infty \frac{d^{c+2}\vartheta_2^{(c+2)-1}e^{-d\vartheta_2}}{\Gamma(c+2)}d\vartheta_2}_{=1}\right) -$$
$$-\omega\frac{ak_1}{b(b+1)}\left(\frac{d^c}{(d+1)^{c-2}(c-1)(c-2)}\underbrace{\int_0^\infty \frac{(d+1)^{c-2}\vartheta_2^{(c-2)-1}e^{-(d+1)\vartheta_2}}{\Gamma(c-2)}d\vartheta_2}_{=1} -\right.$$

$$-k_2\frac{d^2}{(c-1)(c-2)}+\frac{d^c c(c+1)}{(d+1)^{c+2}}\underbrace{\int_0^\infty \frac{(d+1)^{c+2}\vartheta_2^{(c+2)-1}e^{-(d+1)\vartheta_2}}{\Gamma(c+2)}d\vartheta_2}_{=1}-k_2\frac{c(c+1)}{d^2}\Bigg)=$$

$$=\frac{a}{b}\left(\frac{d^2}{(c-1)(c-2)}+\frac{c(c+1)}{d^2}\right)-$$

$$-\omega\frac{ak_1}{b(b+1)}\left(\frac{d^c}{(d+1)^{c-2}(c-1)(c-2)}-k_2\frac{d^2}{(c-1)(c-2)}+\frac{d^c c(c+1)}{(d+1)^{c+2}}-k_2\frac{c(c+1)}{d^2}\right).$$

A második tag:

$$D^2\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)=E\left(\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^2\right)-\left(E\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)\right)^2=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^2 f(\vartheta_1,\vartheta_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2-\frac{ad}{b(c-1)}+\omega\frac{ak_1k_2}{b(b+1)(c-1)}=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^2 f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)(1+\omega(e^{-\vartheta_1}-k_1)(e^{-\vartheta_2}-k_2))d\vartheta_1 d\vartheta_2-$$

$$-\frac{ad}{b(c-1)}+\omega\frac{ak_1k_2}{b(b+1)(c-1)}=\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^2 f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2+$$

$$+\omega\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^2 f_1(\vartheta_1)f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_1}-k_1)(e^{-\vartheta_2}-k_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2-$$

$$-\frac{ad}{b(c-1)}+\omega\frac{ak_1k_2}{b(b+1)(c-1)}=$$

$$=\int_0^\infty \vartheta_1^2 f_1(\vartheta_1)\left(\int_0^\infty\frac{1}{\vartheta_2^2}f_2(\vartheta_2)d\vartheta_2\right)d\vartheta_1+$$

$$+\omega\int_0^\infty \vartheta_1^2 f_1(\vartheta_1)(e^{-\vartheta_1}-k_1)\left(\int_0^\infty\frac{1}{\vartheta_2^2}f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_2}-k_2)d\vartheta_2\right)d\vartheta_1-$$

$$-\frac{ad}{b(c-1)}+\omega\frac{ak_1k_2}{b(b+1)(c-1)}=\left(\int_0^\infty\frac{1}{\vartheta_2^2}f_2(\vartheta_2)d\vartheta_2\right)\left(\int_0^\infty \vartheta_1^2 f_1(\vartheta_1)d\vartheta_1\right)+$$

$$+\omega\left(\int_0^\infty\frac{1}{\vartheta_2^2}f_2(\vartheta_2)e^{-\vartheta_2}d\vartheta_2-k_2\int_0^\infty\frac{1}{\vartheta_2^2}f_2(\vartheta_2)d\vartheta_2\right)$$

$$\left(\int_0^\infty \vartheta_1^2 f_1(\vartheta_1)e^{-\vartheta_1}d\vartheta_1-k_1\int_0^\infty \vartheta_1^2 f_1(\vartheta_1)d\vartheta_1\right)-\frac{ad}{b(c-1)}+\omega\frac{ak_1k_2}{b(b+1)(c-1)}=$$

$$=\frac{d^2}{(c-1)(c-2)}\frac{a(a+1)}{b^2}-\frac{ad}{b(c-1)}+$$

$$\omega\left(\left(\frac{d^c}{(d+1)^{c-2}(c-1)(c-2)}-k_2\frac{d^2}{(c-1)(c-2)}\right)\left(\frac{b^a a(a+1)}{(b+1)^{a+2}}-k_1\frac{a(a+1)}{b^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{ak_1k_2}{b(b+1)(c-1)}\right).$$

Összegezve a kapott eredményeket, az aggregált összkár szórásnégyzete t szerződés esetén a következő:

$$D^2S = D^2(S_1+S_2+\cdots+S_t) =$$
$$t\left\{\frac{a}{b}\left(\frac{d^2}{(c-1)(c-2)}+\frac{c(c+1)}{d^2}\right)-\right.$$
$$-\omega\frac{ak_1}{b(b+1)}\left(\frac{d^c}{(d+1)^{c-2}(c-1)(c-2)}-k_2\frac{d^2}{(c-1)(c-2)}+\frac{d^c c(c+1)}{(d+1)^{c+2}}-k_2\frac{c(c+1)}{d^2}\right)+$$
$$+\frac{d^2}{(c-1)(c-2)}\frac{a(a+1)}{b^2}-\frac{ad}{b(c-1)}+$$
$$+\omega\left(\left(\frac{d^c}{(d+1)^{c-2}(c-1)(c-2)}-k_2\frac{d^2}{(c-1)(c-2)}\right)\left(\frac{b^a a(a+1)}{(b+1)^{a+2}}-k_1\frac{a(a+1)}{b^2}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{ak_1k_2}{b(b+1)(c-1)}\right)\right\}.$$

Egy valószínűségi változó Laplace-transzformáltja egyértelműen meghatározza a változó eloszlását. Próbáljuk meg kiszámolni S Laplace-transzformáltját, hátha abból következtethetünk S eloszlására.

Ismert, hogy független valószínűségi változók összegének Laplace-transzformáltja a Laplace-transzformáltak szorzata. Mivel a szerződések függetlenek, ezért az S_i összkárok is. Tehát

$$L_S(s) = L_{S_1+\cdots+S_t}(s) = (L_{S_1}(s))^t.$$

Használjuk a teljes várható érték tételét L_{S_1} meghatározásához.

$$L_{S_1}(s) = Ee^{-sS_1} = E(E(e^{-sS_1}|\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1})) = E(E(e^{-s(X_{1,1}+\dots+X_{1,N_1})}|\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1})) =$$
$$E(E(e^{-sX_{1,1}}\dots e^{-sX_{1,N_1}}|\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1})) = E(E((e^{-sX_{1,1}})^{N_1}|\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1})) = E((L_{X_{1,1}}(s))^{N_1}) =$$
$$E\left(\left(\frac{\vartheta_{2,1}}{\vartheta_{2,1}+s}\right)^{N_1}\right) = E\left(E\left(\left(\frac{\vartheta_{2,1}}{\vartheta_{2,1}+s}\right)^{N_1}|\vartheta_{1,1},\vartheta_{2,1}\right)\right) = E\left(G_{N_1}\left(\frac{\vartheta_{2,1}}{\vartheta_{2,1}+s}\right)\right) =$$
$$E\left(e^{-\vartheta_{1,1}\left(\frac{\vartheta_{2,1}}{\vartheta_{2,1}+s}-1\right)}\right).$$

A levezetés során felhasználtuk, hogy egy $\theta_{2,1}$ paraméterű exponenciális eloszlású változó Laplace-transzformáltja s függvényében $\frac{\theta_{2,1}}{\theta_{2,1}+s}$ alakú, továbbá hogy egy $\theta_{1,1}$ paraméterű Poisson eloszlású változó generátorfüggvénye z függvényében $e^{-\theta_{1,1}(z-1)}$.

Hagyjuk el ismét a második indexet a már ismertetett indok miatt, és próbáljuk meg kiszámolni ezt a várható értéket.

$$E\left(e^{-\vartheta_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1\right)}\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\vartheta_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1\right)} f(\vartheta_1,\vartheta_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2 =$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\vartheta_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1\right)} f(\vartheta_1)f(\vartheta_2)(1+\omega(e^{-\vartheta_1}-k_1)(e^{-\vartheta_2}-k_2))d\vartheta_1 d\vartheta_2 =$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\vartheta_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1\right)} f(\vartheta_1)f(\vartheta_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2 +$$
$$+\omega\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\vartheta_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1\right)} f(\vartheta_1)f(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_1}-k_1)(e^{-\vartheta_2}-k_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2 =$$
$$= \int_0^\infty f_2(\vartheta_2)\int_0^\infty e^{-\vartheta_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1\right)} \frac{b^a\vartheta_1^{a-1}e^{-b\vartheta_1}}{\Gamma(a)}d\vartheta_1 d\vartheta_2 +$$
$$+\omega\int_0^\infty f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_2}-k_2)\int_0^\infty e^{-\vartheta_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1\right)} f_1(\vartheta_1)(e^{-\vartheta_1}-k_1)d\vartheta_1 d\vartheta_2 =$$
$$= \int_0^\infty f_2(\vartheta_2)\frac{b^a}{\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1+b\right)^a}\underbrace{\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1+b\right)^a\vartheta_2^{a-1}e^{-\vartheta_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2-1+b}\right)}}{\Gamma(a)}d\vartheta_1}_{=1} d\vartheta_2 +$$
$$+\omega\int_0^\infty f_2(\vartheta_2)(e^{\vartheta_2}-k_2)\left(\int_0^\infty f_1(\vartheta_1)e^{-\vartheta_1\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}}d\vartheta_1 - k_1\int_0^\infty f_1(\vartheta_1)e^{-\vartheta_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1\right)}d\vartheta_1\right)d\vartheta_2 =$$
$$= \int_0^\infty f_2(\vartheta_2)\frac{b^a}{\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1+b\right)^a}d\vartheta_2 +$$

$$+\omega \int_0^\infty f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_2} - k_2)\Bigg(\frac{b^a}{\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}+b\right)^a} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}+b\right)^a \vartheta_1^{a-1} e^{-\vartheta_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}+b\right)}}{\Gamma(a)} d\vartheta_1}_{=1} -$$

$$-k_1 \frac{b^a}{\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1+b\right)^a} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1+b\right)^a \vartheta_1^{a-1} e^{-\vartheta_1\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1+b\right)}}{\Gamma(a)} d\vartheta_1}_{=1} \Bigg) d\vartheta_2 =$$

$$= \int_0^\infty f_2(\vartheta_2) \frac{b^a}{\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1+b\right)^a} d\vartheta_2 +$$

$$+\omega \int_0^\infty f_2(\vartheta_2)(e^{-\vartheta_2} - k_2) \left(\frac{b^a}{\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}+b\right)^a} - k_1 \frac{b^a}{\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2+s}-1+b\right)^a} \right) d\vartheta_2$$

Akárhogy alakítjuk is a kapot összeget és az integrálokat, nem tudjuk használható alakra hozni, mert nem elemi integrálokat tartalmaz. Így tehát nem tudunk S eloszlására vonatkozó következtetésekkel élni.

Az a sejtésünk támad, hogy $S = \sum_{i=1}^t S_i$ nem is Sarmanov eloszlásból származik. A sejtést könnyen ellenőrizhetnénk homogenitásvizsgálat segítségével, ha lenne t darab független S_i Sarmanov eloszlásból származó pl. 1000 elemű mintánk, ezeket aggregálnánk, és az így kapott minta eloszlását összehasonlítanánk egy Sarmanov eloszlásból származó S' 1000 elemű mintával. Ezt az elemzést az utolsó fejezetben fogjuk elvégezni, mikor már tudunk Sarmanov eloszlásból származó összkárt generálni.

3. fejezet

Sarmanov eloszlás generálása

3.1. Kopulákról

Valószínűségi változók közötti függőség mérésére több lehetőségünk van. Ilyen például a lineáris korreláció, a Kendall-féle τ, vagy éppen a Spearman-féle ρ. A lineáris korreláció talán a legtöbbször alkalmazott ezek közül könnyű kiszámíthatóságából kifolyólag. Sokszor azonban nem vezet megfelelő eredményre, nem mutat valós képet, hiszen egyrészt csak lineáris kapcsolatot jelenít meg, másrészt pedig nagyon kovarianciaérzékeny a kiugró elemekre. A másik két említett mutató rangkorrelációt számol, és a lineáris korrelációhoz hasonlóan -1 és 1 közötti értékei lehetnek, ahol 1 a telejes együttmozgást, -1 pedig a teljesen ellentétes mozgást jelenti.

A kopula egy teljesen más szemszögből közelíti meg a valószínűségi változók közötti függőség mérését. Az alapötlet a következő: tegyük fel, hogy vannak egydimenziós valószínűségi változóink, melyeknek létezik közös többdimenziós eloszlásfüggvénye, amit ismerünk. Az egydimenziós valószínűségi változók közötti függőséget szeretnénk az együttes eloszlás és a peremeloszlások közötti kapcsolat megteremtésével modellezni oly módon, hogy az leírható legyen egy többdimenziós függvény segítségével. Tehát a kopula nem más, mint valaszínűségi változók függőségének egy univerzális leírása.

A következőkben megfogalmazzuk, hogy mi is a kopula, és adunk egy rövid matematikai leírást róla, melyre szükségünk lesz a későbbiekben Sarmanov eloszlású értékpárok szimulációjához.

3.1. Definíció.[Kopula] *Legyen* $U_1, U_2, \ldots, U_n$ $[0,1]$*-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ekkor a* $C : [0,1]^n \to [0,1]$ *függvény egy* n *változós kopula, ha*

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \ldots, U_n \leq u_n). \tag{3.1}$$

Tulajdonképpen tehát a kopula az n-dimenziós, egyenletes eloszlású marginálisokkal rendelkező valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye, mely az n-dimenziós kockán van értelmezve.

3.2. Megjegyzés. *Ha* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *eloszlásfüggvénye rendre* $F_1, F_2, \ldots, F_n$*, akkor rövid numerikus átalakítás útján belátható, hogy* $U_1 = F_1(X_1), U_2 = F_2(X_2), \ldots, U_n = F_n(X_n)$ *mindegyike* $[0,1]$*-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó.*

Bár a kopula fogalmát már 1959-ben definiálta Sklar, sokáig feledésbe merült. Csak az 1990-es években kezdtek el újra foglakozni vele. Az ehhez a fogalomhoz köthető leghíresebb tétel, mely lehetővé teszi a kopulák sokrétű alkalmazhatóságát a valószínűségszámításban, csak 1996-ban látott napvilágot a fogalom megalkotójától. Ez az állítás összeköti a kopulafüggvényt az együtteseloszlás-függvénnyel és a peremeloszlás-függvényekkel.

3.3. Tétel.[Sklar tétel] *Legyen* F *egy* n*-dimenziós eloszlásfüggvény* $F_1, \ldots, F_n$ *peremeloszlásokkal. Ekkor létezik - ha* F_1 *és* F_2 *folytonos, akkor egyértelműen - egy* n*-dimenziós kopula, melyre*

$$F(x_1, x_2 \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)). \tag{3.2}$$

Fordítva is igaz: ha C *egy* n*-dimenziós kopula, és* $F_1, \ldots, F_n$ *eloszlásfüggvények, akkor a fent megadott* F *egy* n*-dimenziós eloszlásfüggvény* $F_1, \ldots, F_n$ *peremeloszlásokkal.*

3.4. Következmény. *Ha* F *egy* n*-dimenziós eloszlás* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *folytonos peremeloszlásokkal, akkor a*

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \ldots, F_n^{-1}(u_n)) \tag{3.3}$$

kopula egyértelmű. Ezen kopula nem más, mint 3.2 megoldása.

Bizonyítás: Ha 3.1-ben az U_i-k helyére beírjuk a megfelelő marginálisokat, akkor

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \ldots, U_n \leq u_n) \qquad (3.4) \\ &= P(F_1(X_1) \leq u_1, F_2(X_2) \leq u_2, \ldots, F_n(X_n) \leq u_n) \\ &= P(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), X_2 \leq F_2^{-1}(u_2), \ldots, X_n \leq F_n^{-1}(u_n)) \\ &= F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \ldots, F_n^{-1}(u_n)) \end{aligned}$$

adódik, ahol F_i^{-1} az F_i általánosított inverze, azaz $F_i^{-1}(u) = inf\{x : F_j(x) \geq u\}$. □

Eddig általánosan beszéltünk a kopulákról. A következőkben elég 2 dimenzióra szorítkoznunk, mert csak erre lesz szükség. Sklar tétele 2 dimenzióban a következő:

$$F(\theta_1 = \vartheta_1, \theta_2 = \vartheta_2) = C(F_1(\vartheta_1), F_2(\vartheta_2)). \qquad (3.5)$$

Ha $F(\theta_1 = \vartheta_1, \theta_2 = \vartheta_2)$ marginálisai folytonosak, akkor 3.5 differenciálható. Deriváljuk le mindkét oldalt. Az alábbi egyenletet kapjuk:

$$f(\theta_1 = \vartheta_1, \theta_2 = \vartheta_2) = c(F_1(\vartheta_1), F_2(\vartheta_2)) f_1(\vartheta_1) f_2(\vartheta_2). \qquad (3.6)$$

$c(F_1(\vartheta_1), F_2(\vartheta_2))$-t a C kopula sűrűségfüggvényének nevezzük. c úgy áll elő, hogy a C kopulafüggvényt az $u_1 = F_1(\vartheta_1)$, majd $u_2 = F_2(\vartheta_2)$ helyen deriváljuk.

Alkalmazzuk ezen megállapítást az általunk tárgyalt modellre. Tudjuk, hogy

$$f(\theta_1 = \vartheta_1, \theta_2 = \vartheta_2) = f_1(\vartheta_1) f_2(\vartheta_2)[1 + \omega(e^{-\vartheta_1} - k_1)(e^{-\vartheta_2} - k_2)] \qquad (3.7)$$

(θ_1, θ_2) közös sűrűségfüggvénye. Így 3.6 miatt

$$c(u_1, u_2) = 1 + \omega(e^{-u_1} - k_1)(e^{-u_2} - k_2), \qquad (3.8)$$

ahol $u_i = F_i(\vartheta_i)$, $i = 1, 2$. 3.8 tehát nem más, mint a (2.1) lemmának eleget tevő (θ_1, θ_2) Sarmanov eloszlású értékpár által generált kopula sűrűségfüggvénye. Másrészt U_1 és U_2 közös sűrűségfüggvénye is.

Dolgozatom ezen részét, mely által az olvasó némi betekintést nyerhetett a kopulák világába, a [3] és [4] irodalom alapján készítettem.

3.2. Sarmanov eloszlás generálása

Ebben a részben ismertetjük azt a folyamatot, hogy miként lehet olyan Sarmanov eloszlású összefüggő értékpárt generálni, melyre igaz a (2.1) lemma. Ezt követően egy konkrét példán keresztül megnézzük az R-ben való megvalósítás lépéseit. Végül az a folyamat is ismertetésre kerül, ami által tudunk szimulálni Sarmanov eloszlásból származó aggregált összkárt.

Sarmanov eloszlású (θ_1, θ_2) összefüggő értékpárok generálását az R nevű programcsomag segítségével végeztem. Ebben a programcsomagban egyszerűen generálhatók adott paraméterű eloszlások. Először leírjuk a módszer matematikai hátterét, majd az R-ben való megvalósítás lépéseit.

3.2.1. Matematikai háttér

Eddigi jelöléseinket használva a következő módszerrel oldható meg a szimuláció. Először vegyünk egy $(0,1)$-en egyenletes eloszlású U_1 változót. Erre való feltételes eloszlás által fogjuk meghatározni a hozzá tartozó U_2 párt, amiket ha rendre behelyettesítünk az F_1^{-1} és F_2^{-1} inverz eloszlásfüggvényekbe, akkor egy Sarmanov eloszlású értékpárt fogunk kapni. F_1 $\Gamma_{a,b}$, F_2 pedig a $\Gamma_{c,d}$ eloszlásfüggvényt jelöl. A Sarmanov eloszlás meghatározásához a feltételes sűrűségfüggvény kiszámolásával kezdünk. A feltételes sűrűségfüggvény definíció szerint nem más, mint a közös sűrűségfüggvény osztva a feltétel sűrűségfüggvényével, ha a feltétel sűrűségfüggvénye pozitív, és 0 különben. U_1 és U_2 közös sűrűségfüggvénye $c(u_1, u_2)$, U_1-é (a feltételé) pedig $\frac{1}{1-0}$, vagyis a konstans 1 függvény, mivel U_1 $(0,1)$-en egyenletes eloszlású. Így

$$f_{U_2|U_1}(u_2|u_1) = \frac{c(u_1, u_2)}{f_{U_1}(u_1)} = \frac{c(u_1, u_2)}{1} = c(u_1, u_2). \tag{3.9}$$

Ez alapján fel tudjuk írni magát a feltételes eloszlásfüggvényt, mivel $f_{U_2|U_1}(u_2|u_1)$ folytnos, így integrálható, és az eloszlásfüggvény felírható a sűrűségfüggvény integráljaként. Tehát

$$F_{U_2|U_1}(u_2|u_1) = P(U_2 < x|U_1 = y) = \int_0^x c(y, u_2)du_2. \tag{3.10}$$

Ez x függvénye lesz. Legyen $\widetilde{F}(x) = F_{U_2|U_1}(u_2|u_1)$. Számoljuk ki, hogy $\widetilde{F}(x)$ hogyan is néz ki. Ehhez 3.8-at behelyettesítjük 3.10-be, és integrálunk.

$$\widetilde{F}(x) = \int_0^x c(y, u_2) du_2 = \int_0^x 1 + \omega(e^{-y} - k_1)(e^{-u_2} - k_2) du_2 = \tag{3.11}$$
$$= x + \omega(e^{-y} - k_1) \left(\int_0^x e^{-u_2} du_2 - k_2 x \right) = x + \omega(e^{-y} - k_1) \left(\left[-e^{-u_2} \right]_0^x - k_2 x \right) =$$
$$= x + \omega(e^{-y} - k_1) \left(-e^{-x} + 1 - k_2 x \right).$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\widetilde{F}(x) = x + \omega(e^{-y} - k_1) \left(-e^{-x} + 1 - k_2 x \right). \tag{3.12}$$

A következő lépés $\widetilde{F}^{-1}(x)$ meghatározása lenne. Ehhez 3.12-ben x helyére $\widetilde{F}^{-1}(x)$-et írunk, $\widetilde{F}(x)$ helyébe pedig x-et:

$$x = \widetilde{F}^{-1}(x) + \omega(e^{-y} - k_1) \left(-e^{-\widetilde{F}^{-1}(x)} + 1 - k_2 \widetilde{F}^{-1}(x) \right)$$

A kapott egyenletből megpróbáljuk kifejezni $\widetilde{F}^{-1}(x)$-et átrendezés útján, amihez először csoportosítunk. Az

$$x - \omega(e^{-y} - k_1) - (1 - \omega k_2(e^{-y} - k_1)) \widetilde{F}^{-1}(x) + \omega(e^{-y} - k_1) e^{-\widetilde{F}^{-1}(x)} = 0 \tag{3.13}$$

egyenletet kapjuk. Ez az egyenlet így is használható lesz számunkra a generálás során, nincs szükség a konkrét $\widetilde{F}^{-1}(x)$-re. Ismert, hogy ha egy ξ valószínűségi változó F eloszlásfüggvénye folytonos, akkor ha az eloszlásfüggvény inverzébe egy $(0,1)$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változót helyettesítünk be, akkor egy, az eredeti változó eloszlásfüggvényével rendelkező változót kapunk. Azaz ha $\eta \sim E(0,1)$, akkor $F^{-1}(\eta)$ F eloszlásfüggvényű változó. Mivel U_2-nek az $\widetilde{F}(x)$ feltételes eloszlásfüggvénye folytonos, ezért az előző tulajdonság miatt $\widetilde{F}^{-1}(\eta)$ $\widetilde{F}(x)$ eloszlásfüggvényű, tehát U_2-vel azonos eloszlású változó lesz, ha $\eta \sim E(0,1)$. A kívánt Sarmanov eloszlású értékpár pedig a 3.4 következmény és az előbbiek alapján $(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(\widetilde{F}^{-1}(\eta)))$ alakú, ahol F_1^{-1} egy (a,b) paraméterű, F_2^{-1} pedig egy (c,d) paraméterű gamma eloszlásfüggvény inverze.

3.2.2. Megvalósítás R-ben

Az R-ben való megvalósítás az előző rész alapján már nagyon egyszerűen elvégezhető. A következőkben bemutatunk egy konkrét számpár generálását.

Először generálunk egy u_1 $(0,1)$-en egyenletes eloszlású véletlen számot. Nekem $u_1 = 0,8797144$ lett. Ez után meg kell adnunk konkrét a,b,c,d paramétereket, amikből az R kiszámolja a $k1, k2, \omega$ konstansokat a 2. fejezet elején ismertetett képletek alpján. Én a következő értékeket adtam: $a = b = c = d = 2$, amiből $k1 = k2 = 0,4444444$ és $\omega = 3,144187$ adódik. ω-ra csak annyi megkötésünk van, hogy eleme legyen az $[\omega_1, \omega_2]$ intervallumnak, ahol ω_i $k1$ és $k2$ által meghatározott. R-ben ezt úgy oldottam meg, hogy ω-t az $runif$ utasítással az $[\omega_1, \omega_2]$ intervallumból egyenletes eloszlás szerint választottam ki. De ezt a lépést más módon is el lehetne végezni. Ez után definiáljuk 3.13 bal oldalát, mint egy $u_2 = \widetilde{F}^{-1}(x)$ változós függvény, csak y helyett az először generált u_1-et írjuk be, x helyett pedig egy η $(0,1)$-en egyenletes eloszlású változót. Az általam generált példában $\eta = 0,6511589$. A *uniroot* nevű paranccsal megkeressük a függvény gyökét. Így megkapjuk u_2 értékét, mely a fenti adatok alapján 0.6688483 lett. Utolsó lépésként pedig a *qgamma* nevű paranccsal, mely adott paraméterű gamma eloszlású változó kvantilis-függvényét számolja ki, meghatározzuk $F_1^{-1}(u_1)$ és $F_2^{-1}(u_2)$-t. A kvantilis-függvény használható az inverz eloszlásfüggvény meghatározására, mert ismert, hogy ha az eloszlásfüggvény szigorúan monoton, akkor a kvantilis-függvény épp az eloszlásfüggvény inverze. A mi esetünkben ez rendre $7,31211$ és $4,59742$. Itt ügyelni kell arra, hogy ha egy (a,b) paraméterű gamma elsoszlású változó kvantilis-függvényét szeretnénk kiszámolni a *qgamma* nevű paranccsal, akkor a függvény paramétere $(a, 1/b)$ lesz R-ben, és nem (a,b)! $(7,31211, 4.59742)$-t tehát egy olyan Sarmanov eloszlásból generáltuk, mely eleget tesz a 2.1 lemmának.

3.2.3. Sarmanov eloszlású aggregált kárösszeg generálása R-ben

Most már minden adott ahhoz, hogy magát az S összkárt is elő tudjuk állítani R-ben. Itt is egy konkrét számpéldát mutatunk be.

Első lépésként kell generálnunk az előző részben ismertetett módon egy (θ_1, θ_2) Sarmanov eloszlású párt adott a,b,c,d paraméterek esetén. Legyen most $a = 0.5, b = 3, c = 2, d = 1.5$. Ezen értékekre nekem a $(\theta_1, \theta_2) = (4.368103, 1.429295)$ pár adótt. Mivel az

N kárszámról feltettük hogy θ_1-Poisson eloszlású, ezért értékének meghatározásához kell generálni egy $\theta_1 = 4.368103$ paraméterű Poisson eloszlású véletlen számot, amit R-ben az $rpois(1, 4.368103)$ utasítással tehetünk meg. Nekem $N = 5$ adódott. S előállításához pedig szükséges $N = 5$ darab $\theta_2 = 1.429295$ paraméterű exponenciális eloszlású változó generálása. S nem lesz más mint ezek összege. Az adott szimuláció során $S = 2.290956$.

4. fejezet

További eredmények

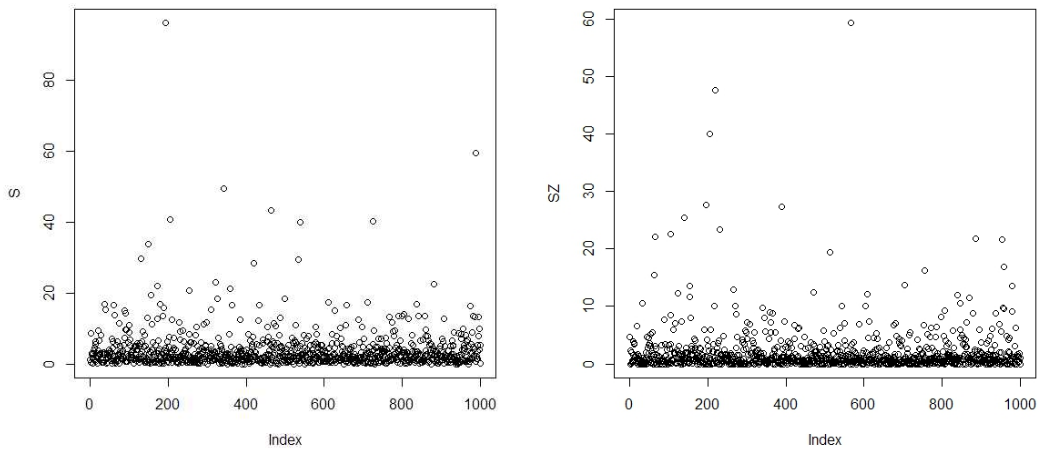
4.1. Homogenitásvizsgálat

Most már tudunk Sarmanov eloszlásból származó összkárt generálni. Előállíthatunk tehát mintákat annak eldöntésére, hogy ha összeadunk független Sarmanov eloszlásból származó S_i összkárokat, ahol a rizikóparaméterek szerződésenként változnak, akkor az $S = \sum_{i=1}^{t} S_i$ aggregált kárösszegre is öröklődik e a Sarmanov eloszlás.

Két 1000 elemű mintát fogunk előállítani. Az első minta legyen $S = S_1 + S_2$, ahol S_1 és S_2 külön-külön Sarmanov eloszlásból származik, és a rizikóparamétereik eltérőek. A második minta - SZ - szintén származzon Sarmanov eloszlásból. S-re és SZ-re fogunk homogenitásvizsgálatot végezni. A homogenitásvizsgálat segítségével el fogjuk dönteni, hogy azonos eloszlásból származnak e. Azaz ha összeadunk 2 Sarmanov eloszlásból származó mintát, amelyek rizikóparaméterei különböznek, akkor Sarmanovot kapunk-e. Az előző részben leírtak szerint generáljuk le a két mintát egy for ciklus segítségével.

A generált adatokon már ránézésre látszik, hogy nagyon eltérnek. Vegyük észre, hogy a két ábra skálázása nem egyezik meg! A Sarmanov eloszlásból származó SZ körülbelül hatszor annyi 0 elemet tartalmaz, mint a Sarmanovok összegét reprezentáló S. Az SZ minta nagyon besűrűsödik a 0 körül. S nem annyira. Viszonylag nagy a szóródása. Azért végezzük el a homogenitásvizsgálatot. Az $1000-1000$ mintaelemet 13 csoportba osztottam. A khi-négyzet statisztika értéke $381,58$ lett. A kritikus érték ehhez képest 95%-os szinten $19,68$.

Ez jóval kisebb a kritikus értéknél, ezért elvetjük azt a nullhipotézist, hogy Sarmanovok összege Sarmanov, ha a rizikóparaméterek különböznek.



4.1. ábra. S és SZ minta

4.2. Várható kárszám becslése

A 2. fejezetben explicit képletet kaptunk mind független, mind összefüggő esetben 1 és t szerződés tekintetében a következő évben várható kárszámokra. Ebben a részben különböző a, b, c, d paraméterekre az R programcsomag segítségével számolunk várható kárszámokat a 2. fejezet eredményei alapján. Az értékek 2 tizedesjegy pontosságra vannak kerekítve.

Először azzal az esettel fogunk foglalkozni, mikor a biztosítási portfólió csak egyetlen szerződésből áll. Abban az esetben, ha a rizikóparaméterek függetlenk, a 2.4 formula mutatja meg, hogy a következő évben hány darab kárra kell számítanunk erre az egy szerződésre vonatkozóan. 2.4-ben n az előző év kárdarabszámát jelöli. A becsült kárszámot összefüggő esetben a 2.8 formulából kaphatjuk meg, ahol n ismét az erre az egy szerződésre vonatkozó előző évi kárszámot jelöli, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ pedig a károk értékének az összegét, ami Sarmanov eloszlásból származik. A 3. fejezetben ismertetett módon generálhatunk Sarmanov eloszlásból származó kárszámot és összkárt. Különböző a, b, c, d paraméterekre fix ω esetén a következő értékeket kaptam :

$a; b; c; d$	Független eset	Összefüggő eset
$a = 2; b = 2; c = 2; d = 2$	1	.11
$a = 2; b = 1; c = 2; d = 5$	1.5	0.24
$a = 0.5; b = 2; c = 3; d = 5$	0.5	1
$a = 1; b = 2; c = 3; d = 4$	0.67	1.24
$a = 0.5; b = 2; c = 4; d = 1$	0.5	0.51
$a = 1; b = 3; c = 2; d = 1$	0.5	0.5
$a = 1; b = 2; c = 2; d = 2$	0.67	0.68
$a = 1; b = 2; c = 2; d = 4$	0.68	3.38

4.1. táblázat. Várható kárszám becslése 1 szerződésből álló portfólióra $n = 1$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.16$, $\omega = 0.41$ értékek mellett

$a; b; c; d$	Független eset	Összefüggő eset
$a = 2; b = 2; c = 2; d = 2$	0.92	0.99
$a = 2; b = 1; c = 2; d = 5$	1.5	1.2
$a = 0.5; b = 2; c = 3; d = 5$	1.17	0.97
$a = 1; b = 2; c = 3; d = 4$	1.33	1.24
$a = 0.5; b = 2; c = 4; d = 1$	1.26	1.2
$a = 1; b = 3; c = 2; d = 1$	1	1.24
$a = 1; b = 2; c = 2; d = 2$	0.67	0.84
$a = 1; b = 2; c = 2; d = 4$	1.02	1

4.2. táblázat. Várható kárszám becslése 1 szerződésből álló portfólióra $n = 3$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2.66$, $\omega = 1.62$ értékek mellett

A kapott értékek alapján azt mondhatjuk, hogy nagyon vegyes a kép. Jelentős különbségek vannak a független és az összefügő eset között. Sokat számít tehát, hogy az aktuárius milyen feltételezéssel él a károk száma és nagysága közötti kapcsolat leírásakor. Ehhez az esethez kapcsolódóan azonban megjegyezném, hogy nagyon sarkított példa, hiszen a valóságban nem nagyon találkozunk egyetlen szerződésből álló portfólióval.

Most nézzük azt az esetet, mikor a biztosítási portfóliónk 100 szerződést tartalmaz. Ebben az esetben a 2.5 és 2.10 összefüggések írják le a portfólióban az egy szerződésre vonatkozó várható kárszámot a rizikóparaméterek függetlensége és összefüggősége esetén. 2.5-ben és 2.10-ben $\sum_{i=1}^{t} n_i$ az előző évi kárdarabszámok összege az egész portfólióra vonatkozóan, $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j}$ pedig a károk nagyságának az összegét jelöli szintén az egész portfólióra vonatkozóan. Az egy szerződésre vázolt séma szerint járunk el ebben az esetben is. Generálunk Sarmanov elsozlásból származó $\sum_{i=1}^{t} n_i$ és $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j}$ értéket, és különböző a, b, c, d paraméterekre fix ω esetén kiszámoljuk 2.5 és 2.10 alapján a becsült kárszámokat. A kapott értékeket táblázatokban összegeztem.

Ebben az esetben is azt mondhatjuk, hogy különböző értékeket kaptunk független és összefüggő rizikóparaméterek esetén, bár ha jobban megnézzük az adatokat, akkor már nem annyira szóródnak a becsült kárszámok, de így is nagynak mondhatóak az eltérések a két eset között.

Életszerűbbek lettek volna az adatok, ha legalább 1000 szerződésből álló portfólióval tudnánk számolni. Ezt azonban az R nem tudta megoldani, mivel 1000 szerződésre az összkárszám már nagyon jelentős, és így a gamma-függvényt nagy értékre kellene kiszámolni.

$a; b; c; d$	Független eset	Összefüggő eset
$a = 2; b = 2; c = 2; d = 2$	0.75	0.73
$a = 2; b = 1; c = 2; d = 5$	0.71	0.74
$a = 0.5; b = 2; c = 3; d = 5$	0.72	0.7
$a = 1; b = 2; c = 3; d = 4$	0.7	0.69
$a = 0.5; b = 2; c = 4; d = 1$	0.86	0.76
$a = 1; b = 3; c = 2; d = 1$	0.82	0.71
$a = 1; b = 2; c = 2; d = 2$	0.71	0.73
$a = 0.5; b = 0.5; c = 2; d = 1$	0.63	0.7

4.3. táblázat. Várható kárszám becslése egy szerződésre 100 szerződésből álló portfólióra $n = 73, \sum_{i=1}^{n} x_i = 22.1, \omega = -0.57$ értékek mellett

$a; b; c; d$	Független eset	Összefüggő eset
$a = 2; b = 2; c = 2; d = 2$	0.59	0.54
$a = 2; b = 1; c = 2; d = 5$	0.55	0.56
$a = 0.5; b = 2; c = 3; d = 5$	0.51	0.52
$a = 1; b = 2; c = 3; d = 4$	0.61	0.55
$a = 0.5; b = 2; c = 4; d = 1$	0.5	0.49
$a = 1; b = 3; c = 2; d = 1$	0.49	0.52
$a = 1; b = 2; c = 2; d = 2$	0.54	0.58
$a = 0.5; b = 0.5; c = 2; d = 1$	0.55	0.53

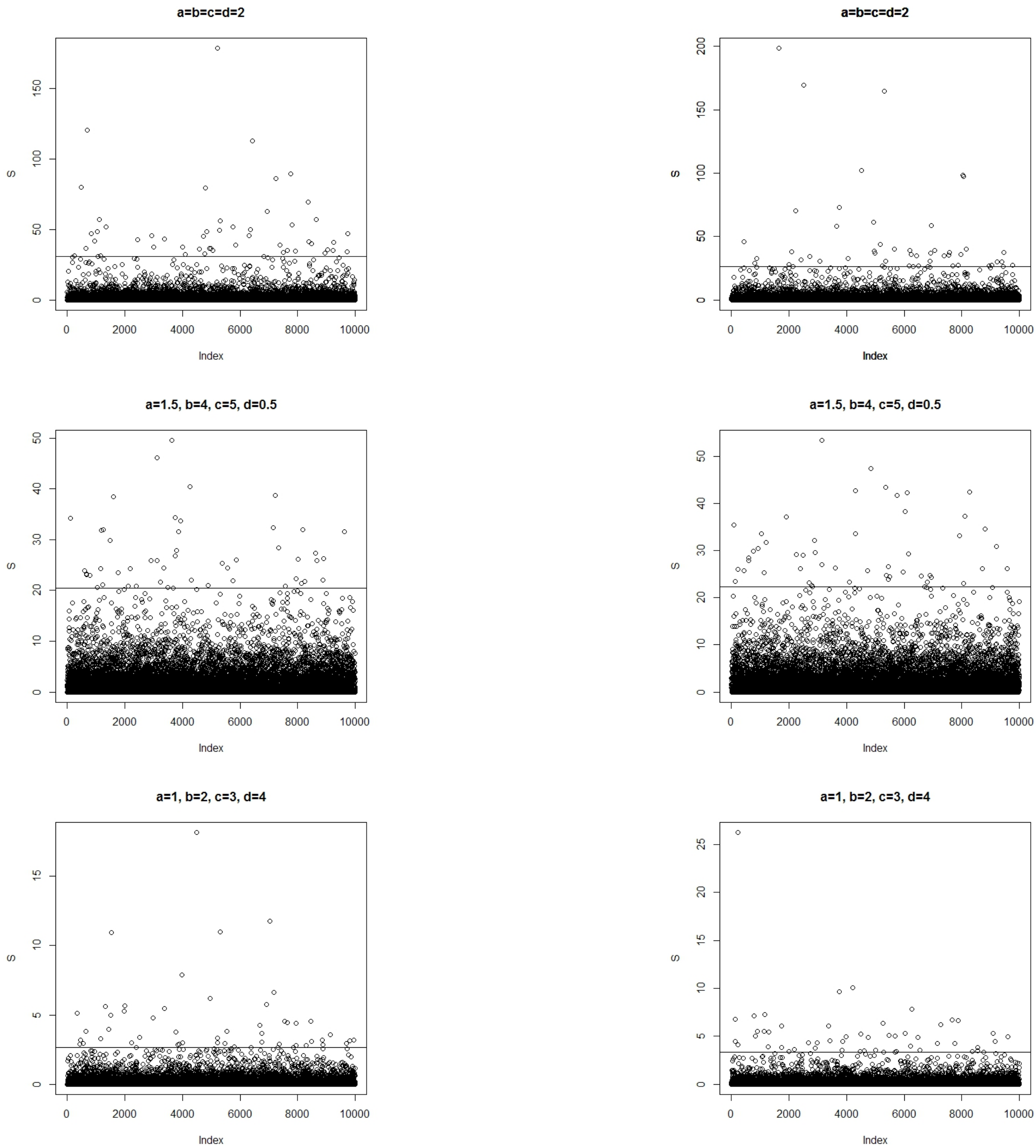
4.4. táblázat. Várható kárszám becslése egy szerződésre 100 szerződésből álló portfólióra $n = 55, \sum_{i=1}^{n} x_i = 16.65, \omega = 1.41$ értékek mellett

4.3. Kvantilisek

A Szolvencia 2 követelményei miatt a biztosítótársaságok kénytelenek megbecsülni egyéves eredményük $99,5\%$-os kvantiliseit. Az alábbiakban az egy évre vonatkozó összkárok kvantilisét fogjuk becsülni R-ben, ha azok Sarmanov eloszlásból származnak.

A következő ábrákon az egyes pontok Sarmanov eloszlásból származó aggregált kárösszegek értékeit jelenítik meg. Minden ábrán 10000 szimulált érték található. Az ábrákat páronként kell nézni. A bal oldali ábra minden egyes pár esetén olyan S értékeket tartalmaz, ahol összefüggés van a kárszám és a kárnagyságok között. A jobb oldali ábra pedig a független esetet mutatja. Az ábrákon található egy vízszintes vonal, mely kettéosztja az S értékeket. Ez minden esetben az adott minta $99,5\%$-os kvantilis értékét hivatott jelezni. Ahol ez az egyenes metszi az S függőleges tengelyt, az az érték az adott minta $99,5\%$-os kvantilise. Ez azt jelenti, hogy az egyes esetekben csak 200 évente egyszer kerülhet a biztosítótársaság olyan helyzetbe, hogy nincs megfelelő fedezete a károkra, azaz nagyobb az összkár értéke, mint a kvantilis, vagyis a vonal fölött vagyunk. Azaz ha van a kvantilis értéknek megfelelő fedezete a károk kifizetésére, akkor csak 1/200 az éves csőd valószínűsége.

Ha jól megvizsgáljuk az ábrákat páronként, akkor elsőre úgy látszik, hogy nincs nagy eltérés az egyes kvantilisek között összefüggő és független esetben. Azonban ezek a $3-5\%$-os eltérések is több milliárd forintot jelenthetnek, ami egy biztosítónál gyakran nem elhanyagolható.



4.2. ábra. Sarmanov eloszlásból származó S értékek függőség(bal oldal) és függetlenség(jobb oldal) esetén

Összefoglalás

Szakdolgozatomban megpróbáltam bemutatni azt az esetet, mikor az összetett kockázati modellben a kárszámok és a kárnagyságok között összefüggés figyelhető meg. A függőséget a rizikóparamétereik közötti függőség feltételezésével modelleztem, és Sarmanov eloszlások segítségével írtam le. Ahol lehetett, igyekeztem összehasonlítani az összefüggő és a független eset eredményeit.

A második fejezetben explicit képleteket vezettem le 1 és t szerződés esetén összefüggő és független esetben egyaránt a következő évben várható kárszámokra az előző év adatait figyelembe véve. Összefüggő esetben mind 1, mind pedig t szerződés esetén a várható kárszám keverék gamma eloszlást követ, csak más-más súlyokkal. Ez után tekintettem egy t szerződésből álló portfóliót, melynek minden egyes összkára Sarmanov eloszlásból származik. Azt a problémát vizsgáltam ebben az esetben, hogy a Sarmanov tulajdonság öröklődik e az egész portfólió aggregált összegére. Arra az eredményre jutottam, hogy abban az esetben, mikor a rizikóparaméterek szerződésenként nem változnak, vagyis minden szerződésre ugyan azok, akkor az egész portfólió aggregált összkára származtatható Sarmanov eloszlásból. Az általánosabb esetben azonban, mikor a rizikóparaméterek szerződésenként változnak, a portfólió aggregált összkára már nem Sarmanov eloszlásból származik. Utóbbi eredményt az utolsó fejezet elején homogenitásvizsgálattal ellenőriztem, R-ben szimulált adatok alapján.

A harmadik és negyedik fejezet a gyakorlati megvalósításokat tárgyalja. A harmadik fejezetben megtudhatjuk, hogy hogyan kell Sarmanov eloszlású értékpárokat generálni kopula segítségével, illetve ilyen eloszlásból származó S aggregált kárösszeget. A negyedik fejezetben található a már említett homogenitásvizsgálat, valamint a várható kárszámokra kapott eredményeket számoltam ki konkrét paraméterekre a második fejezet eredményei alapján. Azt tapasztaltam – mint ahogyan az várható volt a képletek alapján –, hogy nagyon változóak az értékek. Nem tudunk különbséget tenni az összefüggő és a független eset között. Végül Sarmanov eloszlásból származó kárösszegek kvantilisét vizsgáltam összehasonlítva az összefüggő és a független esetet. Itt azt mondhatjuk el, hogy nincs nagy eltérés a két eset között. Közel azonosak a kvantilis értékek a két esetben.

Köszönetnyilvánítás

Dolgozatom végén meg szeretném köszönni Arató Miklós Tanár Úrnak a témában nyújtott nagyszerű vezetését. Ötletei, és szakmai útmutatása elengedhetetlen segítséget jelentett a dolgozat megírásában.

Köszönetet szeretnék mondani továbbá szüleimnek, akik mindvégig mellettem álltak, és támogattak.

Irodalomjegyzék

[1] A. Hernández-Bastida, M.P. Fernández-Sánchez, E. Gómez-Déniz: *The net Bayes premium with dependence between the risk profiles*, Insurance: Mathematics and Economics 45 (2009) 247-254

[2] Arató Miklós: *Nem-élet biztosítási matematika*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest,2001.

[3] Tárnok Edina: *A férj és feleség élettartamának modellezés több életre szóló életbiztosítási szerződéseknél*, MSc Szakdolgozat, ELTE, 2011.

[4] Michael Smith: *Modeling Multivariate Distributions Using Copulas: Applications in Marketing*, Melbourne Business School, 2011.

[5] Michael Smith: *Estimating failure probabilities and testing for treatment effects in the presence of competing risks*, Dissertation, The Ohio State University, 2007.