

A magyar halálzási ráták előrejelzése

Szakdolgozat

Készítette: Lukács Attila

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc, Aktuárius szakirány

Témavezető:

Dr. Kovács Erzsébet, egyetemi tanár

Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar,

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar



Budapesti Corvinus Egyetem

Közgazdaságtudományi Kar

2012

Tartalomjegyzék

Ábrajegyzék	2
Köszönetnyilvánítás.....	4
1. Bevezetés	5
2. A magyar halálozási ráták	6
3. Lee-Carter modell	11
3.1. A modell elmélete	11
3.2. A modell alkalmazása	16
4. Bomsdorf modell	21
4.1. A modell elmélete	21
4.2. A modell alkalmazása	24
5. Poisson-regressziós modell	29
5.1. A modell elmélete	29
5.2. A modell alkalmazása	33
6. Összehasonlítás	40
6.1. A modellek fellépítése	40
6.2. Az illeszttemodellek jósága	41
6.3. Az előrejelzés jósága	43
6.4. Megbízhatóság	46
6.5. A 2020-as előrejelzés.....	48
7. Javaslatok és kitekintés	50
8. Összegzés	53
Irodalomjegyzék	55

Ábrajegyzék

1. ábra: Magyarország – Korfa 2008.....	6
2. ábra: Az időskori függőségi ráta	7
3/a. ábra: Halálozási ráták változása a nők esetében	8
3/b. ábra: Halálozási ráták változása a férfiak esetében	8
4. ábra: 2008-as halálozási ráták nemenkénti bontásban	9
5. ábra: A születéskor várható életkor nemenként	10
6/a. ábra: Az átlagos $\log(m(x))$ a nők esetében	16
6/b. ábra: Az átlagos $\log(m(x))$ a férfiak esetében	16
7/a. ábra: Érzékenység a mortalitás változására a nők esetében	17
7/b. ábra: Érzékenység a mortalitás változására a férfiak esetében	17
8/a. ábra: A mortalitási ráták időbeli trendje a nők esetében	18
8/b. ábra: A mortalitási ráták időbeli trendje a férfiak esetében	18
9/a. ábra: $\tilde{\kappa}_t$ előrejelzése és a 95%-os konfidencia intervallum 2020-ig nők esetében	19
9/b. ábra: $\tilde{\kappa}_t$ előrejelzése és a 95%-os konfidencia intervallum 2020-ig férfiak esetében	19
10/a. ábra: A várható női mortalitási ráta 2020-ben	20
10/b. ábra: A várható férfi mortalitási ráta 2020-ben	20
11/a. ábra: Életkorhatás a nők esetében	24
11/b. ábra: Életkorhatás a férfiak esetében	24
12/a. ábra: $u(t)$ alakulása és előrejelzése a nők esetében	25
12/b. ábra: $u(t)$ alakulása és előrejelzése a férfiak esetében	26
13/a. ábra: σ_x hatása az egyes életkorokban a nők esetében	26
13/b. ábra: σ_x hatása az egyes életkorokban a férfiak esetében	27

14/a. ábra: A halálozási ráta becslése 2020-ra a férfiak esetében	27
14/a. ábra: A halálozási ráta becslése 2020-ra a férfiak esetében	28
15/a. ábra: A halálozás alakulása a nők esetében	33
15/b. ábra: A halálozás alakulása a férfiak esetében	33
16/a. ábra: A mortalitási ráták időbeli trendje a nők esetében	34
16/b. ábra: A mortalitási ráták időbeli trendje a férfiak esetében	34
17/a. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(2)}$ becslése 2020-ig 95%-os konfidencia-intervallum mellett (nők)	35
17/b. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(2)}$ becslése 2020-ig 95%-os konfidencia-intervallum mellett (férfiak)	35
18/a. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(3)}$ becslései konfidencia-intervallummal a nők esetében	36
18/b. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(3)}$ becslései konfidencia-intervallummal a férfiak esetében	36
19/a. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(4)}$ becslései konfidencia-intervallummal a nők esetében	37
19/b. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(4)}$ becslései konfidencia-intervallummal a férfiak esetében	37
20/a. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(5)}$ becslései konfidencia-intervallummal a nők esetében	38
20/b. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(5)}$ becslései konfidencia-intervallummal a férfiak esetében	38
21/a. ábra: 2020-ra becsült mortalitási ráták a nők esetében	39
21/b. ábra: 2020-ra becsült mortalitási ráták a férfiak esetében	39
22/a. ábra: 70 éves kortól a modellek négyzetes hibái (nők esetében)	42
22/b. ábra: 70 éves kortól a modellek négyzetes hibái (férfiak esetében)	43
23/a. ábra: 2009-es tényleges-, illetve becsült halálozási ráták (nők)	44
23/b. ábra: 2009-es tényleges-, illetve becsült halálozási ráták (férfiak)	44
24/a. ábra: 2009-es előrejelzések négyzetes hibája (nők)	45
24/b. ábra: 2009-es előrejelzések négyzetes hibája (férfiak)	46
25/a. ábra: 2020-ra előre jelzett női halálozási ráták	48
25/b. ábra: 2020-ra előre jelzett férfi halálozási ráták	48

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Dr. Kovács Erzsébet tanárnőnek, hogy figyelemmel kísérte a munkámat, és szigorúan megkövetelte a megfelelő szakmai és formai alaposágot. Diplomamunkám készítése során rendszeresen szánt rám időt, hogy tudásával elősegítse a szakmai fejlődésemet és a szakdolgozatom sikerét.

Továbbá hálával tartozom munkatársaimnak, Horváth Beátának, akihez bármikor fordulhattam szakmai kérdésekkel, illetve Andics Ágnesnek és Mohay Lindának, akik hasznos nyelvtani és formai tanácsokkal láttak el.

1. Bevezetés

Az európai társadalmak egyik legsúlyosabb szociális és gazdasági problémája a társadalom öregedése. Magyarországon az öregedő társadalom¹ összefonódik a nyugdíjkérdéssel, hiszen a társadalmi változások miatt egyre kevesebb adófizetőre egyre több nyugdíjas jut. Az emelkedő átlagos élettartam fő oka az egyre jobb életkörülményekből adódó halálozási ráták javuló tendenciája.

Szakedolgozatom azt tűzte ki célul, hogy az 1990-2008-as időintervallum alapján megvizsgálja, hogy 2020-ban milyen halálozási rátákra lehet számítanunk, azaz a mortalitás javuló trendje folytatódik-e az elkövetkezendő években.

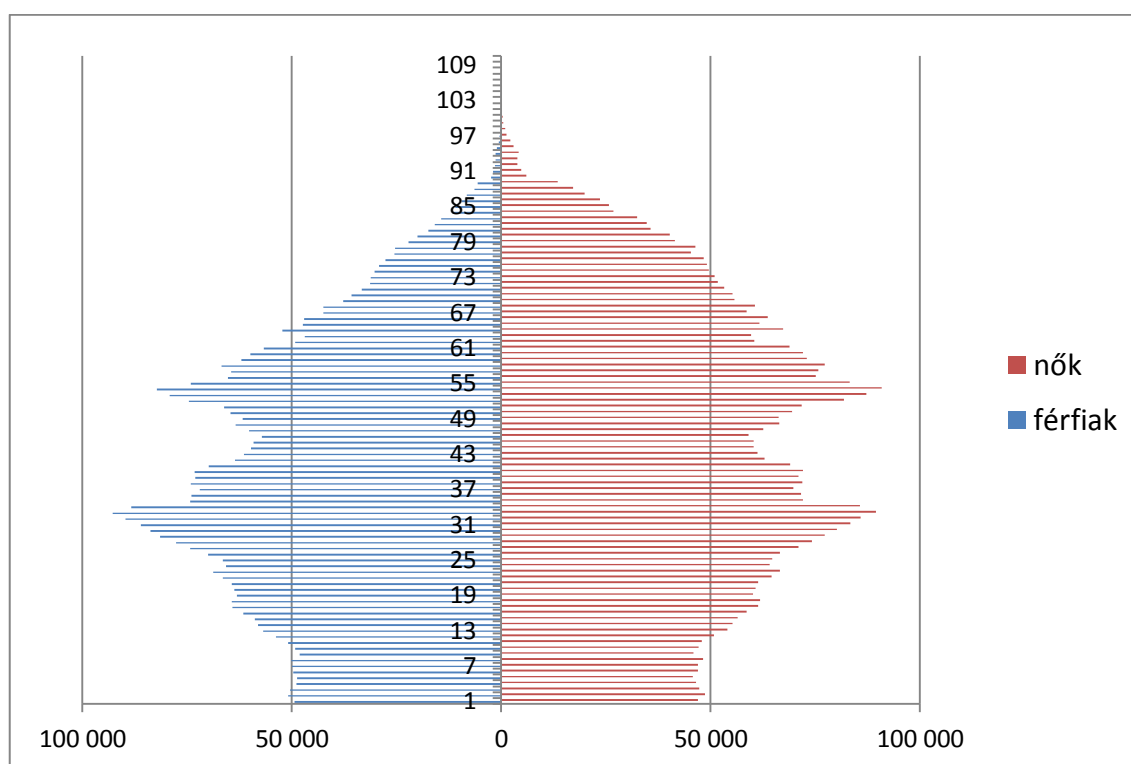
Ehhez három modellt használtam, ezzel is „javítva” a becslés pontosságát. Az első modell az úgy-nevezett Lee-Carter modell. Ezt a módszert használják jelenleg is a legtöbb európai országban (köztük Magyarországon is) a mortalitási ráták előrejelzésére. A második modellre Bomsdorf-modell néven hivatkozom, melyet Németországban alkalmaztak először a halálozási arányszámok becslésére. A harmadik modellben Poisson-regresszióval becslem a jövőbeli halálozások számát, és azt felhasználva adok előrejelzést a 2020-as arányszámokra.

A paraméterbecslések után kapott modelleket és eredményeiket összevetve megvizsgálom, hogy a szakdolgozatomban alkalmazott módszerek közül melyik lehet a legpontosabb, valamint, hogy általánosságban milyen változást mutatnak a 2008-as halálozási rátákhoz képest. Ha sejtésem (a halálozási ráták további javulása) beigazolódik, akkor (ideális környezetben) az a várható átlagos élettartam növekedésével, azaz a társadalom további öregedésével jár együtt.

¹ Az időskorúak társadalmi helyzete és ellátása - http://www.maltai.hu/data/nodes/364/file/alapellatas_szovegyuitemeny.pdf

2. A magyar halálozási ráták

Napjainkban a demográfiai változások következményeként lényeges kérdéssé vált a fenntartható nyugdíjrendszer. A fenntarthatósági probléma fő oka az öregedő társadalom. Az idősebb korcsoport arányának növekedését a születések számának csökkenése, és a halandóság javulása idézi elő. Amíg az előbbi a korfa aljának szűkülését jelenti, addig az utóbbi a korfa tetejének a szélesedését. Emellett kisebb mértékben a migráció is befolyásoló tényező. Az 1. ábrán látható 2008-as magyarországi korpiramis jól szemlélteti a csökkenő termékenységet és a mortalitás javulását.



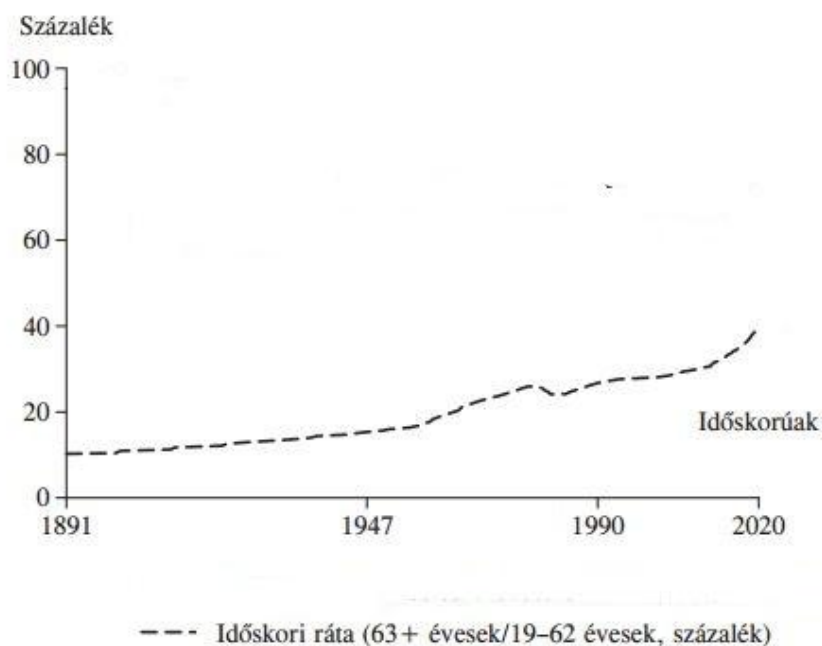
1. ábra: Magyarország – Korfa 2008²

2008-ban a lakosság 19,51%-a volt 63 év feletti, 65,47 %-a 15-63 év közötti, valamint 15,02% 15 év alatti³. Az időskori függőségi arány emelkedő trendet mutat, és előreláthatólag ez a növekedés folytatódni fog. Ezt mutatja a 2. ábra.

² forrás: KSH népességszámra vonatkozó adatai alapján

³ KSH népességi adatok alapján

Demográfiai függőségi ráta



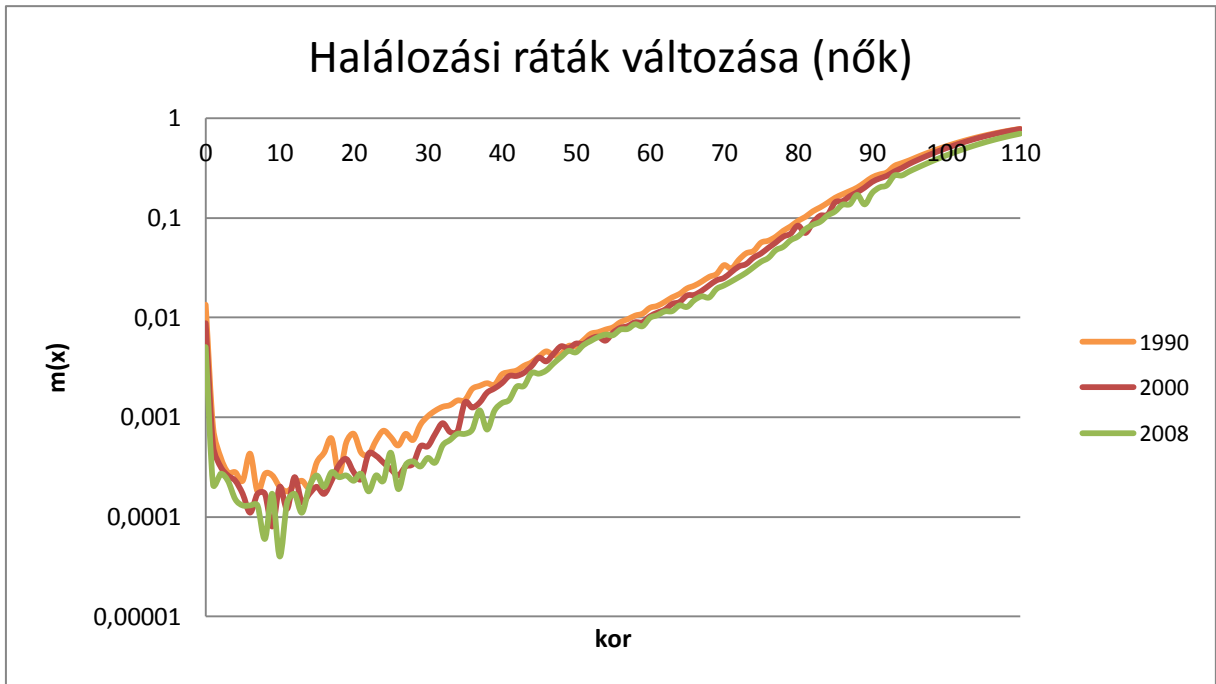
2. ábra: Az időskori függőségi ráta⁴

Az emelkedő tendencia a már fent említett idősebb korcsoport arányának emelkedéséből származtatható, melyet a halálozási ráta javulása is erősen befolyásol. A 3/a. és 3/b. ábra azt mutatja, hogy milyen halálozási ráták voltak jelen 1990-ben, 2000-ben illetve 2008-ban, ezzel szemléltetve a mortalitás időbeli változását a nők illetve a férfiak esetében. Mindkét ábrán jól látható a mortalitás javulása. A gyors javulás hátterében a rendszerváltozás után kialakult piacgazdaság áll. Az új feltételek megkövetelték a kiegyensúlyozott munkavégzést, melyhez egészségesnek kellett tűnni. Emiatt csökkent a táppénzesek aránya, valamint a népesség nyitottabbá vált az egészséges életmód szemléletére. Ezzel egy időben megszűnt a munkahelyi alkoholfogyasztás, és a gépkocsivezetők többsége sem italozik napközben.⁵ A másik két ható tényezővel (termékenységi ráta, migráció) a továbbiakban nem foglalkozom. A szükséges magyar adatokat a Human Mortality Database (HMD) honlapjáról⁶ töltöttem le.

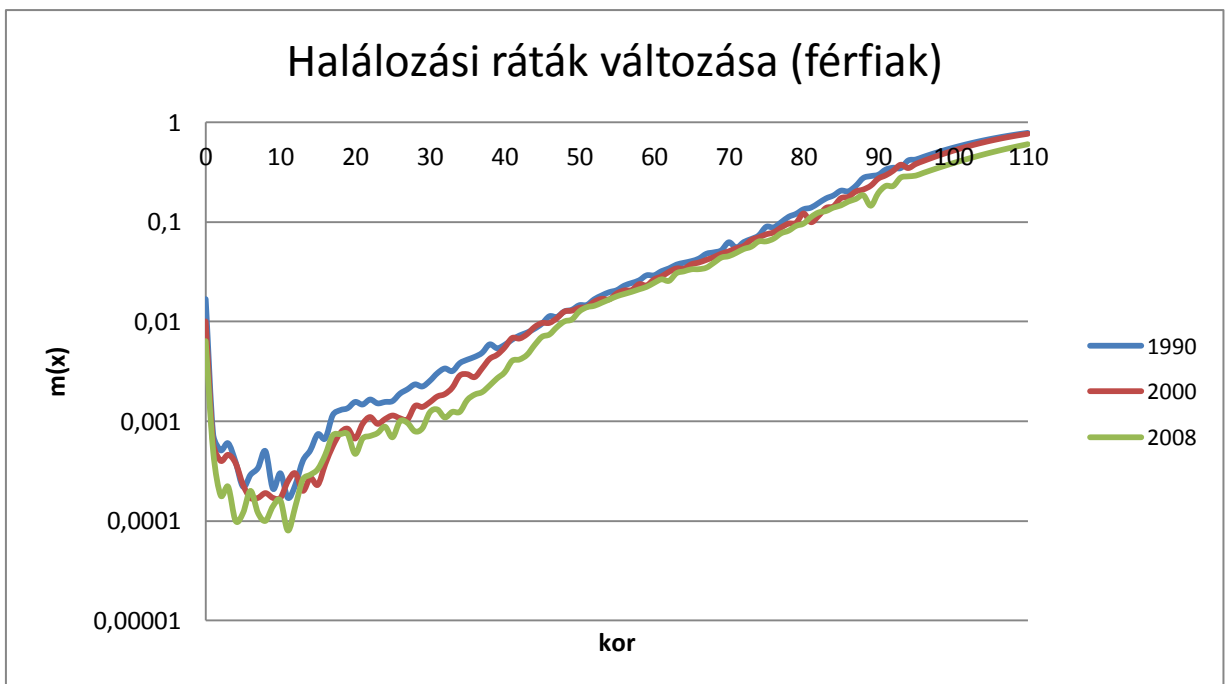
⁴ forrás: Augusztinovics Mária - Népesség, foglalkoztatottság, nyugdíj

⁵ A mortalitás gyors javulásának ezen okát Dr. Józán Péter „Válság és megújulás a második világháború utáni epidemiológiai fejlődésben Magyarországon” című cikkében olvastam.

⁶ 2011.12.18-én töltöttem az alábbi weboldalról: <http://www.mortality.org/>

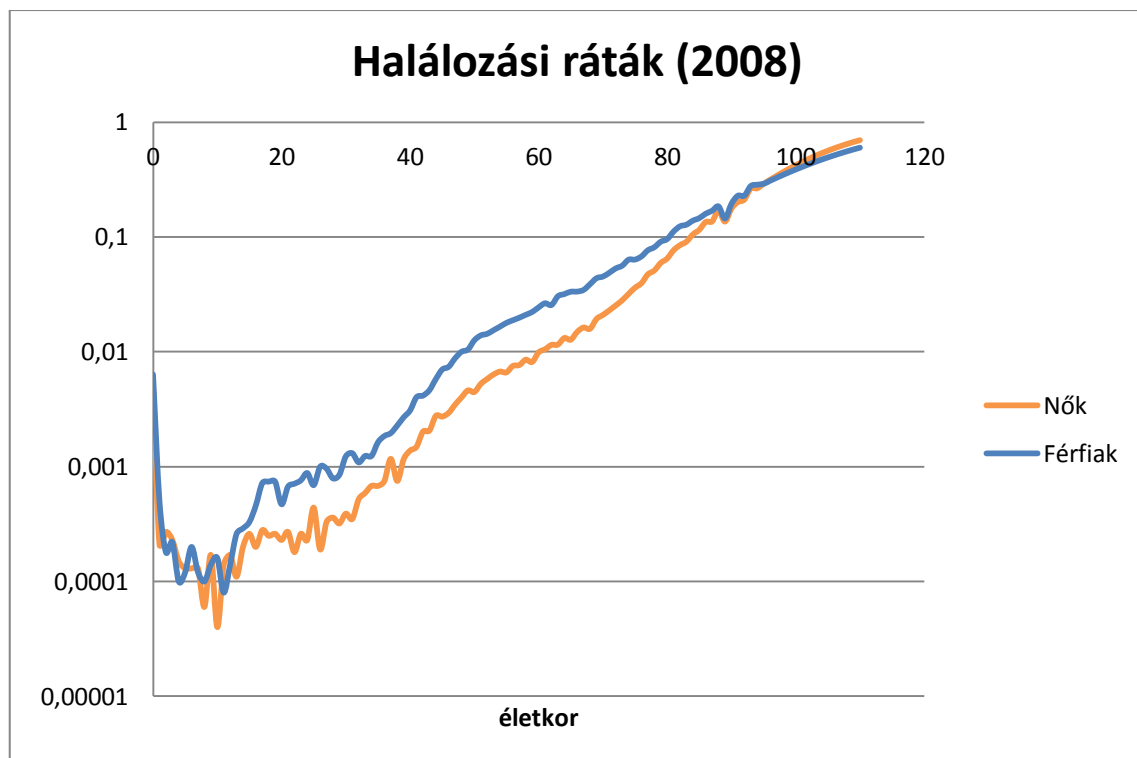


3/a. ábra: Halálózási ráták változása a nők esetében



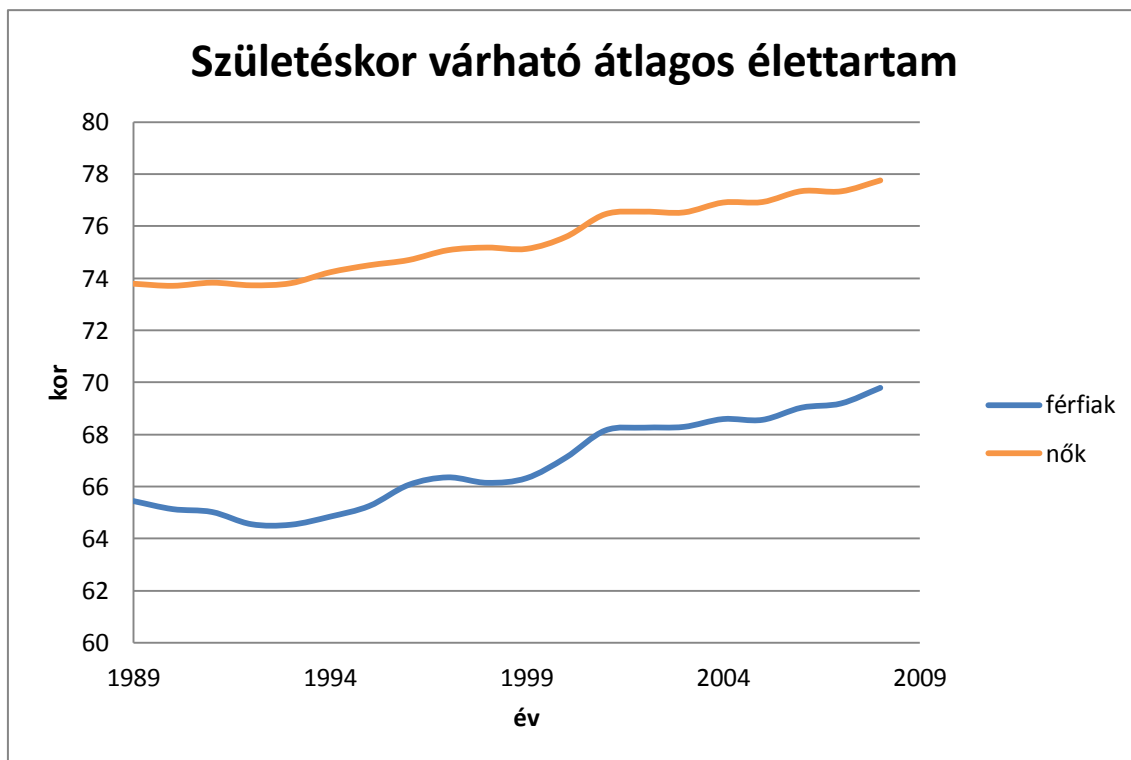
3/b. ábra: Halálózási ráták változása a férfiak esetében

A 4. ábra megmutatja, hogy alakul nemenként 2008-ban a halálozás. Az ábra alapján általánosságban elmondható, hogy a nők esetében alacsonyabbak a halálozási ráták, mint a férfiak esetében. Mint látható mindkét nem esetében, kezdetben van egy nagyobb mértékű csecsemőhalálozás, és egy kiemelkedő érték 18-20 éves korban, melyeket a frissen megszerzett jogosítványok utáni baleseti halálok okoznak.



4. ábra: 2008-as halálozási ráták nemenkénti bontásban

Tehát láthattuk, hogy 1989 és 2008 között a halálozások javultak (3/a. és 3/b. ábra), és emellett a nők halálozása a legtöbb korosztályban alacsonyabb, mint a férfiaké (4. ábra). Nézzük meg, hogy ezen idő alatt, hogyan változott nemenként a születéskor várható átlagos élettartam, amelyet 5. ábra mutat.



5. ábra: A születéskor várható életkor nemenként

Mint az ábra is mutatja, a női illetve a férfi születéskor várható átlagos élettartam szignifikánsan eltér egymástól. A Központi Statisztikai Hivatal (KSH) adatai⁷ alapján 1990-ben a nőké 73,71, míg a férfiaké 65,13 év volt. 2008-ban a nőké 77,76 évre emelkedett, a férfiaké pedig 69,79-ra. Két mintás t-próbával tesztelve a nemek közötti eltérés szignifikáns. Ezen okból kifolyólag a továbbiakban is nemenkénti bontásban számolok.

A továbbiakban az 1990-2008 között keletkezett adatokat felhasználva, a vizsgált 19 év adatai alapján 2020-ig jelzem előre a mortalitási arányszámokat három különböző módszerrel, végül összevettem a különböző módszereket, és a kapott értékeket a már azóta publikált tényadatokkal, ezzel mérve a becslések jóságát.

⁷ forrás: http://portal.ksh.hu/pls/ksh/docs/hun/xstadat/xstadat_hosszu/h_wdsd001b.html

3. Lee-Carter modell

3.1 A modell elmélete [25] [18]

Az alábbi formulát Ronald D. Lee és Lawrence Carter⁸(1992) publikálták:

$$\ln(m_x(t)) = \alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t + \varepsilon_x(t), \quad (1)$$

ahol $m_x(t)$ az x éves emberek halálozási rátáját jelöli a t -edik évben, α_x reprezentálja az empirikus mortalitási ráta geometriai közepének a logaritmusát, β_x mutatja a hazard ráta érzékenységét x éves korban, κ_t jelöli a mögöttes idő trendet, $\varepsilon_x(t)$ pedig a hibatermék.

Az α_x , β_x , κ_t paramétereket kell becsülni az alábbi feltételek mellett:

$$\sum_{t=1}^T \kappa_t = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \beta_x^2 = 1, \quad (3)$$

ahol T az évek száma, ω pedig a legmagasabb életkor, ami a megfigyelésben szerepel. (A számítások során a valós éveket [1990,2008] megfeleltettem [1,19] intervallumnak, majd az ábrázolások során visszatranszformáltam az eredeti értékekre.) A (2) és (3) feltételek azért szükségesek, hogy a paraméterek egyértelműen meghatározhatóak legyenek, ugyanis a Lee-Carter modell (1) túlparaméterezett abban az értelemben, hogy invariáns az alábbi transzformációkra:

$$\{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t\} \rightarrow \{\alpha_x, \beta_x/c, \kappa_t \cdot c\} \quad \text{vagy} \quad \{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t\} \rightarrow \{\alpha_x - c \cdot \beta_x, \beta_x, \kappa_t + c\}$$

⁸ Az Oregon Egyetem szociológia professzora volt, 2011.10.15-én elhunyt.

1. lépés: α_x becslése

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x,t} (\ln(m_x(t)) - \alpha_x - \beta_x \cdot \kappa_t)^2 \quad (4)$$

függvényt minimalizálom a (2) és (3) feltétel mellett.

Ekkor $\frac{\partial L}{\partial \alpha_x} = \frac{\partial L}{\partial \beta_x} = \frac{\partial L}{\partial \kappa_t} = 0$ feltételek miatt a következő egyenleteket kapjuk:

$$(4.1) \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha_x} = -2 \cdot \sum_t (\ln(m_x(t)) - \alpha_x - \beta_x \cdot \kappa_t)$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial L}{\partial \beta_x} = -2 \cdot \sum_t (\ln(m_x(t)) - \alpha_x - \beta_x \cdot \kappa_t) \cdot \kappa_t$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial L}{\partial \kappa_t} = -2 \cdot \sum_x (\ln(m_x(t)) - \alpha_x - \beta_x \cdot \kappa_t) \cdot \beta_x$$

Az (4.1) egyenlet segítségével és a (2)-es feltételt felhasználva:

$$\sum_t \alpha_x = \sum_t \ln(m_x(t)) - \sum_t \beta_x \cdot \kappa_t \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \sum_t \alpha_x = \sum_t \ln(m_x(t))$$

Tehát

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{T} \cdot \sum_t \ln(m_x(t)) \quad (5)$$

2. lépés: β_x, κ_t becslése

Vezessük be a Z mátrixot, amelyet a

$$Z_x(t) = \ln(m_x(t)) - \alpha_x = \beta_x \cdot \kappa_t \quad (6)$$

egyenlettel definiálom. Ennek a segítségével egy-egy egyenlet írható fel β_x, κ_t paraméterekre:

$$(6.1) \quad \sum_t Z_x(t) \cdot \kappa_t = \sum_t (\ln(m_x(t)) - \alpha_x) \cdot \kappa_t = \sum_t (\beta_x \cdot \kappa_t) \cdot \kappa_t = \beta_x \sum_t \kappa_t^2$$

$$(6.2) \quad \sum_t Z_x(t) \cdot \beta_x = \sum_t (\ln(m_x(t)) - \alpha_x) \cdot \beta_x = \sum_t (\beta_x \cdot \kappa_t) \cdot \beta_x = \kappa_t \sum_t \beta_x^2 = \kappa_t$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\sum_t \kappa_t^2 = b, \quad (7)$$

ezt felhasználva az alábbi módon írhatóak át a (6.1) és (6.2) egyenletek:

$$Z \cdot \kappa = b \cdot \beta \quad \text{és} \quad Z^T \cdot \beta = \kappa$$

A második egyenletet balról Z -vel megszorozva kapjuk, hogy

$$(Z \cdot Z^T) \cdot \beta = Z \cdot \kappa = b \cdot \beta$$

Tehát β a $Z \cdot Z^T$ mátrix b sajátértékhez tartozó egységvektora a (3), (5) feltételek mellett.

A (3), (5), (6.2) egyenletek, valamint Z definíciója (6) mellett $L(\alpha, \beta, \kappa)$:

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x,t} (\ln(m_x(t)) - \alpha_x - \beta_x \cdot \kappa_t)^2$$

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x,t} (Z_x(t) - \beta_x \cdot \kappa_t)^2$$

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x,t} Z_x(t)^2 + \sum_{x,t} \beta_x^2 \cdot \kappa_t^2 - 2 \cdot \sum_t \kappa_t (\sum_x \beta_x \cdot Z_x(t))$$

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x,t} Z_x(t)^2 + 1 \times b - 2 \cdot \sum_t \kappa_t^2$$

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x,t} Z_x(t)^2 + b - 2 \cdot b$$

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x,t} Z_x(t)^2 - b$$

Ebben az esetben L akkor lesz minimális, ha b maximális. Ez alapján $\hat{\beta}_x$ a $Z \cdot Z^T$ mátrix maximális $-b$ sajátértékéhez tartozó sajátvektor lesz, $\hat{\kappa}_t$ pedig $Z^T \cdot \beta$ vektorral becsülhető.

Ekvivalens módon $Z_x(t)$ szinguláris érték felbontásából is megbecsülhetőek a paraméterek, hiszen $Z_x(t) = U \cdot L \cdot V^T$, ahol U a kor-komponens, V az idő-komponens, L pedig a szinguláris értékeket tartalmazó diagonális mátrix 0-kal kibővítvé. Ebből a következő becslések adódnak:

$$\hat{\kappa}_t = L_1 \cdot V_{t1} \quad (8)$$

$$\hat{\beta}_x = U_{x1} \quad (9)$$

3. lépés: $\hat{\kappa}_t$ kiigazítása

A $\hat{\kappa}_t$ becslés kiigazítására azért van szükség, hogy évenként megegyezzen a modellezett halálozások száma a korábban megfigyelt halálozások számával. A $\hat{\kappa}_t$ vektort helyettesítő $\tilde{\kappa}_t$ a (10) egyenletből kapható meg:

$$\sum_x D_x(t) = \sum_x N_x(t) \cdot \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \cdot \tilde{\kappa}_t), \quad (10)$$

ahol

$D_x(t)$ a t. évben az x évesen meghaltak száma,

$N_x(t)$ a t. évben az x évesek száma (más néven kitettség),

$\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x$ az első két lépésben becsült paraméterek.

A halálozások számát nemzeti statisztikákból tudhatjuk meg, amelyek vagy tartalmazzák a kitettséget is, vagy könnyen meghatározható az alábbi összefüggésből:

$$N_x(t) = \frac{D_x(t)}{m_x(t)} \quad (11)$$

4. lépés: $\tilde{\kappa}_t$ előrejelzése

A Lee-Carter modell nagy előnye az, hogy egyetlen időfüggő paraméter van csak a rendszerben, és ez a $\tilde{\kappa}_t$, így ahhoz, hogy előre tudjam jelezni a halálozási rátákat, csak ezt a paramétert kell tovább becsülnöm. Lee és Carter arra a következtetésre jutottak, hogy a halálozási ráták előrejelzésénél a driftes véletlen bolyongás (azaz egy ARIMA(0,1,0) folyamat) tudja legjobban leírni a $\tilde{\kappa}_t$ jövőbeli értékét, ezért a következő becslést érdemes használni:

$$\tilde{\kappa}_t = \tilde{\kappa}_{t-1} + \theta + \delta_t, \quad (12)$$

ahol

θ az úgynevezett drift paraméter, ami κ trendjét mutatja,

δ_t pedig egy $\mathcal{N}(0, \delta^2)$ eloszlású hiba.

A drift paraméter csak a becsült $\tilde{\kappa}$ első és utolsó elemétől függ, és a következőképpen becsülhető:

$$\hat{\theta} = \frac{\tilde{\kappa}_T - \tilde{\kappa}_1}{T - 1} \quad (13)$$

Továbbá a maximum likelihood-módszer a következő becslést adja a hiba varianciájára, valamint a trend sztenderd hibájára:

$$\hat{\delta}^2 = \frac{1}{T - 1} \cdot \sum_{t=1}^{T-1} (\tilde{\kappa}_{t+1} - \tilde{\kappa}_t - \hat{\theta})^2 \quad (14)$$

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\delta}}{T - 1} \quad (15)$$

Ha a $(T + s)$ -edik időpontra szeretnénk előre jelezni (ahol T időpontig vannak megfigyelt adataink), akkor iteráció után a következő összefüggést kapjuk:

$$\tilde{\kappa}_{T+s} = \tilde{\kappa}_T + s \cdot \theta + \sum_{n=1}^s \delta_{T+n} = \tilde{\kappa}_T + s \cdot \theta + \sqrt{s} \cdot \delta_t \quad (16)$$

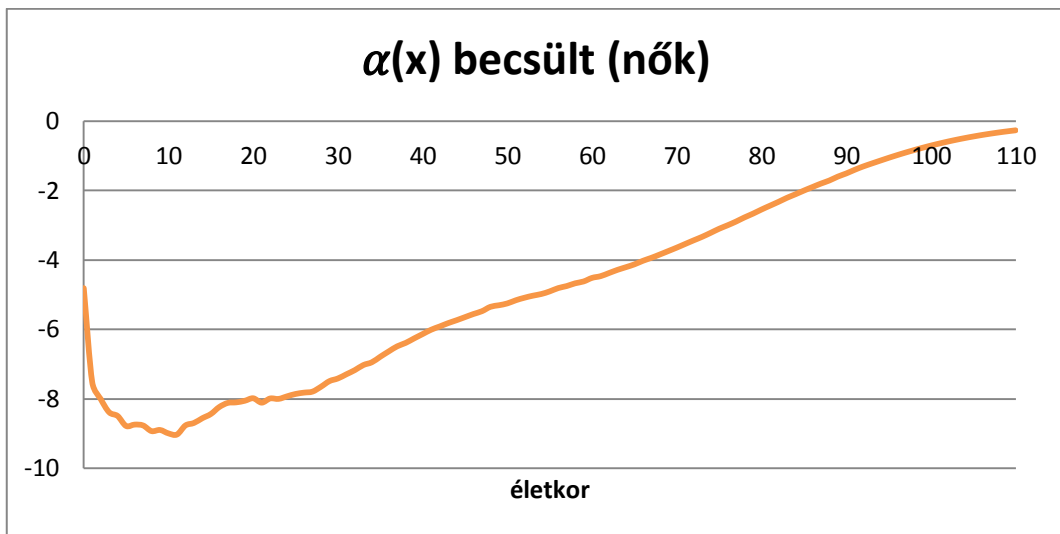
5. lépés: $\hat{Z}_x(t)$ és $\ln(\hat{m}_x(t))$ előállítása

A becsült paramétereket felhasználva becsüljük az új $\hat{Z}_x(t)$ mátrixot, és kiszámoljuk a becsült halálózási rátákat:

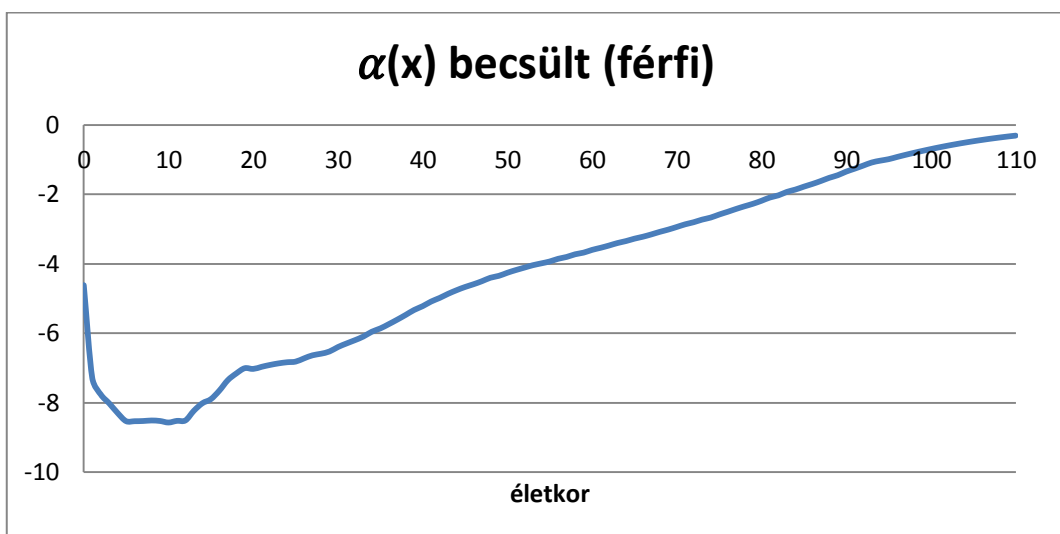
$$\ln(\hat{m}_x(t)) = \hat{\alpha}_x + \hat{Z}_x(t) = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \cdot \tilde{\kappa}_t \quad (17)$$

3.2 A modell alkalmazása

A becslés 1. lépése után az 6/a. és az 6/b. ábra mutatja a becsült α_x -eket. Mint látható, a vizsgált 18 naptári év átlagosan azt mutatja, hogy van egy jelentős halálozás csecsemőkorban, ami körülbelül 12-14 éves korig csökken, utána kezdődik 20 éves korig egy intenzívebb növekedés, végül fokozott emelkedés látható nagyon enyhe hullámzásokkal.

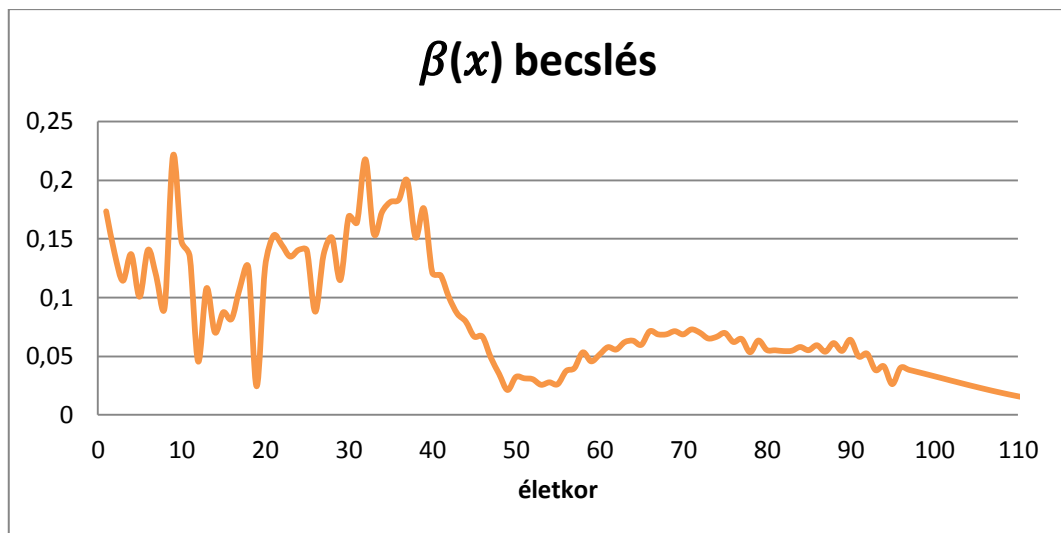


6/a. ábra: Az átlagos $\log(m(x))$ a nők esetében

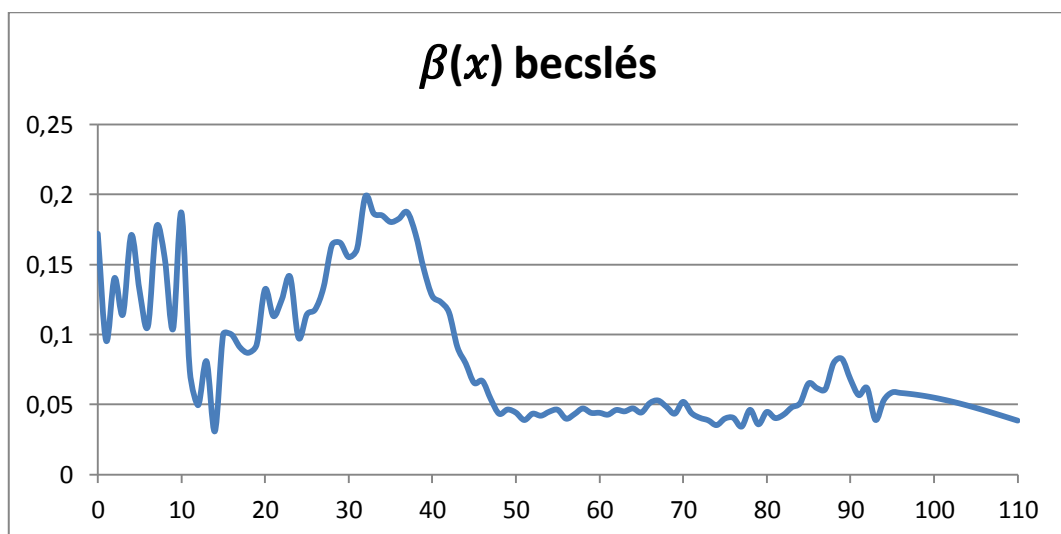


6/b. ábra: Az átlagos $\log(m(x))$ a férfiak esetében

A 7/a. és a 7/b. ábrákon a becsült $\beta(x)$ -ek láthatóak nemenként. Azt mutatják, hogy egy adott korosztály mennyire érzékeny a mortalitási szint változására. Az első 40 évet erős fluktuáció jellemzi, majd a magas érzékenység 50 éves korig folyamatosan csökken. Végül 65 és 90 év között jelentkezik egy újabb magas érzékenység, amely leginkább hozzájárul az időközi mortalitás csökkenéséhez a vizsgált időszakban. A férfiak esetében kisebb a fluktuáció, azaz általában kevésbé érzékenyek a mortalitási szint csökkenésére, mint a nők.

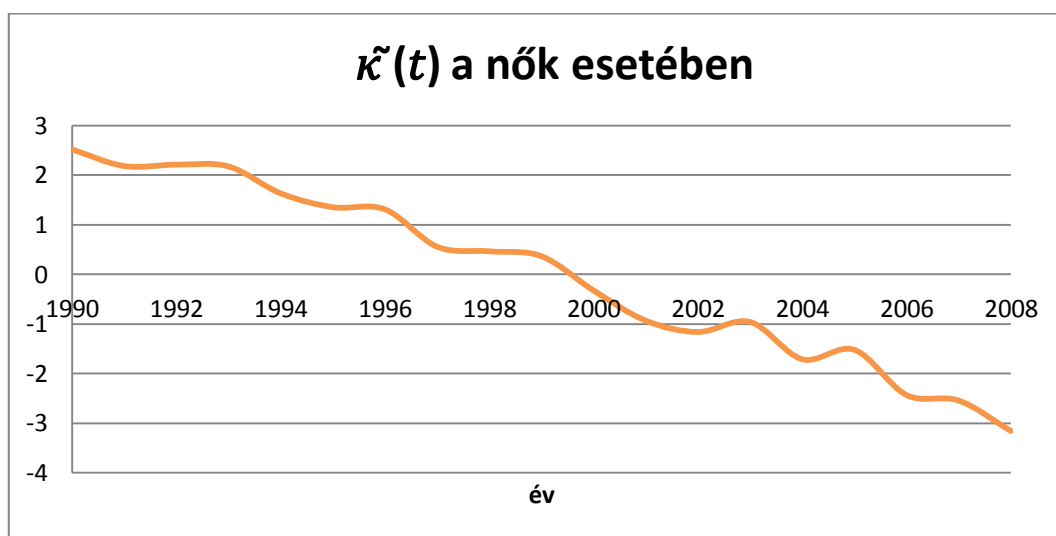


7/a. ábra: Érzékenység a mortalitás változására a nők esetében

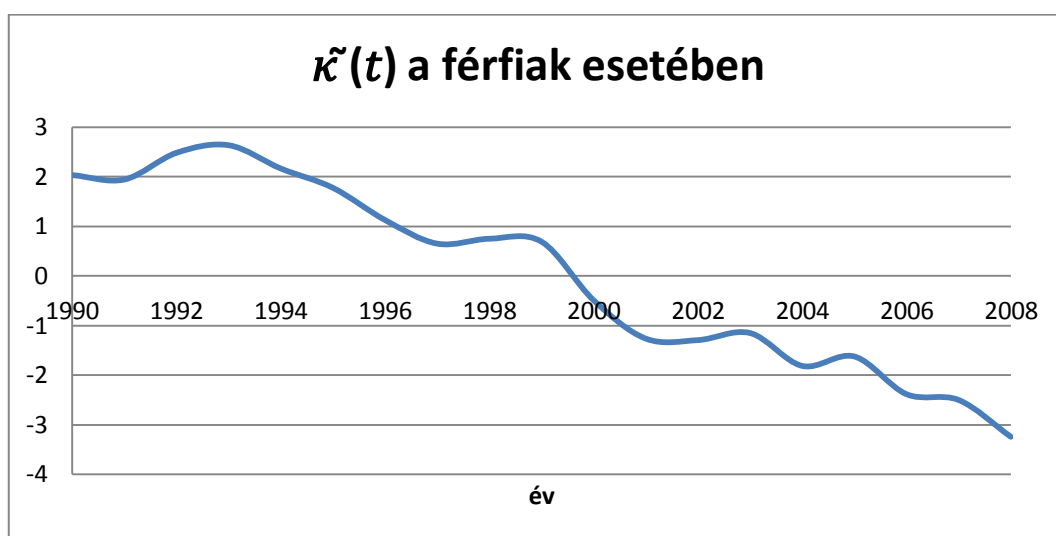


7/b. ábra: Érzékenység a mortalitás változására a férfiak esetében

A 2. lépésben kiszámolt $\hat{\kappa}_t$ helyett azonnal a kiigazított becslést, $\tilde{\kappa}_t$ -t mutatom be a 8/a és 8/b. ábrán. Ahogy ezek az ábrák is mutatják, a mortalitási ráták időbeli alakulása csökkenő az 1990 és 2008 közötti periódust tekintve. Itt nagy eltérés látható a férfiak és a nők esetében. Míg a nőknél egy csökkenő trend látható kis szórással, addig a csökkenő trend a férfiaknál is megvan ugyan, de a szórás sokkal nagyobb az esetükben.

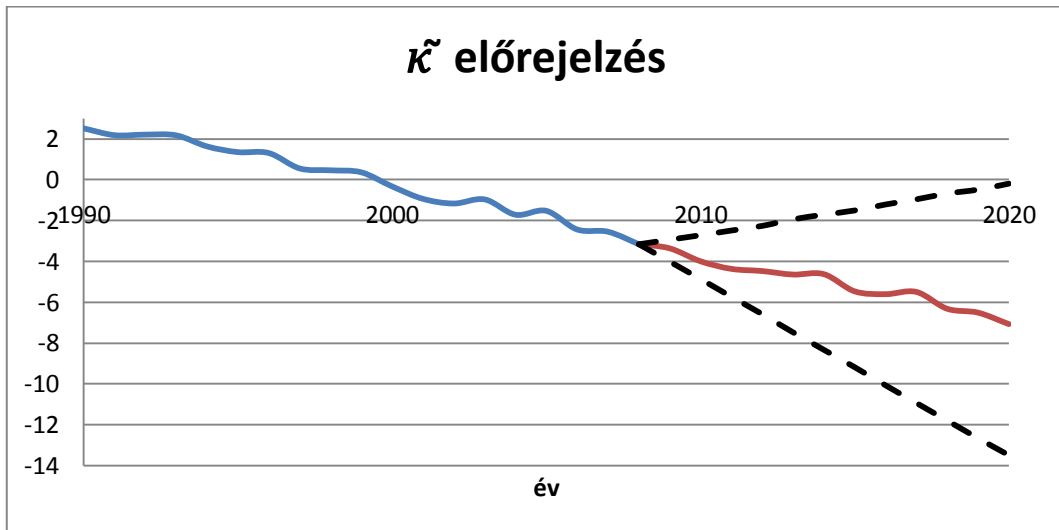


8/a. ábra: A mortalitási ráták időbeli trendje a nők esetében

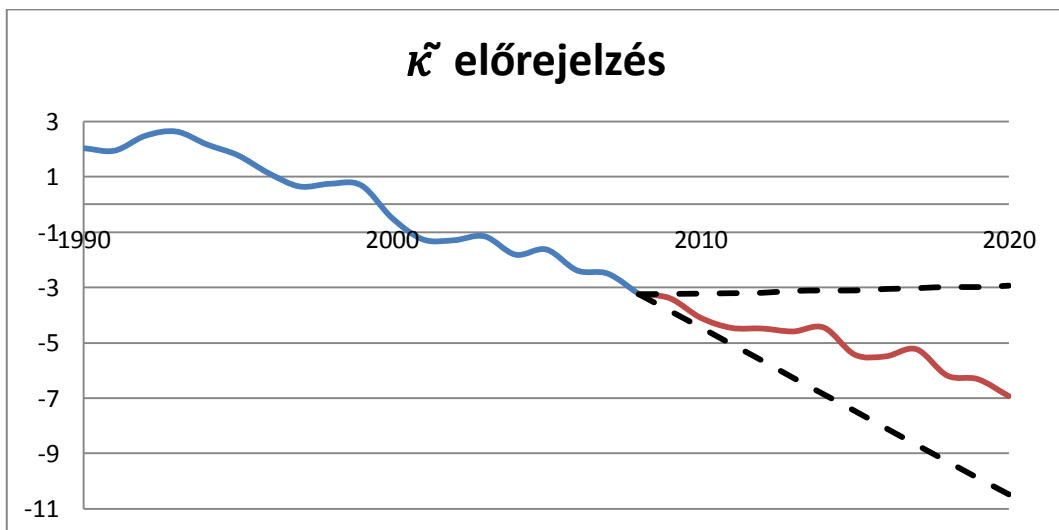


8/b. ábra: A mortalitási ráták időbeli trendje a férfiak esetében

Az 1990-2008 közötti adatok felhasználásával véletlen bolyongással jeleztem előre a várható $\tilde{\kappa}$ -okat a 4. lépés alapján, és a kapott eredményeket (9/a. és a 9/b. ábra) ábrázoltam. Látható, hogy az eddigi adatok ismeretében a jövőben további csökkenés várható ezen paraméterek értékeiben. A nőknél megbízhatóbb az előrejelzés a női (ismert) $\tilde{\kappa}_t$ -k kisebb szórása miatt. A megfelelő konfidencia-intervallumokat Bootstrap módszerrel állítottam elő.

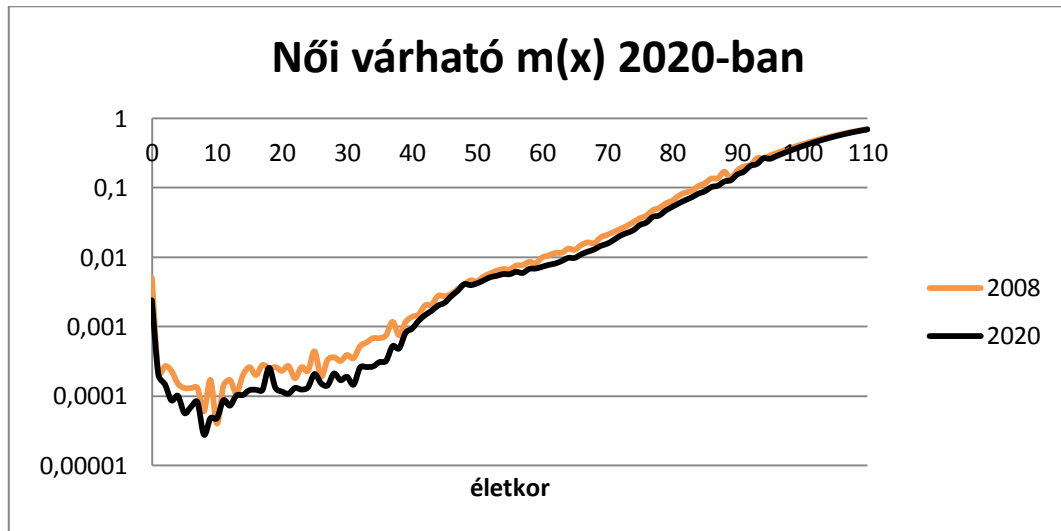


9/a. ábra: $\tilde{\kappa}_t$ előrejelzése és a 95%-os konfidencia intervallum 2020-ig nők esetében

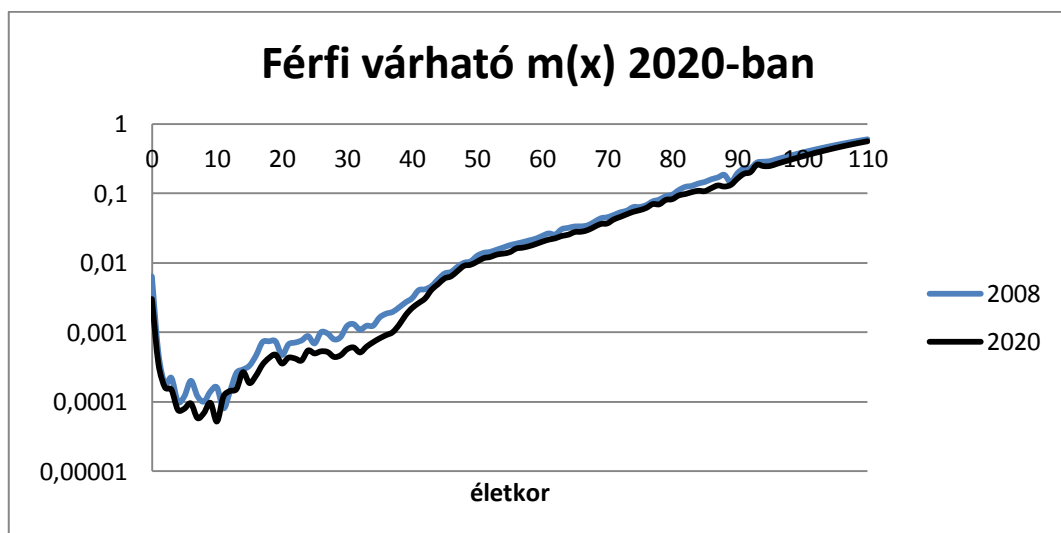


9/b. ábra: $\tilde{\kappa}_t$ előrejelzése és a 95%-os konfidencia intervallum 2020-ig férfiak esetében

Végül a 6. lépés alapján előre jeleztem a mortalitási rátákat 2020-ra. Ezt mutatja az 10/a. és az 10/b. ábra. Az előrejelzés alapján mindkét nem esetében a mortalitási ráták további csökkenése várható. Kiemelkedő mértékű javulás 20-40 életév között mutatkozik. Elmondható, hogy a Lee-Carter módszer alapján a várható élettartamok tovább fognak nőni az elkövetkezendő évek során.



10/a. ábra: A várható női mortalitási ráta 2020-ben



10/b. ábra: A várható férfi mortalitási ráta 2020-ben

4. Bomsdorf modell

4.1. A modell elmélete [3]

Ebben a fejezetben egy olyan modellt mutatok be és alkalmazok a magyar adatokra, amely

Bomsdorf és Trimborn az alábbi összefüggésből indultak ki:

$$m_x(t) = e^{(\alpha_x + \beta_x \cdot t)},$$

ahol $m_x(t)$ az x éves emberek éves halálozási rátáját jelöli a t -edik évben. α és β pedig két kor-specifikus komponens. Ezt úgy alakították át, hogy egy adott évi (t_0) halálozást is figyelembe vegyen:

$$m_x(t) = m_x(t_0) \cdot e^{\beta_x \cdot (t-t_0)} \quad (18)$$

e^{β_x} egy, a halandóságot növelő, vagy éppen csökkentő tényező. β_x mutatja $m_x(t)$ csökkenését (ha negatív), vagy növekedését (ha pozitív).

Most az (1) formula által adott Bomsdorf-Trimborn modell kibővített változatát mutatom be, melyet Bomsdorf és szerzőtársai 2006-ban publikáltak. Ebben az új modellben a β_x növekedési rátát helyettesítették egy $\beta(x, t)$ kor- és időfüggő sztochasztikus növekedési rátával, amely esetében csökken a halálozási ráta az idő múlásával. Ezekkel a változókkal és a $t_0 = t - 1$ feltétellel a következőképpen adható meg a halálozási arány dinamikája:

$$m_x(t) = m_x(t - 1) \cdot e^{\beta(x, t)} \quad (19)$$

$\beta(x, t)$ -n belül két fontos hatást különböztettek meg, amelyeknek legyen u_t és μ_x a jele. Az u_t egy közös hatás, azaz a t -edik évben az együttes halálozás változása (melynek főként egészségügyi, de egyéb okai is lehetnek), amíg a μ_x egy életkor-specifikus hatás, ami sztochasztikusan független u_t -től. Ez azért volt fontos, hogy könnyen kezelhető és jól paraméterezhető modellt kapjanak. Felmerül a kérdés, hogy egyáltalán lenne-e értelme feltenni, hogy sztochasztikusan összefüggjenek. Mert ha igen, akkor ez a feltétel feloldható lenne, csak nagymértékben növelné a paraméterszámot, illetve nem lehetne

additív módon számolni ezekkel a tényezőkkel. Azonban Bomsdorfék ezen feltétel mellett az új növekedési rátát az alábbi egyenlettel írták fel:

$$\beta(x, t) = u_t + \mu_x + \sigma_x \cdot \varepsilon_{x,t}, \quad (20)$$

ahol $\varepsilon_{x,t}$ független azonos eloszlású (F.A.E) hiba, ami nem determinált az első két összeadandó által, valamint σ_x egy nem konstans variancia. Az u_t a (22) képlet által leírt sztochasztikus folyamat, μ_x pedig az x éves korra jellemző fix hatás (életkorhatás).

$$u_{t+1} = u_t + r \cdot (s - u_t) + \eta_t, \quad (21)$$

ahol η_t F.A.E normális eloszlású hiba, $E(\eta_t) = 0$ és $D^2(\eta_t) = \sigma_\eta^2$. Továbbá $r \in [0,1]$, ami az s átlaghoz való visszatérés tendenciáját mutatja meg; azaz r minél közelebb van 1-hez, annál magasabb a visszatérés mértéke. Láthatjuk, hogy ha $r = 0$, akkor ez egy véletlen bolyongás, ha $r = 1$, akkor fehér zaj folyamatot követ.

A továbbiakban a számításokhoz szükséges - Bomsdorf és társai által javasolt - becsléseket mutatom be. Annak érdekében, hogy könnyen paraméterezhető legyen a modell, feltették minden x mellett, hogy a μ_x mediánja 0. A becslés három lépésből áll:

1. lépés: u_t becslése

Első lépésben megbecsülték u_t -t mint a $\beta(x, t)$ tapasztalati mediánját minden x mellett. Ezt \hat{u}_t -vel jelölték. Azért a mediánt választották, mert az nem olyan érzékeny a kiugró értékekre, valamint a változó volatilitásra, mint például a mintaátlag.

2. lépés: μ_x becslése

Ezen lépésben a μ_x fix hatást a következőképpen írták le:

$$\hat{\mu}_x = \bar{\beta}(x, \cdot) - \bar{u}. \quad (22)$$

3. lépés: r és s becslése

Végül az u_t sztochasztikus folyamat (21) paramétereit becsülték. Az s paraméterre az \bar{u} . konzisztens becslést adták, továbbá az r paramétert megkapták a legkisebb négyzetek módszerével:

$$\hat{r} = \arg \min_r \sum_{t=1}^{T-1} \{\hat{u}_{t+1} - \hat{u}_t - r \cdot (\hat{s} - \hat{u}_t)\}^2 \quad (23)$$

Végül a hibák varianciájának a becslése:

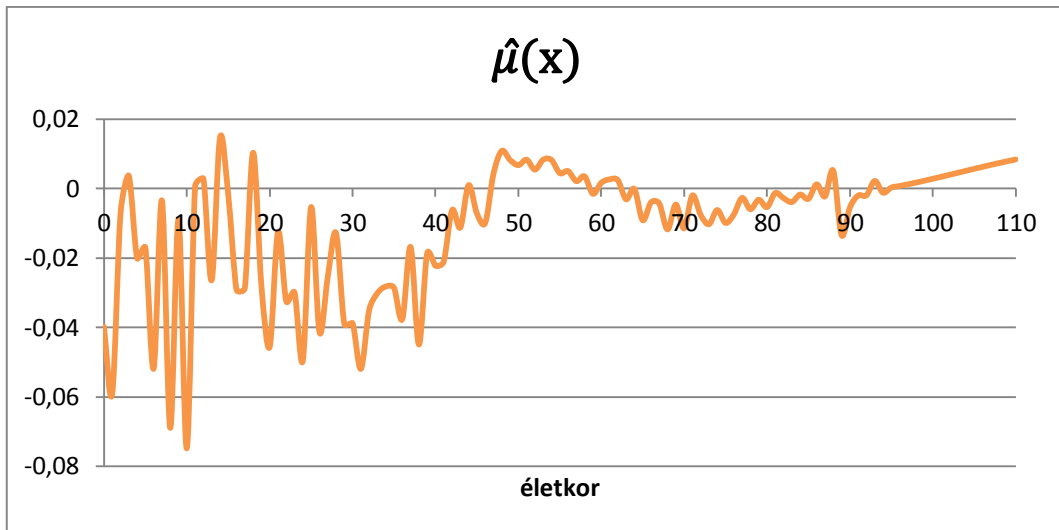
$$\hat{\sigma}_\eta^2 = \frac{1}{T-2} \sum_{t=1}^{T-1} \{\hat{u}_{t+1} - \hat{u}_t - \hat{r} \cdot (\hat{s} - \hat{u}_t)\}^2 \quad (24)$$

valamint

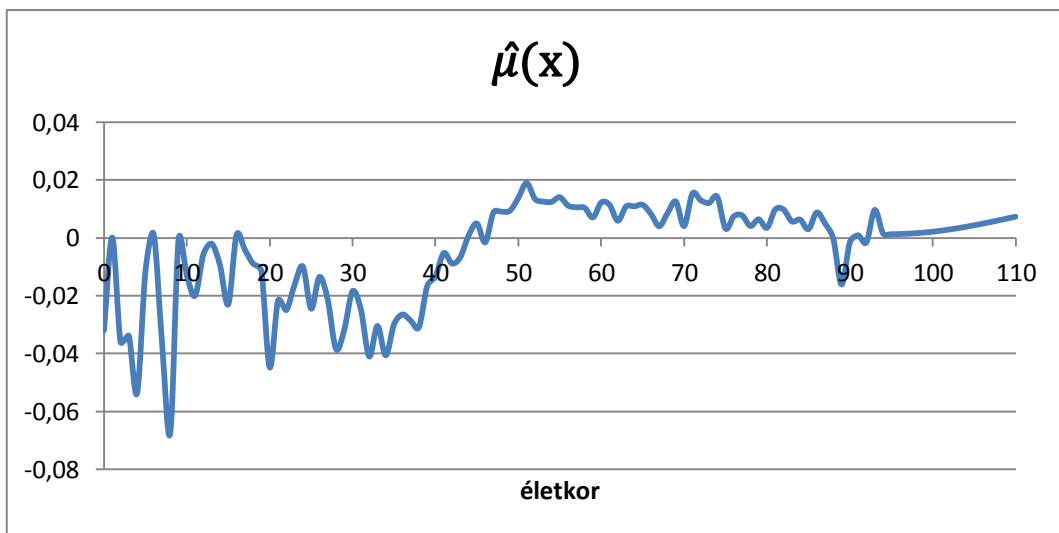
$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \{\beta(x, t) - \bar{\beta}(x, \cdot) - \bar{u} - \hat{u}_t\}^2 \quad (25)$$

4.2. A modell alkalmazása

A Bomsdorf-modell elméleti lépéseit követve az alábbi eredményeket kaptam. Kezdetben (23) alapján megbecsültem μ_x -t. Ezt a 11/a. és a 11/b. ábrák mutatják.



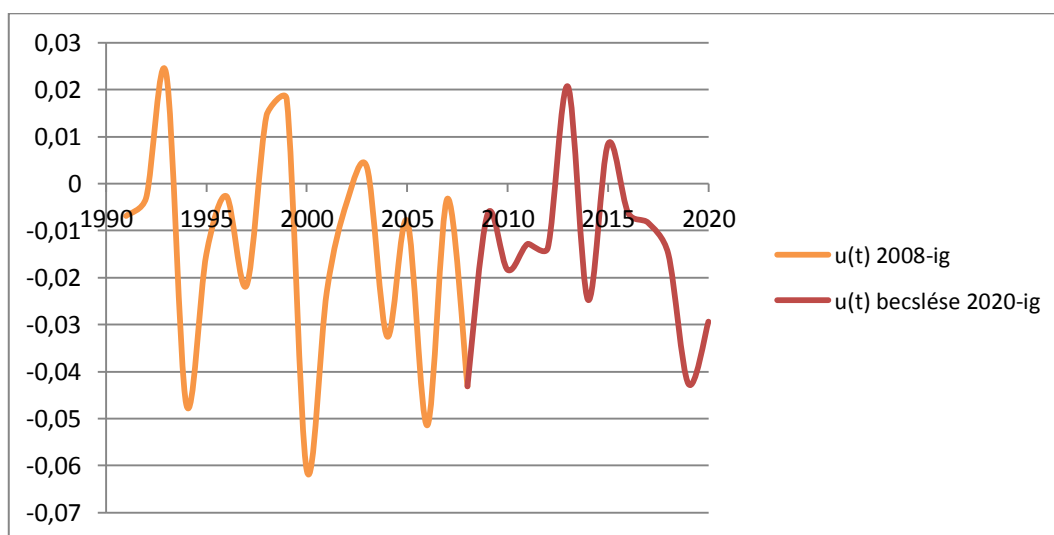
11/a. ábra: Életkorhatás a nők esetében



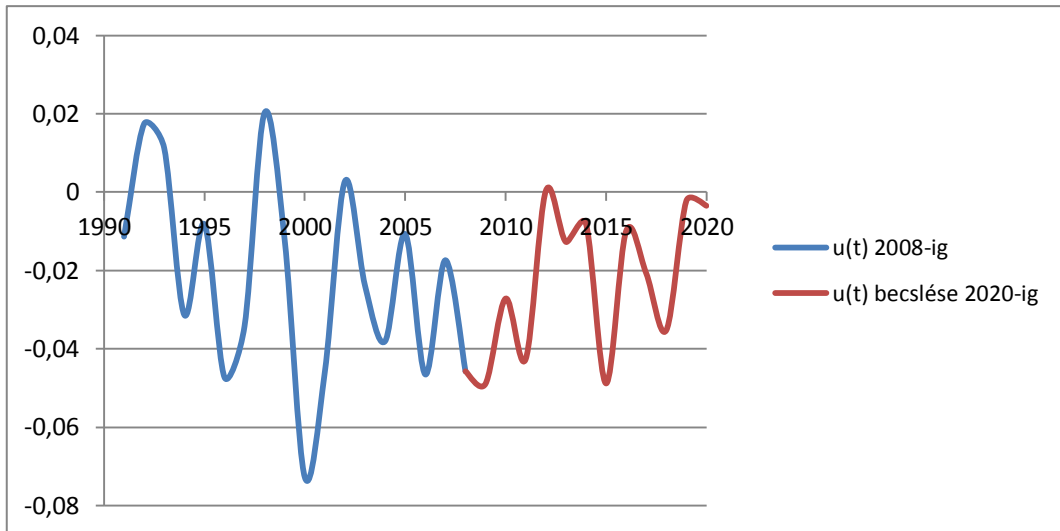
11/b. ábra: Életkorhatás a férfiak esetében

Ezek az ábrák (11/a. és 11/b.) azt mutatják, hogy a becslésben mekkora hatása lesz μ_x -nek a $\beta(x, t)$ -re az egyes életkorokban. Ez lesz a fix – naptári évtől nem függő – korhatás, ami az adott korosztályra jellemző külső hatást mutatja meg. Mindkét ábrán megfigyelhető, hogy 45 éves kor környékén ez a tényező megnöveli a halandóságot, ami nagy valószínűséggel a változó kornak tudható be. A férfiak esetében ettől az időponttól kezdve ez a hatás magas is marad, a nők esetében a korhatás ezután fokozatosan csökken, majd 70 éves kortól kezd újra növekedni, ami az általános időskori egészségromlással van kapcsolatban. Továbbá lokális maximumok tapasztalhatóak (főleg a nők esetében) 10-14 illetve 17-20 életévek között, melynek hátterében a fiatalkori öngyilkosságok illetve a frissen megszerzett jogosítványok utáni baleseti halálozások állhatnak.

Ezután modelleztem az $u(t)$ diszkrét idejű sztochasztikus folyamatot (21) alapján. Ebből a következő eredményeket kaptam (lásd 12/a. és 12/b. ábra). Ezek az ábrák azt mutatják meg, hogy összességében a t-edik évben mekkora változás áll be az együttes halálozásban. Mindkét nem esetében erősen fluktuál a folyamat.

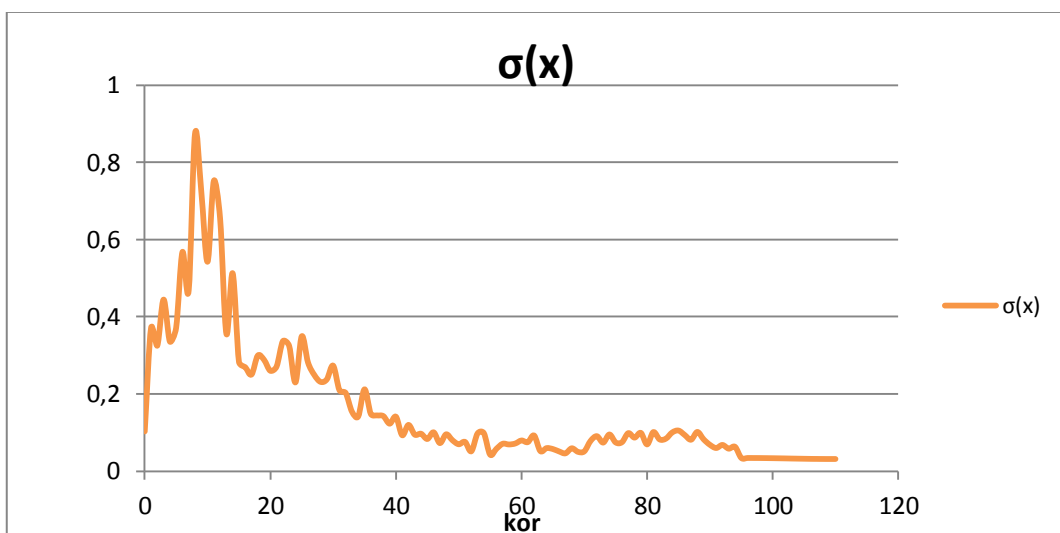


12/a. ábra: $u(t)$ alakulása és előrejelzése a nők esetében

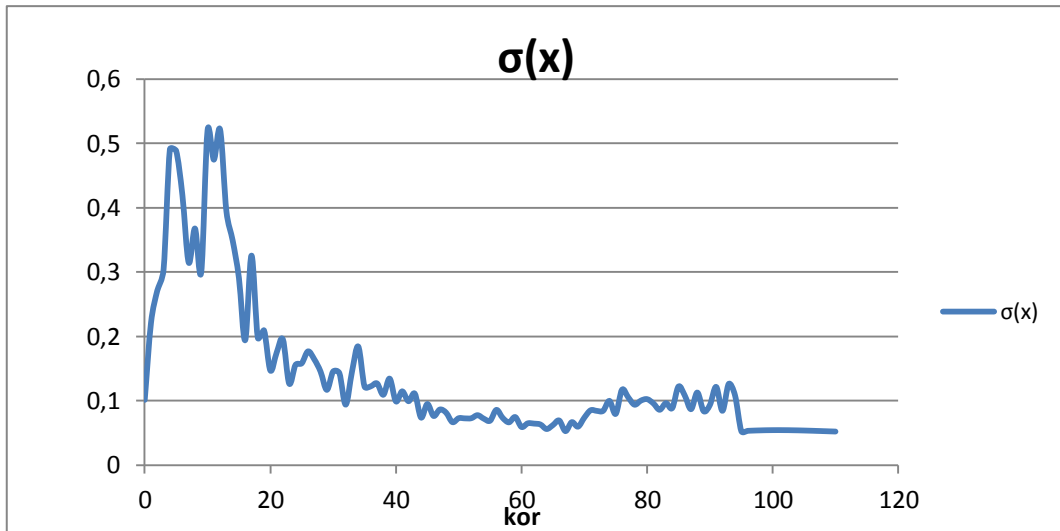


12/b. ábra: $u(t)$ alakulása és előrejelzése a férfiak esetében

$\hat{\mu}_x$ és \hat{u}_t kiszámítása után már csak egyetlen tag hiányzik $\beta(x, t)$ becsléséhez, ez pedig a σ_x , amelynek a hatását a 13/a. és 13/b. ábrákon láthatjuk. Ez a paraméter mutatja meg a halálozás szóródását az átlaghoz képest. Könnyen észrevehető, hogy amíg fiatalabb korban nagyobb a bizonytalanság (amelynek az oka az lehet, hogy sokkal nagyobbak az életkörülmények közötti különbségek), addig az évek múlásával egyre inkább az átlagtendencia lesz érvényes mindenkire.

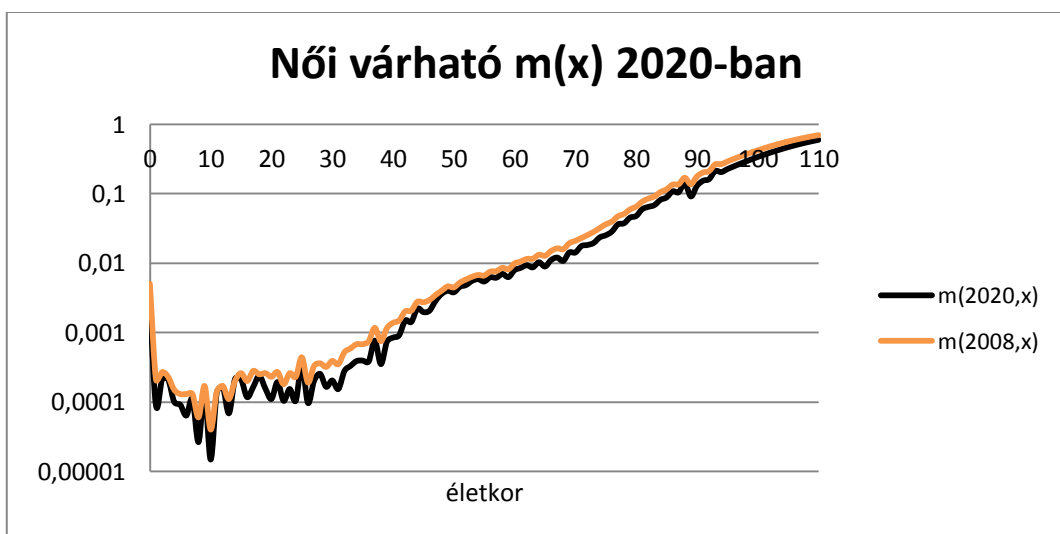


13/a. ábra: σ_x hatása az egyes életkorokban a nők esetében

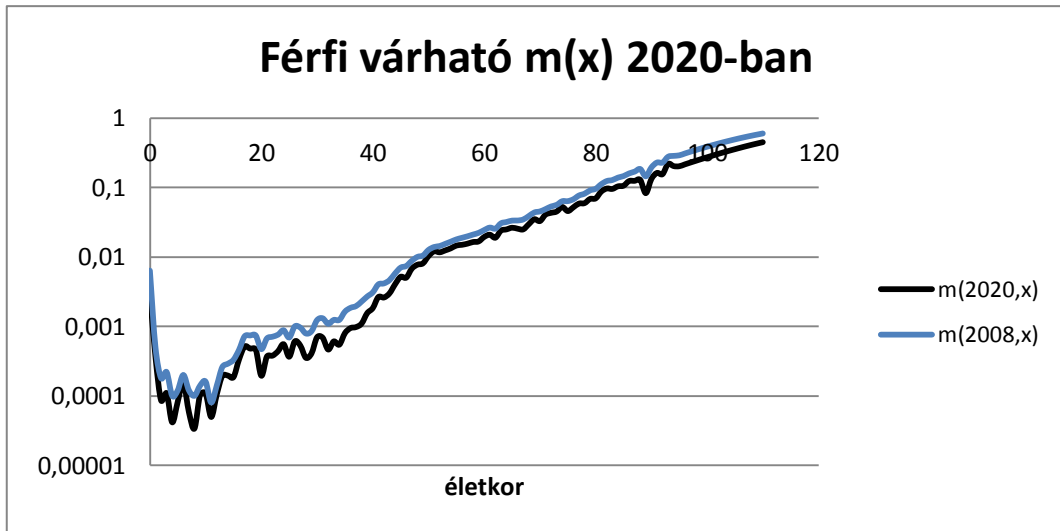


13/b. ábra: σ_x hatása az egyes életkorokban a férfiak esetében

Most már minden szükséges adat megvan ahhoz, hogy el tudjuk készíteni $\beta(x, t)$ becslését (20) alapján, majd ebből $m_x(t)$ becslését (19) alapján. Mivel célom a 2020-as halálzási ráta becslése, így arra mutatom be az eredményeket az 14/a. és 14/b. ábrákon. Ahhoz, hogy lássuk a változást a 2008-as mért halálzási rátát is ábrázoltam.



14/a. ábra: A halálzási ráta becslése 2020-ra a nők esetében



14/b. ábra: A halálzási ráta becslése 2020-ra a férfiak esetében

Az előrejelzés azt mutatja, hogy a halálzási ráták várhatóan tovább javulnak, különösképpen a 20-40 közötti életkorban, ahogy a Lee-Carter módszer is jelezte.

5. Poisson-regressziós modell

5.1. A modell elmélete [19]

Ebben a fejezetben a halálozási ráták direkt előrejelzése helyett a halálozások számának a 2020-as becslését használom fel a halálozási ráták előrejelzéséhez.

A Poisson-regresszió az általánosított lineáris modellek [John P. Hoffmann, 2004] családjába tartozik. Használatának feltétele, hogy a függő változók független, Poisson eloszlásúak legyenek. Tehát a továbbiakban azzal az általános feltevessel élek, hogy egy adott éven belül a halálozások száma korévenkénti bontásban Poisson eloszlású.

Mielőtt elkészítettem volna az általam használt regressziós modellt, megvizsgáltam, hogy az irodalom milyen magyarázó változókat használ az ilyen típusú előrejelzések esetében, figyelembe véve, hogy lehetőség szerint csak annyi változót építsek a modellembe, amennyi valóban szükséges.

Az egyik ilyen vizsgált modell a Cairns-Blake-Dowd (CBD) modell [10], amelyet 2006-ban publikáltak a szerzők a halálozási valószínűségek becslésére:

$$\text{logit}(q_x(t)) = \log\left(\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)}\right) = \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(2)}, \quad (26)$$

ahol $\beta_x^{(1)} = (x - \bar{x})$.

Ezt a (26) szerinti modellt 2009-ben Richard Plat [22] továbbfejlesztette, figyelembe véve, hogy idősebb korban „máshogy” halnak az emberek ($\beta_x^{(2)}$), kohorsz hatást (γ_{t-x}), valamint a Lee-Carter modell trend változóját (α_x) beépítve, és direkt halálozási rátát becsülve:

$$\log(m_x(t)) = \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(2)} \cdot \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x}, \quad (27)$$

ahol $\beta_x^{(1)} = (x - \bar{x})$, $\beta_x^{(2)} = \max\{(\bar{x} - x), 0\}$.

Az új modell (27) már alkalmas a „teljes korosztály⁹” pontosabb becslésére, de ez a modell csak az átlagnál idősebb korosztály halálozására ad egy újabb feltételt. Ahhoz, hogy a fiatal korban megjelenő eltérő halálozást is figyelembe vegyék, Matthias Börger és szerzőtársai [8] így definiálták a modellt:

$$\log\left(\frac{q_x(t)}{1-q_x(t)}\right) = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(2)} \cdot \kappa_t^{(3)} + \beta_x^{(3)} \cdot \kappa_t^{(4)} + \gamma_{t-x}, \quad (28)$$

ahol $\beta_x^{(1)} = (x - \bar{x})$, $\beta_x^{(2)} = \max\{(x_{fiatal} - x), 0\}$, $\beta_x^{(3)} = \max\{(x - x_{idős})\}$.

Az x_{fiatal} és az $x_{idős}$ egy általuk megválasztott korérték,

$\kappa_t^{(1)}$ – korfüggetlen trend,

$\beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(2)} - \log\left(\frac{q_x(t)}{1-q_x(t)}\right)$ meredekségét mutatja,

$\beta_x^{(2)} \cdot \kappa_t^{(3)}$ és $\beta_x^{(3)} \cdot \kappa_t^{(4)}$ a fiatalkori és az időskori erős mortalitási különbséget hivatott kiigazítani,

α_x – korhatás,

γ_{t-x} – kohorsz hatás.

Az (26), (27), (28) egyenletek vizsgálata után az alábbi Poisson-regressziós modellt használom a becslésemhez:

$$\log(D_x(t)) = \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(2)} \cdot \kappa_t^{(3)} + \beta_x^{(3)} \cdot \kappa_t^{(4)} + \beta_x^{(4)} \cdot \kappa_t^{(5)}, \quad (29)$$

ahol

$\beta_x^{(1)} = (x - \bar{x})$, $\beta_x^{(2)} = \max\{(x_{fiatal} - x), 0\}$, $\beta_x^{(3)} = \max\{(x - x_{idős})\}$, $\beta_x^{(4)} = \chi^{x=0}$,

$D_x(t)$ – a t. évben az x éves korban elhunytak száma összesen,

⁹ A szakirodalom a halálozási ráták becslésének a témakörében többször használja a teljes korosztály kifejezést úgy, hogy az mégsem fedi le a teljes népességet, csak bizonyos kortól felfelé. Plat a cikkében [2] a 20 évesektől tekintette.

$\kappa_t^{(1)}$ – korfüggetlen trend,

$\beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(2)}$ – a $\log(D_x)$ meredekségét mutatja,

$\beta_x^{(2)} \cdot \kappa_t^{(3)}$ – a fiatalkori alacsonyabb halálozás miatt korigál,

$\beta_x^{(3)} \cdot \kappa_t^{(4)}$ – a időskori magasabb halálozás miatt korigál ,

$\beta_x^{(4)} \cdot \kappa_t^{(5)}$ – a kiemelkedően magas csecsemőhalandóság miatt korigálja a modellt,

$\chi^{x=0}$ – indikátor-változó az $x=0$ feltétel mellett.

A alábbiakban az előrejelzés lépéseit ismertetem:

1. lépés: A paraméterek becslése

A korévenkénti halálozásszám Poisson eloszlású, ehhez használva a logaritmus függvényt, mint link-függvényt, alkalmazható a Poisson-regresszió minden egyes korévben.

A paraméterek becslése során az $x_{fiatal} = 12$ és az $x_{idős} = 80$ beállításokat használtam.

2. lépés: A paraméterek előrejelzése 2020-ig

A $\kappa_t^{(1)}$, mint már korábban definiáltam, a korfüggetlen trend, éppen ezért ez egy ARIMA(0,1,0) folyamattal jelezhető előre.

$\kappa_t^{(2)}$, $\kappa_t^{(3)}$, $\kappa_t^{(4)}$ és $\kappa_t^{(5)}$ előrejelzésénél azt feltételeztem, hogy ARIMA(1,1,0) konstans nélküli folyamatot követnek. Ezekhez az SPSS programcsomagot használtam, amely konfidencia-intervallumot is számol.

3. lépés: D_x kezdeti becslése

Az előre jelzett paramétereket behelyettesítve becslést kapunk a halálesetek számára korévenként a 2020-as évben.

4. lépés: l_x kezdeti becslése 2020-ra

Ahhoz, hogy megkapjuk az elméleti halálozási valószínűségeket (q_x), először becsülnünk kell az adott korosztályban az adott évet túlélők számát (kihalási rend). Szerencsére az alapadatok is úgy szerepeltek, hogy egy kiinduló $l_0 = 100.000$ fős népesség mellett adta meg a halálozások számát a következő képlettel:

$$l_x = l_{x-1} - D_{x-1} \quad , ahol \quad x \geq 1 \quad (30)$$

Miután a kihalási rend összes elemét kiszámoltuk, észrevehetjük, hogy a l_{110} -es érték nem 0, aminek két oka lehet; vagy annyira lecsökkent a halálozások száma, hogy az eddig feltételezett legmagasabb életkor már nem a 110 év, vagy a becslés hibájának tudható be. Az első esettől most eltekintek.

5. lépés: A 2020. évi paraméterek kiigazítása

A paraméterek kiigazításához Excel Solver-t, illetve az SPSS eredményeit használtam fel. Az $l_{110} = 0$ célérték, és azon feltétel mellett futtattam, hogy a kiigazított paraméterek az eredetileg becsült paraméter konfidencia-intervallumán belül maradjanak.

6. lépés: $\tilde{q}_x(2020)$ kiszámítása, és abból becslés $\tilde{m}_x(2020)$ -ra.

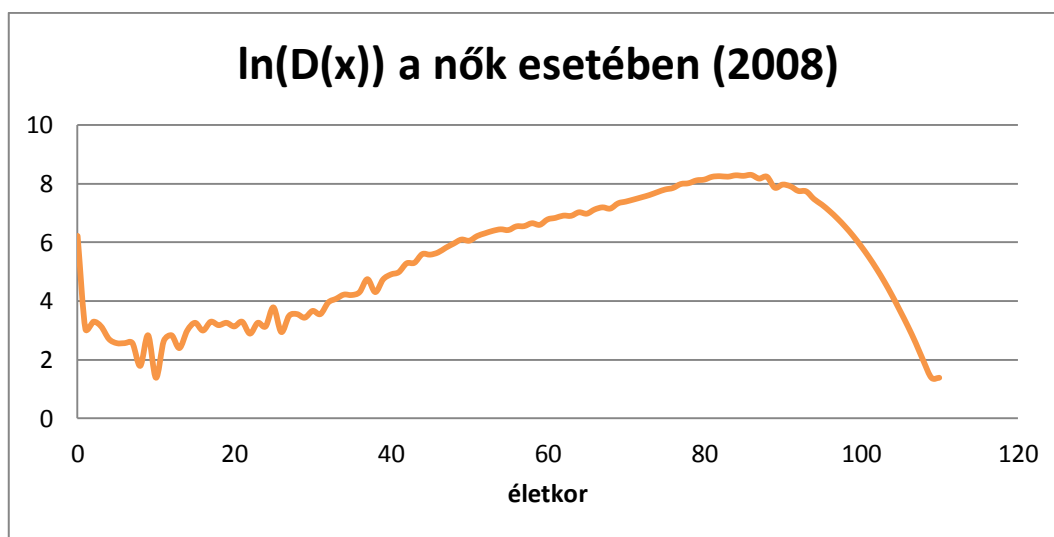
A becsült értékeket a (29) képletbe helyettesítve előre jeleztem a 2020-as halálesetek számát, abból az elméleti halálozási valószínűségeket (31), végül halálozási rátát számítottam belőle (32). Erre azért volt szükség, hogy a későbbiekben össze lehessen hasonlítani azokkal a modellekkel, amelyek közvetlenül \tilde{m}_x -t becsülnek. Ehhez a transzformációhoz az alábbi összefüggéseket alkalmaztam:

$$\tilde{q}_x(2020) = \frac{\tilde{D}_x(2020)}{l_x(2020)} \quad (31)$$

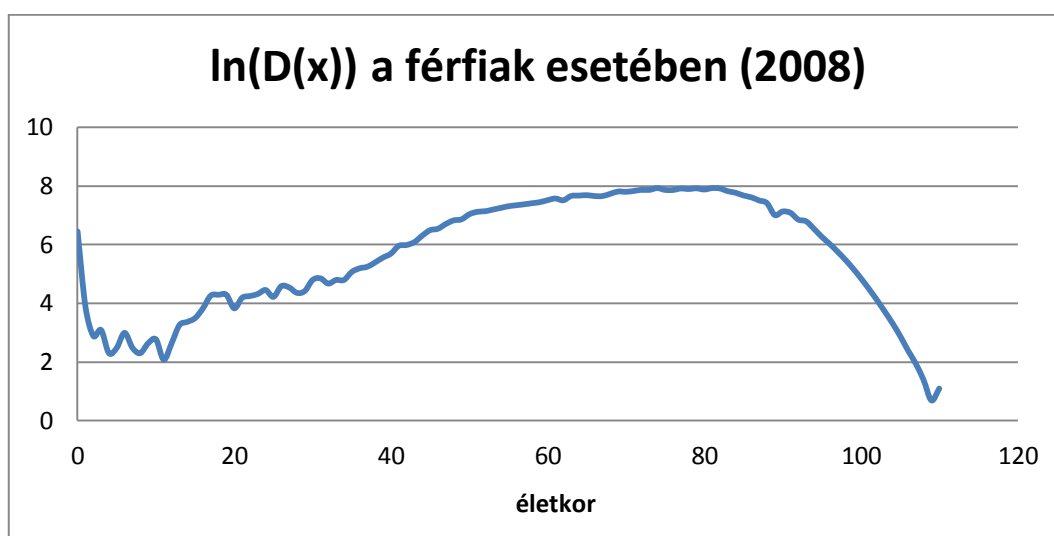
$$\tilde{m}_x(2020) \approx -\log(1 - \tilde{q}_x(2020)) \quad (32)$$

5.2. A modell alkalmazása

Először nézzük meg, hogy a nők, illetve a férfiak esetében hogyan nézett ki 2008-ban az életkoronkénti halálozások számának a logaritmus, $\log(D_x(2008))$. Ezeket mutatja az 15/a. és az 15/b. ábra. Jól elkülöníthetőek a modellben használt faktorok az ábrán is. Kezdetben van egy magas csecsemőhalandóság, majd 12 éves kor környékéig egy csökkenés, utána egy növekedés, végül 80 év környékén egy újabb erős csökkenés.

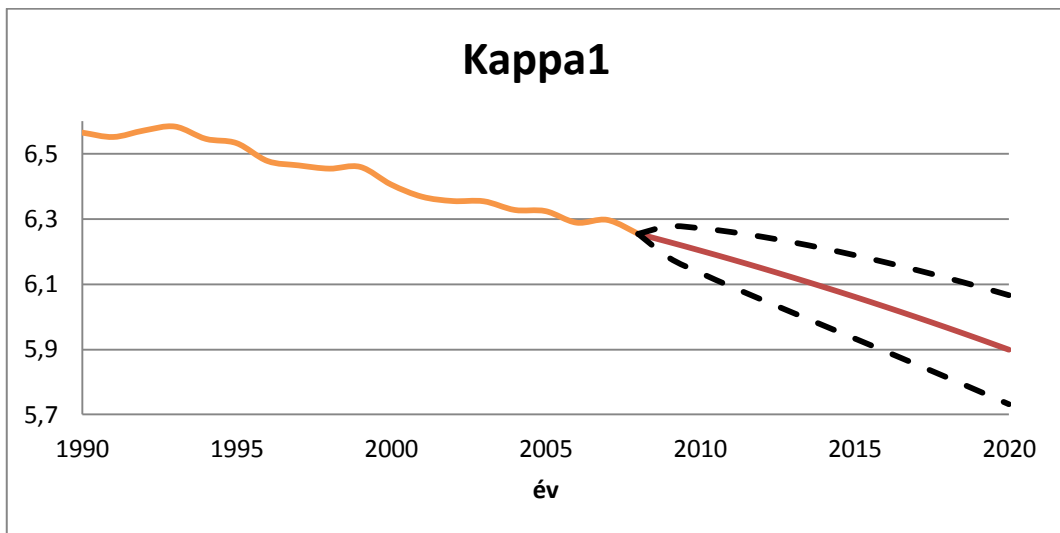


15/a. ábra: A halálozás alakulása a nők esetében

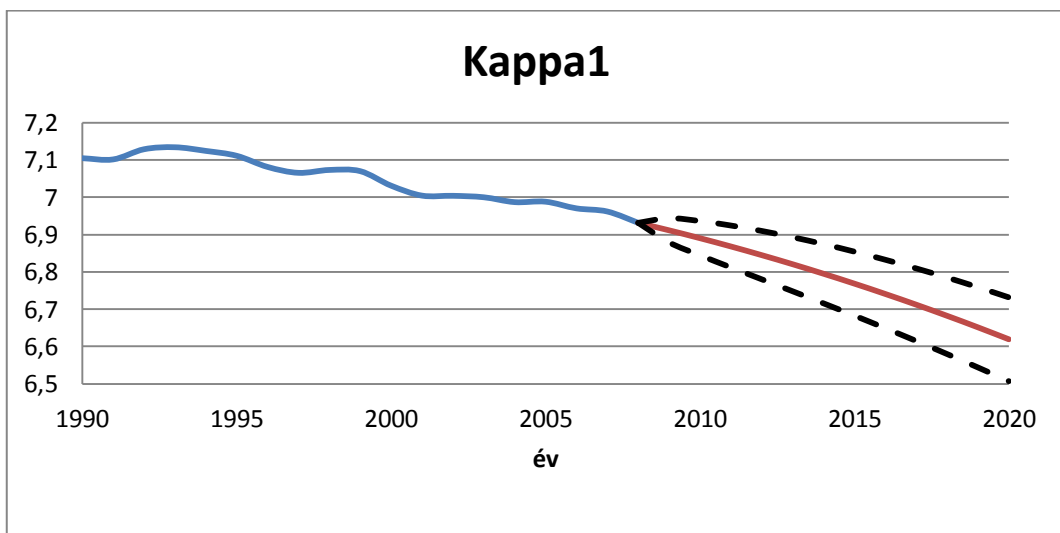


15/b. ábra: A halálozás alakulása a férfiak esetében

A továbbiakban a (30) modell által kapott eredményeimet ismertetem. Az 1. és 2. lépés alapján készült becsléseket és előrejelzéseiket közös ábrán mutatom be. Az 16/a. és 16/b. ábrák mutatják a halálozási ráták időbeli trendjét. Ezek alapján mindkét esetben elmondható, hogy átlagosan tovább fognak javulni a halálozási ráták.

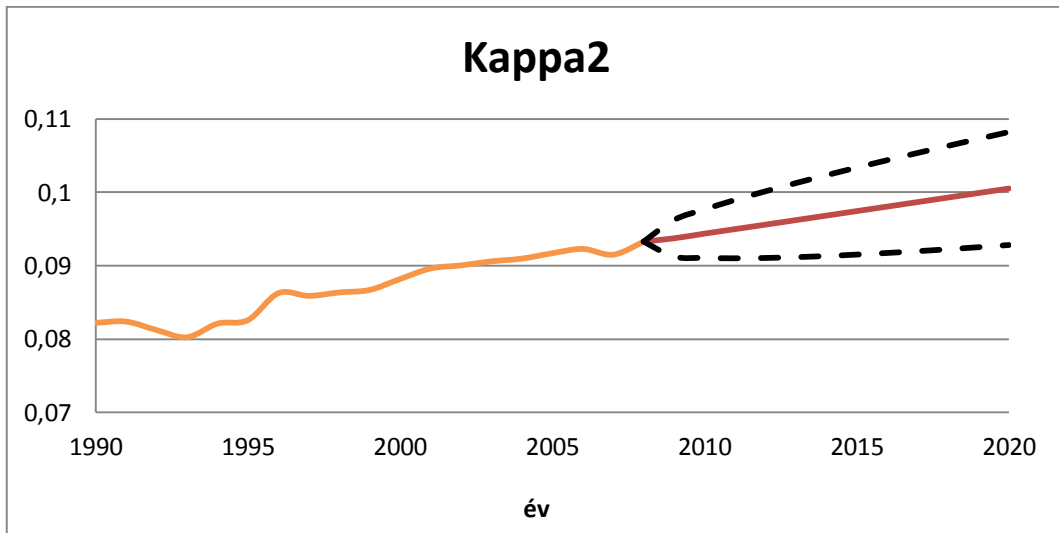


16/a. ábra: A mortalitási ráták időbeli trendje a nők esetében

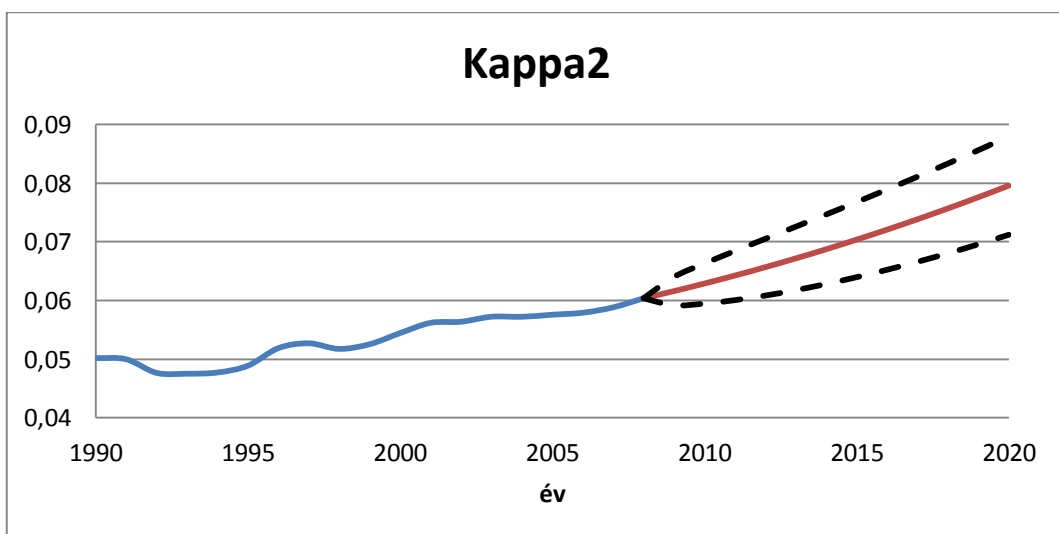


16/b. ábra: A mortalitási ráták időbeli trendje a férfiak esetében

A 17/a. és a 17/b. ábra mutatja, hogy hogyan hat a mortalitási rátákra együttesen az átlagos élettartamtól való előjeles távolság. $\kappa_t^{(2)}$ pozitív függvény, mely 2020-ra várhatóan magasabb lesz a 2008-as értéknél, tehát az átlagnál fiatalabbak esetében ez javítja a halálozást, az idősebbek esetében pedig rontja. Az is látható, hogy a görbe meredekebb a férfiak esetében, tehát ott sokkal erősebb ez a hatás.

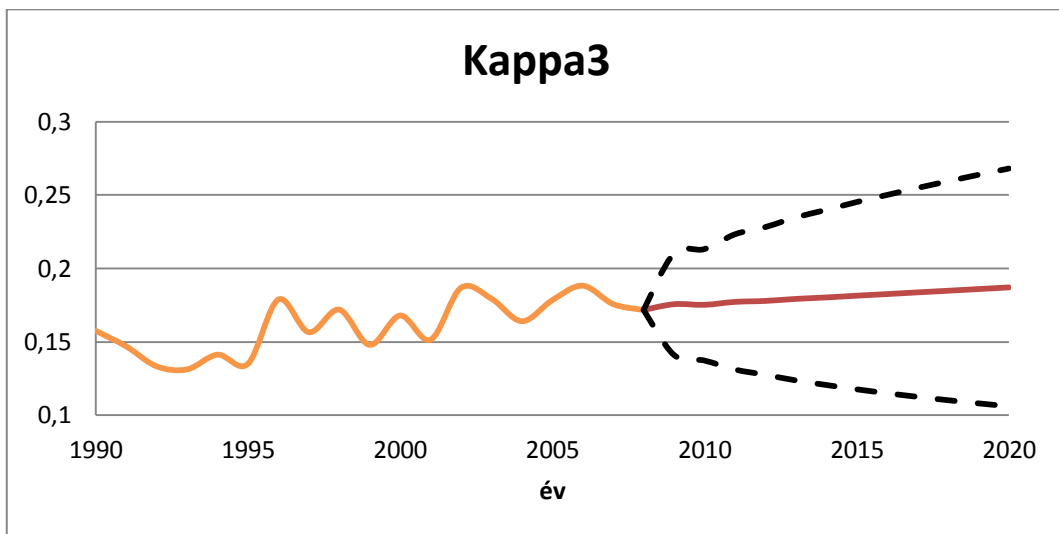


17/a. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(2)}$ becslése 2020-ig 95%-os konfidencia-intervallum mellett (nők)

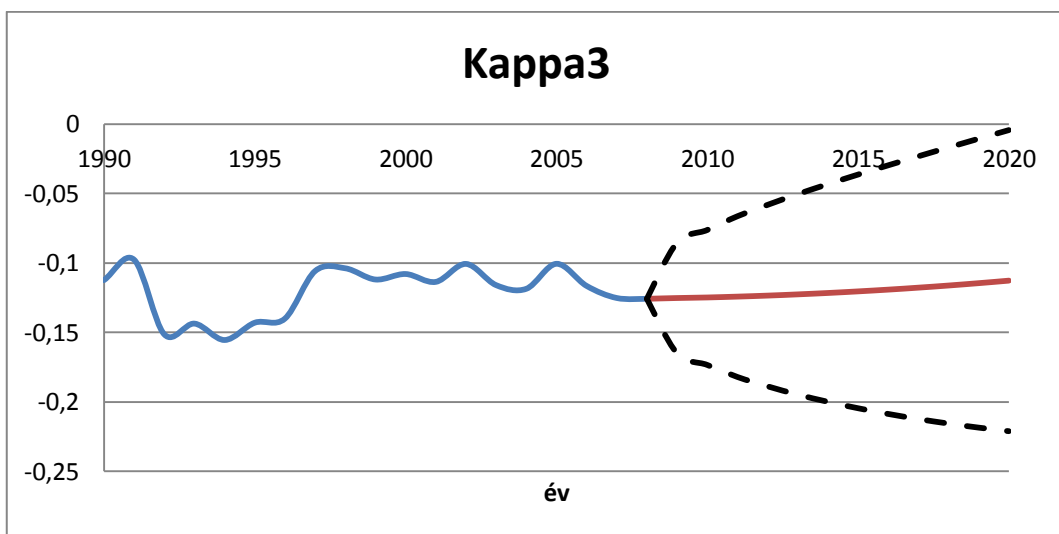


17/b. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(2)}$ becslése 2020-ig 95%-os konfidencia-intervallum mellett (férfiak)

A 18/a. és a 18/b. ábra mutatja a $\tilde{\kappa}_t^{(3)}$ -ra kapott eredményeket. Ez az együttható azt mondja meg, hogy a $\tilde{\kappa}_t^{(1)}$ és a $\tilde{\kappa}_t^{(2)}$ együttes hatását milyen irányban és mekkora mértékben kell módosítani, hogy a fiatalkori alacsony halálozást is jól becsülje a modell. Érdekes, hogy ez a változtatás a nők és a férfiak esetében ellentétes előjelű, tehát amíg a nők esetében az előző két változó inkább alulbecsli a fiatalkori halálozások számát, addig a férfiak esetében éppen túlbecslik.

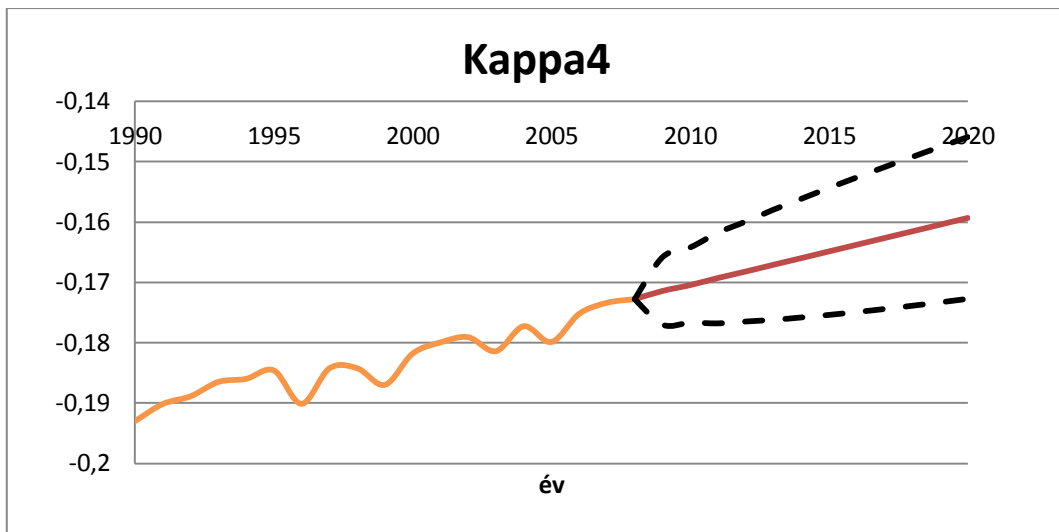


18/a. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(3)}$ becslései konfidencia-intervallummal a nők esetében

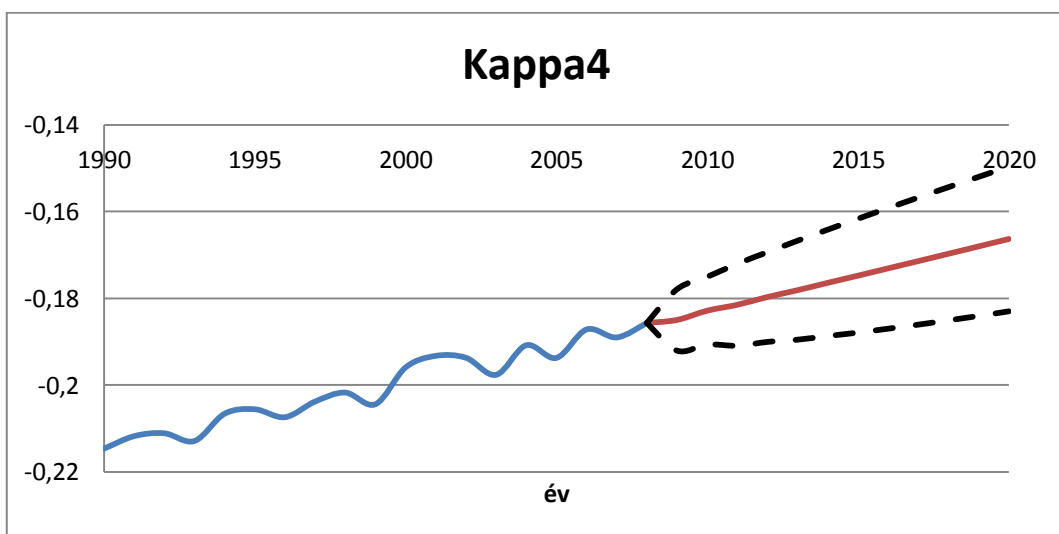


18/b. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(3)}$ becslései konfidencia-intervallummal a férfiak esetében

A 19/a. és a 19/b. ábra mutatja a $\tilde{\kappa}_t^{(4)}$ -ra kapott értékeket. $\tilde{\kappa}_t^{(3)}$ -hoz hasonlóan ez az együttható is azt írja le, hogy a $\tilde{\kappa}_t^{(1)}$ és a $\tilde{\kappa}_t^{(2)}$ együttes hatását milyen irányban és mekkora mértékben kell módosítani, (csak $\tilde{\kappa}_t^{(3)}$ -mal ellentétben azért,) hogy az időskori magasabb halálozást jól becsülje. Mindkét nem esetén negatív értéket vesz fel, tehát a modell túlbecsli e nélkül az időskori halálozást.

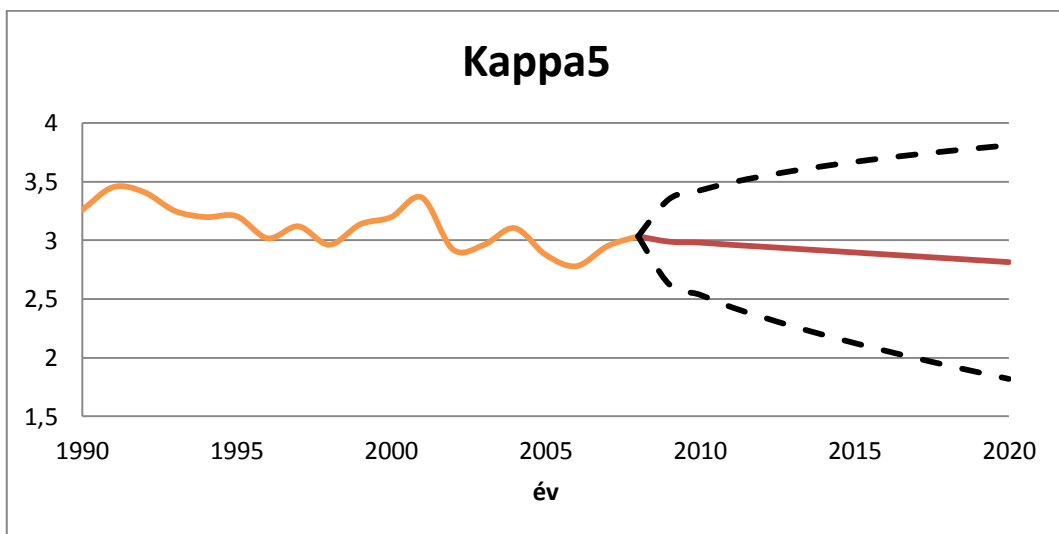


19/a. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(4)}$ becslései konfidencia-intervallummal a nők esetében

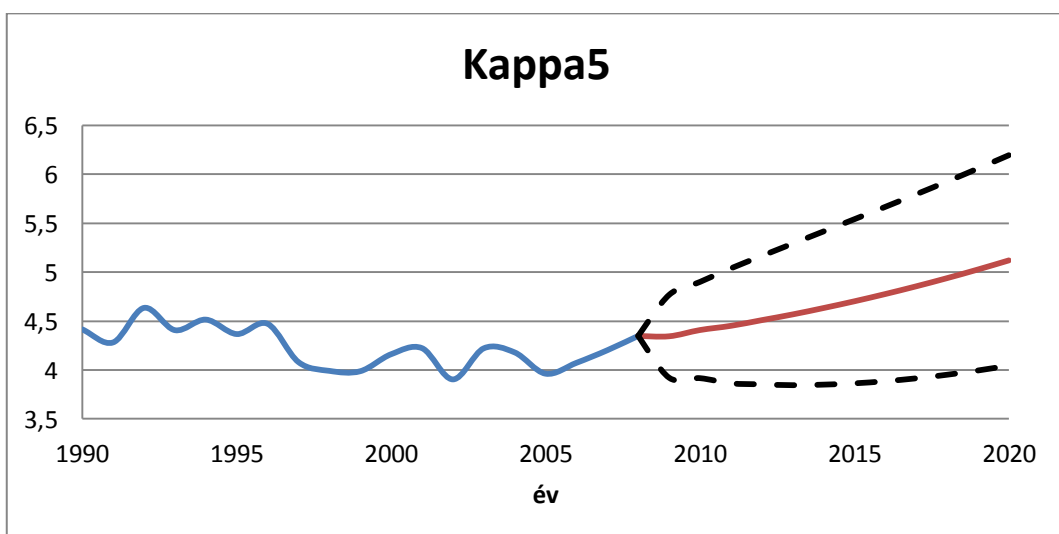


19/b. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(4)}$ becslései konfidencia-intervallummal a férfiak esetében

Az 20/a. és 20/b. ábrákon látható $\tilde{\kappa}_t^{(5)}$ -k a csecsemőhalandóság kimagasló értékét hivatottak csillapítani, hogy a modell se a fiatalkori halálozást ne becsülje túlságosan felül, valamint az átlagtól való eltérés együtthatóját se tolja el pozitív irányba. Látható, hogy nők esetében csökkenő trend várható továbbra is, férfiak esetében pedig növekedő. Meg kell jegyezni, hogy ez nem egyezik meg a csecsemőhalálozások számának jövőbeli viselkedésével. Ez csak azért van így, mert $\tilde{\kappa}_t^{(2)}$ a nők és a férfiak esetében ellentétes előjelű. Ezek additív hatások, és a $\tilde{\kappa}$ becslések összegezve negatívak a 0. életkorban, tehát a csecsemőhalálozások száma várhatóan tovább csökken.

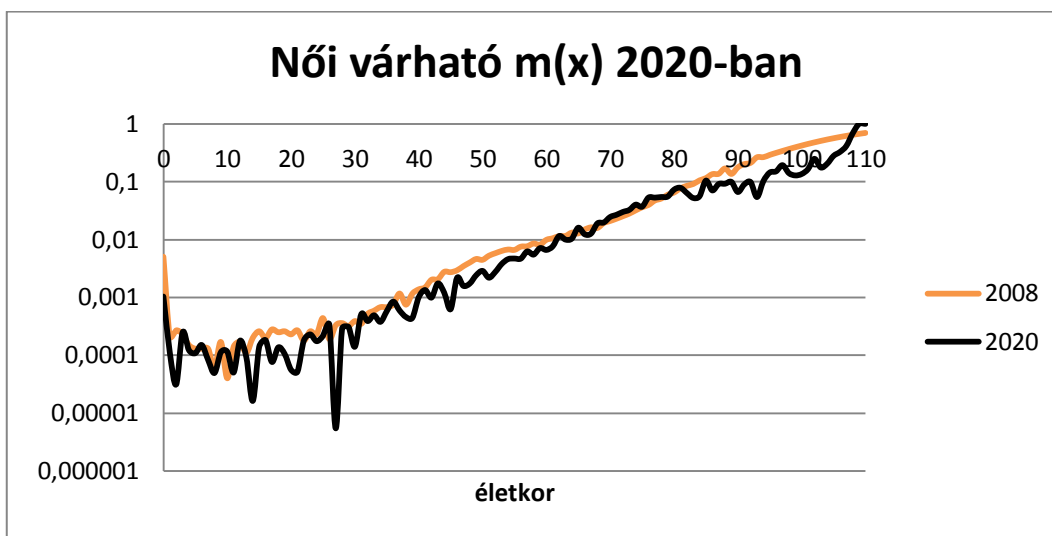


20/a. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(5)}$ becslései konfidencia-intervallummal a nők esetében

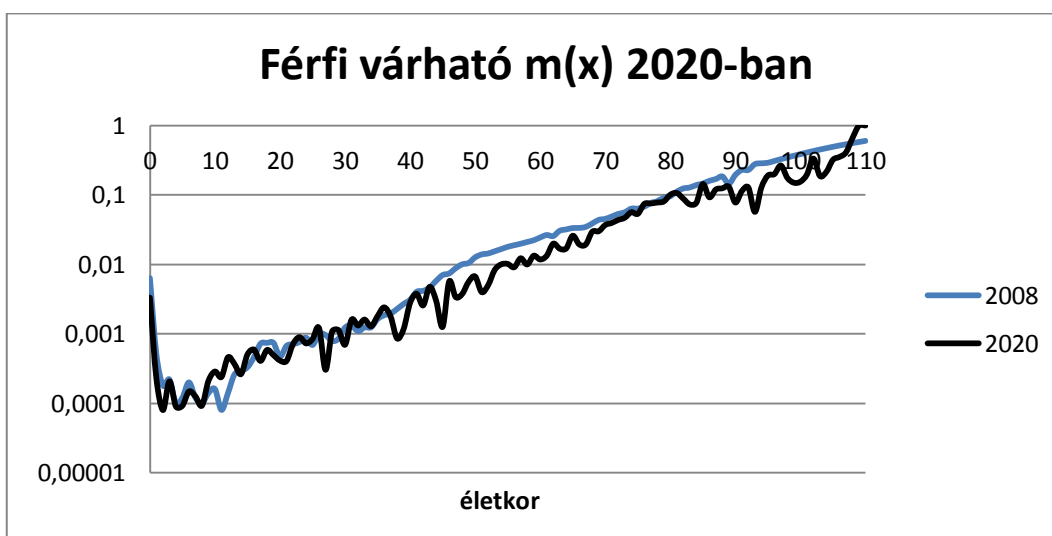


20/b. ábra: $\tilde{\kappa}_t^{(5)}$ becslései konfidencia-intervallummal a férfiak esetében

A paraméterbecslés után az előrejelzés 3., 4., 5. és 6. lépéseit elvégezve a 21/a. és 21/b. ábrán a már $\tilde{q}_x(2020)$ -ból $\tilde{m}_x(2020)$ -á alakított halálozási ráták láthatók. A modell alapján 2020-ra a legtöbb esetben tovább javulnak a mortalitási ráták, de kiemelkedő javulás a 80 év fölöttiekénél látható.



21/a. ábra: 2020-ra becsült mortalitási ráták a nők esetében



21/b. ábra: 2020-ra becsült mortalitási ráták a férfiak esetében

6. Összehasonlítás

Ebben a fejezetben a korábban bemutatott három modellt hasonlítom össze meghatározott szempontok alapján.

6.1 A modellek felépítése¹⁰:

M1: Lee-Carter modell

$$\ln(m_x(t)) = \alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t + \varepsilon_x(t)$$

M2: Bomsdorf modell

$$m_x(t) = m_x(t-1) \cdot e^{u_t + \mu_x + \sigma_x \cdot \varepsilon_{x,t}}$$

M3: Poisson-regressziós modell

$$\ln(D_x(t)) = \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(2)} \cdot \kappa_t^{(3)} + \beta_x^{(3)} \cdot \kappa_t^{(4)} + \beta_x^{(4)} \cdot \kappa_t^{(5)}$$

Jól látszik, hogy az M1 és M2 modellek $m_x(t)$ -t direkt módon becslik, ezzel szemben M3 az adott naptári évben becsli a koréves halálozások számát (100.000-es kezdőértékű kihalási rend mellett), és abból becsli tovább a halálozási rátát.

A következő fontos kérdést az input adatok és az előfeltevések együttesen alkotják. Olyan modelleket választottam, ahol közel azonosak a bemenő adatok. Így elegendő volt egy $t \times x$ méretű $m(x)$ -eket tartalmazó mátrix (ahol $t=19$ (naptári év: 1990-2008), és $x=111$ (életkor: 0-110)), melyből bizonyos transzformációk segítségével az összes szükséges adatot elő tudtam állítani a modellek használatához. M1 és M2 esetében $\ln(m_x(t))$ mátrixot, M1 és M3 esetében még $D_x(t)$ mátrixot, valamint M3 esetében előzetes vizsgálat alapján x_{fiatal} és $x_{idős}$ értékeket kellett meghatároznom, a többi felhasznált érték kiszámítása már a becslés részét képezte. Adatokra vonatkozó előfeltevés csak M3

¹⁰ A felírt képletek, csak az alapmodelleket tartalmazzák, a részletes modellek a 3.,4.,5. fejezetben találhatóak meg.

esetében van, miszerint feltételezzük, hogy adott évben a korévenkénti halálozások száma Poisson eloszlású.

6.2 Az illesztett modellek jósága

Nem feladatom felülbírálni a nemzetközileg elismert módszereket, így ebben a fejezetben csak az általam illesztett modellek jóságát vizsgáltam.

Először a becsült modellek illeszkedését vizsgálom három modellilleszkedési mutató alapján¹¹:

$$\text{Átlagos négyzetes eltérés: } RMSE = \sqrt{\frac{1}{h+1} \cdot \sum_{t=s}^{s+h} (\hat{y}_t - y_t)^2}$$

$$\text{Akaike-féle információs kritérium: } AIC = n \cdot \log\left(\frac{RSS}{n-p}\right) + 2 \cdot p$$

$$\text{Schwartz-féle bayesi kritérium: } BIC = n \cdot \log\left(\frac{RSS}{n-p}\right) + \log(n) \cdot p$$

p jelöli a becsült paraméterek számát, n a megfigyelések számát, RSS pedig a hibák négyzetösszegét. Az RMSE nem veszi figyelembe a becsült paraméterek számát, az AIC figyelembe veszi, de nem „bünteti” elegendő mértékben, a BIC már gyorsabban növekszik a növekvő becsült paraméterszám mellett, ha $n > 100$.

Első lépésben nézzük meg ezeket a mutatókat a teljes modellre (1.táblázat):

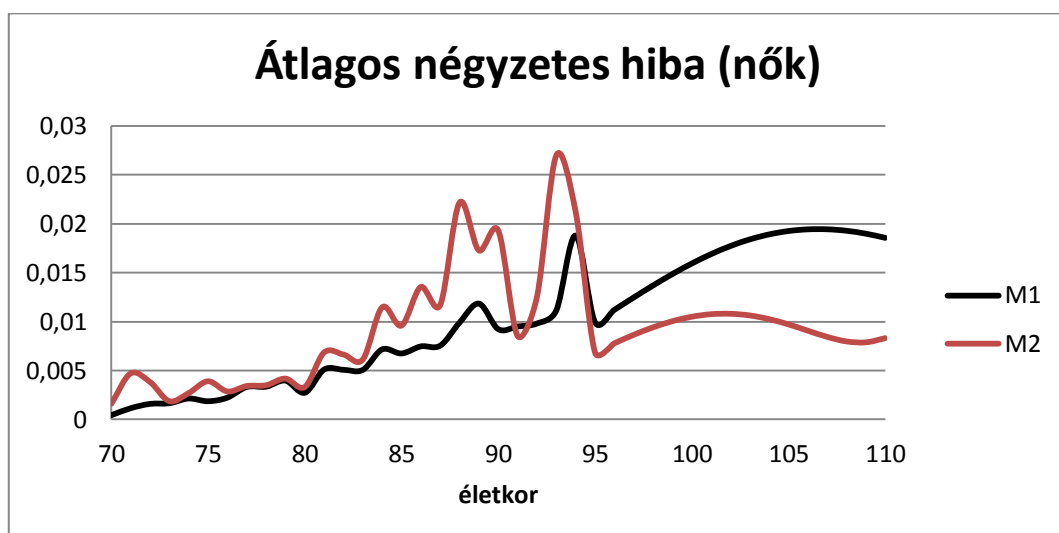
	férfiak			nők		
	M1	M2	M3	M1	M2	M3
RMSE	0,012241	0,013491	0,105379	0,007493	0,006553	0,114622
AIC	-7521,93	-7346,36	-3939,34	-8473,44	-8669,03	-3785,31
BIC	-7202,83	-7028,58	-3813,55	-8154,34	-8351,25	-3659,52

1. táblázat: Illeszkedési mutatók

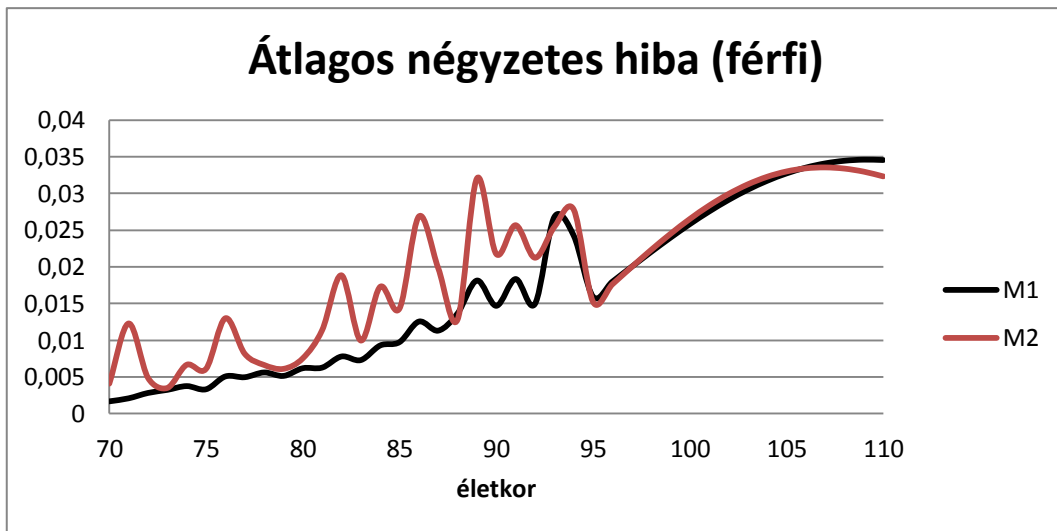
Az eredmények alapján a férfiak esetében a Lee-Carter modell adja a legjobb illeszkedést, a nők esetében a Bomsdorf modell. A Poisson modell nagyon rossz eredményt ad, ennek

¹¹ Nagy Gyula Tamás szakdolgozata – Infláció előrejelzése statisztikai modellekkel (2010 Debrecen)

okai a rosszul megválasztott regresszorok lehetnek, hiszen a 80 fölötti korosztályok halálozási rátáit túlzottan alulbecsli. Másik ok lehet, hogy rossz volt a kezdeti feltétel, azaz a halálozások számát a Poisson eloszlás nem jól közelíti, lehetséges, hogy Tweedie eloszlást feltételezve a becsült paraméterek számát is csökkenthettem volna, hiszen az magában foglalja a csecsemőhalálozások miatt kialakuló kezdeti magas halandóságot. Tehát általánosan, adott t évre tudjuk, hogy milyen a modellek illeszkedése, de szerettem volna azt is megtudni, hogy adott korévekre milyen, ezért az átlagos négyzetes eltérés mutatóval ezt is megvizsgáltam. Erre azért van szükség, hogy lássuk, hogy bizonyos életkorokban/életkorcsoportokban melyik modell illeszkedik a legjobban. Minden korévre megnéztem, hogy melyik modell a legjobb. A Poisson-regressziós modell (M3) egyik korévben sem becsült a legjobban. 0-70 életév között elmondható, hogy a Lee-Carter modell (M1) és a Bomsdorf modell (M2) is nagyon pontos és a különbség elenyésző, azonban az esetek többségében M1 jobban illeszkedik. (Nők esetében mind a 71 korév mellett, a férfiak esetében 66 korév mellett „jobb” a Lee-Carter módszer.) Az 1/a. és 1/b. ábra azt mutatja, hogy 70 év felett hogyan viselkedik M1, illetve M2 négyzetes hibája.



22/a. ábra: 70 éves kortól a modellek négyzetes hibái (nők esetében)

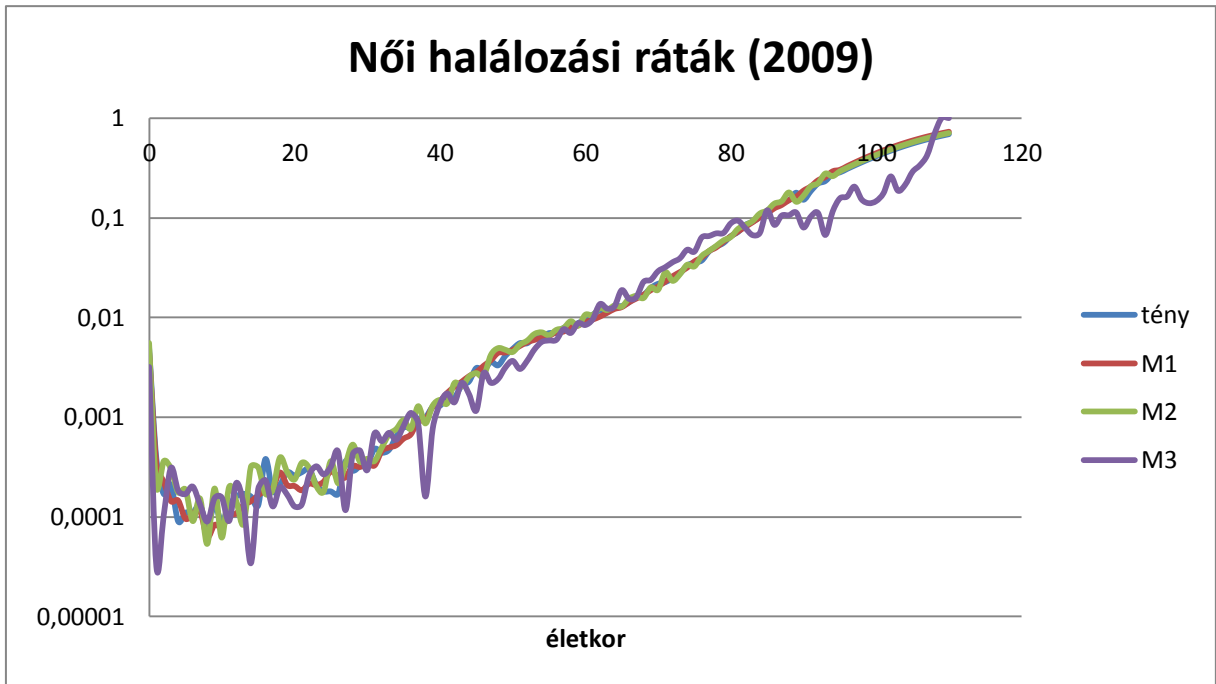


22/b. ábra: 70 éves kortól a modellek négyzetes hibái (férfiak esetében)

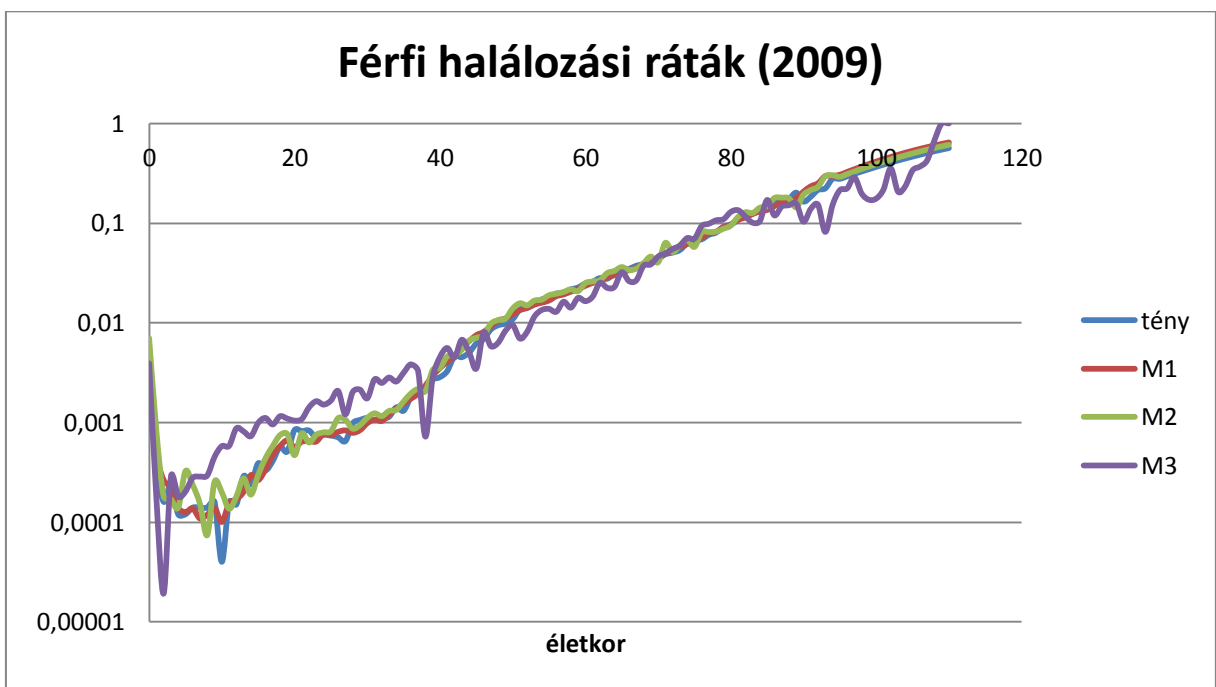
Jól érzékeltetik az ábrák, hogy az M2 azért illeszkedik jobban a nők esetében, mert a 95. életkortól az átlagos négyzetes hiba sokkal alacsonyabb mértékű, mint az M1 esetében. Ez az eltérés a férfiak esetében csak kis mértékben jelentkezik, és ott egyértelműen jobb a Lee-Carter modell illeszkedése 70 év felett is. Tehát M1 és M2 fő hibája, hogy az időskori halálozást rosszul becslik, melynek oka a rövid vizsgált időtartam lehet. Ezek mellett, összevetve az 1/a. és 1/b. ábrákat, láthatjuk, hogy a férfiak esetében a hibák nagyobb mértékűek, mint a nők esetében.

6.3 Az előrejelzés jósága

További adatok hiányában az előrejelzést egyetlen évre (2009) illetve egyetlen mutatóval (átlagos négyzetes eltérés) teszteltem. A 23/a és a 23/b. ábra a 2009-es tényleges halálozási rátákat, valamint a három becslését tartalmazza.



23/a. ábra: 2009-es tényleges-, illetve becsült halálozási ráták (nők)



23/b. ábra: 2009-es tényleges-, illetve becsült halálozási ráták (férfiak)

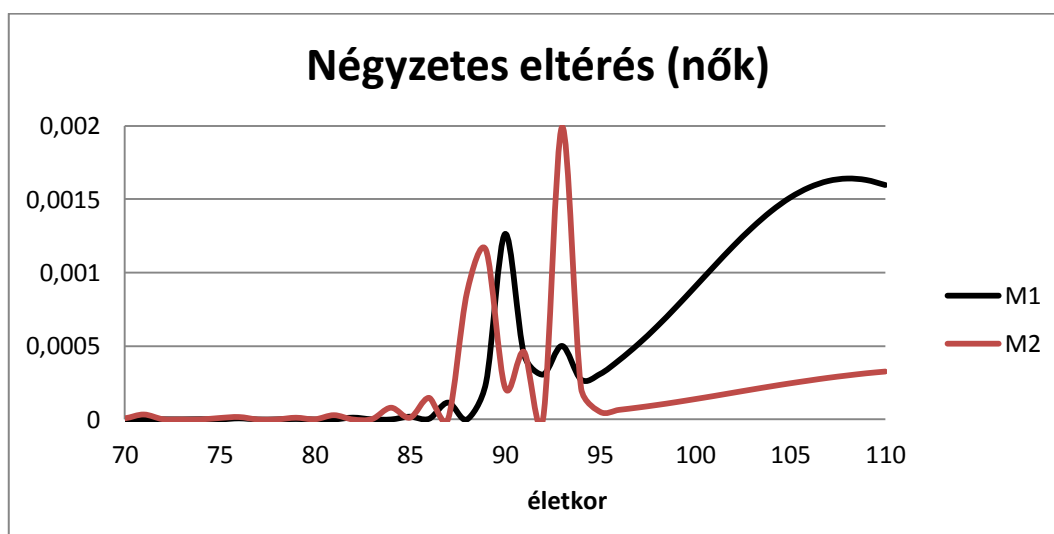
M3 a nők esetében sokkal pontosabb becslést ad, mint a férfiak esetében, azonban a 80 év feletti halálozást még nők esetében is rendkívül alulbecsli. Emellett a férfiak esetében még a fiatalkori halálozást is nagy mértékben túlbecsli. Azaz M1 és M2 egyértelműen jobban jelezte előre a halálozási rátákat, mint az M3. Ezt az állítást bizonyítják az átlagos négyzetes eltérések is, melyeket a 2. táblázat tartalmazza.

	férfiak			nők		
	M1	M2	M3	M1	M2	M3
RMSE	0,02477	0,015883	0,080956	0,013848	0,008673	0,095511

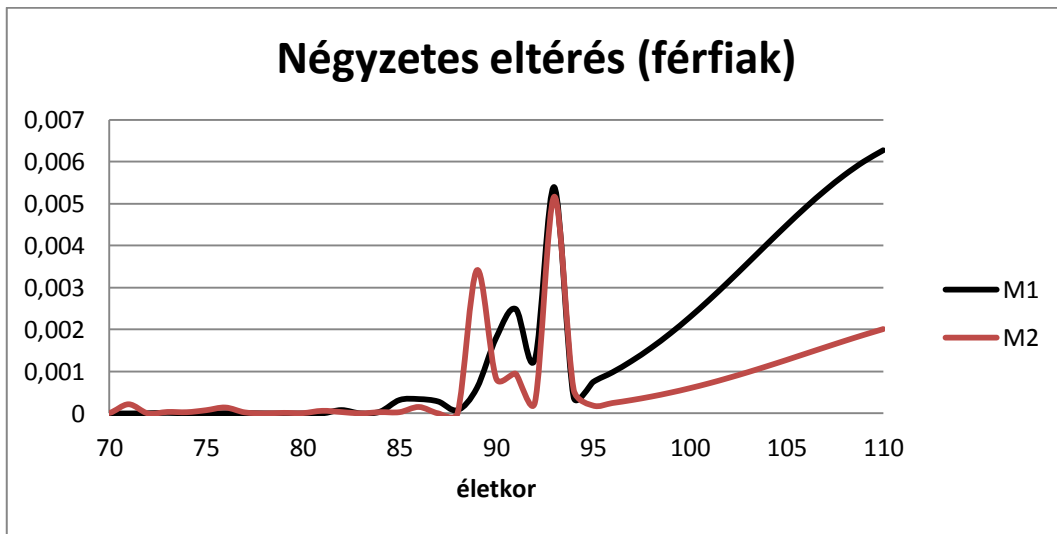
2. táblázat: Előrejelzés jósága

Mint látható az előrejelzés mindkét nem esetében a Bomsdorf-modell alapján pontosabb. Ennél általánosabb következtetés nem vonható le egy előre jelzett év, illetve egy mutató alapján.

Érdeemes még adott életkorok megvizsgálni a négyzetes eltérés alakulását a 70. életkortól az M1 illetve az M2 esetében, hiszen előtte elhanyagolható a két modell között a különbség. Ezeket mutatja a 3/a. és 3/b. ábra.



24/a. ábra: 2009-es előrejelzések négyzetes hibája (nők)



24/b.ábra: 2009-es előrejelzések négyzetes hibája (férfiak)

A korábbi évekhez hasonlóan itt is a 95 év feletti emberek halálozását becsli túl a Lee-Carter módszer, és ez lehet az oka, hogy összességében a Bomsdorf modellel jobb becslést kaptam.

6.4 Megbízhatóság¹²

A halálozási ráták előrejelzésének bizonytalansága 3 forrásból származtatható¹³:

- **Strukturális bizonytalanság**, melyeket a modellben használt sztochasztikus becslések adnak. Ezek olyan okokból származó bizonytalanságok, amelyek előre nem látható fejleményekből adódnak. (jogszabályi változtatások, gyógyászati áttörések, új betegségek megjelenése). Jogszabályi változtatásra aktuális példa a 2004-es Gender direktíva, a „nők és a férfiak közötti egyenlő bánásmód elvének

¹² Søren Fiig Jarner and Chresten Densgård - Uncertainty and coherence of mortality projections

¹³ A definíciókat és a példák egy részét a PSZÁF Szolvenca II nevű diáiról vettem, melyet az alábbi oldalról töltöttem le:

http://www.google.hu/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=7&ved=0CFAQFjAG&url=http%3A%2F%2Fwww.pszaf.hu%2Fdata%2Fcms807611%2Fszkonz053dioszeghy.ppt&ei=spqhT5DXFovCtAbZ8IGJBw&usq=AFQjCNFKHZx3odJgfEmehVquLzXZQ_Vr9g&sig2=m2nSAjt-VoDpVeVYOr-a

az árukhoz, szolgáltatásokhoz való hozzáférés, valamint azok értékesítése, illetve nyújtása tekintetében történő végrehajtásáról". A jelenlegi szabályozás szerint a nemek közötti különbség nem képezhet egy faktort a díjak kalkulálásában, illetve a szolgáltatás mértékében. Azonban a foglalkoztatás nem tartozik a direktíva hatáskörébe, így ez nem vonatkozik a foglalkoztatói nyugdíjrendszerekre jelenleg.¹⁴ Emiatt az, hogy a direktívát kiterjeszthetik a jövőben a foglalkoztatói nyugdíjakra is, az most még egy strukturális bizonytalanság.

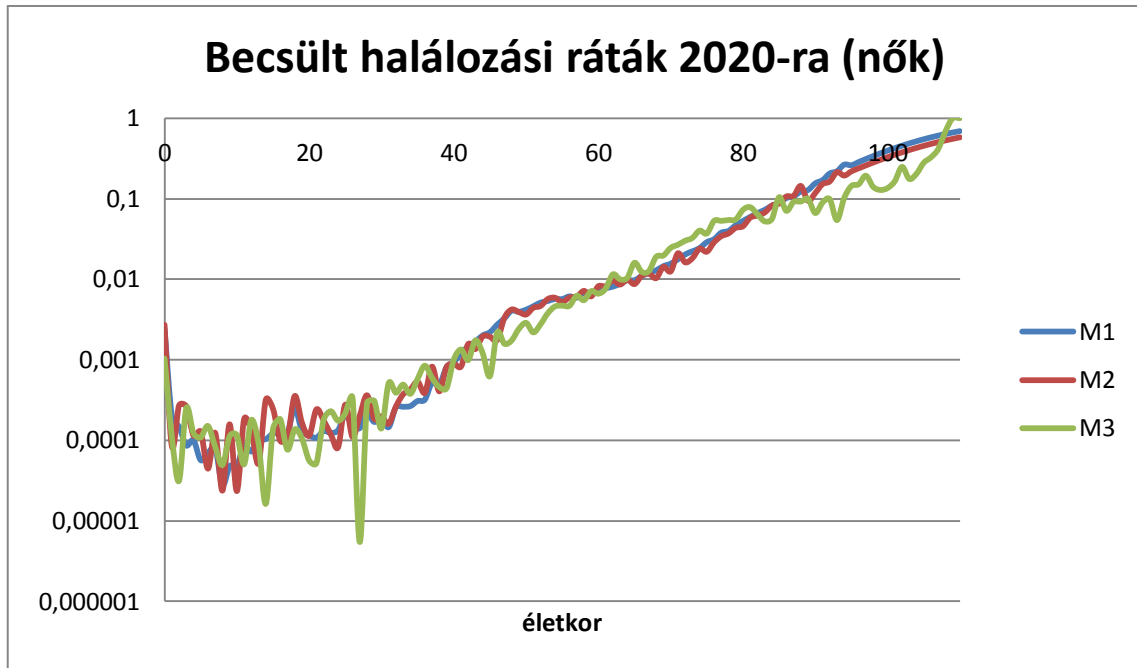
- **Paraméterbecslésből származó bizonytalanság**, amely kockázatok a paraméterek becslése során merülnek fel. Ilyenek a rossz minőségű adatokból eredendő hibák, a trendek megváltozása, a rövid idősorok. Elemzésem során többször előfordult a becsült paraméterek túl nagy varianciája, ami rontotta az eljárást. Emellett az általam használt idősor hossza is mindössze 19 naptári év. Ezt a bizonytalanságot mutatja a becsült paraméterek konfidencia-intervalluma.
- **Modellválasztásból származó bizonytalanság**. Ezzel a kérdéssel foglalkozik ez a fejezet. Az eredményekből is látható, hogy bár a Poisson-regressziós modell szakmailag elfogadható, jelen esetben a másik két modell egyértelműen jobb előrejelzést nyújt a halálozási rátákra.

Az előrejelzés megbízhatóságára konfidencia-intervallum készítése lenne a megfelelő eszköz. Sajnos az általam választott (adott évben minden koréven átfutó) halálozási előrejelzés megbízhatóságára nem találtam megfelelő, egységes algoritmust, mert a legtöbb szakirodalom nem foglalkozik a konfidencia-intervallumokkal, vagy ha mégis, azt csak adott korév melletti halálozási ráta előrejelzéseknél teszi ezt. Bootstrap-módszerrel próbáltam $N(0, \sigma_x)$ eloszlású hibát generálni, azonban az alsó konfidencia-intervallum értékei között minden esetben szerepeltek negatív értékek is a nagymértékű szórás miatt. Konstans értéket nem akartam feltételezni standard hibának, ezért inkább eltekintettem a megbízhatóság vizsgálatától.

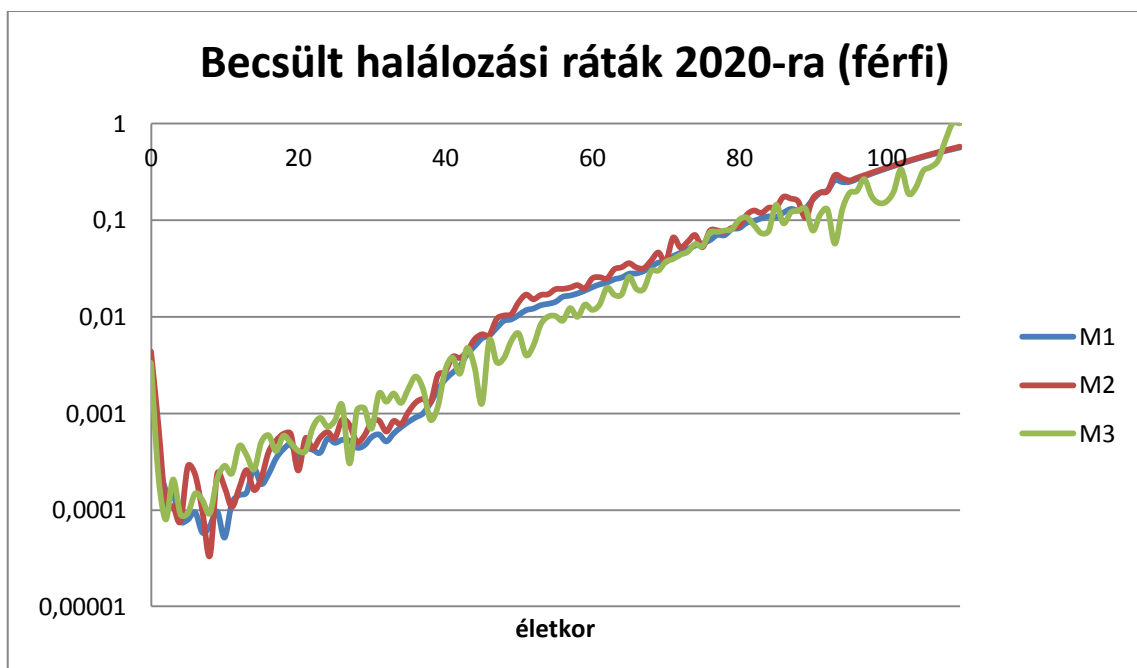
¹⁴ <http://www.moneymarketing.co.uk/pensions/eu-gender-directive-does-not-apply-to-occupational-pensions/1044508.article>

6.5 A 2020-as előrejelzés

Az összehasonlító elemzésem végére már csak a kapott eredményeket kell bemutatnom. A 25/a és a 25/b. ábra a 3 előrejelzési modell becslését mutatja közös ábrán.



25/a.ábra: 2020-ra előre jelzett női halálozási ráták



25/b.ábra: 2020-ra előre jelzett férfi halálozási ráták

Egyenként már láthattuk az egyes modellekről szóló fejezetekben, hogy mindegyik modell további javulást jelez előre 2020-ban, ezen az ábrán az is látható, hogy a 3 modell egymáshoz képest hogyan viszonyul. M2-nek fiatal korban van nagyobb szórása, utána közel azonos M1-gyel, azonban nagyrészt túlbecsüli. M3 kezdetben túlbecsüli M1-et, majd körülbelül a 40 éves kortól alulbecsüli azt. A modell és a 2009-es előrejelzés jóságának vizsgálata és M1 és M2 2020-ig tartó szoros kapcsolata arra enged következtetni, hogy a jövőben is ez a két modell fogja megfelelően becsülni a mortalitási rátákat.

Tehát elemzésem során arra a következtetésre jutottam, hogy valószínűleg tovább javul 2020-ig a magyar népesség halálozása, és emiatt további növekedés várható a lakosság átlagos élettartamában.

7. Javaslatoak és kitekintés

Ebben a fejezetben arról írok, hogy az általam használt modellek milyen változtatásokkal adnának jobb eredményeket, illetve milyen más szakmailag elismert modellek léteznek még a halálozási ráták becslésére.

A 3. fejezetben a Lee-Carter modellel (1992) jeleztem előre a halálozási rátákat, melynek a modellje jó becslést adott a 2009-es halálozási rátákra, csak 85 éves kortól vált bizonytalaná az előrejelzés. Azonban ezt a modellt többen is továbbfejlesztették az idők során. Érdemes megemlíteni három jelentős tovább-fejlesztést (a modellek mellett csak az új paramétereket ismertetem):

1. Renshaw és Haberman kohorsz hatással bővített Lee-Carter modellje (2006) [8]:

$$\ln(m_x(t)) = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t + \beta_x^{(2)} \cdot \gamma_{t-x} + \varepsilon_x(t),$$

ahol γ_{t-x} egy, a születési idő függvényében megadott, véletlen kohorsz hatás. A szakirodalmak szerint ez a módszer lényegesen jobb eredményeket ad a historikus értékekre, ha a modell talál egy kohorsz hatást a múltban.

2. Hyndman-Ullah modell (2007) [9]:

$$\ln(m_x(t)) = \alpha_x + \sum_{j=1}^J \beta_x^{(j)} \cdot \kappa_{t,j} + e_x(t) + \sigma_x(t) \cdot \varepsilon_x(t),$$

ahol $\kappa_{t,j}$ a t-edik főkomponenshez - $\beta_x^{(j)}$ - tartozó koefficiens, $e_x(t)$ és $\sigma_x(t) \cdot \varepsilon_x(t)$ pedig hibák. Azért van két különböző hibatag, mert ez a modell P-spline-okkal közelíti a halálozási rátákat első lépésben, majd azt becsli egy több komponenses Lee-Carter modellel második lépésben. Így az első közelítés során keletkező hibatag $\sigma_x(t) \cdot \varepsilon_x(t)$, a második becslés során keletkező pedig az $e_x(t)$.

3. Bongaarts modell¹⁵ (2005) [10]:

Ennek a modellnek az a lényege, hogy egy logisztikus modell segítségével újraértékeli a halálozási rátákat, és a transzformált rátákra alkalmazza a Lee-Carter modellt, ezzel kezelve a „hosszúélet kockázatot”. A folyamatosan növekvő átlagos élettartam miatt lehetséges, hogy a magyar adatokra jobban illeszkedett volna ez a modell. Azonban jelenleg csak néhány országban alkalmazzák, köztük van Japán és Svédország is.

Az 5. fejezetben bemutatott és alkalmazott Poisson-regressziós modell sajnos rosszabb előrejelzést hozott a vártnál. Itt arra teszek javaslatokat, hogy hogyan lehetne javítani a becslés jóságát. Érdeemes lenne olyan logisztikus regressziót alkalmazni, ahol Tweedie eloszlást feltételezünk a halálozások számára, ezzel is csökkentve a becsült paraméterek számát.

Másik probléma, hogy a becsült halálozás számot a kihalási renddel osztva határoztam meg a megfelelő halálozási valószínűségeket, ezáltal az eltérés kumulálódott a korévek során. Ezt a problémát megoldhatná egy olyan előrejelzés, ahol a halálozások száma mellé becsülnénk az adott koréves népességet minden évben, és közvetlenül ebből számoljuk a halálozási rátát. Ugyancsak ronthatott a becslés pontosságán, hogy a halálozások számának túl nagy a szórása, hiszen már 1990-től 2008-ig is jelentősen csökkentek a halálesetek.

Továbbá fontos kérdés a megfelelő paraméterek kiválasztása. Esetemben az előző fejezetben megírt összehasonlítás során derült csak ki, hogy a többi modellhez képest a Poisson-regresszió alulbecsülte a 80 éves kor feletti halálozást, melynek oka a modellben használt külön regresszor lehet erre a korosztályra.

A Poisson-regressziós modellt abból a megfontolásból, használtam, hogy az ehhez hasonló elven működő modellek - Cairns-Blake-Dowd (2006), Richard Plat (2009), Matthias Börger (2011) – jó illeszkedést mutattak a nemzetközi szakirodalmak alapján. Ezeket a modelleket bemutattam az 5. fejezet elején, de ezek is jelentős (halálozási ráták előrejelzésére szolgáló) modellek, amikkel érdemes lenne még foglalkoznom. A paraméterek értelmezésétől eltekintve a modellek a következők:

¹⁵ A szakirodalom Shifting logistic model néven hivatkozik rá.

1. Cairns-Blake-Dowd modell:

$$\text{logit}(q_x(t)) = \log\left(\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)}\right) = \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(2)}$$

Látható, hogy az általam választott Poisson regressziós modelltől annyiban tér el, hogy ez közvetlenül a halálozási arányt becsli, és kevesebb paraméterrel dolgozik. A felhasznált irodalmak szerint azonban ez a fiatalok halálozást nem tudja pontosan becsülni.

2. Plat modell:

$$\log(m_x(t)) = \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(2')} + \beta_x^{(2)} \cdot \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x}$$

Ezzel a modellel a fő problémám, hogy esetemben a rövid megfigyelési idő miatt nem lett volna értelme kohorsz hatást vizsgálnom. De érdemes lenne megvizsgálni egy hosszabb idősoron.

3. Matthias Börger és szerzőtársai által készített modell:

$$\log\left(\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)}\right) = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(2)} \cdot \kappa_t^{(3)} + \beta_x^{(3)} \cdot \kappa_t^{(4)} + \gamma_{t-x}$$

Ezzel a modellel az volt a fő problémám, hogy bár elméletileg pontosabb, mint az előző két modell, de a becsült paraméterszám nagymértékben nőtt, ami fontos szempont egy előrejelzés esetében.

Számos ismert előrejelzési modell létezik még és szinte mindnek van kibővített változata is (pl.: Gompertz (1825), Makeham (1860), Thatcher (1999), Lee-Miller (2001)), amelyekről itt nem írtam, de még szeretnék foglalkozni a későbbiekben.

Utolsó javaslatom az lenne, hogy egy újabb vizsgálat keretei között érdemes lenne komolyabban összehasonlítani a Lee-Carter és a Bomsdorf modellel kapható eredményeket. Szakdolgozatom egyértelműen láthatóvá tette a két modellel kapott eredmények közötti hasonlóságot, de nem volt célja az ennél mélyebb összehasonlítás. Ahhoz, hogy általánosabb következtetéseket lehessen levonni, hosszabb idősorokon is alkalmazni kellene a modelleket, tesztelni a modellek és az előrejelzéseik jóságát, illetve hasonlósági mutatók segítségével [1] tesztelni az így kapott halandósági táblák közötti eltérést.

8. Összegzés

Az elmúlt 20 évben végbemenő társadalmi változások egyik mérhető jele a folyamatosan növekvő születéskor várható átlagos élettartam. Ezen hatás egyik meghatározó tényezője a halálozási ráták folyamatos javulása, melynek háttérében az orvostudomány- és az életkörülmények javulása áll.

Szakedolgozatomban azt a célt tűztem ki, hogy megvizsgálom, vajon 2020-ig folytatódik-e ez a tendencia. Az eredményeim megbízhatóságának növelése érdekében három különböző modellel jeleztem előre a mortalitási arányokat.

A 3. fejezetben a Magyarországon jelenleg is használt Lee-Carter modellt mutattam be és ismertettem az ebből származó eredményeket. A 4. fejezetben a Németországban alkalmazott Bomsdorf modell, a 5. fejezetben egy Poisson-regressziós modell segítségével végeztem el ugyanazokat a becsléseket.

A különböző eljárásokkal kapott eredmények összevetése (6. fejezet) megmutatta, hogy bár a Lee-Carter és a Bomsdorf modell eltérő módszereken alapult, mégis nagyon hasonló eredményeket adtak. A legnagyobb eltérést a Poisson regressziós modell mutatta, a fejezet során számba vettem ennek lehetséges okait, valamint javaslatokat tettem a módszer fejlesztési lehetőségeire. Tehát a modellek és az előrejelzéseik tesztelése után arra a következtetésre jutottam, hogy ha a korévenkénti becsléseket szeretnénk használni, akkor az első két modell eredményei jobban megfelelnek az elvárásainknak. Továbbá vizsgálataim alapján elmondható, hogy a két módszer közül a Bomsdorf modell előrejelzése a pontosabb (az átlagos négyzetes eltérés mutató alapján). Azonban elemzésem alapján nem állítható teljes bizonyossággal, hogy a Bomsdorf modell jobb lenne, mint a Lee-Carter, hiszen a modellépítéshez használt adatok illeszkedése alapján a nők esetében az előbbi, a férfiak esetében az utóbbi adott jobb eredményt. Ezen felül az előrejelzés jóságát adatok hiányában csak egy adott naptári évre tudtam tesztelni, ami alapján nem vonható le általános konzekvencia. Ennek ellenére mindhárom modell ugyanarra a következtetésre jutott, azaz hogy a halálozási ráták javuló tendenciája a jövőre nézve is folytatódik.

Végül, a 7. fejezetben, néhány olyan pontot emeltem ki, amelyek változtatásával javítani lehet a bemutatott modelleken, illetve újabb modelleket ismertettem, amelyek vizsgálata tovább bővítheti az alkalmazható módszerek körét.

Összességében elmondható, hogy eredményeim megerősítették a dolgozat kiinduló feltevését, vagyis az előrejelzések szerint a halálozási ráták várhatóan tovább javulnak 2020-ig.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Arató Miklós, Bozsó Dávid, Elek Péter, Zempléni András: **Forecasting and simulating mortality tables** – Mathematical and Computer modelling 49 (2009) 805-813
- [2] Augusztinovics Mária : **Népesség, foglalkoztatottság, nyugdíj** - <http://epa.oszk.hu/00000/00017/00115/pdf/03augusztinovics.pdf>
- [3] B. Babel, E. Bomsdorf and R. Schmidt (2006): **Forecasting German mortality using panel data procedures** – http://uni-koeln.de/wisofak/wisostatsem/Englisch/Forschung_en/Ehemalige_en/Babel_en/BabelBomsdorfSchmidt30062006.pdf
- [4] Banyár József (2003) – **Életbiztosítás** (Aula)
- [5] S. Baran , J. Gáll , M. Ispány , G. Pap (2007): **Forecasting Hungarian mortality rates using the Lee-Carter method** (Akadémia Kiadó, Budapest)
- [6] John Bongaarts (2004): **Long-Range Trends in Adult Mortality: Models and Projection Methods** - <http://www.popcouncil.org/pdfs/wp/192.pdf>
- [7] Heather Booth, Rob J. Hyndman, Leonie Tickle, Piet de Jong (2006): **Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions** <http://www.demographic-research.org/Volumes/Vol15/9/15-9.pdf>
- [8] Matthias Börger, Daniel Fleischer und Nikita Kuksin (2011): **Modeling Mortality Trend under Solvency Regimes** - http://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi/forschung/PreprintServer/2011/Boerger_Fleischer_Kuksin_Mortality_Trend_Solvency.pdf
- [9] Natacha Brouhns - Michel Denuit - Jeroen K. Vermun: **Measuring The Longevity Risk In Mortality Projections (2002)** - <http://arno.uvt.nl/show.cgi?fid=13342>

- [10] Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D., Epstein, D., and Khalaf-Allah, M. (2011): **Mortality density forecasts: an analysis of six stochastic mortality models.** *Insurance: Mathematics and Economics*, 48: 355-367.
<http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewc/papers/ajqc57.pdf>
- [11] Martina Gustafsson (2011): **Cohort Effects in Swedish Mortality and Their Effects on Technical Provisions for Longevity Risk -**
<http://www2.math.su.se/matstat/reports/serieb/2011/rep2/report.pdf>
- [12] Steven Haberman, Maria Russolillo (2005): **Lee Carter Mortality Forecasting: Application to the Italian Populatio -**
https://www.cass.city.ac.uk/_data/assets/pdf_file/0005/37157/167ARP.pdf
- [13] Futoshi Ishii: **Mortality Projection Model for Japan with Age-Shifting Structure -**
<http://paa2008.princeton.edu/download.aspx?submissionId=80293>
- [14] Søren Fiig Jarner and Chresten Densgøe: **Uncertainty and coherence of mortality projections -** http://www.ica2010.com/docs/181_final_paper_Dengsoe_Jarner.pdf
- [15] Kravalik Zsuzsanna: **Az Időspolitika Gyakorlata az Európai Unióban Közösségi és Tagállami Szinten -**
http://www.google.hu/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCIQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.szmm.gov.hu%2Fdownload.php%3Fctag%3Ddownload%26docID%3D500&ei=_OiT8OMEMrWsqbHvbDwDQ&usq=AFQjCNG3dEpP-5QcbD6VlfxdDhly9HQWFQ&sig2=ElRh2W68Q5Rlydq_po6ew
- [16] dr. Dorina Lazar - **On forecasting mortality using Lee-Carter method (2004) -**
<http://www.stat.ucl.ac.be/Samos2004/proceedings2004/lazar2.pdf>
- [17] Lovasné Avató Judit: **A valószínűségszámítás egyik gyakorlati alkalmazása-**
http://elib.kkf.hu/okt_publ/szf_10_05.pdf
- [18] Májer István - Dr. Kovács Erzsébet (2011): **Élettartam-kockázat – a nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher** (Statisztikai Szemle 7-8)

- [19] Moksony Ferenc (2006) : **A Poisson-regresszió alkalmazása a szociológiai és demográfiai kutatásban** - http://www.demografia.hu/letoltes/kiadvanyok/Demografia/2006_4/Moksony%20Ferenc_kozl.pdf
- [20] Nagy Gyula Tamás (2010) – **Infláció előrejelzése statisztikai modellekkel** - http://qanymedes.lib.unideb.hu:8080/dea/bitstream/2437/101180/1/Szakedolgozat_titkosított.pdf
- [21] Orvosnet (2004): **Intervenciós program a változó korú nők magas halálozásának leküzdésére** - <http://orvosnet.hu/index.php?c=search&action=viewres&id=262>
- [22] Plat, R. (2009): **On Stochastic Mortality Modeling**, *Insurance: Mathematics and Economics* 45(3), pp. 393-404 - <http://dare.uva.nl/document/206965>
- [23] Arthur Renshaw - Steven Haberman : **Lee-Carter mortality forecasting: a parallel generalised linear modelling approach for England and Wales** - (*Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)* Vol. 52, No. 1 (2003), pp. 119-137)
- [24] Han Lin Shang, Heather Booth, Rob J. Hyndman (2011): **Point and interval forecasts of mortality rates and life expectancy: A comparison of ten principal component methods** - <http://www.demographic-research.org/Volumes/Vol25/5/25-5.pdf>
- [25] Jenny Zheng Wang (2007) : **Fitting and Forecasting Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter Model** - <http://www2.math.su.se/matstat/reports/serieb/2007/rep1/report.pdf>