Kockázatmérési kérdések a Szolvencia 2 szabályozás szerint a nem-életbiztosítási ágban

Szakdolgozat

Tolnai Katalin Viktória

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc,

Aktuárius szakirány

Témavezető: Lilli Róbert, vezetőaktuárius

Közlekedési Biztosító Egyesület

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Dolgozatom témája a biztosítási szférában aktuális tárgykör, a Szolvencia II. elnevezésű szabályozás, amelynek bevezetését jelenleg 2014-re[1] tervezik.

Az 1990-es évek végén hatályos, a biztosítóintézetek tőkekövetelményére vonatkozó szabályozást még az 1970-es években hozták létre. A 2000-es években kezdődött a Szolvencia I. program – amely lényegében a korábbi szabályozás szigorítása volt –, majd ezt követte az új szemléletű Szolvencia II. projekt.

A Szolvencia II. szabályozás kidolgozása 2000-es évek elején kezdődött azért, hogy a korábbi, illetve a Szolvencia I. szabályozásnál kockázatérzékenyebb rendszert dolgozzanak ki, így 2001 májusában az Európai Bizottság hozzáfogott a biztosítói szabályozás felülvizsgálatához, ezzel együtt megindította a Szolvencia II. projektet.

A felülvizsgálatra és kutatói munkacsoport felállítására az Európai Unió Biztosítási Felügyeleti Konferenciáját (EU Insurance Supervisors Conference) kérték fel. Ennek során a London Munkacsoport (London Working Group) Paul Sharma[2] vezetősége alatt folytatott kutatásának tanulmánya [23] 2002-ben készült el. A tanulmány célja a biztosítók szolvencia problémáihoz vezető kockázatainak feltérképezése, és a szükséges felügyeleti „válaszok" megfogalmazása a kockázatokra. A tanulmány alapjául szolgált a Müller riportként ismert, 1997-ben készült értekezés.

[1] Eredetileg 2012-re volt tervezve a hatályba lépés, amit azóta többször halasztottak. Legutóbb az Európa Tanács 2011 januárjában az Omnibus II. irányelvben alánlatot tett a bevezetés 2014-re való elhalasztására.

[2] Paul Sharma a Nagy-britanniai Pénzügyi Felügyelet Prudenciális Kockázatok Osztályának elnöke volt.

Struktúráját tekintve a Szolvencia II. irányelvet – ahogyan a bankszabályozásban a Bázel II-t is – 3 pillérre osztották. Számos egyéb párhuzam is vonható a két szabályrendszer között, a Szolvencia II. kidolgozása során szem előtt tartották a korábban indított és 2004-ben már véglegesített szövegezésű Bázel II. projektet. A Szolvencia II. 1. pillérében fogalmazódnak meg a kvantitatív követelmények: az eszközökre, a forrásokra és a tőkére vonatkozó mennyiségi elvárások. Meghatározza a tartalékok, a minimális szavatolótőke (MCR - Minimal Capital Requirement) és a szükséges szavatolótőke (SCR - Solvency Capital Requirement) mértékének számítási elvét. A 2. pillér a kvalitatív követelményeket tartalmazza, a biztosító irányításának átláthatóságát szolgálja: a biztosító irányítási rendszeréről, kockázatkezeléséről és a felügyelet felülvizsgálati folyamatáról szól. A „Piaci fegyelemként" is ismert 3. pillér szól a biztosító transzpareciájáról: az elkészítendő jelentésekről, és ezek közzétételéről a felügyelet valamint a társadalom számára.

Dolgozatom megírásához lehetőségem nyílt a Közlekedési Biztosító Egyesület (KÖBE) munkájába betekintést nyerni, ezért a Szolvencia II. nem-életbiztosítási ágra vonatkozó szabályozásáról lesz szó részletesen, ezen belül is a kvantitatív pillérbeli szavatolótőke-szükségletre fókuszálva. Az új szabályozás lehetővé teszi a biztosítók számára, hogy saját kockázatmérési és tőkeszükséglet-számítási modellt használjanak (Belső Modell), de megad egy Standard Formulának nevezett számítási elvet is – mivel a KÖBE is ezt használja, a dolgozatban elsősorban az utóbbiról lesz szó.

Sokszor említettük már a „szavatolótőkét", de mi is ez, miért van rá szükség, erről szól a következő fejezet.

2. fejezet

A szavatolótőke

2.1. A kockázat fogalma

Számos definíciót találhatunk a „kockázatra”, sokszor egyoldalú, negatív fogalomként definiálják, miszerint a kockázat a negatív hatással fenyegető események bekövetkeztének esélye. Máskor a kockázat szimmetrikus definíciójával élünk, a kockázat vállalása nem egyoldalúan a veszteség lehetőségét foglalja magában, hanem a nyereséget is, azonban a gyakorlatban a várható veszteségek meghatározására helyeződik a hangsúly.

A gazdasági értelemben vett kockázat: egy pénzügyi hatású valószínűségi változó, ami lehet pl. az egy év alatt bekövetkező károk darabszáma vagy kárkifizetése egy portfólióban, a biztosító adott évi (valamely) eredménye/vesztesége stb.

Matematikailag a kockázat egy valószínűségi változó. Legyen az X kockázat a továbbiakban egy valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn, azaz $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető függvény: $\forall x \in \mathbb{R}\ \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Az Ω biztos eseményt vagy eseményteret az ω elemi események alkotják, $\mathcal{F}$ egy σ-algebra az Ω fölött és P egy $\mathcal{F}$-en értelmezett normált mérték, vagyis:

- $\mathrm{P}(A) \geq 0,\ \ \forall A \in \mathcal{F};\ \ \mathrm{P}(\emptyset) = 0;$
- σ-additív: $\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$, ahol $A_i \in \mathcal{F}$, és $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$;
- $\mathrm{P}(\Omega) = 1.$

Az X eloszlása a $Q_X(A) = \mathrm{P}(\omega : \ X(\omega) \in A)$, ahol A Borel halmaz $\mathbb{R}$-en. Az X eloszlásfüggvénye: $F_X(x) = \mathrm{P}(X < x)$. Ha X abszolút folytonos eloszlású, akkor $\mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X \leq x)$.

2.2. A kockázat kezelése, a szavatolótőke

A biztosításban a biztonságot szolgálják a tartalékok prudens meghatározása, a szavatolótőke ill. különféle kockázatcsökkentő technikák (pl. viszontbiztosításba adás); összefoglaló néven ez a *kockázatkezelés*. A szavatolótőke egy olyan puffer, ami váratlan események bekövetkezésekor is biztosítja az intézet fizetőképességét, és nemcsak a biztosítási, hanem egyéb kockázatokra is, mint a befektetési kockázat, reputációs kockázat stb. Vagyis a szavatolótőke a nem vagy nem teljesen kezelt kockázatok ellen nyújt védelmet.

A szavatolótőke egy eleme, például, a fennálló kötelezettségek fedezetére képzett biztosítástechnikai tartalékon és a kockázati ráhagyáson felüli puffer, amely már igen ritka események bekövetkezése esetén is elégséges. Eszköz oldali példaként hozható fel a részvényekre tartott szavatolótőke. A mérlegben a részvények piaci értékükkel szerepelnek, a megfelelő szavatolótőke-elem viszont akkora összegű, amely a részvények árának 40%-os esése esetén is még mindig fedezetet nyújt.

A szavatolótőke azt teszi lehetővé, hogy a biztosító kedvezőtlen körülmények esetén is nagy valószínűséggel teljesíteni tudja jövőbeli kötelezettségeit, más szóval a csőd valószínűsége kicsi legyen. A Szolvencia II-ben ezt a valószínűséget úgy határozták meg, hogy a biztosító igen ritka, 200 évente egyszer előforduló (mértékű), negatív pénzügyi hatású események bekövetkezésekor se menjen csődbe, ezeket az eseteket a szavatolótőkéje képes legyen elnyelni, és a vállalat csak ennél ritkább esetekben szenvedjen csődöt. Ehhez szükséges nemcsak a biztosítási (pl. árazási, tartalékolási vagy katasztrófa-) kockázatokat, de a vállalt nem-biztosítási kockázatokat (pl. kamatlábkockázat) megfelelően értékelni, *mérni*, erről bővebben a következő fejezetben olvashatunk.

A szavatolótőke-szükséglet számítása a biztonsági szint meghatározásán túl is komoly modellezési problémákat vet föl. A biztosítónak lényegében az elmúlt évi folyamatokból, eredményekből kiindulva kell meghatároznia az adott évre a kockázati profilját és a szükséges szavatolótőkét. Olykor azonban az elmúlt év nem feltétlenül tükrözi megfelelően a biztosító kockázatát, mert lehetnek a vállalat életében eltérő kockázati karakterű időszakok – időnként nagyobb a kockázati étvágya, máskor alacsonyabb, az aktuális üzleti politikának megfelelően. Egy periódusban lehet tudatosan kockázatosabb, míg máskor a korábbi év tapasztalatai alapján „óvatosabb" lesz, vagy a megelőző időszakban nem megfelelően működő menedzsment leváltásra kerülhet stb. Ezek miatt a számítások eredményét kellő óvatossággal kell kezelni.

A számvitelben több fogalom is kapcsolódik a szavatolótőkéhez. A *rendelkezésre álló szavatolótőke* vagy *számviteli tőke* a sajáttőke – veszteség elnyelésére alkalmas – része. Ennek fedezetéül csak olyan eszközök állhatnak, amik nem állnak várható kötelezettségek fedezetéül. A rendelkezésre álló szavatolótőke az *alapvető szavatolótőkéből* és a *kiegészítő szavatolótőkéből* áll. Az alapvető szavatolótőke az eszközök és a kötelezettségek értékének különbözete és az alárendelt kölcsöntőke. A kiegészítő szavatolótőke olyan további tőkeelemek összege, amelyek veszteség elnyelésére alkalmasak.

A *szavatolótőke-követelmény* a mérlegben meglévő tartalékokon túl nyújtandó pótlólagos biztonsági puffer elvárt nagysága, amely a szabályozásban meghatározott módszerrel kalkulálandó. A szabályozás előírja, hogy a rendelkezésre álló szavatolótőke nagysága legyen legalább akkora, mint a vállalat szavatolótőke-követelménye. A jelenlegi, és a bevezetésre kerülő szabályozás is megkülönböztet *szükséges* és *minimális szavatolótőke-követelményt.* Ha az intézet nem rendelkezik a megfelelő mértékű szükséges szavatolótőkével, az még nem jelenti a biztosító csődjét, a vállalatnak ki kell dolgoznia a felügyelet felé a tőkekövetelmény kielégítésére vonatkozó tervét, amelyet szigorúan ellenőrzött keretek között hajtatnak végre. Azonban, ha a biztosító rendelkezésre álló szavatolótőkéje nem éri el a minimálisan elvárt szintet sem, az a végső felügyeleti intézkedéseket vonja maga után, és az intézet bezáratását eredményezheti.

Hogy a biztosító elkerülje ezeket a nem kívánt intézkedéseket, a rendelkezésre álló szavatolótőkéjét úgy kell megképeznie, hogy az „normál körülmények" között mindvégig az elvárt szint fölött legyen. Az sem szerencsés, ha túlságosan nagy tőkét tart, mert a „fölöslegesen" tartott tőke nagy tőkeköltséggel[1] jár, ami a biztosító költségeit növeli, így a versenyképességét veszélyezteti. Azonban lehetnek a biztosítónak más preferenciái is, amik megkövetelik a nagyobb tőkét. Ilyen például a vállalat minősítése, amit a hitel- vagy pénzügyi minősítő

[1] A tőkeköltség a tőkét befektetők elvárt hozama.

cégek (mint a Standard and Poor's, Moody's, Fitch stb.) határoznak meg. Ezek a minősítések függhetnek a rendelkezésre álló tőke nagyságától, ezért a vállalat dönthet úgy, hogy a kívánt minősítés elnyerése érdekében a szabályozó által előírt tőkénél többet tart.

3. fejezet

A kockázat mérése

Legyenek az X és az Y a továbbiakban két valószínűségi változó, kockázat: pl. a kár lehetséges nagysága az adott portfólión.

A *kockázati mérték* egy olyan függvény, amely az adott kockázathoz (vagy kockázatok összességéhez) egy valós számot, a kockázat nagyságát[1] rendeli. Legyen Γ $\mathcal{F}$-mérhető valószínűségi változóknak egy nem-üres halmaza, jelölje ρ a kockázati mértéket. Ekkor $\rho : \Gamma \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funkcionál.

3.1. Koherens kockázati mértékek axiómái

Artzner és munkatársai [1] elsőként gyűjtötték össze és axiomatizálták azokat az elvárásokat, amiket egy „jó" kockázati mértéknek teljesítenie kell. A továbbiakban ismertetem azt a négy kritériumot, amit egy általuk *koherensnek* elnevezett kockázati mértéknek ki kell elégítenie.

Természetes elvárás az, hogy ha egy X valószínűségi változót (veszteséget) dominál egy Y valószínűségi változó (azaz $\omega \in \Omega$ realizációra $X(\omega) \leq Y(\omega)$ 1 valószínűséggel), akkor az X kockázata kisebb, vagyis

$$\rho(X) \leq \rho(Y).$$

[1] A „kockázat nagysága" helyett fogjuk használni a „(valaminek a) kockázata" – mint függvény – terminust, amennyiben az az adott kontextusban nem okoz fogalomkeveredést a „kockázat" mint valószínűségi változó fogalmával.

Ezt nevezzük a kockázati mérték *monotonitásának*.

Egy másik elvárás a *pozitív homogenitás*, azaz, hogy egy valószínűségi változó pozitív konstansszorosa a kockázatnak is ugyanezen konstansszorosát eredményezi, vagyis minden X valószínűségi változóra és $h \in \mathbb{R}^+$ számra

$$\rho(hX) = h\,\rho(X).$$

A h-t egész számnak választva (a pozitív homogenitás lényegében így nyer intuitív értelmet) ez azt jelenti, hogyha ugyanabból a kockázatból egyet vagy többet tartunk, akkor a vállalt kockázat nagysága pontosan a „darabszámmal" arányos. Biztosítói példával élve, ha egy biztosító h arányú arányos viszontbiztosítási szerződést köt, akkor h arányban csökkentheti eszközeinek értékét.

Ha egy kockázatnak ki vagyunk téve, akkor pl. készpénzt tartva mellette, csökkenthetjük a portfóliónk kockázatát. Az *transzláció invariancia* (vagy sallangmentesség) azt feltételezi, hogyha a veszteségből mint valószínűségi változóból egy konstanst levonunk (ui. a veszteséget csökkenti a készpénzben tartott összeg), az a portfólió kockázatát pontosan ezzel a konstanssal csökkenti, azaz ha X valószínűségi változó és $a \in \mathbb{R}$, akkor

$$\rho(X - a) = \rho(X) - a.$$

Mivel $a \in \mathbb{R}$, az axióma természetesen kimondható a ellentettjére is (az irodalomban is így fordul elő), az előjelet a szemléletesség kedvéért fordítottam meg, azonban a későbbiekben a használatosabb, „+"-os formát fogom alkalmazni.

Az egyik legfontosabb tulajdonság *szubadditivitás*, vagyis hogy két valószínűségi változó összegének kockázata nem lehet nagyobb a külön-külön vett kockázatok összegénél:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Ezt úgy is el lehet képzelni, hogy az „összeolvadás" nem generál többlet kockázatot.

Vagyis a *koherens kockázati mérték* axiómái:

1. Monotonitás: $\mathrm{P}(X \leq Y) = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$,

2. Pozitív homogenitás: $h \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \rho(hX) = h\,\rho(X)$,

3. Transzláció invariancia: $\rho(X + a) = \rho(X) + a$,

4. Szubadditivitás: $\rho(X+Y) \leq \rho(X)+\rho(Y)$.

Ha h egész szám, a szubadditivitásból következik, hogy $\rho(hX) \leq h\rho(X)$, azaz a pozitív homogenitás hozzájárulása az axiómarendszerhez a $\rho(hX) \geq h\rho(X)$ egyenlőtlenség, ami azzal indokolható, hogy például egy egymilliószor nagyobb portfólió kockázata már lehet, hogy több mint egymilliószor akkora (pl. eszközportfólió esetén likviditási problémák léphetnek föl).

Levezethető, hogyha egy kockázati mérték homogén és szubadditív, akkor *konvex* is. A szubadditivitást kihasználva:

$$\rho\big(hX+(1-h)Y\big) \leq \rho(hX)+\rho\big((1-h)Y\big),$$

ami a homogenitás miatt egyenlő $h\rho(X)+(1-h)\rho(Y)$-nal, tehát

$$\rho\big(hX+(1-h)Y\big) \leq h\rho(X)+(1-h)\rho(Y), \qquad \forall h \in [0,1],$$

ami a ρ függvény konvexitását jelenti.

Gyengén koherensnek nevezünk egy mértéket, ha a homogenitás és szubadditivitás helyett csak konvexitást követelünk meg. Az előzőek alapján látható, hogy minden koherens mérték egyben gyengén koherens.

3.2. Példák kockázati mértékekre

A kockázatot sokféleképp lehet mérni, a mértékek alapvetően aszerint oszthatók két nagy csoportba, hogy a kockázat melyik definícióját használják. Elsőként a szimmetrikus kockázatokról lesz szó.

A legegyszerűbb szimmetrikus kockázat mérési módszerek a várható értéktől (vagy egy előre kitűzött értéktől) való átlagos abszolút eltérés, a *MAD* (Mean Absolute Deviation), vagy átlagos négyzetes eltérés, a *szórás*.

Az egyes befektetések hozamával kapcsolatos kockázat mérésére Markowitz[2] is ez utóbbi módszert javasolta, több eszköz kombinációja (a portfólió) esetében pedig valamennyi befektetéspár kovarianciája útján méri a kockázat szintjét, vagyis:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(X,Y) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y),$$

[2]Markowitz, 1952 és 1956.

ahol az X és az Y véletlenszerű hozamok. A Markowitz által bevezetett fő újítás az, hogy egy portfólió kockázatát valamennyi eszköz közös hozamának együttes (többváltozós) eloszlása útján méri.

A portfólióelméleti terminológia könnyen átfogalmazható biztosításelméletire, ha X-re és Y-ra mint biztosítási kockázatra gondolunk – ekkor a belőlük álló kockázati halmaz kockázata a kovarianciájukkal mérhető.

Azon valószínűségi változók eloszlását, amelyekre a lineáris korreláció a függőség mértékeként használható fel, *elliptikus* eloszlásoknak nevezzük, amelyeket az jellemez, hogy a sűrűségfüggvényük szintvonalai ellipszoidok (az elliptikus eloszlásokról bővebben: lásd a függelékben). Ily módon a Markowitz-modell csak az elliptikus eloszlások esetére használható, ilyenek például a normális vagy t-eloszlások. Később látni fogjuk, hogy a standard formula megközelítése analóg ehhez, csak ott a mérték nem szórás, hanem a következő fejezetben bemutatásra kerülő kockáztatott érték.

Bár a szórást széles körben alkalmazzák, sajnos nem koherens mérték. A pozitív homogenitást és a szubadditivitást (utóbbi bizonyítása a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenségen alapul) teljesíti, azonban nem transzláció invariáns – ugyanis a szóráson nem változtat a determinisztikus tag –, és nem monoton – mert a szórás nem érzékeny a változó nagyságára, csak annak változékonyságára –. Ezek elmondhatók minden „szóródást mérő” mértékről.

A kockázati mértékek másik nagy családját *alsóági kockázati mértékeknek* (downside risk measures) nevezzük, ilyen például a *kockáztatott érték* (Value at Risk - VaR) és a *várható veszteség* (Tail-VaR). Ezekről a következő fejezetben részletesebben lesz szó.

4. fejezet

A VaR, TVaR bemutatása, tulajdonságai

4.1. A kockáztatott érték, a VaR

Az egyik legismertebb kockázati mérőszám a kockázatkezelésben a kockáztatott érték, a VaR. Adott valószínűségi szinten megadja, hogy mekkora összegű veszteséget szenvedhetünk el az adott kockázaton.

1. definíció (VaR, kockáztatott érték). *Legyen az X valószínűségi változó, $\alpha \in (0,1]$ megbízhatósági szint. Az X-hez tartozó α-rendű VaR:*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\},$$

vagyis az X eloszlásának α-rendű kvantilise.

A következőkben a VaR néhány fontos tulajdonságát mutatom be.

1. tétel (Monotonitás). *X és Y valószínűségi változó, és $X \leq Y$. Ekkor*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

Bizonyítás. Mivel $X \leq Y$, ezért $\mathrm{P}(X < x) \geq \mathrm{P}(Y < x)$, így

$$\{x \,|\, \mathrm{P}(X < x) \geq \alpha\} \supseteq \{x \,|\, \mathrm{P}(Y < x) \geq \alpha\},$$

ebből

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_\alpha(X) &= \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mathrm{P}(X < x) \geq \alpha\} \\ &\leq \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mathrm{P}(Y < x) \geq \alpha\} \\ &= \mathrm{VaR}_\alpha(Y). \end{aligned}$$

□

2. tétel (Pozitív homogenitás). *X valószínűségi változó, $h > 0$. Ekkor*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(hX) = h\mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_\alpha(hX) &= \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mathrm{P}(hX < x) \geq \alpha\} \\ &= h \inf\left\{\frac{x}{h} \in \mathbb{R} \,\middle|\, \mathrm{P}\left(X < \frac{x}{h}\right) \geq \alpha\right\} \\ &= h\mathrm{VaR}_\alpha(X). \end{aligned}$$

□

3. tétel (Transzláció invariancia). *X valószínűségi változó, $a \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X + a) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + a.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_\alpha(X + a) &= \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mathrm{P}(X + a < x) \geq \alpha\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mathrm{P}(X < x - a) \geq \alpha\} \\ &= \inf\{x - a \in \mathbb{R} \,|\, \mathrm{P}(X < x - a) \geq \alpha\} + a \\ &= \mathrm{VaR}_\alpha(X) + a. \end{aligned}$$

□

4. tétel (Szubadditivitás normális eloszlás esetén). *Legyen X és Y két normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\alpha \in [0{,}5; 1]$ mellett*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X + Y) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

Bizonyítás. Legyenek X (μ_X,σ_X)-, Y (μ_Y,σ_Y)-paraméterű normális eloszlású változók. Jelölje $\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét. Ekkor igaz a következő képlet:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right).$$

A VaR definíciója miatt a következő egyenlőtlenséget kell megoldani:

$$\Phi\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right) \geq \alpha,$$

amiből a „legkisebb” ilyen x:

$$x = \sigma_X\,\Phi^{-1}(\alpha) + \mu_X = \mathrm{VaR}_\alpha(X), \tag{4.1}$$

hasonlóan adódik, hogy

$$\mathrm{VaR}_\alpha(Y) = \sigma_Y\,\Phi^{-1}(\alpha) + \mu_Y.$$

Mivel X, Y normális eloszlásúak, ezért köztük a függőséget mérhetjük korrelációval. Legyen $\mathrm{Corr}(X,Y) = \rho$. Ekkor $X+Y$ eloszlása

$$X + Y \sim N\left(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\,\sigma_X\sigma_Y}\right)$$

Felhasználva a 4.1 összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\,\sigma_X\sigma_Y}\;\Phi^{-1}(\alpha) + \mu_X + \mu_Y.$$

Mivel $\rho \leq 1$ és $\Phi^{-1}(\alpha) \geq 0$, állításunk bizonyítását kapjuk:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) \leq \sqrt{(\sigma_X + \sigma_Y)^2}\,\Phi^{-1}(\alpha) + \mu_X + \mu_Y = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

□

Megjegyzendő, hogy $\alpha < 0{,}5$ esetén fordított irányú egyenlőtlenség teljesül, mivel a standard normális eloszlásfüggvény inverzze ezen a tartományon negatív. Azonban esetünkben „extrém” (pl. 0,5%-os valószínűségű) veszteséget modellezünk, így a tételben szereplő feltétel nem jelent tényleges megszorítást.

Már korábban bizonyítottuk, hogy a szubadditivitásból és a pozitív homogenitásból következik a konvexitás. A következő tétel a teljesség kedvéért szerepel „ismét”.

5. tétel (Konvexitás normális eloszlás esetén). *Legyen X és Y két normális eloszlású valószínűségi változó, $\alpha \in [0{,}5;1]$. Ekkor minden $\lambda \in [0;1]$ számra*

$$\mathrm{VaR}_\alpha\big(\lambda X + (1-\lambda)Y\big) \leq \lambda \mathrm{VaR}_\alpha(X) + (1-\lambda)\mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

A szubadditivitás nemcsak normális eloszlás esetén teljesül, hanem bővebb eloszláscsaládra is bizonyítható, ezt mondja ki a következő tétel.

6. tétel (Szubadditivitás elliptikus eloszlás esetén). *Legyen X és Y két elliptikus eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\alpha \in [0{,}5;1]$ mellett*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

A bizonyítás megtalálható McNeil és szerzőtársai könyvében [19].

7. tétel (Monoton transzformáció). *Legyen X valószínűségi változó. Ha f monoton növekvő, jobbról folytonos függvény $\mathbb{R}$-en, akkor*

$$\mathrm{VaR}_\alpha\big(f(X)\big) = f\big(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\big), \qquad \forall \alpha \in (0,1].$$

Bizonyítás. Mivel f a megadott tulajdonságokkal bír, ezért

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_\alpha\big(f(X)\big) &= \inf\big\{x \,|\, \mathrm{P}\big(f(X) < x\big) \geq \alpha\big\} \\
&= \inf\big\{f\big(f^{-1}(x)\big) \,|\, \mathrm{P}\big(X < f^{-1}(x)\big) \geq \alpha\big\} \\
&= f\left(\inf\big\{f^{-1}(x) \,|\, \mathrm{P}\big(X < f^{-1}(x)\big) \geq \alpha\big\}\right) \\
&= f\big(\mathrm{VaR}_\alpha(X)\big).
\end{aligned}$$

□

8. tétel. *Legyen X valószínűségi változó. Ekkor a $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ α-ban monoton növekedő és balról folytonos.*

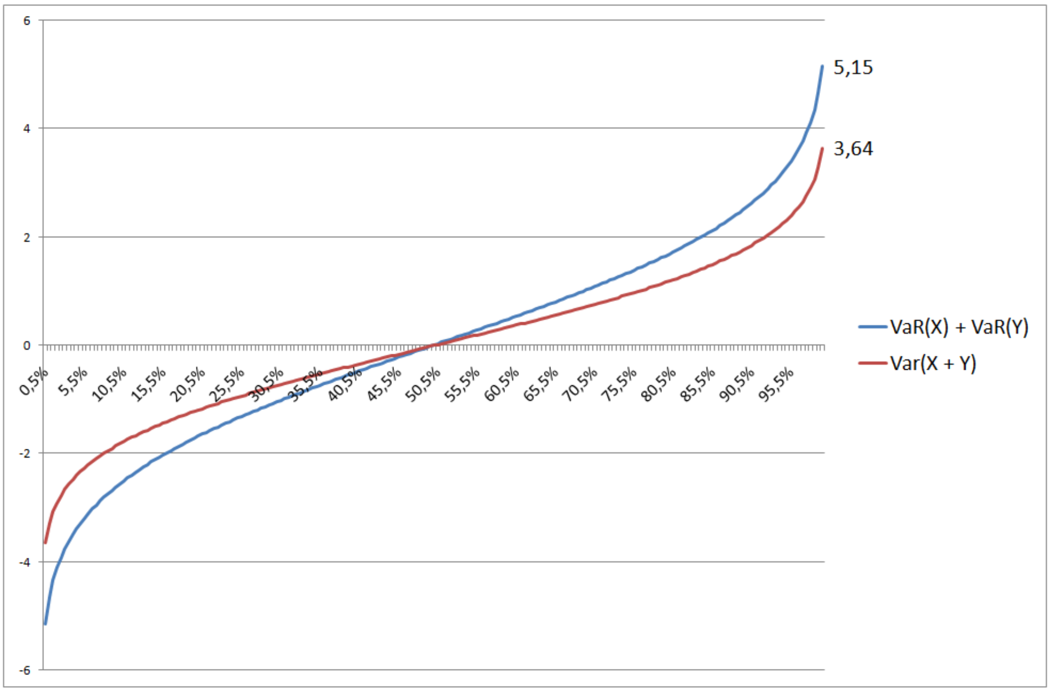
Bizonyítás. A VaR monotonitása következik az eloszlásfüggvény monoton növekedéséből.

A balról folytonosságot a következőképp bizonyíthatjuk: legyen $\{\alpha_i\}$ monoton növekvő konvergens számsorozat, határértéke legyen α. Ekkor az előzőek miatt $\{\mathrm{VaR}_{\alpha_i}\}$ is monoton növekedő, és korlátos (mivel $\alpha_i \leq \alpha$, $\mathrm{VaR}_{\alpha_i} \leq \mathrm{VaR}_\alpha\ \forall i$), tehát konvergens. Ha ezen sorozat határértéke VaR_α, akkor VaR_α balról folytonos. Ellenkező esetben létezik olyan z^* szám, amelyre

$$\mathrm{VaR}_{\alpha_i}(X) \leq \lim_{i\to\infty} \mathrm{VaR}_{\alpha_i}(X) \leq z^* < \mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

Mivel $\mathrm{P}\big(X < \mathrm{VaR}_{\alpha_i}(X)\big) \geq \alpha_i$, ezért $\mathrm{P}(X < z^*) \geq \alpha_i$ minden i-re. $i \to \infty$ esetén azt kapjuk, hogy $\mathrm{P}(X < z^*) \geq \alpha$, amiből a VaR definíciója miatt $\mathrm{VaR}_\alpha(X) \leq z^*$, ezzel ellentmondásba kerülve ilyen z^* létezésével.

$\square$



4.1. ábra. A VaR ábrázolása α függvényében független, standard normális eloszlású valószínűségi változók esetén.

A 4.1. ábra szemlélteti normális eloszlású valószínűségi változók esetén a VaR monotonitási és a szubadditivitási tulajdonságát. Az ábrán két független, standard normális eloszlású változó VaR-jának összegét, illetve a változók összegének VaR-ját ábrázoltam α függvényében. Látható, hogy $\alpha = 50\%$-nál „vált irányt” a szubadditivitási egyenlőtlenség. A görbék mellett található két szám a 99,5%-os α melletti felvett értékek.

Bár az aximák közül hármat teljesít, a VaR általánosságban mégsem koherens kockázati mérték, mert a szubadditivitás csak bizonyos speciális esetekben (például normális eloszlás esetén) teljesül. Ezt mutatja az alábbi egyszerű példa.

Legyen X és Y két azonos eloszlású, független valószínűségi változó, értékük

$$X, Y = \begin{cases} 1\,000\,000, & 0,03 \text{ valószínűséggel,} \\ 10, & 0,02 \text{ valószínűséggel,} \\ 0, & 0,95 \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

A VaR kiszámításához szükség van $X + Y$ alábbi kumulált valószínűségeire:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X + Y \leq 2\,000\,000) &= 1, \\ \mathrm{P}(X + Y < 2\,000\,000) &= 0,9991, \\ \mathrm{P}(X + Y < 1\,000\,010) &= 0,9979, \\ \mathrm{P}(X + Y < 1\,000\,000) &= 0,9409, \\ \mathrm{P}(X + Y < 20) &= 0,9405, \\ \mathrm{P}(X + Y < 10) &= 0,9025, \\ \mathrm{P}(X + Y < 0) &= 0. \end{aligned}$$

Ebből adódik, hogy $\mathrm{VaR}_{0,95}(X) = \mathrm{VaR}_{0,95}(Y) = 10$, viszont $\mathrm{VaR}_{0,95}(X+Y) = 1\,000\,010$, azaz

$$20 = \mathrm{VaR}_{0,95}(X) + \mathrm{VaR}_{0,95}(Y) < \mathrm{VaR}_{0,95}(X + Y) = 1\,000\,010.$$

A kulcs nem a diszkrét eloszlásban van, konstruálható ellenpélda folytonos eloszlású valószínűségi változók esetén is (lásd: [8], [17]).

A VaR-t legfőképp „inkoherenssége” miatt támadják, nevezetesen amiatt, hogy előfordulhat, hogy a portfólió VaR-ja meghaladja a komponensek VaR-jának összegét. Gazdasági megközelítésből ez azt jelenti, hogy kevésbé kockázatos több kis pénzügyi intézet, amelyek egy-egy szektornak vannak kitéve, mint egy nagy intézmény, amelyik többféle kockázatnak van kitéve. Ez szembe megy a fundamentális kockázatmenedzsment fő elvével, miszerint diverzifikációval csökkenthetjük a kockázatot.

Egy másik lényeges hiányossága, hogy nem veszi figyelembe az α-kvantilis utáni veszteségek nagyságát, vagyis két portfóliót, amiknek azonos a kvantilise, azonos kockázatúnak tekinti, noha lehet, hogy az egyiknek az α növelésével hirtelen megugrik a kockáztatott összege, míg a másiké változatlan marad. Vagyis a „bajban" az előbbi várhatóan jóval nagyobb veszteséget kell, hogy elszenvedjen, mint a másik. Tovább nehezíti a helyzetet, hogy a VaR nem folytonos α-ban.

4.2. A várható veszteség, a TVaR

A várható veszteség, a TVaR hivatott áthidalni a VaR hiányosságait megőrizvén az intuitív, gyakorlati megközelítést. Elöljáróban, a TVaR érzékeny a veszteség konkrét értékére, valamint szubadditív.

2. definíció (TVaR). *Legyen az X valószínűségi változó, $\alpha \in (0,1]$ megbízhatósági szint. Az X-hez tartozó α-rendű TVaR:*

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(X)\mathrm{d}\beta,$$ [1]

vagyis a TVaR a VaR-nál nagyobb veszteségek várható értéke.

Igen zavaró, hogy az irodalomban (legalább) kétféle definíciót találunk a TVaR-ra, azonban a másik definíció alapján a TVaR éppúgy nem koherens, mint a VaR. Az alábbi – nem koherens – mértéket szokás TVaR-ként, CVaR-ként (Conditional-VaR), CTE-ként (Conditional Tail Expectations) stb. is emlegetni:

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X) = E\big(X \,|\, X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)\big).$$

A (koherens) TVaR és az előbb ismertetett mérték között csak diszkrét esetben van különbség, így folytonos eloszlású valószínűségi változók esetén használhatjuk az előbbi, egyszerűbb képletet.[2] Azért egyszerűbb ez a képlet, mert a definícióban az α- és annál magasabb rendű VaR-okat átlagoljuk, míg itt az α-rendű VaR feletti kimeneteleket.

[1] Az így definiált mértéket szokás Expected Shortfallként is emlegetni.

[2] Pontosabban, akkor is megegyeznek, ha az eloszlásfüggvény csak az α szint fölött folytonos.

9. tétel. *A TVaR koherens kockázati mérték.*

Bizonyítás. Vizsgálni kell a 4 tulajdonságot.

1. Pozitív homogenitás. X valószínűségi változó, $h > 0$. Ekkor azt kell bizonyítani, hogy

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(hX) = h\mathrm{TVaR}_\alpha(X),$$

ami egyszerűen következik a definícióból és a VaR pozitív homogenitásából:

$$\begin{aligned}\mathrm{TVaR}_\alpha(hX) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(hX)\mathrm{d}\beta \\ &= \frac{h}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(X)\mathrm{d}\beta \\ &= h\mathrm{TVaR}_\alpha(X).\end{aligned}$$

2. Monotonitás. Legyen X és Y valószínűségi változó, és $X \leq Y$. Ekkor a bizonyítandó állítás:

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) \leq \mathrm{TVaR}_\alpha(Y).$$

A monotonitási tulajdonság a VaR és az integrálás monotonitásából következik:

$$\begin{aligned}\mathrm{TVaR}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(X)\mathrm{d}\beta \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(Y)\mathrm{d}\beta \\ &= \mathrm{TVaR}_\alpha(Y).\end{aligned}$$

3. Transzláció invariancia. X valószínűségi változó, $a \in \mathbb{R}$. Ekkor bizonyítandó, hogy

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X+a) = \mathrm{TVaR}_\alpha(X) + a.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{TVaR}_\alpha(X+a) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(X+a)\mathrm{d}\beta \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(X) + a\ \mathrm{d}\beta \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(X)\mathrm{d}\beta + a(1-\alpha)\right] \\ &= \mathrm{TVaR}_\alpha(X) + a.\end{aligned}$$

4. Szubadditivitás. Legyen X és Y két valószínűségi változó. Ekkor $\alpha \in [0,5;1]$ mellett

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X+Y) \leq \mathrm{TVaR}_\alpha(X) + \mathrm{TVaR}_\alpha(Y).$$

Ennek a pontnak csak a bizonyításvázlatát mutatom be, a teljes bizonyítást a [17] tartalmazza.

A TVaR definíciója átírható az alábbi formában:

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(X)\mathrm{d}\beta \\
&= \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(X) - \mathrm{VaR}_\alpha(X)\mathrm{d}\beta \\
&= \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha}\,\mathrm{E}|X - \mathrm{VaR}_\alpha(X)|_+
\end{aligned}$$

VaR_{1-i} minimalizálja az $i \cdot d + \mathrm{E}|S-d|_+$ (költség-)függvényt d-ben [17], a TVaR pedig (a fentiek következményeképp) az i-vel való osztottját, ahol $i = 1-\alpha$, azaz

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \inf_d \left(d + \frac{1}{1-\alpha}\,\mathrm{E}|S-d|_+ \right),$$

vagyis d helyére $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$-től különböző számot írva a TVaR felső korlátját kapjuk.

Legyen $d_1 = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$, $d_2 = \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$, és $d = d_1 + d_2$. Ekkor az előzőek miatt

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_\alpha(X+Y) &\leq d + \frac{1}{1-\alpha}\,\mathrm{E}|X+Y-d|_+ \\
&= d_1 + d_2 + \frac{1}{1-\alpha}\,\mathrm{E}|X-d_1+Y-d_2|_+ \\
&\leq d_1 + d_2 + \frac{1}{1-\alpha}\,\mathrm{E}\left(|X-d_1|_+ + |Y-d_2|_+\right) \\
&= \mathrm{TVaR}_\alpha(X) + \mathrm{TVaR}_\alpha(Y),
\end{aligned}$$

ezzel megkaptuk az állítás bizonyítását.

□

10. tétel. *A* TVaR *α-ban monoton növekedő és balról folytonos.*

Bizonyítás. A 8. tétel alapján tudjuk, hogy a VaR monoton nő és balról folytonos α-ban, ebből következik a TVaR balról folytonossága is.

A monotonitást deriválással bizonyítjuk:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dTVaR}_\alpha(X)}{\mathrm{d}\alpha} &= \frac{1}{(1-\alpha)^2}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(X)\mathrm{d}\beta - \frac{1}{1-\alpha}\mathrm{VaR}_\alpha(X) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(\mathrm{TVaR}_\alpha(X) - \mathrm{VaR}_\alpha(X)\right) \geq 0,\end{aligned}$$

vagyis a TVaR monoton növekedő α-ban.

□

11. tétel (Monoton transzformáció). *Legyen X valószínűségi változó. Ha f monoton növekvő, jobbról folytonos függvény $\mathbb{R}$-en, akkor*

$$\mathrm{TVaR}_\alpha\big(f(X)\big) = f\big(\mathrm{TVaR}_\alpha(X)\big), \qquad \forall\alpha \in (0,1].$$

Bizonyítás. A 7. tétel következménye.

□

4.3. A VaR és a TVaR összehasonlítása

Komoly vita folyt a Szolvencia II-beli kockázati mértéket illetően. A VaR alapú kockázatmérést szorgalmazta a CEA (Comité Européen des Assurances), azonban a TVaR szószólója volt az Európai Unió pénzügyi felügyelete, a CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors), aminek helyébe 2010-ben az EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) lépett.

Elméleti szempontból a VaR nem egy koherens kockázati mérték – a Tail-VaR-ral ellentétben –, nevezetesen, nem szubadditív. Ebből az előbb említett deviancia léphet föl, hogy esetleg kockázat szempontjából átfedő szegmensek külön-külön vett kockázata kisebb, mint az együttes kockázata. Másrészt a VaR elliptikus eloszlás esetén teljesíti a kívánt tulajdonságot, valamint a gyakorlatban a farokrészen (pl. a biztosításban használt 99,5% megbízhatósági szinten) megközelítőleg szubadditív, ha az eloszlás vastagszélű

(Daníelsson, Jorgensen 2005), mint amilyen például az eszközhozamok eloszlása. Azonban fontos megemlíteni, hogy egyre több kutató foglalkozik azzal, hogy egy mérték „túl” szubadditív is lehet, vagyis az aggregált mérték szabályozói szemszögből nem kielégítő.

A VaR előnyeként emlegetik a könnyű megérthetőséget a vezetőség vagy a tulajdonosok számára, a TVaR komolyabb matematikai hátteret igényel, ezért a mindennapos kockázatmenedzsmentbe, a vállalati kultúrába nehezebben beágyazható. 10 000 szimulációból a 99,5%-os VaR az 50-edik legrosszabb realizációra koncentrál, a legrosszabb esetre „normál” körülmények között. A TVaR a 99,5%-os és annál magasabb rendű VaR-ok átlagát adja meg, azaz 50 darab VaR százalékkal (renddel) súlyozott átlagát. Az előbbiekből világosan következik, azonban fontos kiemelni, hogy adott megbízhatósági szinten a VaR kisebb – vagy egyenlő – a TVaR-nál. Normális eloszlást feltételezve a 99,5%-os VaR megegyezik a 98,7%-os TVaR-ral.

Interpretáció szempontjából a VaR számítása egyszerűbb, egyetlen legrosszabb esethez kapcsolódik, könnyebben modellezhető és becsülhető. A TVaR „adatigényesebb”, a vállalatoknak az egész eloszlást ismerniük kell, azonban a gyakorlatban kevés adat áll rendelkezésükre az eloszlás széléről, az extrém nagy veszteségekről. Emiatt nehéz jó feltételezéseket tenni, a modellezési hiba szignifikáns lehet.

A VaR használata más pénzügyi szektorban is elterjedt, a bankok is VaR-ral becsülik például a piaci kockázatot. A TVaR hasonló fogalom, mint a „várható veszteség csőd esetén” (expected loss under default), a Bázel II-ben hasonlóan becslik a hitelezési kockázatot. A VaR-t már most is használják direkt biztosítók, míg a TVaR-t főleg viszontbiztosítók használják, akiknek több tapasztalatuk, adatuk van, így jobban meg tudják becsülni az eloszlás szélét.

Fontos megemlíteni, hogy a Szolvencia II. nem teszi kötelezővé a VaR használatát, ha a biztosítóintézet úgy véli, hogy más kockázati függvénnyel jobban megfogható a kitettségük (és a felügyelet is elfogadja), akkor belső modelljükben használhatnak más mértéket a szavatolótőke-szükséglet számítására, azonban igazolni kell, hogy az így kapott szavatolótőke-szükséglet eléri a – következő fejezetben tárgyalt – kívánt szintet.

5. fejezet

A Szolvencia II. szerinti kockázatok, a standard modell ismertetése

A Szolvencia II. irányelv (vagy keretirányelv) [2] szerint „a szavatolótőke-szükségletet úgy kell kalibrálni, hogy minden olyan számszerűsíthető kockázatot figyelembe vegyen, amelynek a biztosító vagy viszontbiztosító ki van téve”. Kiterjed a már meglévő biztosítási állományra és a következő évben várhatóan szerzett új szerződésekre.

A számítást évente legalább egyszer kell elvégezni a keretirányelv szerint, azonban a szavatolótőke-szükségletnek (továbbiakban: SZTSZ) való megfelelést folyamatosan figyelemmel kell kísérni, s amennyiben az intézmény kockázati profilja jelentős mértékben változik, akkor az SZTSZ számítását újra el kell végezni.

Az SZTSZ a biztosító alapvető szavatolótőkéjének egyéves időtávon mért, 99,5%-os biztonsági szintű kockáztatott értéke, VaR-ja. Így az SZTSZ az (egyéves időtávon) 0,5%-os csődvalószínűségnek megfelelő tőkét írja elő.

Ha X-re, mint veszteségre gondolunk, akkor az X-hez tartozó $\mathrm{SCR}_\alpha(X)$ szavatolótőke-szükséglet az alábbi módon számítandó:

$$\mathrm{SCR}_\alpha(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) - \mathrm{E}(X),$$

ahol esetünkben $\alpha = 99,5\%$, és $\mathrm{E}(X)$ az X várható értékét jelöli.

Megfelelő irányú és mértékű stressz vagy sokk esetén az adott valószínűségi változó – itt veszteség az adott kockázati modulban – olyan értéket vesz föl, aminek a valószínűsége

0,5%, vagyis a sokkolt változó értéke lesz a VaR. Ekkor a korábbi képletből kapjuk:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SCR}_\alpha &= \mathrm{VaR}_\alpha(X) - \mathrm{E}(X) \\
&= (\text{Kötelezettségek} - \text{Eszközök})|_{stress} - (\text{Kötelezettségek} - \text{Eszközök}) \\
&= \Delta NAV,
\end{aligned}$$

ahol a NAV a nettó eszközérték (az angol „Net Asset Value”-ból), az eszközök és kötelezettségek különbsége (az alárendelt kötelezettségeket leszámítva).

Kihasználva a VaR transzláció invariancia tulajdonságát és definícióját a következő összefüggést kapjuk a szavatolótőke-szükségletre:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SCR}_\alpha(X) &= \mathrm{VaR}_\alpha(X) - \mathrm{E}(X) \\
&= \mathrm{VaR}_\alpha\big(X - \mathrm{E}(X)\big) \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mathrm{P}\big(X - \mathrm{E}(X) \le x\big) \ge \alpha\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 - \mathrm{P}\big(X - \mathrm{E}(X) > x\big) \ge \alpha\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mathrm{P}\big(X - \mathrm{E}(X) > x\big) \le 1 - \alpha\}.
\end{aligned}$$

Legyen a vállalat rendelkezésre álló szavatolótőkéje a t időpillanatban (az angol Available Capital rövidítéséből) AC_t. Ekkor mivel X veszteség volt, $\mathrm{E}(X) = -\mathrm{AC}_0$ és $X = -\frac{\mathrm{AC}_1}{1+i}$ a $t = 0$-ra diszkontált tőke. Ekkor a szavatolótőke-követelmény kifejezhető a következőképp [9]:

$$\mathrm{SCR}_{99,5\%} = \inf\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \mathrm{P}\left(\mathrm{AC}_0 - \frac{1}{1+i}\mathrm{VaR}_{0,5\%}(\mathrm{AC}_1) > x\right) \le 1 - \alpha \right\},$$

ahol i a kamatláb. Az $\frac{1}{1+i}\mathrm{VaR}_{0,5\%}(\mathrm{AC}_1)$ az a többlettőke, amit a kezdeti AC_0 tőkéhez kell hozzátenni, hogy a kívánt feltétel teljesüljön:

$$\mathrm{P}(\mathrm{AC}_1 < 0) \le 0,5\%.$$

5.1. A standard formula

Bár a fenti képlet tökéletesen leírja a biztosító szavatolótőke-szükségletét, a gyakorlatban nemigen alkalmazható, mert nagyon bonyolult egészben meghatározni (pl. sztochasztikus modell segítségével, szimulációkkal) a biztosító kockázatosságát. Azért, hogy a kisebb biztosítók helyzetét – akiknek nincs meg az erőforrásuk, tapasztalatuk bonyolult modellek kidolgozására – se lehetetlenítsék el, a CEIOPS biztosított egy egyszerűbb módszert, a *standard formulát*. A legfőbb egyszerűsítés az a feltételezés, hogy a kockázatok többdimenziós normális eloszlásúak, így a részkockázatok mérése és ezek összesítése lényegesen leegyszerűsödik.

A keretirányelv meghatározza az SZTSZ kalkulálásának moduláris felépítését és azt, hogy a modulok aggregálása korrelációs mátrixok segítségével történjen.

Legyen az i-edik kockázathoz tartozó veszteség X_i, $\mathrm{SCR}(X_i)$ az i-edik kockázat szavatolótőke-követelménye. Ekkor az $\mathrm{SCR}(X)$ aggregált tőkekövetelmény az aggregált $X = \sum X_i$ kockázathoz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SCR}_\alpha(X) &= \mathrm{VaR}_\alpha(X) - \mathrm{E}(X) \\
&= \mathrm{VaR}_\alpha\left(\sum X_i\right) - \mathrm{E}\left(\sum X_i\right) \\
&= \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j}\big(\mathrm{VaR}_\alpha(X_i) - \mathrm{E}(X_i)\big)\big(\mathrm{VaR}_\alpha(X_j) - \mathrm{E}(X_j)\big)} \\
&\qquad + \mathrm{E}\left(\sum_i X_i\right) - \mathrm{E}(X) \\
&= \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j}\, \mathrm{SCR}_\alpha(X_i)\, \mathrm{SCR}_\alpha(X_j)}, \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

ahol $\rho_{i,j}$ a Pearson-féle korrelációs mátrix (i,j)-edik eleme.

Vegyük észre, hogy ha $\mathrm{SCR}_\alpha(X_i) \geq 0$, a fenti képlet alkalmazásával tetszőleges korrelációs mátrix esetén fellép egy ún. *diverzifikációs hatás*[1], nevezetesen, hogy

$$\mathrm{SCR}_\alpha\left(\sum_i X_i\right) \leq \sum_i \mathrm{SCR}_\alpha(X_i),$$

[1] Az egyenlőtlenséget már korábbról tudtuk (4. tétel), itt a két oldal eltérésén van a hangsúly, ami a korrelációk nagyságától függ.

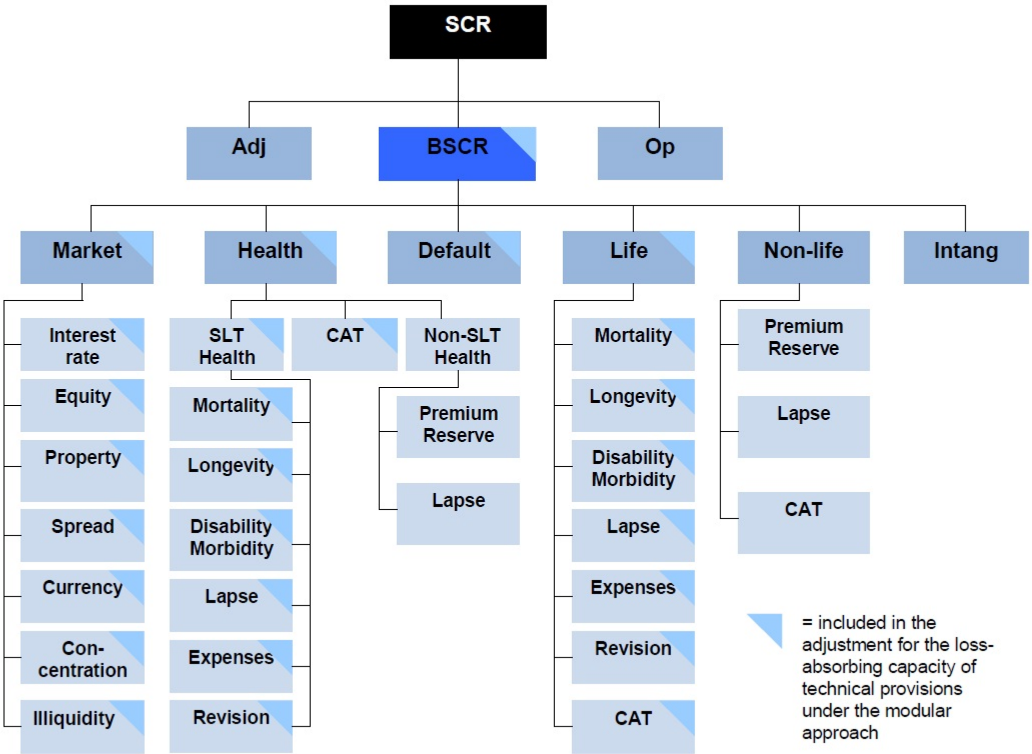
ugyanis

$$\begin{aligned}
\mathrm{SCR}_\alpha\left(\sum_i X_i\right) &= \sqrt{\sum_{i,j}\rho_{i,j}\,\mathrm{SCR}_\alpha(X_i)\,\mathrm{SCR}_\alpha(X_j)}\\
&= \sqrt{\sum_i \mathrm{SCR}_\alpha(X_i)^2 + 2\cdot\sum_{i\neq j}\rho_{i,j}\mathrm{SCR}_\alpha(X_i)\cdot\mathrm{SCR}_\alpha(X_j)}\\
&\leq \sqrt{\sum_i \mathrm{SCR}_\alpha(X_i)^2 + 2\cdot\sum_{i\neq j}\mathrm{SCR}_\alpha(X_i)\cdot\mathrm{SCR}_\alpha(X_j)}\\
&= \sum_i \mathrm{SCR}_\alpha(X_i).
\end{aligned}$$

Egyenlőséget csak abban az esetben kapunk, ha az aggregációs együtthatók mind 1-gyel egyenlők, vagyis lényegében ugyanazon valószínűségi változó lineáris függvényeit adjuk össze. Látható, hogy minél kisebbek az együtthatók, annál nagyobb a fellépő diverzifikációs hatás (a két oldal eltérése). A nemnegativitási feltétel pedig teljesül a standard formula szerint, ugyanis a legutóbbi mennyiségi hatástanulmány, a QIS5 technikai specifikációban [12] leírtak szerint, ahol az adott stressz-szenárió a NAV csökkenéséhez vezet, a megfelelő tőkekövetelmény ne negatív, hanem nulla legyen.

A QIS5 technikai specifikációjában [12] a kockázatok moduláris felépítését az 5.1. ábra szemlélteti, ebben már néhány vátozás történt a keretirányelvhez képest, pl. megjelenik a immateriális javak modul, a nem-életbiztosítási kockázatoknál a törlési kockázat, a piaci kockázatoknál a likviditás. Az aggregálás során alkalmazandó korrelációs együtthatókat ugyanitt találjuk (a korábbi verzió a megfelelő CEIOPS ajánlásban /CEIOPS' Advice/ szerepelt).

A standard formulával számított szavatolótőke-szükséglet az alapvető szavatolótőke-szükséglet (Basic Solvency Capital Requirement /BSCR/), a működési kockázat tőkekövetelménye (Operational risk /Op/), valamint a biztosítástechnikai tartalékok és a halasztott adók veszteségelnyelő képességének figyelembevételével tett kiigazítás (Adjusts /Adj/) összege. Utóbbi elsősorban életbiztosítókra jellemző, így ennek bemutatására nem kerül sor, a standard formulának a nem-életbiztosítóra vonatkozó pontjait mutatom be részleteibe menően.



5.1. ábra.

5.1.1. Az alapvető szavatolótőke-szükséglet

Az alapvető szavatolótőke-szükséglet kockázati modulokból áll, legalább a következő kockázati modulokat kell figyelembe venni (zárójelben a modul 5.1. ábrán szereplő neve):

1. nem-életbiztosítási kockázat (Non-life),
2. életbiztosítási kockázat (Life),
3. egészségbiztosítási kockázat (Health),
4. piaci kockázat (Market),
5. hitel- (partner általi nemteljesítési) kockázat (Default),
6. immateriális javak (értékesíthetőségének) kockázata (Intang).

A kockázati modulok mindegyikét egyéves időtávon mért, 99,5%-os biztonsági szintű kockáztatott érték alkalmazásával kell kalibrálni. Ezek a modulok korrelációs mátrix segítségével aggregálandók.

Az alapvető szavatolótőke-szükségletet végül az alábbi képlet adja meg:

$$\mathrm{BSCR} = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} \mathrm{SCR}_\alpha(X_i) \cdot \mathrm{SCR}_\alpha(X_j)} + \mathrm{SCR}_\alpha(\mathrm{Intang}),$$

ahol $\rho_{i,j}$ a modulok aggregálásához ajánlott mátrix (i, j) eleme, i és j az előbbi felsorolás 1-5 pontjain mennek végig, és X_i az i-edik modul kockázata.

A nem-életbiztosítási kockázat

A *nem-életbiztosítási kockázat* a nem-életbiztosítási kötelezettségekből fakad a fedezett kockázatok vonatkozásában. Ugyancsak magában foglalja a biztosítottak vislekedésével (pl. szerződés megújítása, megszüntetése stb.) kapcsolatos feltételezések bizonytalanságát. A nem-életbiztosítási kockázati modul összegét legalább a következő részmodulok tőkekövetelményeinek kombinációjaként kell számítani (zárójelben a részmodul 5.1. ábrán szereplő neve):

1. díj- és tartalékkockázat (Premium, Reserve),
2. katasztrófa kockázat (CAT),
3. törlési kockázat (Lapse).

A *díj- és tartalékkockázat* a biztosítási kötelezettségeknek való meg nem felelést takarja. Egyes nem-életbiztosítási szerződések tartalmazhatnak olyan opciót a szerződő számára, amelyre a törlési ráták változása komoly hatással lehet. Ilyen például a tartam lejárta előtti szerződésbontás, vagy az a lehetőség, hogy az ügyfél változatlan feltételek mellett megújíthatja a szerződést a lejárat után. A *törlési kockázat* annak a kockázatát ragadja meg, hogy az árazás során a felmondási rátákra vonatkozó feltevések rossznak bizonyultak, vagy megváltoztak. A *katasztrófa kockázat* a szélsőséges vagy rendkívüli eseményekre vonatkozó árazási és tartalékolási feltevések bizonytalanságát ragadja meg.

Az alkalmas korrelációs mátrix felhasználásával a következő képletet kapjuk a nem-élet modul SZTSZ-re:

$$\begin{aligned}\mathrm{SCR}_\alpha(NL) = & \sqrt{\mathrm{SCR}^2_\alpha(NL_{PR}) + \mathrm{SCR}^2_\alpha(NL_{CAT}) + \mathrm{SCR}^2_\alpha(NL_{Lapse}) +} \\ & \overline{2 \cdot 0,25 \cdot \mathrm{SCR}_\alpha(NL_{PR})\, \mathrm{SCR}_\alpha(NL_{CAT})}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

A díj- és tartalékkockázatot homogén kockázati csoportonként, „Line of Business"-enként kell meghatározni, és a Line-ok SZTSZ-eit egy alkalmas korrelációs mátrixszal összesíteni.

A piaci kockázat

A *piaci kockázati modul* a vállalkozás eszközeinek és kötelezettségeinek értékét befolyásoló pénzügyi eszközök piaci árának szintjéből vagy volatilitásából eredő kockázatokat tükrözi. Magában foglalja a források és eszközök közötti strukturális egyenlőtlenségből, különös tekintettel a két oldal eltérő lejárati idejéből eredő kockázatot. A következő részmodulok tőkekövetelményeinek kombinációjaként számítandó:

1. kamatlábkockázat (Interest rate),
2. részvénypiaci kockázat (Equity),
3. ingatlanpiaci kockázat (Property),
4. kamatréskockázat (Spread),
5. devizaárfolyam-kockázat (Currency),
6. piaci kockázatkoncentráció (Concentration),
7. likviditási prémium kockázat (Illiquidity).

Egy eszköz ára a jövőbeli előjeles pénzáramok (cash-flow, CF) jelenértéke, azaz

$$P = \sum_{t=1}^{T} CF_t \cdot DF_t,$$

ahol T a futamidő, és az egyes t időpontokban realizált pénzáramokat $DF_t = \frac{1}{(1+r_t)^t}$ diszkontfaktorokkal (r_t a t időponthoz tartozó kamatláb) hozzunk jelenértékre. A kamat emelkedése a diszkontfaktorok, így az eszköz értékének csökkenéséhez vezet. Az eszközök és források eltérő futamideje miatt a hozamgörbe (nem várt) elmozdulása az eszközök elégtelenségét okozhatja, ezt a negatív hatású elmozdulást kell értékelni a *kamatlábkockázat* modulban.

Részvénybe, devizába vagy ingatlanba való fektetés esetén a biztosító eszközei érzékenyek az alaptermék árszintjének, likviditásának vagy (pl. opciós ügyelet esetén) akár annak volatilitásának változására. Ezt a bizonytalanságot kell számszerűsíteni a *részvény-*, *deviza-* és *ingatlapiaci kockázat* modulokban. A *koncentrációs kockázat* magában foglalja azon egyéb pénzügyi kockázatokat, amelyek a diverzifikáció hiányából, vagy egy adott partnerrel (pl. értékpapír-kibocsátóval, kapcsolt vállalkozással) szembeni nagyfokú kitettségből fakadnak. A *kamatréskockázat* a piac „idegességét" hivatott mérni, nyugodtabb időszakokban az eszközök vételi és eladási árfolyamának különbsége (a spread) kicsi, míg bizonytalanabb helyzetekben a spread széthúzódik, a kereskedés pedig nehézkesebbé válik. A kamatréskockázat azt a negatív hatást méri, amikor a biztosító idegesebb körülmények között kényszerül lezárni pozícióját, és realizálni az esetleges veszteségét. A *likviditási kockázat* azt takarja, hogy a vállalat bizonyos eszközeivel nem tud (szinte) korlátlanul kereskedni, pl. egyes eszközökből olyan nagy mennyiséget tart, ami már nem realizálható közel azonos árszinten, vagy olyan „perifériás" papírokat tart, amelyek kereskedése nem akadálytalan.

A piaci kockázati részmodulok aggregációjához két mártixot adtak meg, egyet a „lefele"-(CorrMktDown), egyet „felfele"-sokkhoz (CorrMktUp). Mátrixszorzással megkaphatjuk a lefelé- ($\mathrm{SCR}_\alpha(Mkt^{Down})$) és a felfelé-sokk SZTSZ-t ($\mathrm{SCR}_\alpha(Mkt^{Up})$). A piaci kockázati modul tőkekövetelménye a két SZTSZ közül a nagyobbik:

$$\mathrm{SCR}_\alpha(Mkt) = \max\left(\mathrm{SCR}_\alpha(Mkt^{Down}), \mathrm{SCR}_\alpha(Mkt^{Up})\right).$$

Partner általi nem-teljesítés kockázata

A partner általi nem-teljesítés alatt a biztosító partnereinek, adósainak (nem várt) fizetésképtelenné válását vagy fizetőképességének romlását értjük. A kockázati modul magában foglalja a biztosító mindenféle hitelezési kitettségét, mint pl. viszontbiztosítási szerződésből esedékes térítés nem teljesülését vagy a közvetítőkkel szembeni követeléseket. Ezen kívül itt kell értékelni minden olyan hitelezési kitettséget, amelyek nem tartoznak a piaci kockázat kamatrés részmoduljába – ilyenek pl. a szerződő ügyfél részére nyújtott kötvénykölcsön, a biztosító által tartott vállalati vagy államkötvények, bankbetétek stb.

Bár a KÖBE nem-életbiztosító, a Szolvencia II. „tartalom a forma fölött” elve szerint vannak életbiztosítási és egészségbiztosítási kockázatai, mint például felelősség-biztosítási járadékszolgáltatás – ezt életbiztosítási kockázatként kell kezelni, így arra „hosszú élet” és költségkockázati részmodulokat kell értékelni. Hasonlóan a felelősség-biztosításoknál előfordulhatnak egészségbiztosítási károk is, így ennek néhány részmodulját is értékelni kell.

5.1.2. A működési kockázat

A működési kockázat a nem megfelelő belső folyamatokból, személyi vagy szervezeti háttérből vagy külső tényezőkből eredő kockázatok összessége. Nem tartalmazza a stratégiai döntésekből származó, így a reputációs kockázatot sem.

Egy nem-életbiztosító működési kockázatát a következőképp kell kiszámítani. Legyen P a tavalyi évi díjbevétel, $P_{(-1)}$ a tavalyelőtti díjbevétel, TP biztosítástechnikai tartalék. Ekkor díjban illetve tartalékban mért működési kockázat:

$$OP_{Prem} = 0,03\,P + \max(0,\ 0,03\,P - 1,1\,P_{(-1)}),$$

$$OP_{Res} = 0,03\,TP,$$

de legalább 0. Az *alap működési kockázat* tőkeszükséglete a kettő közül a nagyobbik:

$$OP = \max(OP_{Prem},\ OP_{Res}).$$

A *működési kockázat* SZTSZ-e:

$$\mathrm{SCR}_{OP} = \min(0,3\,BSCR,\ OP).$$

5.2. A minimális tőkeszükséglet számítása

A minimális tőkeszükséglet kielégítése az üzlet folytathatóságát meghatározó, alapvető elvárás, hiányával a biztosítottak és a partnerek elfogadhatatlan szintű kockázatnak lennének kitéve, ha a biztosító vagy viszontbiztosító folytathatná tevékenységét. Ezért számítási módjának egyszerűnek, gyorsnak és sztenderdnek kell lennie. Ennek értelmében a számítási módja: a minimális tőkeszükségletet a homogén kockázati csoportonként vett a biztosítástechnikai tartalékok (TP_j) ill. az elmúlt évi díjbevételek (P_j) lineáris kombinációjaként kapjuk meg:

$$\mathrm{MCR} = \sum_j \max(\alpha_j TP_j, \beta_j P_j),$$

ahol az α_j, β_j együtthatók LoB-onként vannak meghatározva a megfelelő CEIOPS' ajánlásban.

Emellett a szabályozás meghatároz egy abszolút alsó korlátot is, életbiztosítók és bizonyos „veszélyesebb" üzletet is folytató nem-élet biztosítók szavatolótőkéje nem lehet kevesebb, mint 3,2 millió euró, kevésbé kockázatos üzlet esetén 2,2 millió euró. Továbbá a minimális tőkeszükséglet nem lehet kevesebb, mint a biztosító szavatolótőke-szükségletének 25%-a, és nem haladhatja meg annak 45%-át.

6. fejezet

A standard modell feltételezései, ezek kritikai elemzése

6.1. Aggregálás

A standard modell legfőbb (és talán legerősebb) feltételezése, hogy a kockázatok többdimenziós normális eloszlásúak, így az aggregálás egyszerűen korrelációs mátrixok segítségével végezhető. A CEIOPS ajánlásban olvashatjuk [6]: „Bár az aggregálandó tőkekövetelmények nem szórások, hanem kockáztatott értékek, ez nem jelenti azt, hogy a korrelációs mátrixokkal való aggregálás ne volna helyes, ugyanis bizonyítható, hogy többdimenziós normális (sőt, elliptikus) eloszlás esetén a korrelációkkal való összegzés helyes." Ehhez szükség van arra, hogy a biztosítók kockázatai megközelítőleg normális eloszlásúak legyenek (de legalább elliptikusak), és a függőség közöttük lineáris legyen.

A KÖBE eredményeit vizsgálva lehetne az eloszlásbeli feltétel teljesülését ellenőrizni, azonban az új értékelési elvvel számított mérleg csak néhány éve áll rendelkezésre, ezért a normalitási feltétel erősségének ill. helyességének vizsgálata nem releváns. Ezt olyan biztosítók esetében lehetne megtenni, akik már régebb óta készítenek IFRS szerinti mérleget, ahol a számítás alapja – a Szolvencia II-höz hasonlóan – a „valós értékelés" (Fair Value) a könyv szerinti értékkel szemben. A normalitási feltételezés azonban kétséges a biztosítási kockázatok esetében, amik jellemzően inkább ferdék, esetenként csonkoltak (viszontbiztosítás esetén). Éppen ezért a nem-élet díj- és tartalékkockázat modul lognormális eloszlás feltételezésén alapul.

A lineáris függőségre ellenpélda az eszközpiacokon megfigyelt mozgások: recesszió esetén a függőségek sokkal jobban felerősödnek, mint konjunktúra esetén, és sok paraméter erősen együtt kezd mozogni: egyszerre esnek például a részvényárak és az ingatlanárak, a kamatrések széthúzódnak. További hibája a lineáris korrelációval való függőség mérésének, hogy csak véges szórással rendelkező valószínűségi változókra értelmezhető, ami komoly megszorítás olyan kockázatoknál, amiknek az eloszlása vastagszélű, amilyen az eszközhozamok eloszlása, vagy egyes nem-életbiztosítási kockázatok. A korrelálatlanság is megtévesztő lehet, ugyanis ebből nem következik a függetlenség.

A lineáris korrelációkon kívül más korrelációkat is ismerünk, mint például a Kendall τ és a Spearman ρ rangkorrelációk. Ezek azt mérik, hogy az adott valószínűségi változók mennyire mozognak egyirányban.

A függőségi kapcsolatok modellezésének alternatívája lehet a – manapság népszerű – kopulák használata. A kopulák alapötlete az, hogy egydimenziós eloszlásokat valamely többdimenziós függvénnyel többdimenzióssá „kapcsolnak össze”, vagyis a peremeloszlások és az együttes eloszlás között keresünk kapcsolatot.

Összességében erősen kétségesek ezek a feltételezések, különösen, hogy mást teszünk fel az aggregálásnál, és mást az adott modul számításánál. Azonban a legtöbb alternatíva igen erőforrásigényes.

6.2. Partnerkockázat

Ezt a modult úgy kell számítani, hogy mindig egy partnert ki kell venni, és minden egyes partner elhagyásával újra kell futtatni a stressz-szenáriót. Matematikailag teljesen helyes a megközelítés, azonban gyakorlati nehézségei vannak: egy olyan biztosító esetében, akinek sok partnerrel szemben van kitettsége, ez a számítás igen időigényes, holott az egész modul nem képvisel olyan jelentős szerepet a szavatolótőke-követelményben, így aránytalanul számításigényes a hozzáadott SZTSZ-hez képest.

Ez a modul igen érzékeny a partner hitelminősítési besorolásától. Másik kritikája éppen ezért a hitelminősítő cégektől való magasfokú függőség.

A hitelminősítő cégeket sok kritika éri. Főként amiatt, hogy a 2008-as válságot nemcsak nem észlelték előre, de az egyik legnagyobb csődöst, a Lehman Brotherst nem sokkal a bedőlése előtt még a legjobbak közé sorolták. Másrészt sokan azt mondják, hogy „csak lekövetik a piacot”, azaz akkor minősítenek le, amikor a piac már jóval azelőtt beárazta a kockázatokat [25]. Érthető módon érik támadások a hitelminősítőket a finanszírozásuk miatt is, ugyanis az értékpapírkibocsátó maga kéri fel és finanszírozza új értékpapírjának minősítését, így a függetlenség erősen megkérdőjelezhető. Ezeknek a kritikáknak egy megoldása lehetne olyan szabályozás kialakítása, amely elősegíti az objektivitást, növeli a minősítések alapjául szolgáló adatok megbízhatóságát és előírja a módszertanok rendszeres felülvizsgálatát [20].

6.3. Nem-életbiztosítási kockázati modul szavatolótőke-szükséglete

Mivel a KÖBE kockázati profiljában a nem-életbiztosítási modulban a legnagyobb szelet a Díj- és tartalékkockázaté, ezért annak számítását részletesen bemutatom, különös tekintettel az árazási kockázatra, ami az almodul nagy részét képviseli.

6.3.1. Díj- és tartalékkockázat

A Díj- és tartalékkockázat alszakasz főként az árazási kockázatot mutatja be, a tartalékolási kockázat mérése igen analóg hozzá. A modul alapfeltevése, hogy ezek a kockázatok lognormális eloszlást követnek (szemben az aggregálásnál feltételezett többdimenziós normális eloszlással). A VaR monoton transzformációra való invarianciája miatt a lognormális eloszlású kockázat VaR-ját egyszerűen megkaphatjuk a normális eloszlás VaR-jából:

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp\left(\Phi^{-1}_{99,5\%}\,\sqrt{\ln(\sigma^2+1)}\right)}{\sqrt{\sigma^2+1}} - 1.$$

A kockázat általában abban rejlik, hogy bizonyos „várt” és a „tényleges” értékek valamilyen (nem várt) mértékben eltérnek. Az árazás során a kárkifizetéseket és a költségeket próbáljuk megbecsülni. Az árazási kockázatban a várt mennyiség a díjbevétel (tekintsünk el az ügyfélviselkedés kockázatától – nem fizeti be (időben) a díjat, kevesebben veszik meg, mint kalkuláltuk stb.), a tényleges pedig a bekövetkezett károk és a felmerült költségek.

Az eltérést mérhetjük különbséggel is, de a biztosításban pl. *kárhányadot* szokás számolni, vagyis az eltérést a kár és a díj arányában mérik. Ennek analógiáján nevezzük *működési hányadnak* azt a mutatót, amit így kapunk:

$$\text{működési hányad} = \frac{\text{károk} + \text{költségek}}{\text{díjbevétel}}.$$

Legegyszerűbb esetben ennek a mutatónak a „szóródásával" (szórással, abszolút eltéréssel, valamely értéktől való eltéréssel stb.) lehet mérni az árazási kockázatot. Ez azonban azt feltételezi, hogy a működési hányad kizárólag a véletlentől függő valószínűségi változó. Ezzel szemben sokszor maga a biztosító tervezi meg – és az árazás során ülteti át a valóságba – működési hányadának változását, például észreveszi, hogy sorozatosan túl magas vagy túl alacsony ez a mutató, és fokozatosan egy előre kitűzött szint alá vagy fölé szeretné helyezni ezt az arányt. Ez persze a szóródási mértékeket növeli, holott egy üzleti döntés során bekövetkező változásról van szó, így helyesebb lenne olyan kockázati mértéket választani, ami az üzleti tervtől való eltérést méri, ami magában foglalja már a kitűzött trendet.

Mivel nem volt megfelelő és hozzáférhető adat a működési hányadra, a CEIOPS kárhányadok elemzésével dolgozta ki az árazási kockázat kiszámítására vonatkozó módszert [5]. Ráadásul az elemzés alapjául vett idősorokat középnagy vállalatok biztosították, így kevésbé türközik a kisebb biztosítók kockázatát. Tehát az alább bemutatásra kerülő módszerek mindegyikének az az alapfeltevése, hogy a költségek a díjbevétel determinisztikus és konstans arányában kifejezhetők.

A CEIOPS az árazási kockázatot négy módszer felhasználásával kalibrálta. A számításokat 191 vállalat 1999-2008 időszaki adatain végezték. Minden módszert két lépcsőben végeztek, először egy adott vállalaton belül homogén kockázati csoportonként (LoB-onként) megbecsülték a kárhányad szórását, majd a vállalatok eredményeit (Lob-onként) a megszolgált díjjal súlyozva átlagolták.

1. módszer: súlyozott szórás módszer

Az első módszerben a kárhányadok súlyozott szórásával próbálták becsülni az árazási kockázatot. Jelölje $\sigma_{C,lob}$ a kárhányadok szórását vállalatonként és homogén kockázati csoportonként, $U_{t,C,lob}$ a károk összegét a t-edik évben, $V_{t,C,lob}$ a megszolgált díjat. A díjjal súlyozott szórást az alábbi módon számolhatjuk (vállalatonként és homogén kockázati csoportonként):

$$\sigma_{C,lob} = \sqrt{\frac{1}{\sum_t V_{t,C,lob}} \sum_t V_{t,C,lob} \left(\frac{U_{t,C,lob}}{V_{t,C,lob}} - \frac{\sum_t U_{t,C,lob}}{\sum_t V_{t,C,lob}} \right)^2}.$$

Ez nem pontosan az a képlet, amit a CEIOPS anyagában [5] találunk. A fenti szórás helyett korrigált tapasztalati szórást alkalmaztak, és – bár a díjak összegéből számolt hányadossal helyesebb lett volna – a fenti képletet megszorozták $N/(N-1)$-gyel, ahol N az évek száma. Néhány egyszerű átalakítással a fentiből a CEIOPS által közölt képletet[1] kapjuk:

$$\sigma_{C,lob} = \sqrt{\frac{1}{V^*_{C,lob}}} \sqrt{\frac{1}{N_{C,lob}-1} \left[\sum_{t=1}^{N_{C,lob}} \frac{1}{V_{t,C,lob}} \left(U_{t,C,lob} - V_{t,C,lob} \frac{\sum_{t=1}^{N_{C,lob}} U_{t,C,lob}}{\sum_{t=1}^{N_{C,lob}} V_{t,C,lob}} \right)^2 \right]},$$

ahol a $V^*_{C,lob} = 1/N_{C,lob} \sum_t V_{t,C,lob}$ egy vállalat adott LoB-jának díjbevételeinek átlaga. Ebből a vállalatok közös szórása (LoB-onként) a szórások az átlagos megszolgált díjjal súlyozott átlaga:

$$\sigma_{lob} = \frac{\sum_C V^*_{C,lob}\, \sigma_{C,lob}}{\sum_C V^*_{C,lob}}.$$

2. módszer

A további módszerek mind maximum likelihood becslésen alapulnak. A második módszer feltevései:

- a várható veszteség a díjjal arányos;
- a vállalatok várható kárhányadai egymástól különböző konstansok;
- a veszteség varianciája a díjjal arányos (és így a szórás a díj gyökével);
- a veszteség eloszlása lognormális.

A fentieknek megfelelően a korábbi jelöléseket használva legyen az $U_{t,C,lob}$ kár várható értéke és szórásnégyzete:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(U_{t,C,lob}) &= V_{t,C,lob}\, \mu_{C,lob}, \\ \mathrm{D}^2(U_{t,C,lob}) &= V_{t,C,lob}\, \beta^2_{lob}, \end{aligned}$$

[1] Az eredeti képletben, feltehetően elírás következményeként, a négyzetes tagon belül $\sum \frac{U}{V}$ szerepel $\frac{\sum U}{\sum V}$ helyett.

ahol $\mu_{C,lob}$ a kárhányad várható értéke és (a csak LoB-onként különböző) β^2_{lob} a veszteség varianciájának arányossági tényezője. Így a kár eloszlása az alábbi formában írható fel:

$$U_{t,C,lob} \sim V_{t,C,lob}\, \mu_{C,lob} + \sqrt{V_{t,C,lob}}\, \beta_{lob}\, \varepsilon_{t,C,lob},$$

ahol $\varepsilon_{t,C,lob}$ 0 várható értékű, 1 szórásnégyzetű eloszlás.

A lognormális eloszlás paraméterei:

$$\begin{aligned} S_{t,C,lob} &= \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\mathrm{Var}(U_{t,C,lob})}{\mathrm{E}^2(U_{t,C,lob})}\right)} = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\beta^2_{lob}}{V_{t,C,lob}\, \mu^2_{C,lob}}\right)}, \\ M_{t,C,lob} &= \ln\big(\mathrm{E}(U_{t,C,lob})\big) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\mathrm{Var}(U_{t,C,lob})}{\mathrm{E}^2(U_{t,C,lob})}\right) = \ln(V_{t,C,lob}\, \mu_{C,lob}) - \frac{1}{2}\, S^2_{t,C,lob}. \end{aligned}$$

A loglikelihood függvény a következő:

$$\log L = \sum_{t,C} \left(-\ln(U_{t,C,lob}\sqrt{2\pi}) - \ln(S_{t,C,lob}) - \frac{(\ln U_{t,C,lob} - M_{t,C,lob})^2}{2S^2_{t,C,lob}} \right),$$

mivel ez (minden LoB-ra) μ-ben és β-ban maximalizálandó, a zárójelben az első tag elhagyható, és az alábbi egyszerűsített függvény maximalizálása lesz a feladat:

$$\max_{\mu_{C,lob},\beta_{lob}} \left\{ \sum_{t,C} \left(-\ln(S_{t,C,lob}) - \frac{(\ln U_{t,C,lob} - M_{t,C,lob})^2}{2S^2_{t,C,lob}} \right) \right\}.$$

Mivel a kár szórása $\sqrt{V}\beta$, a kockázat (kárhányad) becsült szórását az alábbi képlettel kapjuk (vállalatonként, LoB-onként):

$$\sigma_{C,lob} = \frac{\hat{\beta}_{lob}}{\sqrt{V^*_{C,lob}}},$$

ahol $\hat{\beta}_{lob}$ a becsült arányossági tényező.

A közös szórást (LoB-onként) szintén a vállalatok szórásainak súlyozott átlagával kapjuk.

3. módszer

A harmadik módszer szinte teljesen azonos az előzővel, csak egy feltételben különböznek, mégpedig, hogy az egyes kockázati csoportokban a várható (konstans) kárhányad minden vállalat esetén megegyezik: van egy közös μ_{lob}. Így a kár eloszlását az alábbi képlettel kapjuk:

$$U_{t,C,lob} \sim V_{t,C,lob}\,\mu_{lob} + \sqrt{V_{t,C,lob}}\,\beta_{lob}\,\varepsilon_{t,C,lob},$$

a többi képlet az előző módszerhez analóg módon alakul.

4. módszer

A negyedik módszer is hasonló az előzőkhöz, a különbség csak az, hogy a veszteség varianciája a díj gyökével arányos (és így a szórása arányos a díjjal). A várható kárhányadról azt tesszük fel, hogy vállalatonként és LoB-onként különböző konstans: $\mu_{C,lob}$. Ennek megfelelően a kár eloszlása:

$$U_{t,C,lob} \sim V_{t,C,lob}\,\mu_{C,lob} + V_{t,C,lob}\,\beta_{lob}\,\varepsilon_{t,C,lob}.$$

A lognormális eloszlású kár paraméterei:

$$\begin{aligned} S_{t,C,lob} &= \sqrt{\ln\left(1+\frac{\mathrm{Var}(U_{t,C,lob})}{\mathrm{E}^2(U_{t,C,lob})}\right)} = \sqrt{\ln\left(1+\frac{\beta_{lob}^2}{\mu_{C,lob}^2}\right)}, \\ M_{t,C,lob} &= \ln\big(\mathrm{E}(U_{t,C,lob})\big) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\mathrm{Var}(U_{t,C,lob})}{\mathrm{E}^2(U_{t,C,lob})}\right) = \ln(V_{t,C,lob}\,\mu_{C,lob}) - \frac{1}{2}\,S_{t,C,lob}^2. \end{aligned}$$

A fentiekhez hasonlóan az alábbi maximalizálási feladatra jutunk (csak az S_t és M_t definíciója változik):

$$\max_{\mu_{C,lob},\beta_{lob}} \left\{ \sum_{t,C} \left(-\ln(S_{t,C,lob}) - \frac{(\ln U_{t,C,lob} - M_{t,C,lob})^2}{2S_{t,C,lob}^2} \right) \right\}.$$

Itt a kár szórása $V \cdot \beta$, így a kárhányad szórása:

$$\sigma_{lob} = \hat{\beta}_{lob}.$$

Mivel a β_{lob} nem vállalatspecifikus, ezért a kapott szórás a közös szórás.

A KÖBE gépjármű-felelősség biztosításának árazási kockázata

A módszerek bemutatása után a KÖBE gépjármű-felelősség (ami az osztályozásnak megfelelően a „Motor, vehicle liability” homogén kockázati csoportot alkotja) biztosításának

Év	Díj	Kár T+1	Kárhányad T+1
2001	1 707 129 046	1 295 863 451	75,91%
2002	3 008 777 925	2 519 481 546	83,74%
2003	4 370 462 281	3 385 747 233	77,47%
2004	5 330 358 851	3 464 309 097	64,99%
2005	5 420 634 930	3 485 669 834	64,30%
2006	6 136 692 518	3 781 725 809	61,62%
2007	7 301 980 256	4 680 741 094	64,10%
2008	7 462 412 501	4 439 257 934	59,49%
2009	7 249 771 244	4 082 994 020	56,32%
2010	5 863 332 329	3 367 980 390	57,44%

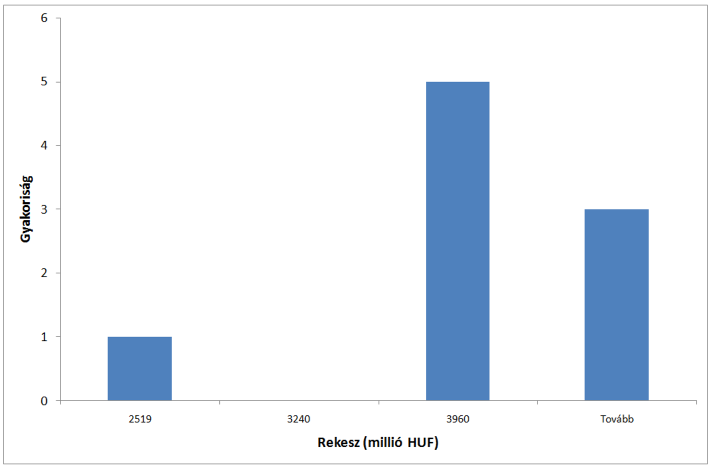
6.1. ábra. A KÖBE díj és kár adatai a kötelező gépjármű felelősség biztosításra.

adatain is lefuttatom a számításokat. A választás azért esett főként erre a LoB-ra, ugyanis ez a legfőbb termék, a díjbevétel több, mint 90%-át teszi ki. A számításokat Microsoft Excelben ill. az R statisztikai programcsomagban végeztem.

Ehhez felhasználtam a KÖBE 2001-2010-es KGFB kár és díj adatait, amit a 6.1. táblázat foglal össze.

A díj oszlopba az adott évi nettó megszolgált díj került, a károkat pedig a KÖBE aktuáriusai úgy számították, hogy az adott évi kárkifizetéshez hozzáadták a függőkárok tartalékát egy év után „visszatekintve", amikor már pontosabban látni a károk alakulását (ezért kapta a „Kár T+1" nevet). Fontos megjegyezni, hogy ezzel nem a legjobb becslést kapjuk a kárhányadra, ugyanis nem a jelenleg kialakult helyzetet tükrözik, mert pl. 2012. első negyedévben a 2001-es károkat valószínűleg már teljességükben ismerjük, és ez a kárhányad 93,6% a 2002-ben gondolt 75,91% helyett. Azonban, hogy a mérési hibák kiegyensúlyozottak legyenek, és minden évben a „zaj" mértéke azonos legyen, ezért választottuk mi is a CEIOPS által használt módszertant a kár adatra.

Először is az eloszlás-feltételezéseket vizsgáltam. A károkat először egy hisztogramon ábrázoltam (6.2. ábra). A kevés adat miatt nem látható igazán az eloszlás struktúrája,



6.2. ábra. A KÖBE KGFB kárainak gyakorisága.

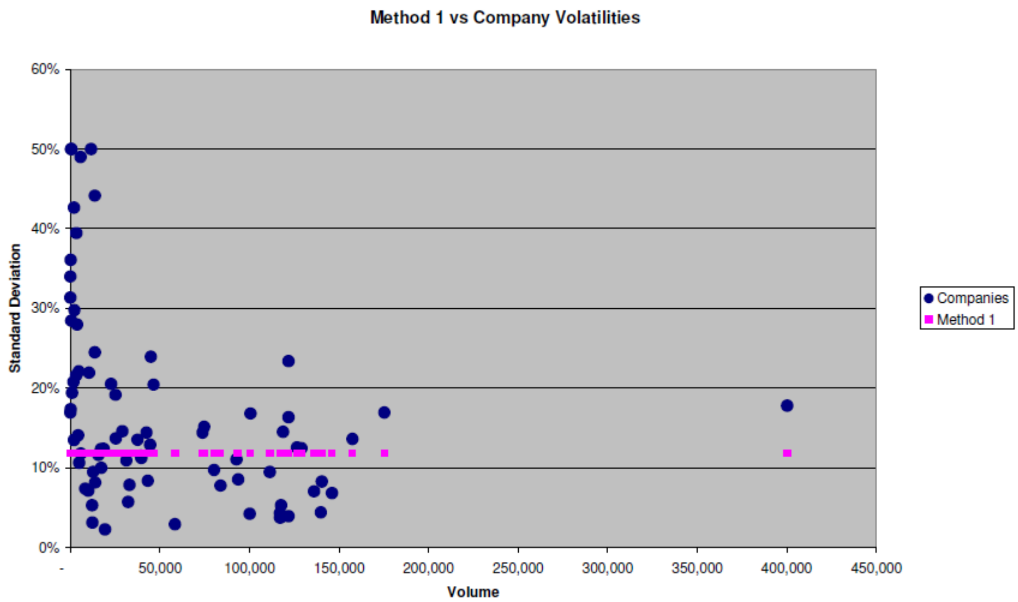
így további normalitási teszteket végeztem. A Jarque-Berra próba az adatok csúcsosságát és ferdeségét veti össze a normális eloszlás csúcsosságának 3 értékével és az eloszlás szimmetrikusságával. A próbastatisztika értéke 2,72, amellyel 25,6%-os biztonsági szinten (p-érték) is elfogadhatjunk a normalitás feltételezését. A Shapiro-Wilk próba is hasonló eredmény adott, a $W = 0,9044$ statisztika értékhez 24,45%-os p-érték tartozik. Ellenben a Kolmogorov-Szmirnov próba (a statisztika értéke 1) alapján minden szignifikancia-szinten el kell vetnünk a normalitás hipotézisét. Összevetve a három eredményt (és figyelembe véve a KS-próba „szigorúságát"), a normalitás feltételezését elfogadhatjuk.

A lognormalitást úgy vizsgáljuk, hogy a károk logaritmusát vetjük alá a teszteknek. A Jarque-Berra teszt 8,14 értékéhez már csak alacsony, 1,71%-os p-érték tartozik. A Shapiro-Wilk tesztstatisztikája $W = 0,7801$ értéket vett föl, így p-értéke csak $0,8\%$, és hasonlóan a Kolmogorov-Szmirnov tesztet is el kell vetnünk (0 p-érték). Összegezve, a lognormalitás feltételezését el kell vetnünk.

A korábban bemutatott négy szórásbecslési módszerből három különböző értelmezhető egy adott vállalatra (a 2. és 3. csak több biztosító esetén különbözik egymástól). A módszerek eredményeit a KÖBE adataira, illetve a CEIOPS által közölt számokat az alábbi táblázat foglalja össze:

Módszer	KÖBE	CEIOPS
1.	7,97%	11%
2.	7,13%	10%
3.	7,13%	24%
4.	8,54%	20%

Az első módszerben a KÖBE adadtaira a díjjal korrigált tapasztalati szórásra 7,56% jött ki. A QIS4 felmérésben pedig a CEIOPS 8,4%-ot kapott a súlyozott szórás módszerrel. A CEIOPS végül az első módszer mellett döntött, és az általa kapott eredményt, valamint a QIS4 eredményét vette figyelembe a 10%-os szint meghatározásánál.



6.3. ábra. A CEIOPS által vizsgált vállalatok kárhányadainak súlyozott szórás módszerrel számolt szórása (forrás: [5]).

A 6.3. ábrán látható az egyes vállalatok kárhányadainak súlyozott szórása, és az átlagként kapott 11%-os szint. Az ábra jól mutatja, hogy az egyes vállalatok szórása igen változékony, a néhány százaléktól egészen 50%-ig találunk értékeket. Az eltérések főként a kisebb GFB portfólióval rendelkező biztosítók esetén szembetűnők. Ezeknek a vállalatoknak a szórása rendszerint a választott 10%-os szint fölé esik, így az árazási kockázatra számított SZTSZ esetükben alábecsüli a tényleges kockázatot.

Egybevetve az eloszlásra vonatkozó tesztek és a CEIOPS választását, az első módszer a legmegfelelőbb, bár a KÖBE esetében a többi sem mutat jelentős eltérést. A 7,97%-os kárhányadszórással számított árazási és tartalékolási kockázat (2011-es adatokra) SZTSZ-e 1 895 millióról 1 639 millió forintra (13,5%-ot) csökkent, ezzel a nem-életbiztosítási kockázat SZTSZ-ét 13%-kal csökkentve, ami végeredményben 8%-ot csökkent a szükséges szavatolótőkén.

A számítási módszer finomítható például megbízhatósági (credibility) elmélettel, ahol a vállalat átlagát és a piaci átlagot súlyozzuk optimális súlyokkal. Ekkor persze a szavatolótőke elem magasabb lesz, mert a piaci átlag felfelé húzná a KÖBE eredményét.

A feltételezések értékelése

Az egyik legfőbb feltételezés – amiről már korábban is volt szó –, hogy a kárhányadot időben konstans várható értékű valószínűségi változónak tekintik, holott a nem-élet ágban a biztosító viszonylag rugalmasan tud reagálni. Ha valami „baj” van, az új (vagy megújított) szerződések díjával tudja korrigálni az előző évi nem megfelelő kárhányadot, így a kockázatnak a kárhányad szórásával való mérése nem teljesen helyes.

Kérdéses feltevés, hogy a működési hányad volatilitása megegyezik a kárhányad volatilitásával, a költségek nem változtatnak azon. Ennek vizsgálatára sajnos nem volt módom, ugyanis a KÖBÉ-nek sem volt elérhető adata allokált költséghányadra. Azonban, úgy érezzük, a jutalékok a kárhányaddal ellentétesen mozognak, az adminisztrációs költségekre pedig jó feltételezésnek tűnik, hogy együtt mozog a kárhányaddal, de statisztikai vizsgálat híján nem igen lehet megmondani az egyes hatások eredőjét.

Komoly egyszerűsítés az is, hogy a CEIOPS minden országra, minden biztosítóra egy darab számot ad meg szórásra, holott láthattuk, hogy például biztosítóméret szerint igen jelentős különbségek jelentkeztek. Országonként is eltérések lehetnek, ha az egyes vezetési kultúrákat, a biztosítói gyakorlatot vesszük alapul.

Amint láttuk, az eloszlásbeli feltételezés a normalitásnál elfogadhatónak tűnt (a KÖBE adatait alapul véve), viszont a lognormalitást el kellett vetnünk, ami pedig alapfeltevése a modul SZTSZ számításának során.

Mivel korábban már tárgyaltuk, hogy az időben konstans kárhányad feltételezése azért nem megfelelő, mert a vállalat egyéni döntése is jelentősen befolyásolja azt, akkor láthatjuk, hogy a harmadik módszer arra vonatkozó feltevése, hogy a biztosítóknak egy közös várható kárhányada van, erősen kétséges.

Nem érintettük még azt a kérdést, hogy helyes-e azt feltételezni, hogy a veszteség varianciája vagy szórása a díjjal arányos. Tekintsük a biztosításban használt alábbi díjképzési elveket:

$$\begin{aligned} \text{Variancia-elv:} \qquad H(X) &= \mathrm{E}(X) + \alpha \mathrm{D}^2(X), \quad \alpha > 0; \\ \text{Szórás-elv:} \qquad H(X) &= \mathrm{E}(X) + \beta \mathrm{D}(X), \quad \beta > 0, \end{aligned}$$

ahol $H(X)$ az X kockázat díja. Ezek azt feltételezik, hogy a biztosító valamilyen kockázati prémiumot tesz a várható kárra, hogy az esetleges kilengéseket „kivédje". Ha ezeket a díjelveket vesszük alapul, akkor azt látjuk, hogy a díjból le kellene vonni a veszteség várható értékét, és ez lesz arányos a varianciával vagy szórással, vagyis a kár az alábbi eloszlást követné:

$$U_{t,C,lob} \sim V_{t,C,lob}\, \mu_{C,lob} + (V_{t,C,lob} - V_{t,C,lob}\, \mu_{C,lob})\, \beta_{lob}\, \varepsilon_{t,C,lob},$$

vagy

$$U_{t,C,lob} \sim V_{t,C,lob}\, \mu_{C,lob} + (\sqrt{V_{t,C,lob}} - V_{t,C,lob}\, \mu_{C,lob})\, \beta_{lob}\, \varepsilon_{t,C,lob}.$$

Bár ezek igen elméleti díjképzési megközelítések, mégis úgy érezzük, a valóságot jobban megragadják, mint annak feltételezése, hogy a variancia vagy szórás a díjjal arányos.

A tartalékkockázat számításánál is több módszert mérlegelt a CEIOPS. A tartalékok és a kárkifizetések hányadosát vizsgálta, azt feltételezve, hogy a hányados várható értéke 1. Az árazási kockázatéhoz hasonló módszerekkel mérte ennek a hányadosnak a szórását. A felhasznált 6 módszer közül az első három analóg a fentebb ismertetettekkel, a másik három pedig a legkisebb négyzetes előrejelzési hiba felhasználásával[2] becsli a szórást. A módszerek futtatásához a kárkifizetéseket, valamint a függőkár-tartalékok (tételes függőkár- és IBNR-tartalékok) kifutási háromszögeit használták fel. A végső szórás érték meghatározásánál az utolsó három módszer eredményeit használták fel. Ezek alapfeltevése az, hogy adott

[2] A módszert kidolgozó Michael Merz és Mario V. Wuthrich (2008) után „Merz-modellnek" nevezték el.

bekövetkezési évhez tartozó kifizetések függetlenek egymástól, valamint az adott bekövetkezési évhez tartozó kumulatív kárkifizetés Markov-folyamatot alkotnak, azaz, ha $C_{i,j}$ jelöli az i-edik évben bekövetkezett károk j-edik évig történt kifizetéseinek összegét, akkor

$$\mathrm{P}(C_{i,j+1} = c \,|\, C_{i,i} = c_i, \ldots, C_{i,j} = c_j) = \mathrm{P}(C_{i,j+1} = c \,|\, C_{i,j} = c_j),$$

vagyis nem őrzi meg a fejlődés információját, csak a legutolsó állapottól függ a következő évi kifizetés.

Ezek a feltevések a gyakorlatban is helytállóak, bár lehetnek olyan helyzetek, amikor, ha túl sok, vagy túl kevést kárt fizetett a biztosító, akkor erre reagálva – nem túl etikusan – a következő időszakban szigorúbb vagy elnézőbb lesz a kárrendezést illetően, azonban ha a kárrendezést nem maga a biztosító végzi, akkor erre kisebb ráhatása van.

7. fejezet

A standard modell a gyakorlatban

Ebben a fejezetben először pár szót írnék a Szolvencia II. rendszert előkészítendő „QIS" (Quantitative Impact Study) mennyiségi hatástanulmányokról, majd a QIS5 (2010) és QIS5bis (2011) mennyiségi hatástanulmányok magyarországi eredményeit mutatom be: egyrészről, hogy a KöBÉ-nek mekkora szavatolótőke elemek jöttek ki, másrészt, hogy a piacon általánosan mi mondható a szavatolótőkéről. Előbbi adatait a KÖBE aktuáriusai és befektetési vezetője bocsátották rendelkezésemre, utóbbi alapjául a PSZÁF QIS5 ([15], [13]) és QIS5bis [21] riportja szolgált.

7.1. A QIS-ek

A CEIOPS a Szolvencia II. kidolgozása során szerette volna felmérni a biztosítókat érintő kvantitatív hatásokat, ezért felkérte a társaságokat, hogy önkéntes alapon értékeljék pénzügyi helyzetüket: készítsék el a Szolvencia II. szerinti mérlegüket, számítsák ki tartalékaikat, szolvenciaigényüket stb. Az európai felügyelet ezek eredményeit felhasználta a kidolgozás alatt álló Szolvencia II. rendszer kiépítéséhez, a résztvevő biztosítók pedig idejében felkészülhettek az új szabályozásra, beleszólhattak annak megvalósításába.

Az első mennyiségi hatástanulmányban (QIS1, 2005) a résztvevők felmérték a biztosítástechnikai tartalékuk prudens voltát a Szolvencia II-es szabályok alapján. Fő változás a korábbi módszerhez képest az eszközök és kötelezettségek „valós értéken" (Fair Value) való értékelése a könyv szerinti értékkel szemben. A QIS2 (2006) már szélesebbkörű felmérést tett lehetővé, itt már a szükséges és minimális szavatolótőke-igényt is kiszámíthatták a vállalatok a CEIOPS által biztosított Excel-modellben, vagy saját modelljükben. A QIS3 2007-ben, a QIS4 2008-ban folyt le, lényegi változás a tőkekövetelményeket illetően történt, a formulát rendre javították, átdolgozták. Ezen tapasztalatokat felhasználva 2009-ben elfogadták a Szolvencia II. keretirányelvet. A 2007-ben kezdődött, 2008-ban Európában is elmélyült pénzügyi válságból levont tanulságokat felhasználva és beépítve az új szabályozási rendszerbe, 2010-ben elvégezték a QIS5 felmérést 2009-es adatokra, majd a magyarországi felügyelet 2010-es adatokon futtatva megismételte az ötödik hatástanulmányt (QIS5bis név alatt).[1]

Elsőként bemutatom a QIS5-ben és QIS5bis-ben kiszámított piaci eredményeket.

7.2. A QIS5 magyarországi eredményei

7.2.1. A QIS5 és a QIS5bis eredményei

Az ötödik mennyiségi hatástanulmányban 2009-ben összesen 30 vállalat vett részt, ebből 9 kompozit, 11 élet- és 10 nem-életbiztosító. Az újrafuttatott hatástanulmányban 19 biztosító vett részt, melyek közül 8 kompozit, 7 élet- és 4 nem-életbiztosító.

A Szolvencia II-es mérleg

Ahhoz, hogy némileg átfogó képet kapjunk, először röviden bemutatom a Szolvencia II-es mérleg alakulását. Az alábbi táblázatok (7.1. és 7.2. ábra) összehasonlítják a magyarországi biztosítási piac Szovencia I szerinti összesített mérlegének főbb pontjait a QIS5-ben (2009 és 2010-es adatokon) számolt mérlegtételekkel, a százalékok a Szolvencia II-beli elvárásokat fejezik ki a jelenlegi, Szolvencia I-es mérlegtételekhez viszonyítva.

[1] Korábban is volt már példa az újrafuttatásra, a QIS4-et Magyarországon megismételték 2008-as adatokkal.

millió HUF	**Szolvencia I.**	**QIS5**	**QIS5 az SI. %-ban**
Biztosítástechnikai tartalékok	1 919 468	1 454 479	76%
Egyéb kötelezettségek	187 998	219 105	117%
Tőkeszükséglet	110 905	289 706	261%
Szabad tőke	148 505	331 363	223%
Mérlegfőösszeg	**2 366 875**	**2 294 652**	**97%**

7.1. ábra. Összesített mérleg a Szolvencia I-ben és a QIS5 hatástanulmányban.

millió HUF	**Szolvencia I.**	**QIS5bis**	**QIS5bis az SI. %-ban**
Biztosítástechnikai tartalékok	1 942 470	1 531 158	79%
Egyéb kötelezettségek	113 282	156 275	138%
Tőkeszükséglet	102 547	263 584	257%
Szabad tőke	113 080	242 925	215%
Mérlegfőösszeg	**2 271 379**	**2 193 942**	**97%**

7.2. ábra. Összesített mérleg a Szolvencia I-ben és a QIS5bis hatástanulmányban.

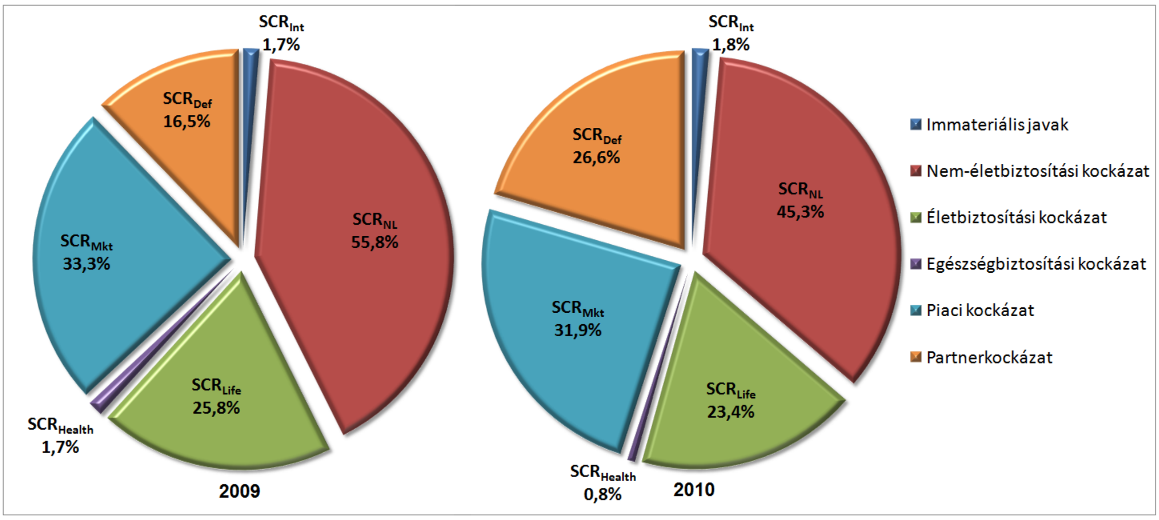
A 7.1. és a 7.2. táblázatokban a „Szabad tőke” a saját tőke tőkeszükséglet feletti többlete, vagyis a saját tőke és a tőkeszükséglet különbsége. A „Tőkeszükséglet” a Szolvencia I-ben a minimális biztonsági tőke és a minimális szavatolótőke-szükséglet, a QIS5-ben az MTSZ és az SZTSZ közül a nagyobbik. Mindkét hatástanulmány alátámasztja, hogy a tartalékok terén piac-szinten csökkenés várható – a 2009-es állás szerint pl. 24%-kal kevesebb lehetne a biztosítástechnikai tartalékok összege,[2] ha az új szabályozás lenne érvényben –, ennek fő oka a pénz időértékének figyelembe vétele, a diszkontálás. Eddig csak a technikai kamatlábbal diszkontáltak a biztosítók, most azonban a kockázatmentes hozamgörbével hozhatják jelenértékre a kötelezettségeiket, ami jellemzően magasabb a jelenlegi kamatlábnál (2,9% élet- és egészségbiztosítások esetében, a nem-élet felelősségbiztosítási járadékoknál pedig 0%). Nem-élet ágban ez a csökkenés jelentősebb, az SII tartalék a jelenlegi tartaléknak csak 55%-a, az élet ágban ez az arány 83%. A tőkekövetelmény viszont a Szolvencia II-es szabályok szerint radikálisan magasabb, több mint 2,5-szerese a jelenleginek. Bár az új

[2] Az említett forrásban az értékeket euróban adták meg, ezt a CEIOPS által biztosított fájl alapján 270,5 HUF/EUR árfolyammal számítottam át forint értékre.

szabályozásban az eszközök és a források értékelésében jelentős szemléletváltás történt, a főösszegek eltérése mégsem jelentős.

A Szolvencia II-beli szavatolótőke-szükségletek

Mint egy korábbi fejezetben láttuk, a szavatolótőke-követelmény több modul tőkeigényének aggregációja során kapható meg. A 7.3. ábra szemlélteti az egyes kockázati modulok súlyát az SZTSZ-ben az alapvető SZTSZ (BSCR) százalékában (a diverzifikációs hatást egyelőre figyelmen kívül hagyva).



7.3. ábra. A magyarországi biztosítók összesített alapvető szavatolótőke-követelményének elemei.

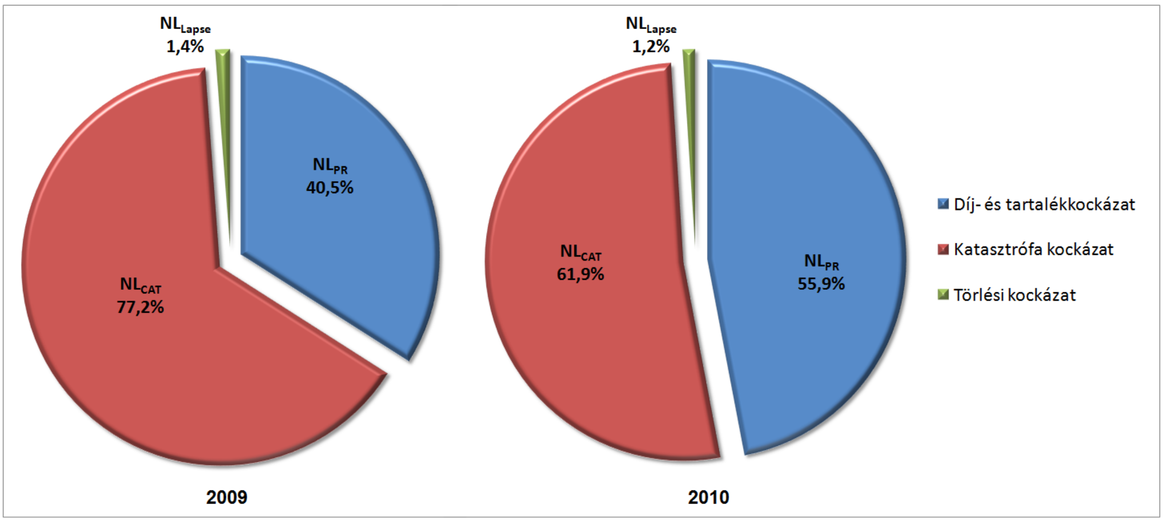
A legfajsúlyosabb kockázatok a biztosítási kockázatok – ezek közül is a nem-életbiztosítási kockázat –. Jelentős arányt képvisel a piaci kockázat és a partnerkockázat, míg az immaterális javak csak alig járulnak hozzá a BSCR-hoz. Jelentős a diverzifikációs hatás, mindkét évben 30% körüli (a BSCR százalékában). Az ábrán látható modulok összesítése után hátravan a működési kockázat és a korrigáló tényezők hatásának értékelése, ezek rendre körülbelül 10% és -14%-kal (a BSCR százalékában) járulnak hozzá a végső szavatolótőke szükséglethez (SCR).

A biztosítófajtánkénti megbontás alapján azt mondhatjuk, hogy a kompozit biztosítók esetében legjelentősebbek a biztosítási kockázatok (kiváltképp a nem-életbiztosítási), majd a partner- és a piaci kockázatok. Életbiztosítók esetében komoly tényező a piaci kockázat, egyes vállalatok esetében még a biztosítási kockázaton is túltesz. Ennek oka az életbiztosításra jellemző nagy tartalékok megléte, ezek befektetése. Azt is megtudhattuk, hogy jelentős unit-linked portfólióval rendelkező biztosítók működési kockázatának SZTSZ-e viszonylag magas a unit-linked költségek miatt. Nem-életbiztosítók esetében a biztosítási kockázat igen meghatározó, a piaci kockázat rendszerint alacsonyabb (vagy esetenként közel azonos nagyságú).

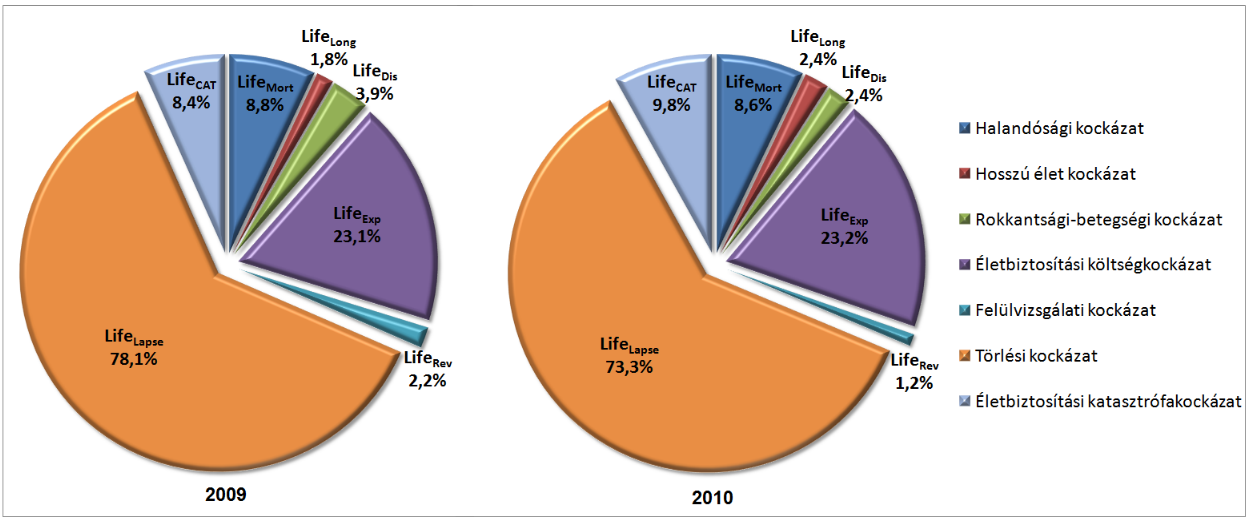
A továbbiakban a fontosabb kockázati modulok részmodulra-bontását mutatom be. Bár dolgozatom tárgyául a nem-életbiztosítási ágat választottam, ahhoz, hogy legyen összehasonlítási alapunk, az életbiztosítási modult is prezentálom röviden.

Biztosítási kockázati modulok felbontása

A nem-életbiztosítási modul felbontása a 7.4. ábrán, az életbiztosítási a 7.5. ábrán látható. A legjelentősebb nem-élet kockázat a katasztrófakockázat. Ezzel szemben az életbiztosítási kockázatnál ez az almodul igen csekély. A nem-életbiztosítási díj- és tartalékkockázat is igen nagy szeletet képvisel mindkét hatástanulmányban, míg a törlési kockázat egyáltalán nem jelentős. Ellenben az életbiztosítási SZTSZ-nél a törlési kockázat adja a modul legnagyobb részét. Az eltérések oka főleg a visszavásárlás lehetősége életbiztosítások esetén, másrészt a futamidőben keresendő, mert míg a nem-élet szerződések többnyire egy(-két) évre szólnak, addig az életbiztosítások tartama több tíz év is lehet. Ezért is olyan jelentős a költségkockázat az életbiztosításoknál. A nem-életbiztosításban a diverzifikációs hatás -19% körüli – ez valamivel kisebb, mint az életbiztosítási kockázat esetén, de szignifikáns eltérés nem tapasztalható.



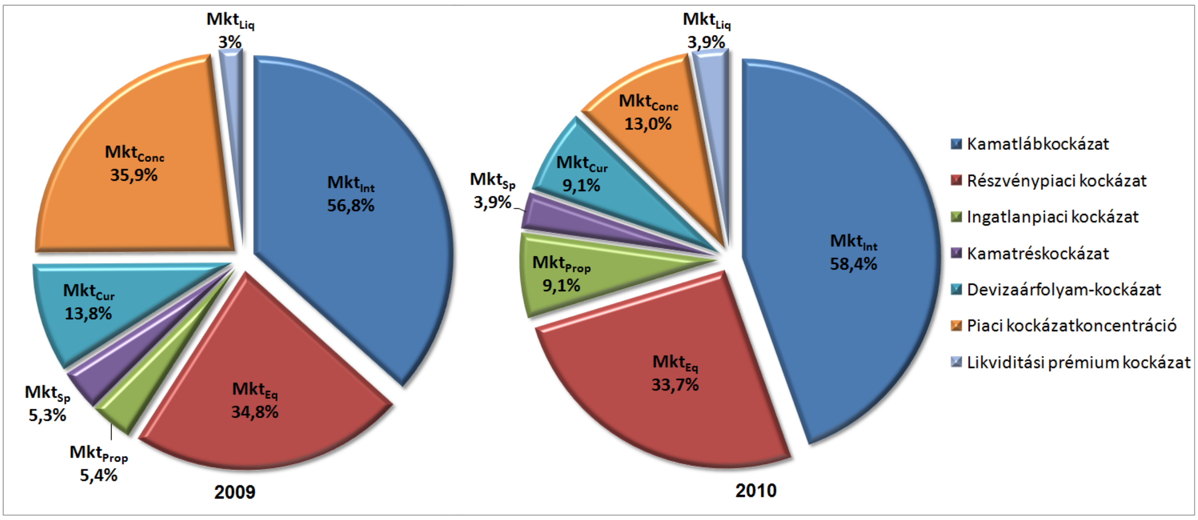
7.4. ábra. A nem-életbiztosítási kockázati modul szavatolótőke-szükségletének (SCR_{NL}) felbontása almodulok szerint (az SCR_{NL} arányában).



7.5. ábra. Az életbiztosítási kockázati modul szavatolótőke-szükségletének (SCR_{Life}) felbontása almodulok szerint (az SCR_{Life} arányában).

A piaci kockázati modul felbontása

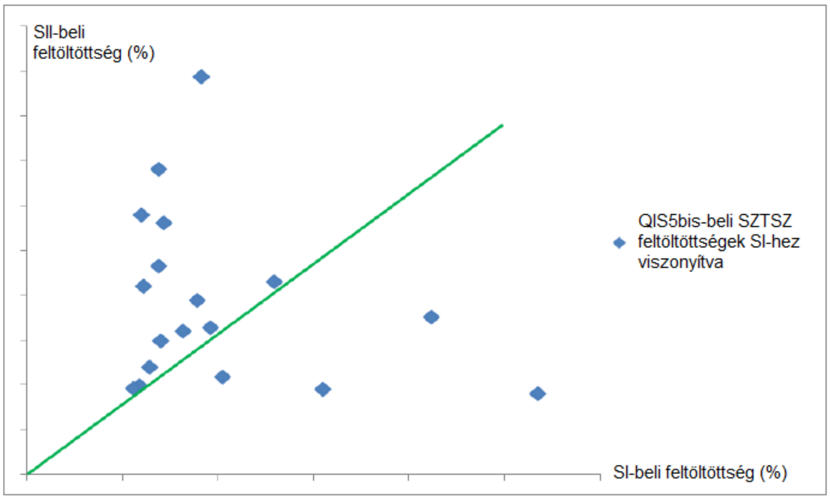
A 7.6. ábra mutatja a piaci kockázati modul felbontását részmodulokra. A három legjelentősebb kockázat a kamatláb-, a részvény-, valamint a koncentrációs kockázat, ezek együtt



7.6. ábra. A piaci kockázat szavatolótőke-szükségletének (SCR_{Mkt}) felbontása almodulok szerint (az SCR_{Mkt} arányában).

– a diverzifikációs hatást figyelembe véve – a piaci modul SZTSZ-ének több, mint 80%-át képviselik. Számottevő almodul még a devizaárfolyam-kockázat, és 2010-ben az ingatlankockázat is. Ennek a modulnak fő jellemzője, hogy igen erős a diverzifikációs hatás, bár a két év között jelentős eltérés mutatkozik ebben: 2009-ben 55%, 2010-ben viszont csak 31% BSCR csökkenést generál.

Szavatolótőke feltöltöttség alatt a tőkekövetelmény és a rendelkezésre álló szavatolótőke arányát értjük. Ezzel kapcsolatban érdekes felfedezést tettek a [21] készítői, nevezetesen, hogy a Szolvencia I-beli és az új rendszerbeli SZTSZ tőkemegfelelőségek fordítottan arányosak, akinek magasabb volt az SI szerinti feltöltöttsége, annak alacsonyabb SII szerint, és fordítva. Ezt mutatja a 7.7. ábra. A vízszintes tengely az SI szerinti feltöltöttség százalékban kifejezve, a függőleges tengelyen az SII-beli arány. Az ábrán látható, hogy a biztosítók egy jó része illeszkedik a 45°-os egyenesre, egy nagyobb „boly" látható az egyenes fölött – ezek közel azonos Szolvencia I-es feltöltöttséggel rendelkeznek, Szolvencia II. szerint jóval magasabb ez a szint, de egymástól is jelentősen eltérnek – és három vállalat erősen „kilóg" az egyenes alatt: közülük kettőnek szinte azonos a Szolvencia II-beli tőkemegfelelőségi szintje, holott SI-ben az egyik szintje közel duplája a másikénak.



7.7. ábra. A Szolvencia I szerinti és a QIS5bis-ben mért szavatolótőke-szükséglet feltöltöttségek biztosítónként (forrás: [21]).

7.3. A KÖBE szavatolótőke eredményei a QIS5-ben

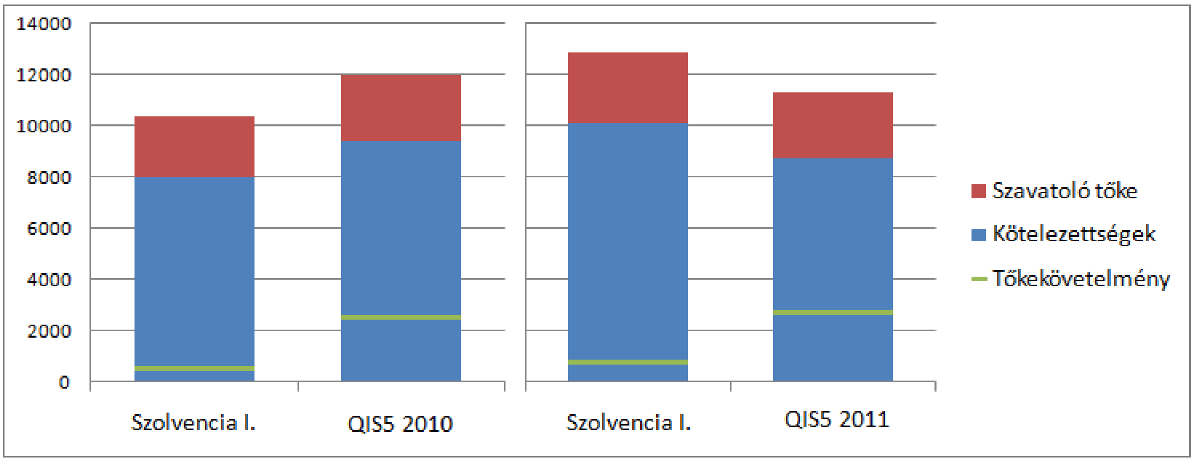
Mivel a KÖBE már elvégezte a számítást 2011 adatokon is, ezért a QIS5 eredményeit a 2010-es és 2011-es adatokon mutatom be.

millió HUF	**Szolvencia I.**	**QIS5 2010**	**QIS5 2010 az SI. %-ban**
Biztosítástechnikai tartalékok	4 346	5 824	134%
Egyéb kötelezettségek	3 616	3 616	100%
Tőkeszükséglet	610	2 520	413%
Szabad tőke	1 785	49	3%
Mérlegfőösszeg	**10 356**	**12 008**	**116%**

7.8. ábra. Összesített 2010. évi mérleg a Szolvencia I-ben és a QIS5 hatástanulmányban.

millió HUF	**Szolvencia I.**	**QIS5 2011**	**QIS5 2011 az SI. %-ban**
Biztosítástechnikai tartalékok	7 628	6 298	83%
Egyéb kötelezettségek	2 466	2 466	100%
Tőkeszükséglet	767	2 731	356%
Szabad tőke	2 005	- 205	-10%
Mérlegfőösszeg	**12 867**	**11 291**	**88%**

7.9. ábra. Összesített 2011. évi mérleg a Szolvencia I-ben és a QIS5 hatástanulmányban.



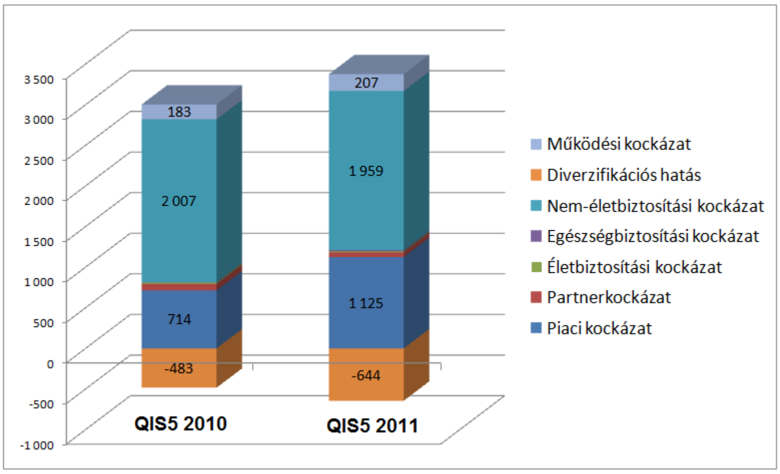
7.10. ábra. A KÖBE pénzügyi helyzete.

Először is tekintsük a mérleg alakulását. A 7.8. és a 7.9. ábrákon láthatjuk az egyszerűsített mérleg Szolvencia I. szerinti és a Szolvencia II. szerinti alakulását az egyes években. A 7.10. ábra a 2010-es és 2011-es mérleget mutatja szavatoló tőke és kötelezettségek bontásban.

Legszembetűnőbb változás a tőkeszükségletben következett be, mind 2010-ben, mind 2011-ben a standard formula szerinti SZTSZ többszöröse (kb. 4- ill. 3,5-szerese) a jelenleginek. Feltöltöttség szempontjából – a [21] észrevételét alátámasztandó – a KÖBE azon biztosítók közé tartozik, akiknek a Szolvencia I szerinti feltöltöttsége igen magas (2010-ben 393%, 2011-ben 361%), az SII szerinti arány pedig alacsonyabb. A rendelkezésre álló tőke 2010-ben még „éppen” elég volt (102%), 2011-ben azonban már nem fedezte az SII szerinti tőkeigényt (92%). A biztosítástechnikai tartalékok terén volt némi változás, míg 2010-ben

SI szerint alacsonyabbak voltak az SII szerintinél, a következő évben megfordult a helyzet. 2010-ben az SII tartalékok 34%-kal magasabbak voltak, mint az SI, 2011-ben viszont 17%-kal alacsonyabbak voltak. Összességében a tartalékok és a tőkekövetelmény emelkedése miatt a mérlegfőösszeg 2010-ben 19%-kal magasabb lett az új szabályozás alapján, 2011-ben azonban az alacsonyabb tartalékok 12%-os főösszeg csökkenést eredményeztek.

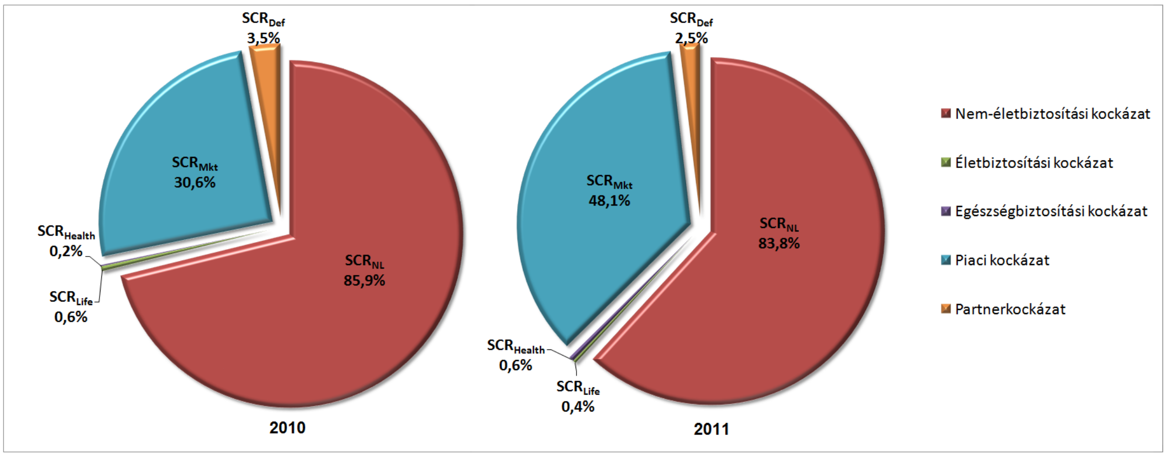
A továbbiakban a szavatolótőke-szükséglet felbontását vizsgáljuk. A 7.11. ábrán hatástanulmányonként láthatjuk a kockázati modulok SZTSZ-eit.



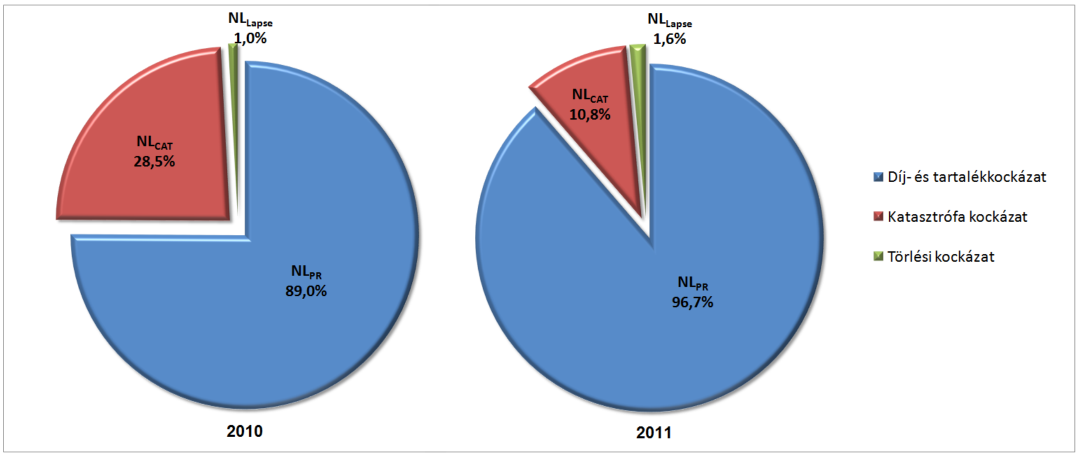
7.11. ábra. A KÖBE szavatolótőke-követelményének elemei.

Látható, hogy összességében az SZTSZ kicsit nőtt (8%-ot), a modulok egymáshoz viszonyított aránya nem sokat változott. Az egyetlen szignifikáns különbség a két év között a piaci modulban van (58%-ot nőtt), valamint – mivel a többi modullal viszonylag alacsony, 0,25 a korreláció – a piaci modul nagy diverzifikációs hatásának köszönhetően a diverzifikáció is nőtt 33%-ot (21-ről 36%-ra).

A továbbiakban az alapvető SZTSZ elemeit vizsgáljuk. A 7.12. diagramon láthatjuk a részmodulokat a BSCR százalékában. Látható, hogy mindkét évben a nem-életbiztosítási kockázat volt a legjelentősebb, aránya (a diverzifikációt is figyelembe véve) 71% és 62% az egyes években. Mint korábban láttuk, a nem-élet SZTSZ szinte nem változott, az eltérést a piaci kockázat „erősödése" okozza. Ez a két kockázat teszi ki a BSCR 96-7%-át, a maradék néhány százalékot a partnerkockázat képviseli, az élet- és egészségbiztosítás elhanyagolható.

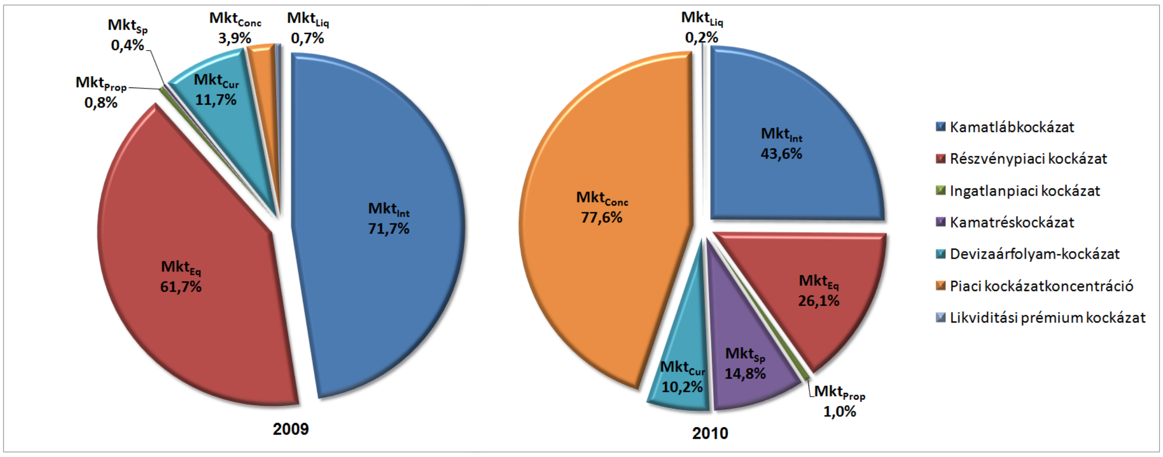


7.12. ábra. A KÖBE alapvető szavatolótőke-követelményének elemei.



7.13. ábra. A KÖBE nem-életbiztosítási kockázat szavatolótőke-követelményének elemei.

A 7.13. ábráról leolvasható, hogy a nem-életbiztosítási kockázat szavatolótőke-követelménye lényegében két nagy kockázatból, a díj- és tartalékkockázatból és a katasztrófakockázatból tevődik össze. Szembetűnő változás, hogy a katasztrófakockázat aránya jelentősen lecsökkent, ezt a hozzá tartozó SZTSZ-ek is alátámasztják: 572-ről 212 millió forintra csökkent a tőkeigénye 2011-re. A díj- és tartalékkockázat alig változott, arányának változása a katasztrófakockázat csökkenésének tudható be. A diverzifikáció 18%-ról 9%-ra változott (épp a katasztrófakockázat csökkenése miatt), ami ellensúlyozta a katasztrófakockázat



7.14. ábra. A KÖBE piaci kockázat szavatolótőke-követelményének elemei.

SZTSZ-csökkenését, így végeredményben a két év között nem szignifikáns az eltérés. A katasztrófa almodul csökkenésének oka a kockázat egy részének viszontbiztosításba adása. 2010-ben a biztosító egy kisebb lakásbiztosítási és Casco portfólióval rendelkezett, így a kockázatot 100%-ban vitte, majd az állomány növekedésével viszontbiztosítási megállapodást kötött, így bár nagyobb portfólióval rendelkezik, a szavatolótőke-elem a harmadára csökkent.

A 7.14. ábrán látható a piaci kockázat felosztása részmodulokra. Mint korábban láttuk, a modul SZTSZ-e 714-ről 1125 millió forintra nőtt, a következőkben megvizsgálom, mi okozta a nagy növekedést.

Első ránézésre „minden megváltozott”, a 2010-ben nagy kockázatok, a kamatláb- és részvénykockázatok visszaszorultak, helyettük a (korábban kis szeletet képviselő) koncentrációs kockázat lett a domináns, és 2011-re a kamatréskockázat is jelentős szerepet kapott. Mivel sok minden változott, fontos megnézni a konkrét összegeket:

millió HUF	**QIS5 2010**	**QIS5 2011**
Kamatlábkockázat	512	490
Részvénypiaci kockázat	441	290
Ingatlanpiaci kockázat	6	12
Kamatréskockázat	3	166
Devizaárfolyam-kockázat	84	114
Piaci kockázatkoncentráció	28	873
Likviditási prémium kockázat	5	3
Összesen	1 078	1 953
Diverzifikációs hatás	- 364	-828
SCR_{Mkt}	714	1 125

Láthatjuk, hogy igazán jelentős változás két almodul esetén történt: a kamatréskockázat és a koncentrációs kockázat 2010-ben még nem volt jelentős kockázat, 2011-re azonban komoly szerepet kaptak, a piaci kockázatkoncentráció magasan a legnagyobb SZTSZ-t kapta. Ezek azért nőttek meg ennyire, mert a KÖBE 2011-ben eurós kötelezettségei fedezetére euró alapú magyar államkötvényeket vett, amire – a saját devizában kibocsátott állampapírokkal szemben – már kell kamatréskockázatot számítani. Ráadásul – a CEIOPS által meghatározott – kamatrés nagysága a kibocsátó hitelminősítő cégek általi besorolástól függ, így a magyar állam leminősítése is jelentős hatással bírt a szavatoló-tőke elem kiszámításánál. Hasonlók mondhatók a koncentrációra, ez az almodul is ennek hatására nőtt meg. Fontos tudni, hogy bármely állam által, saját devizában kibocsátott államkötvényekre azonban nem kell kamatrés- és koncentrációs kockázatot számítani, így egy lehetséges lépés a tőkeigény csökkentésének érdekében olyan állam által (pl. szlovák) kibocsátott állampapírok vásárlása, amelyeknek saját devizája az euró, és gazdaságilag közel áll Magyarországhoz.

8. fejezet

Összegzés

Bár igen sok helytálló kritika éri a Szolvencia II. szabályozást, mégis erős túlzásnak érzem azokat a megmozdulásokat, amik az új szabályozást „velejéig rossznak" titulálnak, és követelik annak eltörlését.

Sok kritika éri a választott kockázati mértéket, a VaR-t is, azonban a TVaR-ral szemben igen nagy előnye, hogy kevésbé adat- és számításigényes. Bemutatásra kerültek más jó tulajdonságai is, továbbá azt is láttuk, hogy a standard formulában használt feltételezésekkel még szubadditív is.

Természetesen, a standard formulában is lenne még min finomítani, például egyes módszerek igen szofisztikáltak (partnerkockázat), míg mások túlságosan egyszerűek (működési kockázat szavatolótőke-szükséglete). Kérdéses, hogy némely számítási elv mért tesz jelentős egyszerűsítést – mint például a díj- és tartalékkockázatnál az egységes szórás minden országra és minden biztosítóra –, holott más számításokban – például a katasztrófakockázat esetén – országonként, sőt régiónként más paraméterekkel kell számolni. Úgy gondolom, az aggregáció során tett feltételezések is jelentős egyszerűsítések, de összességében fontosnak tartom egy kockázatérzékeny rendszer kialakítását, ahol nem a prudens biztosítót „büntetik" magas szavatolótőke-követelménnyel.

Végezetül felmérhettük a magyar biztosítási piac „felkészültségét" az új szabályozás mennyiségi követelményeire, láthattuk, mik a jelentősebb kockázatok, illetve tanulhattunk is belőle: néhány kockázatnál láttuk, egyes paraméterekre mennyire érzékeny a standard formula.

A. Függelék

A.1. Elliptikus eloszlások

Az elliptikus eloszlások valószínűségeloszlásoknak egy családja. A normális eloszlás legtöbb jó tulajdonságát megőrzik, azonban nagyobb szabadságteret engednek a függőségek modellezésére.

Egy $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ [1] valószínűségi változó eloszlása elliptikus $\mu \in \mathbb{R}^n$ és $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ paraméterekkel (azaz $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \Psi)$), ha a karakterisztikus függvénye a következő alakú:

$$\varphi(t) = E(e^{it'X}) = e^{it'\mu}\, \Psi(t'\Sigma t),$$

ahol $t' = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, Σ pozitív definit mátrix és Ψ skalárfüggvény a *karakterisztikus generátor*. Többdimenziós normális eloszlás esetén például a $\Psi(u) = e^{-u/2}$. Speciálisan 1 dimenzióban az elliptikus eloszlások pontosan a szimmetrikus eloszlások.

Az X elliptikus eloszlású valószínűségi változó nem mindig rendelkezik sűrűségfüggvénnyel, de ha létezik a sűrűségfüggvény, akkor a következő alakú:

$$f(x) = \frac{c_n}{\sqrt{|\Sigma|}} \cdot g_n\big((x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\big),$$

ahol $c_n \geq 0$ paraméter *normalizáló konstans* (normalizing constant), g_n nem-negatív függvény *sűrűségfüggvény generátor* (density generator). Ekkor a jelölés: $X \sim E_n(\mu, \Sigma, g_n)$.

Ha $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \Psi)$ és a várható érték létezik, akkor $E(X) = \mu$. Ha létezik a kovarianciamátrix, akkor az a Σ mátrix konstansszorosa.

Néhány szép tulajdonsága az elliptikus eloszlásoknak:

[1] A ' jel a transzponálás operátor

- Elliptikus eloszlású valószínűségi változó lineáris függvénye is elliptikus.
- Többdimenziós elliptikus eloszlás peremeloszlásai is elliptikusak.
- Elliptikus eloszlású változók összegének eloszlása elliptikus.

Irodalomjegyzék

[1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., M., Heath, D. (1998): Coherent Measures of Risk

[2] Az Európai Parlament és a Tanács 2009/138/EK Irányelve (2009. november) a biztosítási és viszontbiztosítási üzleti tevékenység megkezdéséről és gyakorlásáról (Szolvencia II) (átdolgozott változat)

[3] Bende Júlia Borbála (2009): Portfólió VaR és a VaR kritikái, Diplomamunka

[4] CEA (2006. november): CEA Working Paper on the risk measures VaR and TailVaR

[5] CEIOPS (2009. november): Consultation Paper No. 71, Draft CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR Standard Formula Calibration of non-life underwriting risk

[6] CEIOPS (2009. november): Consultation Paper No. 74, Draft CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR Standard Formula, Correlations

[7] Csóka Péter „Empirikus pénzügyek" előadásai (2011. ősz)

[8] Danielsson, J., Jorgensen, B., N., Samorodnitsky, G., Sarma, M., C. G. de Vries (2011): Fat Tails, VaR and Subadditivity

[9] Devineau, L., Loisel, S. (2009): Risk aggregation in Solvency II: How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula?

[10] Dr. Hajdu Gabriella (PSZÁF, Pillar II munkacsoport): Tájékoztató a szolvencia II. folyamatról, 2005. február 23-i biztosítói konzultációs nap

[11] EIOPC (2006. november): Choice of a risk measure for supervisory purposes: possible amendments to the Framework for Consultation

[12] European Commission (2010. július): QIS5 Technical Specifications

[13] Gaálné Kodila Diána, Somlóiné Tusnády Paula, Varga Gábor (PSZÁF, 2011 február): A QIS5 mennyiségi eredményei

[14] Hanák Gábor „Biztosítási tartalékolás és szolvencia" előadásai (2011. tavasz)

[15] Hungarian Financial Supervisory Authority (2011. június): QIS5 Country Report for Hungary

[16] Jin Peng (2009): Value at Risk and Tail Value at Risk in Uncertain Environment, *Proceedings of the Eighth International Conference on Information and Management Sciences, Kuming and Banna*

[17] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M.: Modern Actuarial Risk Theory, Using R. *Springer-Verlag, Heidelberg.*

[18] Kochanski, M. (2010): Solvency Capital Requirement for German Unit-Linked Insurance Products

[19] McNeil, A., Frey, R., Embrechts P. (2005): Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, Tools. *Princeton Univerity Press.*

[20] Móra Mária (2008): Mi a teendő? - Kiútkeresés a másodrendű jelzálogpiaci válság nyomán, *Hitelintézeti Szemle*, **7.** évf. **5.** szám, 520–539.

[21] Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete, Módszertani és aktuáriusi főosztály (2011. december): A QIS5 magyarországi újrafuttatásának összegző értékelése

[22] Szegö, G. (2004): Kockázat és szabályozás, *Hitelintézeti Szemle*, **3.** évf. **2.** szám, 1–31.

[23] The London Working Group (2002): Prudential Supervision of Insurance Undertakings

[24] Vadym Omelchenko: Elliptical Distributions előadása (http://www.karlin.mff.cuni.cz)

[25] http://www.index.hu