Játékelmélet és pénzügyek

Czigány Gábor

2013. május 30.

Eötvös Lóránd Tudományegyetem - Budapesti Corvinus Egyetem
Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak
Témavezető: Dr. Csóka Péter

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Jelen dolgozat keretében tőkeallokációs problémákat fogunk vizsgálni játékelméleti módszerekkel. A probléma tulajdonképpen a következő: Egy adott vállalat részlegei közötti együttműködés során létrejövő, a diverzifikációból eredő többlettőkét hogyan osszuk vissza a vállalat egyes részlegeinek? Ezen probléma felírására létezik matematikai modell, amelyet a dolgozatban tőkeallokációs helyzetnek nevezünk. Korábbi eredményekre támaszkodva belátható, hogy a tőkeallokációs helyzetek osztálya és a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztálya megfeleltethető egymásnak.
Az ilyen tőkeallokációs problémák megoldására születtek a tőkeallokációs módszerek, amelyek tulajdonképpen matematikai modellek. Ezekkel a módszerekkel szemben három szemléletes elvárással élünk, azonban az eddigi kutatások eredménye, hogy nem létezik olyan tőkeallokációs eljárás, amely egy klasszikus tőkeallokációs helyzetben, azaz a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztályán, minden kimenetel mellett teljesítené mind a három kritériumot.
Az [5] cikkben a szerző a tőkeallokációs helyzet modellének likviditással történő kiegészítése mellett vizsgálták, hogy az így kapott játékosztály bővebb lesz-e a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztályánál, ugyanis ebben az esetben a fenti lehetetlenségi tétel elképzelhető, hogy nem teljesül. Az eredmények azonban nem lettek teljesen általánosak, ugyanis csak egy bizonyos feltétel mellett sikerült belátni az ilyen tőkeallokációs helyzetek teljesen kiegyensúlyozottságát. Ezért a likviditás bevezetésével sem jutunk olyan játékosztályra, amelyen létezik mind a három kritériumot teljesítő tőkeallokációs eljárás.
A dolgozat önálló eredménye a fenti egybeesés bizonyítása általánosságban. Ennek érdekében szerepel benne néhány újradefiniált fogalom, ezek tulajdonságai, valamint néhány segédállítás.
A dolgozat során végigvesszük a szükséges fogalmakat. Első fejezetben a likviditással kapcsol elméletet vesszük végig. Ezt csak később, a dolgozat végén a modell kibővítésénél fogjuk újra használni.

A második fejezetet a kockázati mértékekre szánjuk, ezen belül is kiemelten a koherens kockázati mértékekre. Ez a fogalom alapvető lesz a tőkeallokációs helyzetek definiálásánál, és kiterjedt elmélete miatt indokolt külön fejezetben foglalkozni vele.
A harmadik fejezetben a likviditás nélküli tőkeallokációs helyzetek modelljeit vizsgáljuk, és kölcsönös megfeleltetésüket a teljesen kiegyensúlyozott játékokkal.
A negyedik fejezetben a dolgozat fő eredménye és a hozzá kapcsolódó segédállítások találhatóak néhány korábbi eredménnyel együtt.
Az utolsó fejezet a végkövetkeztetést mondja ki, azaz, hogy a likviditási feltétel mellett is lehetetlen megfelelő tőkeallokációs eljárást találni.

2. fejezet

Likviditás

2.1. A likviditás szemléletesen

Mivel a likviditás fogalmára a koherens kockázati mértékekkel való kapcsolat szempontjából lesz szükségünk, ezért az e két fogalom kapcsolatára vonatkozó [1] cikk alapján építjük fel a likviditás fogalmát ebben a fejezetben, néhol módosításokat bevezetve.
Mindenek előtt tisztáznunk kell a likviditás intuitív fogalmát. Egy eszközt likvidnek nevezünk, ha rövid időn belül tetszőlegesen nagy mennyiséggel kereskedhetünk anélkül,hogy a piac árait befolyásolnánk ezzel. Ezzel szemben az illikvid eszközökkel való kereskedéskor számíthatunk az árak megváltozására illetve arra, hogy a kereskedni kívánt mennyiségre azonnal nem akad kereslet vagy kínálat. Emiatt az illikvid eszközökből azonnal pénzt csinálni annál nehézkesebb, minél nagyobb a tartott mennyiség. Így egy illikvid eszköz mennyiségének növelése és értékének növekedése között nem lineáris a kapcsolat. Abban az esetben persze, ha a kereskedő biztos benne, hogy a jövőbeli kifizetési kötelezettségeit ki tudja majd fizetni más eszközökkel, és az illikvid eszközeit nem kell sürgősen eladnia, akkor ez a fajta kockázat rá nem vonatkozik, és az illikvid eszközeinek értéke magasabb lesz.
Ebből jól látszik, hogy a különböző kereskedők számára más és más értéket képvisel egy adott illikvid termék a jövőbeli kifizetéseiktől függően. Ennek hátterében az un. likviditási elvárás áll, azaz az egyes illikvid eszközökből vásárolható mennyiség egy adott kereskedő esetén.

2.2. A likviditás matematizálása

A likviditási kockázat fenti szemléletes bevezetése után lássunk pontos matematikai definíciókat. Elsőként tegyük föl, hogy J darab illikvid termékünk van, valamint egy teljesen likvid termék. Ez utóbbi termék a valós kereskedésben a pénz, így mi is gyakran fogunk pénzként hivatkozni rá. Ez a pénz természetesen egy kitüntetett pénz, a többit valutának tekintjük, és mint ilyen, kockázatos eszköznek számít. Az eszközöket jelöljük $A_0, A_1, \ldots, A_J$-nel, ahol a A_0 termék a pénzt jelöli, a többi pedig az illikvid eszközöket. Jelölje p_i az i. termékből tartott mennyiségünket.
Ha egy illikvid termékre vonatkozó pozíciónkon rövid időn belül változtatni kényszerülünk, akkor a piacon jelenlévő árakhoz és kínált mennyiségekhez kell alkalmazkodnunk, amelyek a kereslet-kínálati görbében szerepelnek. Így el is jutottunk az első alapvető fogalmunkhoz, amelyet [1] után marginális kereslet-kínálati görbénk fogunk hívni. Tételezzük fel, hogy egy adott illikvid termékből z mennyiséget kell eladnunk. Ekkor rendezzük csökkenő sorrendbe a piac legjobb vételi ajánlatait. Legyen ezek ára m_k és a belőlük piacon lévő mennyiség Δx_k. Az indexezés itt csak annyiban számít, hogy teljesülnie kell a $k < l \Rightarrow m_k > m_l$ összefüggésnek. Legyen a legjobb vételi ár m_1 a második legjobb m_2 és így tovább. A z mennyiséget nyilván a számunkra legjobb áron szeretnénk eladni, ezért először a legjobb vételi árból jelenlévő mennyiséget aknázzuk ki, majd, ha ez kisebb az általunk eladni kívánt mennyiségnél, akkor a második legjobb áron lévő ajánlat következik, és így tovább. Ezt formalizálva: Válasszuk a z_k mennyiségeket úgy, hogy $\sum_k z_k = z$ és $z_k \leq \Delta x_k$. Ekkor a k. termékből vegyünk z_k mennyiséget, így összesen $\sum_k z_k m_k$ áron tudtuk eladni a kívánt mennyiséget. Hasonló gondolatmenet érvényes abban az esetben, ha vásárolnunk kell. Ekkor a legjobb eladási árral kell először számolnunk, majd a másodikkal, és így tovább, amíg meg nem vásároltuk a kellő mennyiséget. Ez alapján itt a kínált árakat növekvő sorrendbe kéne raknunk, de az árakat is $-1, -2, \ldots$ sorozattal indexezve, az eladási árak is csökkenő sorrendben lesznek sorbarendezve. A venni kívánt z mennyiséget tekintsük negatívnak, így különböztetve meg az eladni kívánttól. Ezután tekintsük a következő $x \mapsto m(x)$ leképezést, amelyet úgy definiálunk, hogy $x > 0$ esetén $m(x)$ a legrosszabb vételi árajánlattal, amit kénytelenek vagyunk elfogadni, ha x mennyiséget szeretnénk eladni. Abban az esetben, ha $x < 0$, $m(x)$ egyenlő lesz a legrosszabb eladási árral, amelyet kénytelen leszünk elfogadni, ha $-x$ mennyiséget vásárolunk rövid időn belül. Így egy monoton csökkenő függvényt kapunk, amely megadja a legjobb vételi vagy eladási árakat és a hozzájuk tartozó mennyiséget a $[-z, 0)$ vagy a $(0, z]$ intervallumon, attól függően, hogy venni vagy eladni szeretnénk-e a z mennyiséget.

2.1.Def:. *Az A_i termék jól kereskedett, ha a fent bevezetett $m : R \setminus \{0\} \mapsto R$ függvényre*

teljesül:
1. $m_i(x) \leq m_i(y)$*, ha* $x > y$
2. m_i *càdlàg, ha* $x < 0$*, és làdlàg, ha* $x > 0$.

Ezt az m_i függvényt az A_i termék marginális kereslet-kínálati görbéjének nevezzük. Az angol nyelvű irodalomban ennek neve marginal supply-demand curve, innen származik az MSDC rövidítés, amelyet mi is gyakran fogunk alkalmazni. Az $m(0^+), m(0^-)$ határértékeket a legjobb eladási illetve a legjobb vételi ajánlatoknak nevezzük. A bid-ask spread így $m(0^-) - m(0^+)$ értékkel egyenlő. A 0-ban az m függvényt szükségtelen definiálni, mivel a későbbi számításokra semmiféle hatása nincs, másrészről a gyakorlati életben sem találhatunk intuíciót az érték megfelelő definiálásáról.
Megjegyezzük, hogy a 2. feltétel csupán technikai, ugyanis a gyakorlati számításokban az m függvény integráljára lesz szükségünk. A valós kereskedésben az MSDC-kre viszont teljesül a második tulajdonság, ezért tesszük fel mi is.
Most következzenek alapvető definíciók.

2.2.Def:. *Az* A_0 *speciális eszközt* pénznek *nevezzük. Ennek* m_0 *MSDC-je azonosan egyenlő eggyel.*

A pénz MSDC-jére vonatkozó feltevés nyilvánvalóan szükségszerű, ugyanis egy adott mennyiségéért senki sem lesz hajlandó többet adni, vagy kevesebbért eladni.
Vegyünk egy konkrét kockázatos eszközt. Az egyszerűbb írásmód kedvéért az indexet elhagyjuk, így az eszközt magát A, az MSDC-jét m, a belőle tartott mennyiséget pedig p fogja jelölni. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy a tartott p mennyiséget milyen áron tudjuk értékesíteni, ha bizonyos vásárlási vagy eladási kényszernek vagyunk kitéve.
Az első esetben azt tesszük fel, hogy semmiféle kereskedést nem kell végrehajtanunk. Azzal az erős feltételezéssel élve, hogy a legjobb vételi és eladási árak hosszútávon sem változnak, a legjobb stratégia lassanként eladni a p mennyiséget, így számunkra ez a p mennyiség $m(0^+)p$ vagy $m(0^-)p$ értékű lesz, attól függően, hogy long vagy short pozícióban vagyunk, azaz hogy $p > 0$ illetve $p < 0$ esetek melyike áll fönn. Könnyen végiggondolható, hogy adott p mennyiségért az A termékből ennél magasabb árat nem kaphatnánk $p > 0$ esetén, és $p < 0$ mellett ennél jobb áron nem vásárolhatnánk.
Az írásmód leegyszerűsítése végett két új függvényt vezetünk be. Legyen $u : R \setminus \{0\} \mapsto R$ az $x \mapsto m(0^+)$ ha $x > 0$, és $x \mapsto m(0^-)$ ha $x < 0$, illetve $U : R \mapsto R$ az $x \mapsto \int_0^x u(x)dx$ $(x \neq 0), U(0) = 0$ hozzárendeléssel megadott függvény. Könnyű belátni, hogy

a 0-tól különböző x-ekre az U függvény egyenlő a fent számított maximális értékkel, amelyet x mennyiségű A eszközért kaphatunk. Az U 0-ban való definiálása egy technikai feltétel, amelyre a későbbiekben szükségünk lesz. Mindamellett végiggondolható, hogy 0 mennyiségű eszköz értéke valóban nulla lesz, így ez a definiálás indokolt is.

Most tegyük fel, hogy az A-ból tartott p mennyiséget meg kell változtatnunk. Az így tartott új mennyiséget jelöljük p'-vel. Vizsgáljuk meg, hogy egy ilyen kikényszerített tranzakció mellett mi a maximális érték, amit a p-n nyerhetünk. Az azonnali kereskedésünk mennyisége $p' - p$ mennyiség. Amennyiben ez az érték pozitív, akkor az A eszközből vennünk kell, tehát az eladási oldal legjobb $p' - p$ eladási ajánlatát kell figyelembe vennünk. Így ennek a tranzakciónak a költsége

$$-\int_0^{-(p'-p)} m(x)dx.$$

A negatív előjel következtében a kifejezés a kereskedés költségét méri, ugyanis annak pozitivitásakor merül fel kiadás, negativitásakor pedig bevétel. A $p' - p < 0$ eset azonos gondolatmenete után a likviditási költségre azonos kifejezés jön ki.

Az így kapott p' mennyiséget hosszútávon $U(p')$ áron értékesíthetjük, viszont így le kell mondanunk az $U(p)$ hosszútávú értékéről, tehát ebből egy $-(U(p') - U(p))$ alakú kifejezésünk származik. A negatív előjel itt is azért szükséges, hogy a felmerülő költséget pozitívan mérjük. Ezek alapján világos a következő definíció helyessége.

2.3.Def:. *Az A eszköz $p \to p'$ kereskedésének likviditási költségfüggvénye a következő:*

$$L_p(p') = -(U(p') - U(p)) - \int_0^{-(p'-p)} m(x)dx = U(p) - U(p') - \int_0^{-(p'-p)} m(x)dx$$

Az itt bevezetett likviditási költségfüggvény többeszközös portfóliók esetén felbomlik az egyes eszközök egyedi likviditási költségeinek összegére, tehát egy $\mathbf{p}' \to \mathbf{p}$ kereskedés esetén igaz az

$$L_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}') = \sum_{i=0}^{J} L_{i,p_i}(p_i') \tag{2.1}$$

felbontás, ahol $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ jelölik a portfóliókat reprezentáló vektorokat, p_i, p_i' pedig az ezekben szereplő eszközök mennyiségeit.

A pénz mint speciális eszköz likviditási költsége minden $p \to p'$ kereskedés esetén 0, ami a konstans MSDC következménye. Ekkor ugyanis a likviditási költségfüggvényben szereplő integrál az azonosan 1 függvény integrálja lesz a $(0, -(p' - p)]$ intervallumon, így értéke $-(p' - p)$ lesz. Ugyanakkor az $U(p) - U(p')$ kifejezés értéke $p - p'$-vel egyenlő. A két tag különbsége 0, így a likviditás költség is nulla. Gyakorlatilag a likviditási költségnek a hiánya okozza, hogy a pénzt végtelenül likvidnek tekintjük, mint az a következő definícióból is kiderül.

2.4.Def:. *Az A eszközt végtelenül likvidnek nevezzük, ha likviditási költségfüggvénye azonosan nulla.*

Könnyű végiggondolni, hogy egy eszköz akkor végtelenül likvid, ha az MSDC-je konstans.
Fontos megjegyeznünk, hogy az itt bevezetett likviditási költségfüggvény fogalma nem esik egybe az [1] által bevezetett $C(\mathbf{p}) = U(\mathbf{p}) - \int_0^p m(x)dx$ likviditási költségfüggvénnyel. Ez utóbbi annyit mér csupán, hogy egy adott $\mathbf{p}$ portfólió azonnali áruba bocsátása mekkora likviditási költséget generál. Tehát az ő likviditási költségfüggvényük a $p \mapsto L_{\mathbf{p}}(\mathbf{0})$ hozzárendelés, ahol $\mathbf{0}$ jelöli a minden eszközben nulla portfóliót.
A likviditási költségfüggvénynek erre az új definiálására a későbbi eredmények miatt lesz szükség.

2.3. A likviditási költségfüggvény tulajdonságai

Ebben a szakaszban a likviditási költségfüggvény legfontosabb tulajdonságaival foglalkozunk, továbbra is egyeszközös esetben, amelyből könnyen megkaphatjuk a portfólió esetét.
Nyilvánvaló elvárás a nemnegativitás. Ennek belátásához írjuk fel a függvényt integrálalakban:

$$\int_{p'}^{p} m(0^{sign(x)})dx - \int_0^{p-p'} m(x)dx,$$

ahol $m(0^{sign(x)})$ jelölés $m(0^+)$-t jelöli, ha $x > 0$ és $m(0^-)$-t, ha $x < 0$. Ekkor a p és p' viszonya alapján két eset lehetséges. Ha $p > p'$ ekkor mind a két integrál pozitív lesz, a különbségük pozitivitásához be kell látni, hogy az első lesz a nagyobb. Mivel a $[0, p - p']$ intervallumon integrálunk az m szigorú csökkenése miatt $\forall q \in [0, p - p']$ esetén $m(+0) \leq m(q)$. A U csökkenéséből pedig a $q \in [p', p]$ intervallumon érvényes $m(+0) \leq U(p) \leq U(q)$ becslést kapjuk. Ezekből nyilvánvaló, hogy az első integrandus minden értéke legalább akkora, mint a második integrandus bármelyik értéke. Így az első integrál értéke a nagyobb, a különbség pozitív.
Hasonló a gondolatmenet a $p < p'$ esetben is. Az egyszerűbb áttekinthetőség kedvéért alakítsuk át az integrálokat:

$$-\int_{p}^{p'} m(0^{sign(x)})dx + \int_{p-p'}^{0} m(x)dx$$

Ekkor a második integrál tartománya a $[p-p', 0]$ intervallum, amelyen az integrandust az $m(-0)$ érték alulról becsüli. Valamint ez az érték felülről becsüli az U összes $[p, p']$-beli értékét is. Így a második integrandus minden értéke nagyobb az első integrandus minden értékénél, így az integráljaikra is ez a becslés adódik, tehát a második integrál a nagyobb. Innen jól látszik a keresett nemnegativitás.
A függvény nullában nyilván nulla értéket vesz fel, így a szigorú pozitivitást nem állíthatjuk.
A likviditási költségfüggvény folytonossága egyszerűen következik az integrálalakból. A majdnem mindenütt differenciálhatóság is egyszerű következménye az integrandusok majdnem mindenütt folytonosságának. A fő célunk a likviditási költségfüggvény konvexitásának belátása lesz. Ennek a tulajdonságnak a bizonyítása jóval összetettebb, felhasználunk benne egy segédállítást.

2.1.Áll:. *Egy adott $f : R \to R$ monoton növekvő függvény tetszőleges intervallumon integrálható, és az integrálfüggvénye konvex.*

Biz :
A tetszőleges intervallumon való integrálhatóság a monoton függvények majdnem mindenütt folytonosságának a következménye.
Az integrálfüggvény konvexitásához vegyük az $x_1 < x_2$ tetszőleges pontokat, és egy $\alpha \in (0, 1)$ számot. Legyen $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. Ezután vegyünk egy $a < x_1$ pontot, amellyel bevezetjük az $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ integrálfüggvényt. Mivel az integrálfüggvények csupán egy konstans erejéig különböznek egymástól, ezért az a érték x_1-től függő megválasztása nem jelenti az általánosság megszorítását.
Először alakítsuk át az $\frac{x_0-x_1}{x_2-x_0}$ hányadost. Az x_0 definícióját kihasználva kapjuk az

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{\alpha x_1 - (1-\alpha)x_2 - x_1}{x_2 - \alpha x_1 - (1-\alpha)x_2} = \frac{(1-\alpha)(-x_1 + x_2)}{\alpha(-x_1 + x_2)} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}$$

összefüggést.
A fönti összefüggést használva belátjuk F konvexitását. Az F-et integrálalakban felírva a következő egyenlőtlenség teljesülését kell bizonyítanunk:

$$\int_a^{x_0} f(y)dy \leq \alpha \int_a^{x_1} f(y)dy + (1-\alpha)\int_a^{x_2} f(y)dy$$

Az előbbi egyenlőtlenség bal oldalát átalakítva a

$$\alpha \int_a^{x_0} f(y)dy + (1-\alpha)\int_a^{x_0} f(y)dy \leq \alpha \int_a^{x_1} f(y)dy + (1_\alpha)\int_a^{x_2} f(y)dy$$

ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk. Átrendezés után pedig a

$$\alpha \int_{x_1}^{x_0} f(y)dy \leq (1-\alpha)\int_{x_0}^{x_2} f(y)dy$$

egyenlőtlenség teljesülését kell belátnunk. Az f monotonitása miatt az utóbbi egyenlőtlenség bal oldala felülről becsülhető $\alpha \int_{x_1}^{x_0} f(x_0)dy$-nal a jobb oldad pedig alulról becsülhető $(1-\alpha) \int_{x_0}^{x_2} f(x_0)dy$-nal. Emiatt elegendő a

$$\alpha \int_{x_1}^{x_0} f(x_0)dy \leq (1-\alpha) \int_{x_0}^{x_2} f(x_0)dy$$

egyenlőtlenségnek teljesülnie a konvexitáshoz. A konstans függvény intergálását elvégezve az

$$\alpha(x_0 - x_1)f(x_0) \leq (1-\alpha)(x_2 - x_0)f(x_0)$$

egyenlőtlenség adódik. Átrendezés és egyszerűsítés után jól látható, hogy itt pontosan az egyenlőség teljesül, ugyanis az

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}$$

összefüggést kaptuk. Ezzel az F konvexitását beláttuk. □

Az előző állítás felhasználásával rátérhetünk az $L_p(p')$ függvény konvexitásának a bizonyítására.

2.2.Áll:. *$L_p(p')$ konvex R-en.*

Biz :

A konvexitás belátásához a likviditási költségfüggvény

$$L_p(p') = \int_{p'}^{p} u(x)dx - \int_0^{p-p'} m(x)dx$$

integrálalakját használjuk föl. L_p p'-beli konvexitásához az integrálalak két tagjának p'-beli konvexitását elég belátni.

Az első tag a következőképpen alakítható át:

$$\int_{p'}^{p} u(x)dx = -\int_{p}^{p'} u(x) = \int_{p}^{p'} -u(x)dx$$

Innen a $-u(x)$ növekedése miatt következik az integrál p'-beli konvexitása.

A második tag konvexitásának belátása némileg hosszadalmasabb:

$$-\int_0^{p-p'} m(x)dx = -\int_{-p}^{-p'} m(x+p)dx$$

Itt az $y = -x$ változócserét alkalmazva az előző egyenlet jobb oldala egyenlő lesz az

$$\int_{p}^{p'} m(-y+p)dy$$

integrállal, amelynek integrandusa monoton növekvő az m csökkenése miatt. Így tehát az integrálalak második tagja is konvex lesz, és mint két konvex függvény összege maga a likviditási költségfüggvény is konvex lesz. □

2.4. Likviditási elvárás

Mint már említettük, egy kereskedő számára egy illikvid eszközökből álló portfólió értéke attól függ, hogy a várható jövőbeli kötelezettségeit abból kell-e fedeznie, vagy sem. Az ennek hátterében álló fogalmat nevezzük likviditási elvárásnak, amely valójában egy részhalmaza a portfóliók $\mathcal{P}$ vektorterének. Mielőtt azonban a likviditási elvárás fogalmát definiáljuk, definiálnunk kell egy másik fontos fogalmat, az elérhető portfóliók halmazát. Egy adott $\mathbf{p}$ portfólióból kiindulva, csupán a portfólió eszközmennyiségének megváltoztatásával nem érhetünk el tetszőleges portfóliót. Gondoljuk végig, hogy egyetlen A_i eszköz mennyiségén szeretnénk csak változtatni, az összes többi eszköz, beleértve a pénzt is, mennyiségét változatlanul hagyjuk. Ez viszont csak abban a szélsőséges esetben lehetséges, ha A_i-ből a kereskedni kívánt mennyiséget ingyen tudjuk vásárolni illetve eladni. Így hát a kiindulási $\mathbf{p}$ portfóliónk meghatároz egy részhalmazt a portfóliók halmazán, amelyek elérhetőek számunkra.

2.5.Def:. *Egy $\mathbf{p}$ portfóliót tartó kereskedő által elérhető portfóliók halmazát $Att(\mathbf{p})$-vel jelöljük, és $Att(\mathbf{p}) = \{\mathbf{q} \in P : \exists r \in P,$ hogy $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{r} + M(\mathbf{r})\}$, ahol $M(\mathbf{r}) = r_0 + \sum_1^n M_i(r) =$
$= r_0 + \sum_1^n \int_0^{-r} m_i(x)dx$, tehát az $\mathbf{r}$ portfólió értékesítéséért járó pénzösszeg.*

Ezután definiáljuk a likviditási elvárást.

2.6.Def:. *Az $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$ konvex, zárt halmazt likviditási elvárásnak (liquidity policy) hívjuk, ha*
1. $\mathbf{p} \in \mathcal{L} \Rightarrow p \oplus a \in \mathcal{L}\ \forall a > 0$
2. $\mathbf{p} = (p_0, \vec{p}) \Rightarrow (p_0, \mathbf{0}) \in \mathcal{L}$
3. $\mathcal{L} \cap Att(\mathbf{p}) \neq \emptyset$

Itt a $\mathbf{p} \oplus a = (p_0 + a, p_1, \ldots, p_n)$, ahol p vektor a pedig valós szám. Ez a definíció azt fejezi ki, hogy egy portfólióban tetszőlegesen sok pénz, és tetszőlegesen kevés illikvid termék minden likviditási elvárás mellett lehet.
A likviditási elvárás valójában egy kötelezettség, amelynek a portfóliónknak meg kell felelnie, azaz $\mathbf{p} \in \mathcal{L}$ tartalmazásnak teljesülnie kell. A likviditási elvárás a gyakorlati életben általában a szabályozó választja meg.
Alapvető példa likviditási elvárásra az úgynevezett *cash liquidity policy* osztály, amely egy valós a paraméterrel rendelkezik. Így ez az osztály $\mathcal{L}(a) = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P} | p_0 \geq a\}$ valamely rögzített a valós szám mellett. Ez a példa tulajdonképpen azt modellezi, hogy a szabályozás a tartott illikvid eszközök mennyiségére nem terjed ki, azonban a portfólióban lévő

pénzmennyiségnek legalább a-nak kell lennie.

Az eddigi fogalmak felhasználásával könnyen végiggondolhatjuk, hogy egy adott $\mathbf{p}$ portfólió egy $\mathcal{L}$ likviditási elvárás mellett mennyit is ér nekünk. Ha $\mathbf{p}$ portfóliót tarjuk, akkor egy olyan $\mathbf{p} \to \mathbf{q}*$ kereskedést fogunk végrehajtani, amelyben a $\mathbf{q}* \in \mathcal{L} \cap Att(\mathbf{p})$ teljesül, és $\mathbf{q}*$ az ezt teljesítő $\mathbf{q}$ portfóliók közül az, amelyikre $U(\mathbf{q}*)$ maximális. Ez a maximum persze nem mindig létezik, ilyenkor ehelyett szuprémumot kell vennünk. Így elérkeztünk a likviditással kapcsolatos legfontosabb definíciónkhoz:

2.7.Def:. *Egy* $\mathbf{p}$ *portfólió* $\mathcal{L}$ *likviditási elvárás melletti értéke:*

$$V^{\mathcal{L}}(\mathbf{p}) = \sup\{\mathbf{q} \in P | \mathbf{q} \in \mathcal{L} \cap Att(\mathbf{p})\}$$

ennek a fogalomnak az angol nyelvű elnevezése mark-to-market (MtM) vagy egyszerűen csak value, amelynek fordítását használjuk mi.

A likviditási költségfüggvény és a likviditási elvárás konvexitásának, valamint az utóbbi zártságának következménye, hogy adott $\mathbf{p}$ kiindulási portfólió mellett a $V^{\mathcal{L}}(\mathbf{p})$ értéket egy konvex optimalizálási feladat megoldásaként kapjuk. Könnyű ugyanis belegondolni, hogy ha létezik $\mathbf{q}*$ optimális portfólió, akkor az $U(\mathbf{p})$ és $U(\mathbf{q}*)$ értékek különbsége pontosan a $\mathbf{p} \to \mathbf{q}*$ kereskedés $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}*)$ értékével lesz egyenlő. Így a $\mathbf{q}^*$ értéket az $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}^*)$ függvény $\mathcal{L} \cap Att(\mathbf{p})$ feltétel melletti minimalizálásával kapjuk.

Olyan példa, amelyben nem létezik maximum, csupán minimum, található **Cska12**-ben.

3. fejezet

Kockázati mértékek

Ebben a fejezetben bevezetjük a kockázat fogalmát, valamint definiáljuk a kockázat mérésére alkalmas mértékeket, amelyeket kockázati mértéknek fogunk nevezni. A kockázati mértékekkel szemben természetes elvárásokat fogunk támasztani. Foglalkozunk ezen elvárások szemléletes jelentéstartalmával. Azok a kockázati mértékek, amelyek a fent említett követelményeknek eleget tesznek, egy fontos osztályát alkotják a kockázati mértékeknek, ez a koherens kockázati mértékek osztálya.
A koherens kockázati mértékekek bevezetése [2] nevéhez fűződik. A koherens kockázati mértékeket érték kritikák, amelyekről szót fogunk ejteni.

3.1. A koherencia axiómái

Mielőtt a koherencia axiómáira, mint a kockázati mértékekkel szemben támasztott természetes elvárásokra rátérnénk, be kell vezetnünk néhány alapvető fogalmat.
A következő kockázatkezelési helyzetből indulunk ki: Két időpont adott, 0 és T. A 0 időpontot jelenleginek fogjuk fel, ekkor a portfóliónk X_0 értéke determinisztikus. A T jövőbeli időpontban az X portfólióérték már egy valószínűségi változó lesz, a hozzá tartozó valószínűségi mezőt jelöljük (Ω, A, P)-vel. Felteszünk még egy un referenciaterméket, amelyből 0-ban δ értékűt tartva T-ben 1 lesz a kifizetésünk. A továbbiakban δ-ra diszkontfaktorként is fogunk hivatkozni. A portfóliónk jövőbeli értékének jelenértéke így nem más mint δX. Ekkor bevezethetjük a kockázat definícióját.

3.1.Def:. *A kockázat a portfóliónk jövőbeli értéke.*

1. Mj:
A szakirodalomban létezik olyan definíció, amely a kockázatot a jelenbeli portfólióérték és a diszkontált jövőbeli érték különbségeként definiálja. Itt meg kell jegyeznünk, hogy a dolgozat későbbi eredményeit illetően nem számít, hogy a két definíció közül melyiket használjuk.
2. Mj.:
A fenti modellt, amelyben csak két időpont létezik, egyperiódusos modellnek hívjuk, ugyanis a kereskedés egy periódusban, $[0, T]$-ben zajlik. A többperiódusos modellekről további információkat találunk [3]-ben.
Egyelőre a portfóliót alkotó eszközök pontos ismeretétől tekintsünk el. Nyilvánvaló, hogy a kockázat szempontjából a portfóliónk jövőbeli értéke számít, függetlenül attól, hogy milyen eszközökből áll. Így tulajdonképpen az (Ω, A, P) valószínűségi mező fölötti valószínűségi változók halmazát vehetjük a kockázatok halmazának. Ezt $\mathcal{G}$-vel jelöljünk. Hogy az így definiált kockázatokat mérni tudjuk, a $\mathcal{G}$ elemeihez valós számokat kell rendelnünk. Ez vezet a következő definícióhoz.

3.2.Def:. *A $\mathcal{G} \to R$ leképezéseket kockázati mértéknek nevezzük.*

A fogalom némi magyarázatot igényel. A kockázati mértéket gyakorlatilag úgy foghatjuk fel, mint azt a számot, amely megmutatja, hogy mekkora többlettőkére lesz szükségünk a periódus végére a kockázat kiküszöböléséhez. Megjegyzendő, hogy különböző mértékek különböző tartalékokat adnak meg, a megfelelő mérték kiválasztása a pénzügyi ellenőrzés ill. a befektető egyedi döntése.
Példának okáért vegyünk egy adott kockázati mértéket, jelöljük ezt ρ-val. Amennyiben egy adott X jövőbeli portfólióra ennek az értéke $\rho(X) > 0$, akkor a kockázat mértéke pozitív, ezért $\rho(X)$ mennyiségű többlettőkét kell a portfóliónkhoz adni T-ben. Ez a gyakorlatban úgy zajlik, hogy $\delta\rho(X)$ értékű referenciaterméket adunk a portfólióhoz, amelynek T-ben fix $\rho(X)$ pénzárama lesz, így a portfóliónk többlettőkéje a kívánt mennyiségű lesz. Abban az esetben viszont, amikor a kockázat negatív, tehát$\rho(X) < 0$, a portfólióból $-\rho(X)$ mennyiségű tőke kivonható a periódus végén, így a jelenben $-\delta\rho(X)$. Ez alapján a nempozitív tőkekövetelményt igénylő portfóliót elfogadható portfóliónak nevezzük egy adott mérték szerint. Itt kell megemlítenünk az adott mérték szerinti elfogadási halmazokat, amelyek egy adott mérték elfogadható portfólióinak halmazai. Belátható, hogy a mérték és az elfogadási halmaz fogalma kölcsönösen megfeleltethető egymásnak. Bővebben lásd [2]
A számítások leegyszerűsítése végett a továbbiakban $\delta = 1$ feltételezéssel élünk, az álta-

lánosság megszorítása nélkül.
Mint korábban említettünk, a kockázati mértékekkel szemben bizonyos természetes elvárásokat támasztunk. Ezek a következők:
A koherencia axiómái:
1. Transzláció invariancia: $\forall X \in G, \alpha \in R$ esetén teljesülnie kell a $\rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha$ egyenletnek.
2. Szubadditivitás: $\forall X_1, X_2 \in G \rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.
3. Pozitív homogenitás: $\forall \lambda \geq 0, X \in G$ igaz a $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ egyenlet.
4. Monotonitás: $\forall X, Y \in G : X \leq Y$ mellett fennáll a $\rho(Y) \leq \rho(X)$ reláció.

A koherencia axiómái után a koherens kockázati mérték definíciója magától értetődő.

3.3.Def:. *egy ρ kockázati mértéket koherensnek nevezünk, ha teljesíti a koherencia axiómáit.*

A koherencia axiómái valóban természetes követelmények, a továbbiakban szemléletes jelentéseiket vesszük számba.
A transzláció invariancia axiómája azt mondja ki, hogy a jelenlegi portfóliónk kockázatának α mértékű csökkentéséhez α mennyiségű referenciaterméket kell hozzáadnunk. Az előbbi megállapítás következménye, hogy $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$, tehát ha a portfóliónkhoz hozzáadjuk a tőkekövetelményt, akkor a periódus végére elért kamatokkal együtt az akkori portfóliónk kockázata éppen nulla lesz.
A szubadditivitás követelménye a „vállalatok egyesülése nem okozhat extra kockázatot" elv formalizálása. Ha olyan kockázati mértéket használnánk, amely nem teljesíti ezt a kritériumot, akkor előfordulhatna olyan szituáció, hogy egy adott vállalat két egységének együttes portfóliója nagyobb kockázattal bírna, mint a külön-külön vett portfóliók összege, így a vállalat két részre bomlana fel. Ez ellentmondana az elvárt diverzifikációs hatásnak.
A transzláció invariancia szemléltetése magától értetődő. Egy portfóliót α növelve vagy csökkentve, a portfólió kockázata is azonos mértékben változik. Ez a tulajdonság negatív α esetén nem teljesül, aminek az a magyarázata, hogy a koherens kockázati mértékek a rosszabb kimenetelekkel számolnak, ugyanis azokból adódik a kockázat, tehát az eloszlás bal oldala számít. -1-gyel történő szorzás esetén viszont az addig figyelmen kívül hagyott jobb oldal kerül előtérbe, ami nyilvánvalóan nem feltétlenül adja a szorzás előtti kockázat -1-szeresét.
Hasonlóan könnyű belegondolni a monotonitás szükségességébe. Tegyük fel ugyanis, hogy

az X, Y portfóliók közül az Y portfólió értéke minden világállapot mellett nagyobb lesz, mint az X értéke. Ekkor elég természetes követelmény, hogy a nagyobb értékű Y portfólió kockázata legyen a kisebb.
Említettük, hogy a koherens kockázati mértékeket érték kritikák, méghozzá a PH és S axiómákat, ezek megtalálhatóak [7] és [8] cikkekben. Ugyanis egy portfóliót megkétszerezve az érték nem feltétlenül lesz kétszeres, a portfólió és értéke közötti kapcsolat nem lineáris. Ennek oka a likviditási kockázat, ugyanis nagyobb portfóliót rövid idő alatt pénzzé tenni nagyobb likviditási költséggel jár. A probléma áthidalása megtalálható [1]-ben.

3.2. Példák

Ebben a szakaszban a koherens kockázati mértékekre nézünk példákat, valamint olyan széleskörűen alkalmazott kockázati mértékre is adunk példát, amely nem teljesíti a koherencia axiómáit. Az itt felsorolt példák és eredmények megtalálhatóak [6] cikkben.
A konkrét kockázati mértékek definíciója előtt egy fontos definícióra van szükségünk, amely alapja lesz a későbbi definícióknak. Ez a definíció az alsó- és felső kvantilis definíciója:

3.4.Def:. *Adott X $(\omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező fölötti valószínűségi változó $\alpha \in (0,1)$ alsó és felső kvantilisei:*

$$q_\alpha = \inf\{x \in R | P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

$$q^\alpha = \inf\{x \in R | P(X \leq x) > \alpha\}$$

Ezeket az irodalomban szokás még $x_{(\alpha)}, x^{(\alpha)}$-val jelölni, amennyiben a tárgyalt eloszlás egyértelmű. Mi az egyszerűség kedvéért ez utóbbi jelölést nem fgojuk használni.
A $\{x \in R | P(X \leq x) \geq \alpha\} \supset \{x \in R | P(X \leq x) > \alpha\}$ tartalmazásból jól látszik a kétféle kvantilis közötti $q_\alpha \leq q^\alpha$ reláció. Elmondható továbbá, hogy az $q_\alpha = q^\alpha$ egyenlőség abban az esetben teljesül egy bizonyos α-ra, ha $P(X \leq x) = \alpha$ legfeljebb egy x értékre teljesül. Tehát, ha egy eloszlás folytonos, akkor minden $\alpha \in (0,1)$ esetén az alsó és felső kvantilis egybeesik.
Az első példánk kockázati mértékre az úgynevezett Value at Risk. Az irodalomban megszokott VaR rövidítést fogjuk használni. A VaR fogalmának szemléletes megközelítése, hogy a legkisebb olyan értéket szeretnénk tartalékolni, amely $1 - \alpha$ valószínűséggel nagyobb vagy egyenlő mint az elszenvedett veszteségünk abszolútértéke. A formális definíció:

3.5.Def:. *Az X eloszlású valószínűségi változó kockáztatott értéke:*

$$VaR^{\alpha} = -q^{\alpha}(X)$$

Erről a kockázati mértékről megmutatható, hogy nem tesz eleget a szubadditivitás axiómájának, azaz két portfólió egyesítésekor az egyesített portfólió kockázata lehet nagyobb, mint a külön-külön vett kockázatok összege.
A VaR fogalmát valójában kétféleképpen is lehet definiálni, attól függően, hogy az alsó vagy a felső kvantilist használjuk-e a definícióban, alsó és felső VaR értékeket kapunk. A fent definiált érték a felső VaR, a $q_{\alpha}(X)$ definíció mellett a $VaR_{\alpha}(X)$-szel jelölt alsó VaR-t kapjuk. A definíció egyszerű következménye a $VaR^{\alpha}(X) \leq VaR_{\alpha}(X)$ reláció.
A második kockázati mérték, amelyet megvizsgálunk a Tail Conditional Expactations, azaz TCE. Ennek alapötlete, hogy a kimenetelek legrosszabb 100α százalékának a várható értékét veszi. Ez a mérték a kvantilis mellett figyelembe veszi, a VaR-ral ellentétben, az eloszlás farkát a kvantilis értéke alatt. Ebből is létezik alsó és felső TCE.

3.6.Def:. *Tegyük fel, hogy $E(X^{-}) < -\infty$. Ekkor az X valószínűségi változó alsó és felső TCE kockázati mértékei:*

$$TCE_{\alpha}(X) = -E(X|X \leq q_{\alpha}(X))$$

$$TCE^{\alpha}(X) = -E(X|X \leq q^{\alpha}(X))$$

A VaR-hoz hasonlóan a TCE-ről is belátható, hogy a szubadditivitás axiómája nem teljesül rá, valamit itt is igaz a $TCE^{\alpha} \leq TCE_{\alpha}(X)$ egyenlőtlenség.
A következő mérték bevezetése a szubadditivitás teljesülése miatt történt.

3.7.Def:. *Tegyük fel, hogy $E(X^{-}) < -\infty$ teljesül. Ekkor az X valószínűségi változó α konfidenciaszint melletti Worst Conditional Expactation-je (WCE-je):*

$$WCE_{\alpha}(X) = -\inf\{E(X|A)|A \in \mathcal{A},\ P(A) > \alpha\}$$

A WCE mint kockázati mérték koherens, és $WCE_{\alpha} \geq VaR^{\alpha}$ teljesül. Ezenfölül tudjuk még, hogy ez a legkisebb koherens kockázati mérték, amely a VaR-t majorálja.
Egy további jelentős példa kockázati mértékre a Conditional Value at Risk, azaz a feltételes VaR, amelyre a CVaR rövidítést alkalmazzuk.

3.8.Def:. *Tegyük fel, hogy* $E(X^-) > -\infty$*. Ekkor az* X *valószínűségi változó feltételes VaR-ja* α *konfidenciaszint mellett:*

$$CVaR_\alpha(X) = \inf\{E(X-s)^-/\alpha - s | s \in R\}$$

Az eddigi kockázati mértékek fő hiányossága, hogy nem folytonosak α-ban, azaz az α kis megváltozásától is nagyot változhat a számított tőkekövetelmény. Ezt a probélmát hidalja át az úgynevezett Expacted Shortfall (ES).

3.9.Def:. *Az* $E(X^-) > -\infty$ *feltétel fennállása mellett, az* α *konfidenciaszinten az* X *változó ES-ja:*

$$ES_\alpha(X) = -\alpha^{-1}(E(X\mathbf{1}_{(X \leq q_\alpha(X))}) + q_\alpha(\alpha - P(X \leq x_\alpha)))$$

Fontos tulajdonsága az ES-nak, hogy felírható integrálalakban.

3.1.Áll:. *Tetszőleges valós értékű valószínűségi változóra, amelyre teljesül az* $E(X^-) > -\infty$ *feltétel, bármilyen* $\alpha \in (0,1)$ *esetén teljesül az ES shortfallja előáll*

$$ES_\alpha(X) = -\alpha^{-1} \int_0^\alpha q_u(X) du$$

Ez az integrál alak két okból is fontos nekünk. Először azért, mert jól látható belőle az expacted shortfall folytonossága, ami az integrál folytonosságának egyszerű következménye. Másodsorban az integrálalak egy szemléletes megközelítését adja az expected shortfallnak, ami a legrosszabb 100α százaléknyi kimenetelek integrálközepének a -1-szerese. A -1-gyel való szorzás azért szükséges, mert így a mértékkel vele számított érték adja meg a tartalékolandó tőkét.

Az ES másik fontos tulajdonsága, hogy teljesíti a koherencia axiómáit. Ennek bizonyítása, akárcsak a korábbi állításoknak, megtalálható [6]-ban.

4. fejezet

Kockázatelosztási játékok

Ebben a fejezetben az eddig tárgyalt fogalmak felhasználásával egy kockázatelosztási helyzetet vezetünk be, amelynek játékelméleti vonatkozásait fogjuk tárgyalni. Kockázatelosztási helyzetből kétfélét vizsgálunk attól függően, hogy likviditási feltevésekkel élünk-e vagy sem. A fejezet ez alapján a két modell alapján bomlik két alfejezetre. Végső soron célunk, hogy a kellő játékelméleti megalapozás után belássuk, a likviditástól függetlenül, a kockázatelosztási helyzetek és a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztálya egybeesik. Bár nem minden bizonyítás lesz a dolgozat saját eredménye, de a teljesség kedvéért ezeket is leírjuk, és a megfelelő hivatkozások segítségével megadjuk az eredeti cikkeket, amelyben megtalálhatóak.

4.1. Likviditás nélkül

Ebben a szakaszban a likviditási feltétel nélküli kockázatelosztási helyzet definícióját és fontos játékelméleti definíciókat közlünk, végül a dolgozat szempontjából fontos eredményeket ismertetjük.

4.1.Def:. *A (N, ν) párt átruházható hasznosságú játéknak nevezzük, ha $N = \{1, \cdots, n\}$ játékosok egy véges halmaza, és $\nu : 2^N \to R$ a $\nu(\emptyset) = 0$ kikötéssel, ahol 2^N jelöli N hatványhalmazát.*

A dolgozatban a játékelméleti terminológiától eltérően egy tőkeallokációs terminológiát is fogunk használni, amelyben a játékosokat vállalati szektoroknak fogjuk nevezni, a játékosok halmaza alatt pedig magát a vállalatot értjük. Matematikailag semmi jelentősége nincs, hogy melyik szóhasználattal élünk, a matematikai modell mind a két esetben azonos, csupán a probléma megfogalmazása más.

Az összes játék halmazát, amelyben n játékos van, Γ jelöli. Megjegyezzük, hogy a dolgozatban mindig n szereplős játékokat fogunk vizsgálni, így a Γ jelölés mellett a játékosszám megadása is egyértelmű. A játékosok N halmazának részhalmazait koalícióknak nevezzük. Egy *elosztás* alatt az $x \in R^n$ vektorokat értjük, ahol x_i az $i \in N$ játékos kifizetése. Ez gyakorlatilag felfogható a vállalati szektorok nyereségének a vektoraként. Ezek a nyereségek a diverzifikáció miatti kisebb kockázat miatt keletkező többlettőkéből származnak. Az ilyen $x \in R^n$ elosztásokkal szemben néhány egyszerű elvárást vezetünk be. Egy x elosztás hatékony, ha $X(N) = \nu(N)$, egyénileg racionális, ha $X(\{i\}) \geq \nu(\{i\})$, $\forall i \in N$, és koalíciónként racionális, ha $X(C) \geq \nu(C)$, $\forall C \in 2^N$. A hatékonyság szemléletes jelentése, hogy pontosan a teljes vállalat kifizetése kerüljön szétosztásra az egyes részlegek között. Ez elég magától értetődő követelmény. Az egyéni és kolalíciónkénti racionalitás pedig arra feltétel, hogy az egyes koalícióknak a teljes vállalaton belüli kifizetésük ne legyen kisebb, mintha külön koalíciót alkotnának. Abban az esetben, ha létezne egy $C \in 2^N$ kolalíció, amelyre $X(C) < \nu(C)$, akkor a C koalíciónak nem állna érdekében a vállalatban maradni, így az kiválna. Az hatékony és koalíciónként racionális elosztások halmazát a játék magjának nevezzük, és $core(\nu)$-vel jelöljük a játékosszám feltüntetése nélkül.

4.2.Def:. *Egy* $(\lambda^C)_{C\in 2^N} \in R_+^{2^N}$ *vektort kiegyensúlyozott vektornak hívunk, ha* $\sum_{C\in 2^N} \lambda^C a(C) = a(N)$*, ahol* $a(C)$ *a* C *koalíció számlálóvektora, azaz* $a_i(C) = 1$*, ha* $i \in C$*, éa* $a_i(C) = 0$*, ha* $i \notin C$*. Egy* (N, ν) *játékot kiegyensúlyozottnak hívunk, ha* $\sum_{C\in 2^N} \lambda^C \nu(C) \leq \nu(N)$ *minden* $(\lambda^C)_{C\in 2^N} \in R_+^{2^N}$ *kiegyensúlyozott vektorra.*

Ha egy játék kiegyensúlyozott, akkor a játékosok nem tudnak egy munkaórát a koalíciók között szétosztani úgy, hogy a C koalíció λ^C időegységig aktív, és végül nagyobb lesz a teljes kifizetés, mint a teljes vállalat $\nu(N)$ nyeresége. A kiegyensúlyozottság valójában szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a játék magja nem üres [9]
Egy (N, ν) játék tetszőleges C koalíciója által meghatározott (C, ν^C) részjátékot a ν függvény C halmazra való leszűkítésével kapjuk.

4.3.Def:. *Egy* (N, ν) *játék teljesen kiegyensúlyozott, ha minden* (D, ν^D) *részjáték kiegyensúlyozott. A teljesen kiegyensúlyozott játékok osztályát* Γ_{tb}*-vel jelöljük.*

Vegyünk egy vállalatot, amely N különböző részlegből áll. A részlegek mindegyike egy saját portfóliót tart. Feltételezünk egy $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ valószínűségi mezőt, ahol $|\Omega| = S$ és az s világállapot valószínűségét π_s jelöli. Ebben a modellben a portfóliók belső szerkezete nem érdekes a számunkra, ellentétben a likviditással kibővített modellel. A portfóliókkal kapcsolatos egyetlen információ az egyes portfóliók jövőbeli értéke. Ezeket a jövőbeli értékeket egy $X \in R^{S\times N}$ átmenetmátrix-szal adjuk meg. A mátrix sorait $X_{s\cdot}, s = 1, \cdots, S$ vektorokkal jelöljük. Ezek adják meg rögzített s világállapot mellett az N darab portfólió értékét. Az oszlopokra a $X_{\cdot n}, n = 1, \cdots, N$ jelölést használjuk. Ez egy adott n részleg realizációs vektorát adja meg.

A $C \in 2^N$ jelölés azt jelenti, hogy a C egy koalíció a vállalaton belül, azaz az összes részleg halmazának egy részhalmaza. Egy koalíció aggregált realizációs vektorát jelölje $X(C) = \sum_{i\in C} X_{\cdot i}$.

4.4.Def:. *Egy (N, S, π, X, ρ) ötöst kockázatelosztási helyzetnek nevezünk, aho N a portfóliók halmaza, S a lehetséges világállapotok száma, π a valószínűségi mérték, X a portfóliók realizációs mátrixa, és ρ egy koherens kockázati mérték.*

4.5.Def:. *(N, ν) egy adott (N, S, π, X, ρ) kockázatelosztási helyzet által generált kockázatelosztási játék, ha*

$$\nu(C) = -\rho(X(C)),\ \forall C \in 2^N \tag{4.1}$$

A kockázatelosztási játékok halmazát Γ_r-rel jelöljük.

A szükséges definíciók bevezetése után elérkeztünk a szakasz fő állításának megfogalmazásához, amely a kockázatelosztási játékok és a teljesen kiegyensúlyozott játékok közötti kapcsolatra mutat rá. Két részállítást közlünk bizonyításokkal. Az állítások és bizonyításaik megtalálhatóak [4]-ben.

4.1.Áll:. *Minden $(N, \nu) \in \Gamma_r$ kockázatelosztási játék teljesen kiegyensúlyozott, azaz $\Gamma_r \subseteq \Gamma_{tb}$.*

Biz :

Tekintsünk egy (N, S, π, X, ρ) kockázatelosztási helyzetet, és az általa generált (N, ν) kockázatelosztási játékot. Be fogjuk látni, hogy tetszőleges $D \in 2^N$ koalíció esetén a (D, ν^D) részjáték kiegyensúlyozott. Ehhez azt kell belátnunk, hogy minden $(\lambda^C)_{C\in 2^D}$ kiegyensúlyozott vektorra teljesül a

$$\sum_{C\in 2^D} \lambda^C \nu^D(C) \le \nu^D(D)$$

Ehhez felhasználjuk a ρ kockázati mérték pozitív homogenitását és szubadditivitását.

$$\sum_{C\in 2^D} \lambda^C \nu^D(C) = -\sum_{C\in 2^D} \rho(\lambda^C X(C)) \le -\rho(\sum_{c\in 2^D} \sum_{i\in C} \lambda^C X_{\cdot i}) =$$

$$= -\rho(\sum_{i\in D} \sum_{C\in 2^D, C\ni i} \lambda^C X_{\cdot i}) = -\rho(\sum_{i\in D} X_{\cdot i}) = -\rho(X(D)) = \nu^D(D)$$

Az utolsó sorban átrendeztük az összegzést, és kihasználtuk, hogy λ^C egy kiegyensúlyozott vektor. □

Igaz azonban a fordított irányú tartalmazás is.

4.2.Áll:. *Tetszőleges* $(N,\nu)\in\Gamma_{tb}$ *játékhoz létezik egy* (N,S,π,X,ρ) *kockázatelosztási környezet, amelynek* (N,ν) *a generált kockázatelosztási játéka, azaz teljesül a* $\Gamma_{tb}\subseteq\Gamma_r$*.*

Biz :

Vegyünk egy tetszőleges $(N,\nu)\in\Gamma_{tb}$ játékot. Vezessük be erre a következő értékfüggvényt

$$\nu_0(C)=\nu(C)-\sum_{i\in C}\nu(\{i\}). \tag{4.2}$$

Ezt a játék normalizált értékfüggvényének hívjuk.

Az (N,ν) játék teljesen kiegyensúlyozott, így a (N,ν_0) is. Ennek belátása igen egyszerű. Vegyünk egy tetszőleges (C,ν) részjátékot. Ennek nyilván létezik magja, így vehetünk egy x magbeli elosztást. Ekkor az $x_0=x-\sum\nu(i)$ elosztás magbeli lesz a (C,ν_0) részjátékban. Ezt kihasználva az egyelemű koalíciókat 1-gyel a többit 0-val súlyozó kiegyensúlyozott vektort alkalmazva kapjuk a

$$0=\sum_{i\in C}\nu_0(\{i\})\leq\nu_0(C) \tag{4.3}$$

összefüggést.

Az N kételemű C, $(N\backslash C)$ partíciójának elemeire 1 súlyt helyező kiegyensúlyozott vektort használva teljesül a

$$\nu_0(C)+\nu_0(N\setminus C)\leq\nu_0(N) \tag{4.4}$$

egyenlőtlenség is. A (4.3) és (4.4) egyenlőtlenségek alapján követezik:

$$0\leq\nu_0(C)\leq\nu_0(N),\ \forall\ C\in 2^N \tag{4.5}$$

A továbbiakban egy olyan (N,S,π,X,ρ) környezetet fogunk definiálni, amelynek éppen (N,ν_0) lesz az indukált játéka. A világ állapotainak a száma legyen egyenlő az N nem üres részhalmazainak a számával, azaz legyen $S=2^N-1$. Ezek után az egyes világállapotokat megcímkézhetjük az N nem üres részhalmazaival. Minden világállapothoz azonos valószínűséget rendelünk, tehát $\pi_1,\dots,\pi_S=\frac{1}{s}$. A ρ kockázati mérték legyen az úgynevezett 1-expected shortfall, amely a legrosszabb 1 kimenetelt veszi, tehát a legrosszabb kimenetel adja a kockázati mérték értékét. Tetszőleges $C\in 2^{N\backslash\emptyset}$ világállapot mellett az $X_{C,\cdot}$ vektort a úgy definiáljuk, hogy az $(X_{C,\cdot})_{i\in C}$ részvektor legyen eleme a (C,ν_0^C) játék magjának, a további $i\in N\setminus C$ játékosok esetén pedig $X_{C,i}=\nu_0(N)$ teljesüljön.

Jelöljük $(N,\overline{\nu}_0)$-lal a fenti (N,S,π,X,ρ) környezet definiálta kockázatelosztási játékot.

Belátjuk, hogy $\nu_0 = \overline{\nu}_0$, azaz (N, S, π, X, ρ) valójában ν_0-at generálja.
Az 1-ES és a generált játék definíciójából tudjuk, hogy teljesül a

$$\overline{\nu}_0(C) = -\rho(X^0(C)) = \min_{D \in 2^N \setminus \emptyset} X_D^0(C),\ \forall\ c \in 2^N \tag{4.6}$$

egyenlet.
A részjáték definíciója és a magbeli elosztások hatékonysága miatt:

$$\nu_0^C(C) = \nu_0(C) = X_C^0(C),\ \forall C \in 2^N \setminus \emptyset \tag{4.7}$$

A ν_0 és $\overline{\nu}_0$ értékfüggvények egyenlőségéhez (4.6) és (4.7) miatt elegendő a

$$X_C^0(C) \leq X_D^0(C),\ \forall\ C, D \in 2^N \setminus \emptyset \tag{4.8}$$

egyenlőtlenség belátása.
Abban az estben, ha a $C \subseteq D$ tartalmazás teljesül, az $(X_{D,i}^0)_{i \in D}$ elosztás (D, ν_0^D)-beli magbelisége miatt következik az elosztás koalíciónkénti racionalitása, tehát fennáll a

$$\nu_0(C) \leq X_D^0(C) \tag{4.9}$$

amiből a $\nu_0(C) = X_C^0(C)$ összefüggés miatt azonnal következik a kívánt állítás.
Ellenkező esetben, azaz ha a $C \subseteq D$ tartalmazás nem teljesül, akkor az $(X_{D,i}^0)_{i \in C}$ elosztás elemei között lesz legalább egy $\nu_0(N)$ értékű, így a 4.5-es egyenlet miatt a bizonyítandó egyenlőtlenség azonnal következik.
Az $X_i = X_i^0 + \nu(i)$ realizációs mátrix bevezetésével egy (N, ν)-t generáló kockázatelosztási helyzetet kapunk. □
A két állítás együttesen adja a szakasz fő eredményét, amely a kockázatelosztási játékok és a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztályának azonosságáról szól.

1.Tétel:. *A kockázatelosztási játékok és a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztálya egybeesik, azaz:* $\Gamma_r = \Gamma_{tb}$

4.2. Likviditással

Az előző alfejezetben bevezetett modellt, a kockázatelosztási helyzet modelljét fogjuk általánosítani ebben az alfejezetben. Az általánosítás tulajdonképpen a likviditási feltételezések bevezetéséből áll. Veszünk egy $\mathcal{L}$ állapotfüggő likviditási elvárást, amely minden egyes világállapotban egy, már korábban megismert likviditási elvárásnak felel meg. Az

egyes játékosok realizációs vektorait nem közvetlenül építjük bele a modellbe, hanem az egyes eszközök m állapotfüggő MSDC-je az $\mathcal{L}$ és a kezdetben tartott $\mathbf{p}$ portfólió alapján adunk definíciót rá.
Tegyük fel, hogy $J+1$ darab termékünk van. Az eddigiek alapján a 0. termék a pénz, azaz a kockázatmentes termék szerepét tölti be, a további J darab termék pedig kockázatos eszköz. A játékosok N halmazát itt most vállalatnak tekintjük. Az i. játékos kezdeti portfólióját jelölje $\mathbf{p}^i \in \mathcal{P}$. A vállalat teljes portfólióját $\mathbf{p} = (\mathbf{p}^i)_{i \in N}$ mátrix-szal jelöljük. Az egyes $C \subseteq N$ koalíciók portfóliójára pedig a $\mathbf{p}(C)$ jelölést használjuk.
Az eszközök árfolyamának a véletlenszerűsége a világ állapotaitól függő MSDC-jükön valósul meg. Az $s \in S$ világállapotban a j. termék $m_j^s : R \setminus \{0\} \to R$ MSDC-je teljesíti az MSDC definícióját, azaz monoton csökkenő, nullában nem értelmezett, és $(0, \infty)$-en *làdlàg* valamint $(-\infty, 0)$-n *càdlàg*.
Az $\mathcal{L}$ likviditási elvárás is állapotfüggő lesz ebben a modellben. Az s világállapothoz tartozó $\mathcal{L}^s$ likviditási elvárás teljesíti a második fejezetben bevezetett likviditási elvárások definícióját.
Ezután következhet az alfejezet legalapvetőbb definíciója.

4.6.Def:. *Az $(N, S, \pi, \mathbf{p}, m, \mathcal{L}, \rho)$ hetest egy likviditási feltételekkel kiegészített kockázatelosztási helyzetnek nevezzük, ahol N a játékosok n elemű halmaza, S a világ állapotainak a száma, π valószínűségi métrék, $\mathbf{p}$ a vállalat kezdeti portfóliója, m az egyes termékek egyes világállapotokban előálló MSDC-inek a mátrixa, $\mathcal{L}$ a világállapotokhoz tartozó likviditási elvárások vektora, ρ pedig egy koherens kockázati mérték.*

Mj: Ebben az alfejezetben a rövidebb írásmód kedvéért a likviditási feltételekkel kiegészített kockázatelosztási helyzetre egyszerűen kockázatelosztási helyzetként fogunk hivatkozni. Ez nem okoz félreértést, mivel a a továbbiakban likviditási feltevés nélküli kockázati helyzetről nem esik szó.
Egy fontos fogalom, a realizációs vektor fogalma, ebben a fejezetben alapvetően megváltozik. Vegyünk egy tetszőleges $C \subseteq N$ koalíciót, az általa a jelenlegi $t = 0$ időpontban tartott portfólió $\mathbf{p}(C)$. A jövőbeli $t = T$ időpontban ennek a portfóliónak az értéke függ a likviditási elvárástól valamint a tartott eszközök MSDC-jétől. Egy adott s világállapot mellett ebből a portfólióból a legnagyobb hasznot úgy lehet kihozni, ha az m^s MSDC vektor által definiált $L^s_{\mathbf{p}(C)}(\mathbf{p}')$ likviditási költségfüggvényt minimalizáló $q \in Att(\mathbf{p}(C))$ portfólióval hajtanánk végre a $p \to q$ kereskedést, ügyelve arra, hogy a teljes N vállalat tranzakció utáni $q + \mathbf{p}(N \setminus C)$ portfóliója az $\mathcal{L}^s$ likviditási elváráson belül kerüljön. Ezt formálisan megfogalmazva kapjuk a realizációs vektor definícióját.

4.7.Def:. *Egy adott $(N, S, \pi, \mathbf{p}, m, \mathcal{L}, \rho)$ kockázatelosztási helyzet mellett egy tetszőleges $C \subseteq N$ koalíció realizációs vektora a következő*

$$X^s(C) = \sup\{U^s(\mathbf{p}')|\mathbf{p}' \in Att^s(\mathbf{p}(C)),\ \mathbf{p}' + \mathbf{p}(N \setminus C) \in \mathcal{L}^s\},$$

ahol U^s a korábban bevezetett U függvény s világállapotbeli realizációja. Nyilvánvaló, hogy ennek maximalizálásával érhető el a legmagasabb portfólióérték egy adott világállapotban.
A nagykoalícióra alkalmazva a definíciót a realizációs vektor a következő alakot ölti:

$$X^s(N) = \sup\{U^s(\mathbf{p}')|\mathbf{p}' \in \mathcal{L}^s \cap Att^s(\mathbf{p}(N))\}$$

A realizációs vektor definíciója első ránézésre meglehetősen összetettnek látszik. A következő állítást, amely nagyban leegyszerűsíti ezt a definíciót, bizonyítás nélkül közöljük. A bizonyítás megtalálható [5]-ben.

4.3.Áll:. *Tetszőleges $s \in S$ világállapotra, és tetszőleges $C \subseteq N$ koalícióra a $\mathbf{p}' \in Att^s(\mathbf{p}(C))$ akkor és csakis akkor teljesül, ha a $\mathbf{p}' + \mathbf{p}(N \setminus C) \in Att^s(\mathbf{p}(N))$ tartalmazás teljesül.*

Ennek az eredménynek a következménye, hogy a C koalíció realizációs vektora a

$$X^s(C) = \sup\{U^s(\mathbf{p}')|\mathbf{p}' + \mathbf{p}(N \setminus C) \in Att^s(\mathbf{p}(N)) \cap \mathcal{L}^s\}$$

képlettel számítható.
A definícióban szükségszerű maximum helyett szuprémummal számolni, ugyanis nem minden esetben létezik maximum, mint ahogy az a következő példából is kitűnik.
Tekintsünk egy olyan szituációt, amelyben két kockázatos eszközünk van. Az $\mathcal{L}$ likviditási elvárást a $p_1 \geq -1$, $p_2 \geq -1$, és a $p_2 + 1 \geq \frac{1}{p_1+1}$ egyenlőtlenségekkel adjuk meg. Itt a pénz mennyisége tetszőleges, a likviditási eljárás nem szab feltételt rá. A kezdeti portfóliónk legyen $(-1, 0)$ valamint tetszőleges mennyiségű pénz, és tegyük fel, hogy egyedül az első eszköz kereskedése jár likviditási költséggel, a második termék végtelenül likvid.
Mivel portfóliónk a likviditási elváráson kívül esik, ezért olyan kereskedést kéne végrehajtanunk, amelynek költsége minimális és a tranzakciók utáni portfóliónk már megfelel $\mathcal{L}$-nek. Mivel likviditási költség csupán az első termékkel való kereskedéskor adódik, ezért célszerű lenne kizárólag a második termékkel kereskedve elérni $\mathcal{L}$-et. Ez nyilván abban az egyetlen elfajuló esetben lehetséges, amikor $p_2' \to \infty$, azaz a $(\infty, -1)$ „portfólió" esetén. Mivel a gyakorlatban ilyen lehetetlen, az első termékkel is kereskednünk kell, minimalizálva annak kereskedett mennyiségét. Tegyük fel, hogy $\varepsilon > 0$ mennyiséget vásárolunk az első termékből, ekkor $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ mennyiséget kell vennünk a második termékből. Az ε minimalizálása megint az előző elfajuló portfólióra vezet, azaz tetszőleges,még véges mennyiségekből álló $\mathbf{p}' \in \mathcal{L}$ portfólióhoz létezik egy $\mathbf{p}'' \in \mathcal{L}$ portfólió, amelynek kisebb a likviditási

költsége. Így a szóba jövő portfóliók likviditási költségeinek szuprémuma 0, de ezt egy portfólió esetén sem veszi fel, így itt tényleg szuprémumot kell írnunk maximum helyett. Tegyük fel, hogy egy $s \in S$ világállapot és egy adott $C \subseteq N$ koalíció mellett a fenti optimalizációnak létezik optimuma, azaz létezik egy $\mathbf{q}^s(C) \in \mathcal{P}$ portfólió, amelyre

$$U^s(\mathbf{q}^s(C)) = \max\{U^s(\mathbf{p}')|\mathbf{p}' + \mathbf{p}(N \setminus C) \in Att^s(\mathbf{p}(N)) \cap \mathcal{L}^s\}$$

azaz

$$X^s(C) = U^s(\mathbf{q})$$

teljesül. Az ilyen portfóliót optimális portfóliónak hívjuk, és a

$$\mathbf{t}^s(C) = \mathbf{q}^s(C) - \mathbf{p}(C)$$

egyenlettel definiált $\mathbf{t}^s(C)$ portfóliót optimális kereskedésnek nevezzük. A $\mathbf{t}^s(C)$ megmutatja, hogy a $\mathbf{p}(C)$ portfóliót hogyan kell módosítani, hogy minimális likviditási költségen $\mathcal{L}$-beli portfóliót kapjunk.
A következő eredmény az $X^s(C)$ értékek korlátosságáról szól. Az állítást bizonyítás nélkül írjuk le, a bizonyítás megtalálható [5]-ben.

4.4.Áll:. *Minden $s \in S$ világállapotra, és minden $\mathbf{p}' \in Att^s(\mathbf{p}(N) \cap \mathcal{L}^s)$ portfólióra teljesül a*

$$U^s(\mathbf{q} - \mathbf{p}(N \setminus C)) \leq X^s(C) \leq U^s(\mathbf{p}(C))$$

A realizációs vektor bevezetése után lehetőségünk nyílik a kockázatelosztási környezet generálta játék bevezetésére.

4.8.Def:. *Egy (N, ν) játékot az $(N, S, \pi, \mathbf{p}, m, \mathcal{L}, \rho)$ likviditási feltevésekkel kiegészített kockázatelosztási helyzet által generált likviditási feltevésekkel kiegészített kockázatelosztási játéknak hívunk, ha*

$$(C) = -\rho(X(C)), \ C \in 2^N \tag{4.10}$$

egyenlőség teljesül. Az ilyen játékok halmazát Γ_{rl}-lel jelöljük.

A realizációs vektor bevezetése után elérkeztünk az alfejezet fő eredményének a tárgyalásához, amely a teljesen kiegyensúlyozott játékok Γ_{tb} osztályának és a Γ_{rl} osztálynak az egybeesését állítja.
A bizonyítás megkezdése előtt szükségünk lesz néhány segédállításra. Az első a koherens kockázati mértékek diszkrét valószínűségi változók 1 valószínűségű konvergenciájára vonatkozó folytonosságát mondja ki.

4.5.Áll:. *Tetszőleges ρ koherens kockázati mérték folytonos a diszkrét valószínűségi változók 1 val konvergenciájára, tehát $X_n \to 0$ 1 val, akkor $\rho(X_n) \to 0$.*

Biz :
A pozitív homogenitás miatt:

$$\rho(0) = \rho(h0) = h\rho(0), \ \forall \ h > 0$$

ezért $\rho(0) = 0$.
A monotonitás miatt

$$\rho(-1) \geq \rho(0) \geq \rho(1)$$

Legyen $m = \rho(\mathbf{1})$, $M = \rho(-\mathbf{1})$ és $\mu_n = \max\{|X_{n,i}| : i \in S\}$, ahol $\mathbf{1}$ és $-\mathbf{1}$ jelölik a biztosan 1 illetve a biztosan -1 valószínűségi változót.
Diszkrét valószínűségi változó esetén az 1 valószínűségű konvergencia pontonkénti is, így a $\mu_n \to 0$ onvergencia nyilvánvaló. Valamint a monotonitás és a pozitív homogenitás miatt igaz lesz a következő:

$$m\mu_n = \mu_n\rho(-1) = \rho(-\mu_n) \geq \rho(X_n) \geq \rho(\mu_n) = \mu_n\rho(1) = M\mu_n$$

Jól látható, hogy az egyenlőtlenség két oldala nullához tart, ezzel megkaptuk a bizonyítandó $\rho(X_n) \to 0$ állítást. □
A második segédállítás azt mondja ki, hogy ha nincs végtelenül likvid eszköz a pénzen kívül, akkor minden esetben létezik optimális portfólió.

4.6.Áll:. *Ha egy likviditással kiegészített kockázatkezelési helyzetben nincsen elfajuló eszköz, akkor létezik optimális stratégia.*

Biz :
Legyen $m = \inf\{L_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}') : \mathbf{p}' \in \mathcal{L} \cap Att(\mathbf{p})\}$. Ekkor a

$$H = \mathcal{L} \cap Att(\mathbf{p}) \cap \{\mathbf{p}' \in \mathcal{P} : l_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}') \leq m + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

halmaz korlátos lesz és zárt. A zártság bizonyítása triviális, ugyanis H zárt halmazok metszete. A korlátosság belátásához tegyük fel indirekten, hogy nem korlátos a halmaz. Viszont mivel az eszközeink nem elfajulóak, egy végtelen távoli torlódási pont végtelenül nagy likviditási költséget jelentene, ami nyilván nagyobb mint $m + \varepsilon$. Egyértelmű, hogy ezen a halmazon is m lesz az $L_{\mathbf{p}}$ függvény infimuma. $L_{\mathbf{p}}$ nyilván folytonos H-n, így fölveszi az infimumát, tehát létezik $\mathbf{q} \in H \subset \mathcal{L} \cap Att(\mathbf{p})$, amelyre $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) = m$ □
A harmadik segédállítás is a az optimum létezésének a feltétele.

4.7.Áll:. *Tfh. k db elfajuló eszközünk van. $\mathcal{L}$ korlátos ezeket az eszközöket tekintve, azaz nem vásárolható vagy adható el belőlük tetszőlegesen sok, akkor létezik optimum.*

Biz :
Tfh. nem létezik optimum. Ekkor a a szuprémumot az $\mathcal{L}$ zártsága miatt egy végtelen távoli pontban érhetjük el. Mivel az elfajuló eszközökből csak végessokat vehetünk, nem elfajulóból kell végtelensokat vennünk, ez viszont végtelen likviditási költséggel jár, ami nyilvánvaló ellentmondás. □
A megfelelő segédállítások után a $\Gamma_{rl} \subseteq \Gamma_{tb}$ irányú tartalmazást mondjuk ki és bizonyítjuk be. A bizonyítás két esetre bomlik. Az első esetben feltesszük az optimális portfólió létezését minden világállapot és minden koalíció mellett. A bizonyításnak ez a része [5]-ből származik. A második esetben általánosan bizonyítjuk be az állítást, azaz tetszőleges tőkeallokációs helyzetre, függetlenül attól, hogy létezik-e optimum vagy sem. A bizonyításnak ez a része a dolgozat saját eredménye.

4.8.Áll:. *Egy tetszőleges $(N, S, \pi, \mathbf{p}, m, \mathcal{L}, \rho)$ kockázatelosztási helyzet által generált (N, ν) kockázatelosztási játék teljesen kiegyensúlyozott.*

Biz :
1. eset: Feltesszük, hogy minden $s \in S$ világállapot mellett minden $c \subseteq N$ koalícióra létezik $\mathbf{q}^s(C) \in \mathcal{P}$ optimális stratégia.
Az (N, ν) állítás belátásához, azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $D \in 2^N$ koalícióra a (D, ν^D) részjáték kiegyensúlyozott. Vegyünk ehhez a részjátékhoz egy tetszőleges $(\lambda^C)_{C \in 2^D}$ kiegyensúlyozott vektort. A kiehgyensúlyozott játék definíciója alapján, erre a $(\lambda^C)_{C \in 2^D}$ vektorra kell belátnunk a

$$\sum_{C \in 2^D} \lambda^C \nu^D(C) \leq \nu^D(D) \tag{4.11}$$

egyenlőtlenséget.
Először az egyenlőtlenség bizonyításának a lépéseit közöljük, majd később indokoljuk az egyes becsléseket, egyenlőségeket.

$$\sum_{C \in 2^D} \lambda^C \nu^D(C) = -\sum_{C \in 2^D} \lambda^C \rho(X(C)) = -\sum_{C \in 2^D} \rho(\lambda^C X(C)) \leq \tag{4.12}$$

$$\leq -\rho(\sum_{C \in 2^D} \lambda^C X(C)) = \tag{4.13}$$

$$= -\rho(\sum_{C \in 2^D} \lambda^C (U^s(\mathbf{q}^s(C)))_{s \in S}) \leq \tag{4.14}$$

$$\leq -\rho(U^s(\sum_{C\in 2^D} \lambda^C(\mathbf{q}^s(C)))_{s\in S}) \leq \tag{4.15}$$

$$\leq -\rho((U^s(\mathbf{q}^s(D)))_{s\in S}) = \tag{4.16}$$

$$= -\rho(X(D)) = \nu^D(D) \tag{4.17}$$

(4.12) egyszerű következménye a generált értékfüggvény definíciójának, valamint a ρ mérték pozitív homogenitásának. A (4.13)-es becslés a ρ szubadditivitása miatt áll. A (4.14)-es egyenlet a realizációs vektor definíciója létező optimum esetén. (4.15) igaz az U^s függvény pozitív homogenitása és szuperadditivitása következtében.
A (4.16) becslés belátásához a ρ monotonitása következtében elég belátnunk a

$$U^s(\sum_{C\in 2^D} \lambda^C \mathbf{q}^s(C)) \leq U^s(\mathbf{q}^s(D)) \tag{4.18}$$

reláció teljesülését minden s világállapot esetén.
A $\mathbf{q}^s(C) = \mathbf{p}(C) + \mathbf{t}^s(C)$ felbontás alapján (4.18) bal oldala felírható

$$U^s(\sum_{C\in 2^D} \lambda^C \mathbf{q}^s(C)) = U^s(\sum_{C\in 2^D} \lambda^C(\sum_{i\in C} \mathbf{p}^i + \mathbf{t}^s(C))) \tag{4.19}$$

alakban. Mivel a $(\lambda^C)_{C\in 2^N}$ vektor kiegyensúlyozott, ezért (4.19) jobb oldala tovább alakítható:

$$U^s(\sum_{C\in 2^D} \lambda^C(\sum_{i\in C} \mathbf{p}^i + \mathbf{t}^s(C))) = U^s(\sum_{i\in D} \mathbf{p}^i + \sum_{C\in 2^D} \lambda^C \mathbf{t}^s(C)) \tag{4.20}$$

Vezessünk be egy $(\lambda^{C'})_{C'\in 2^D}$ vektort, amelynek koordinátáira vagy a $\lambda^C = \lambda^{C'}$ vagy a $\lambda^{C'} = 0$ egyenlet teljesül, miközben a

$$\sum_{C'\in 2^D} \lambda^{C'} = 1 \tag{4.21}$$

feltétel teljesül. Ez tulajdonképpen annyit tesz, hogy az eredeti $(\lambda^C)_{C\in 2^N}$ vektor bizonyos koordinátáit úgy nullázzuk ki, hogy (4.21) teljesüljön.
Az, hogy ilyen $(\lambda^{C'})_{C'\in 2^D}$ vektor létezik, könnyen belátható. Vegyünk egy tetszőleges játékost, például az i.-et, és a λ^C súlyok közül azokat nullázzuk ki, amelyek nem tartalmazzák az i. játékost. Végiggondolható, hogy a fennmaradó $\lambda^{C'}$ súlyok összege egy lesz, mivel pontosan ezek tartalmazzák i-t az eredeti λ^C súlyok közül, és az eredeti $(\lambda^C)_{C\in 2^N}$ vektorra teljesül a $\sum_{c\in 2^D} \lambda^C a(C) = a(D)$ egyenlet, az így választott C'-k éppen a kívánt tulajdonságú vektort fogják eredményezni.
A (4.20)-as egyenlet jobb oldalán jól látszik, hogy az egyes játékosok eredeti portfóliójához az egyes koalíciók optimális stratégiái adódnak hozzá kereskedésként a megfelelő λ^C súlyokkal. Amennyiben nem az összes $C \in 2^D$ koalíció optimális kereskedését vesszük, hanem csak az előbb kiválasztott $C' \in 2^D$ koalíciókét, akkor nyilván kisebb mértékű

kereskedést hajtunk végre, így a likviditás költség kisebb lesz, tehát a kapott portfólió hosszútávú értéke nagyobb. Igaz tehát a

$$U^s(\sum_{i\in D}\mathbf{p}^i + \sum_{C\in 2^D}\lambda^C\mathbf{t}^s(C)) \leq U^s(\sum_{i\in D}\mathbf{p}^i + \sum_{C'\in 2^D}\lambda^{C'}\mathbf{t}^s(C')) \tag{4.22}$$

becslés. Mivel (4.22) jobb oldala portfóliók lineáris kombinációjának hosszútávú értéke:

$$U^s(\sum_{i\in D}\mathbf{p}^i + \sum_{C'\in 2^D}\lambda^{C'}\mathbf{t}^s(C')) = U^s(\sum_{C'\in 2^D}\lambda^{C'}(\sum_{i\in D}\mathbf{p}^i + \mathbf{t}^s(C'))) \tag{4.23}$$

A $C' \in 2^D$ halmazok definíciója miatt teljesül a

$$\mathbf{p}^i + \mathbf{t}^s(C') \in Att^s(\sum_{i\in D}\mathbf{p}^i) \cap \mathcal{L}^s \tag{4.24}$$

tartalmazás minden C'-re, így ezek konvex kombinációja is $\mathcal{L}^s$-beli lesz, mivel $\mathcal{L}^s$ konvex. Ebből következik, hogy a (4.23) jobb oldalán található $\sum_{C'\in 2^D}\lambda^{C'}(\sum_{i\in D}\mathbf{p}^i + \mathbf{t}^s(C'))$ portfólió is $\mathcal{L}^s$-beli lesz. A kereskedéseknek ezen kombinációja triviálisan elérhető D-ből, azaz $Att^s(D)$-beli, ezért teljesül rá az

$$U^s(\mathbf{p}^i + \mathbf{t}^s(C')) \leq U^s(\mathbf{q}^s(D)) \tag{4.25}$$

egyenlet, amiből a (4.16) becslés azonnal következik.
A (4.18)-ban szereplő egyenlőségek pedig definíció szerint következnek.

2. eset: $\exists\ s \in S, C \subseteq D : \nexists\ q^s(C)$. Ekkor léteznie kell elfajuló eszköznek. Legyen ezek száma k, és jelöljük a belőlük tartott mennyiségeket $p_{j_1}, \ldots, p_{j_k}$-val.
Vezessük be a következő halmazsorozatokat: $H_n = \{p \in R^n : p_{j_l} \leq n, l = 1, \ldots, k\}, \mathcal{L}_n = \mathcal{L} \cup H_n$
A harmadik segédállítás következtében $(N, S, \pi, \mathbf{p}, m, \mathcal{L}_n, \rho)$-nak létezik optimuma minden C és s mellett. Jelöljük ezt $\mathbf{q}_n^s(C)$-vel. A

$$\cup_1^\infty \mathcal{L}_n = \mathcal{L} \tag{4.26}$$

összefüggés nyilván fennáll. Az

$$U^s(\mathbf{q}_n^s(C)) \to X^s(C) \tag{4.27}$$

belátásához vegyünk egy $\mathbf{r}_k^s \in \mathcal{L}_n^s \cap Att^s(\mathbf{p})$ sorozatot, amelyre

$$U^s(\mathbf{r}_k^s) \to X^s(C) \tag{4.28}$$

ilyen $\mathbf{r}_k^s$ portfóliósorozat létezik az $X^s(C)$ definíciójának következtében. A (4.26)-es egyenlet miatt minden k természetes számhoz létezik egy n_k természetes szám, amelyre $\mathbf{r}_k^s \in$

$\mathcal{L}^s_{n_k} \cap Att^s(\mathbf{p})$. A $\mathbf{q}^s_{n_k}$ és $X^s(C)$ definíciója miatt az $X^s(C) \leq U^s(\mathbf{q}^s_{n_k}) \leq U^s(\mathbf{r}_k)$ reláció teljesülése könnyen látható. Emiatt és a (4.28)-os határátmenet miatt azonnali a $U^s(\mathbf{q}^s_{n_k}) \to X^s(C)$ határátmenet. Mivel az $U^s(\mathbf{q}^s_n)$ sorozat monoton csökkenő, ezért az n_k indexezésű részsorozat konvergenciája maga után vonja az egész sorozat konvergenciáját, tehát a (4.27)-ös határátmenetet beláttuk.
Ezért:

$$\sum_{C \in 2^D} \lambda^C \nu^D(C) \leq -\rho(\sum_{C \in 2^D} \lambda^C X(C)) = -\rho(\sum_{C \in 2^D} \lambda^C \lim_{n\to\infty} X_n(C))$$

A jobb oldal a határérték linearitása és a koherens kockázati mértékek diszkért valószínűségi változók pontonkénti konvergenciája miatt a következő lesz:

$$\lim_{n\to\infty} -\rho(\sum_{C \in 2^D} \lambda^C (U^s(\mathbf{q}^s_n(C)))^{1,\ldots,S})$$

Az első eset bizonyításából tudjuk, hogy az itt előállt sorozat minden eleme felülbecsülhető a

$$-\rho((U^s(\sum_{C \in 2^D} \lambda^C \mathbf{q}^s_n(C)))^{1,\ldots,S})$$

sorozat megfelelő elemével, azért az fenti határértéket felülről becsülhetjük ez utóbbi sorozat alsó határértékével

$$\lim_{n\to\infty} -\rho(\sum_{C \in 2^D} \lambda^C (U^s(\mathbf{q}^s_n(C)))^{1,\ldots,S}) \leq \liminf_{n\to\infty} -\rho((U^s(\sum_{C \in 2^D} \lambda^C \mathbf{q}^s_n(C)))^{1,\ldots,S})$$

Szintén az előző pont bizonyításából kapjuk meg a

$$\liminf_{n\to\infty} -\rho((U^s(\sum_{C \in 2^D} \lambda^C \mathbf{q}^s_n(C)))^{1,\ldots,S}) \leq \lim_{n\to\infty} -\rho((U^s(\mathbf{q}^s_n(D)))^{1,\ldots,S})$$

relációt. A jobboldali határérték létezése nyilvánvaló a

$$\lim_{n\to\infty} -\rho((U^s(\mathbf{q}^s_n(D)))^{1,\ldots,S}) = -\rho(\lim_{n\to\infty} (U^s(\mathbf{q}^s_n(D)))^{1,\ldots,S})$$

egyenlőségből valamint a fentiekből. Az utóbbi egyenlőség jobb oldala viszont éppen $-\rho(X(D)) = \nu^D(D)$ $\square$
Az előző alfejezetben bizonyított $\Gamma_{tb} \subseteq \Gamma_r$ tartalmazás egyszerű következménye az $\Gamma_{tb} \subseteq \Gamma rl$ tartalmazás. Vegyünk egy tetszőleges $(N, \nu) \in \Gamma_r$ játékot. Könnyen végiggondolható, hogy az (N, ν)-t generáló (N, S, π, X, ρ) kockázatelosztási helyzet valójában egy olyan speciális likviditással kiegészített kockázatelosztási helyzet, amelyben $\mathcal{L}^s = \mathcal{P}$, $\forall s \in S$ és minden eszköz konstans MSDC-vel rendelkezik, azaz végtelenül likvid. Ebből azonnal következik a $\Gamma_r \subseteq \Gamma_{rl}$ tartalmazás, és innen $\Gamma_{tb} \subseteq \Gamma_{rl}$ triviális.
Végezetül a következtetést levonva kimondjuk a fejezet fő állítását.
Áll:
A teljesen kiegyensúlyozott játékok osztálya és a likviditással kiegészített kockázatelosztási játékok osztálya egybeesik, azaz $\Gamma_{tb} = \Gamma_{rl}$

5. fejezet

Következmény

A dolgozat fő eredményének, azaz a $\Gamma_{tb} = \Gamma_{rl}$ egybeesésnek következménye, hogy a likviditási feltételek bevezetésével sem kapunk bővebb generált játékosztályt a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztályánál. Ez az eredmény első ránézésre csupán elméleti jelentőségűnek tűnhet, azonban vegyük figyelembe [11] eredményét, amely kimondja az igazságos tőkeallokáció lehetetlenségét a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztályán.
Ezen eredmény ismertetéséhez először definiáljunk néhány fogalmat, és hozzájuk kapcsolódó eredményeket.
Az előző fejezetben tárgyalt matematikai modell mögött a gyakorlatban a vállalaton belüli diverzifikáció miatt keletkező többlettőke részlegek közötti szétosztása áll. Az, hogy a teljes vállalatnak kevesebb tőkét kell tartalékolnia, mint az egyes részlegek tőketartalékainak az összege, egyszerű következménye a ρ kockázati mérték szubadditivitásának. Az így nyert tőke részlegek közötti szétosztásával szemben több természetes követelmény is létezik.
A fent tárgyalt kockázatelosztási játékok még sok más gyakorlati probléma matematikai modelljéül szolgálnak, lásd [10].
A diverzifikációval nyert többlettőke elosztására léteznek bizonyos eljárások, ezeket *megoldásnak* nevezzük. A következő fejezet terminológiájában ν kifizetésfüggvény az adott koalíció által különállóan elérhető többlettőkét jelenti.

5.1.Def:. *A $\psi : A \to R^N$ leképezést a játékok A halmazán értelmezett kockázatelosztási* megoldásnak *nevezzük, ahol $A \subseteq \Gamma$.*

A megoldás tulajdonképpen egy adott (N, ν) játékhoz tartozó $(\psi_i(\nu))_{i \in N}$ vektor, amelynek $\psi_i(\nu)$ koordinátája az i. részlegre kiosztott többlettőkét adja meg.
A tőkeallokációs megoldásra az egyik legalapvetőbb példa az úgynevezett Shapley érték:

5.2.Def:. *Tetszőleges* $(N, \nu) \in \Gamma$ *játékra a* ϕ*-vel jelölt Shapley féle tőkeallokációs módszer:*

$$\phi_i(\nu) = \sum_{C \in N \setminus \{i\}} \nu_i'(C) \frac{|C|!(|N \setminus C| - 1)!)}{|N|!}$$

A megoldásoknak a gyakorlatban meg kell felelniük bizonyos elvárásoknak, ezek a következők:

5.3.Def:. *Egy* Γ*-n értelmezett* ψ *megoldás*
1. hatékony*, ha minden* $(N, \nu) \in \Gamma$ *esetén* $\sum_{i \in N} \psi_i(\nu) = \nu(N)$
2. szimmetrikus*, ha minden* $(N, \nu) \in \Gamma$ *és tetszőleges* i, j *részleg esetén, amelyekre igaz a* $\nu_i'(C) = \nu_j(C)$ *tetszőleges* $i, j \notin S \subset N$ *teljesül a* $\psi_i(\nu) = \psi_j(\nu)$ *egyenlőség*
3. erősen monoton*, ha minden* $(N, \nu), (N, \mu)$ *játékpár és* $i \in N$ *esetén a* $\nu_i' \leq \mu_i'$ *reláció maga után vonja a* $\psi_i(\nu) \leq \psi_i(\mu)$ *relációt*
4. stabil*, ha tetszőleges* $(N, \nu) \in \Gamma$ *játékra* $\psi(\nu) \in core(\nu)$

A hatékonyság követelménye meglehetősen szemléletes. Gyakorlatilag azt követeli meg, hogy a diverzifikációból származó teljes többlettőke legyen szétosztva a vállalat részlegei között.
A szimmetria azt mondja ki, hogy ha két részleg a játék szempontjából megkülönböztethetetlen, azaz felcserélve őket a játék nem változik, akkor azonos tőkét kell rájuk allokálni.
Az erős monotonitással azt követeljük meg, hogy ha egy részleg két kockázatkezelési játék közül az elsőben kockázatosabb, akkor az elsőben hozzáallokált tőke legalább akkora, mint a másodikban hozzáallokált. Másképpen megfogalmazva, a kiosztott tőke a kockázatosság monoton növekvő függvénye.
A stabilitás követelménye szintén magától értetődő. Korábban említettük, hogy az elosztás magbelisége azt jelenti, hogy nem létezik egyetlenegy koalíció sem, amelynek érdekében lenne kiválni a vállalatból.
Mivel a fenti követelmények meglehetősen természetesek, olyan ψ tőkeallokációs megoldásra lenne szükségünk, amely mind a négyet teljesíti. Azonban ilyen ψ megoldás nem létezik, ami kiderül a következő tetelből, amely bizonyítással együtt megtalálható [11]-ben.

2.Tétel:. *Nem létezik olyan tőkeallokációs megoldás, amely egyszerre telesíti a stabilitás, erős monotonitás és a szimmetria tulajdonságát.*

Mj: A tétel egyszerű következménye annak az állításnak, amely szerint teljesen kiegyensúlyozott játék esetén az egyetlen szimmetrikus, hatékony és erősen monoton megoldás a Shapley-módszer, amely ugyanakkor nem minden esetben lesz stabil, lásd [11].

A Shapley-módszer nem magbelisége egy, a gyakorlatban is jelentős probléma, ugyanis a szimulációk különböző feltételezések mellett nagyjából $40 - 60$ százalékban vezettek nem magbeli eredményre.

Irodalomjegyzék

[1] Acerbi, C. - Scandolo, G., 2008, *Liquidity risk theory and coherent measures of risk*, Quantitative Finance, Vol. 8, No. 7, October 2008, pp. 681–692

[2] Artzner, P., 1999, *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, Vol. 9, No. 3, pp. 203–228

[3] Artzner, P. - Dealben, F. - Eber, J. M. - Heath, D. - Ku, H., 2007, *Coherent multi-period risk adjusted values and Bellman's principle*, Annals of Operations Research July 2007, Volume 152, Issue 1, pp 5-22

[4] Csóka, P. - Herings, J. J. - Kóczy, L. Á., 2009, *Stable allocations of risk*, Games and Economic Behavior 67, pp. 266–276

[5] Csóka, P. - Herings, J. J., 2012,*Risk Allocation under Liquidity Considerations*,

[6] Acerbi, C.- Taasche, D., 2002, *On the coherence of expected shortfall*, Journal of Banking and Finance 26, pp. 1487–1503

[7] Föllmer, H. - Schied, A., 2002, *Convex measures of risk and trading constraints*, Finance Stoch., 6(4), pp. 429–447.

[8] Frittelli, M., - Rosazza Gianin, E., 2002, *Putting order in risk measures*, J. Banking and Finance, 26(7), pp. 1473–1486.

[9] Shapley, L. S., 1967, *On balanced sets and cores*, Naval Res. Logist. Quart. 14, pp. 453–460.

[10] Balog, D. - Bátyi, T. L. - Csóka, P. - Pintér, M., 2011, *Tőkeallokációs módszerek és tulajdonságaik a gyakorlatban*, Közgazdasági Szemle, LVIII. évf., 2011. július–augusztus (619–632. o.)

[11] Csóka, P. - Pintér, M., 2013, *On fair risk allocations*