Biztosítások közbeszerzésének modellezése kooperatív játékelméleti módszerekkel

Diplomamunka

Írta: Szabari Péterné

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc

Témavezető:

Pintér Miklós, egyetemi docens
Matematika Tanszék
Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2013

Budapest Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar
2013

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Biztosítások közbeszerzése

„A közbeszerzés az államigazgatási és egyéb költségvetési szervek közszolgáltató tevékenységükkel összefüggő árubeszerzéseinek, építési beruházásainak és szolgáltatási megrendeléseinek külön törvényben meghatározott köre, amelynek értékhatárát Magyarországon az éves költségvetési törvény állapítja meg" (Wikipédia, 2013).

A költségvetési szervek, ha valamilyen biztosítást szeretnének kötni, akkor ha 8 millió Ft-nál (Számadó és Dr.Stocz, 2013) nagyobb a biztosítás összege, akkor kötelező közbeszerzést kiírnia rá, ha ennél kisebb, akkor nem kötelező, de lehetséges. Szoktak élni ezzel a lehetőséggel az ajánlatkérők. Ebben a szakdolgozatban az ilyen eljárásban résztvevő biztosítótársaságok viselkedését modellezem, és megvizsgálom, hogy ezen viselkedésről hogyan tudja megsejteni a hatóság, hogy tiszta verseny zajlott-e le, vagy pedig szövetkeztek egymással az ajánlattevők.

Az 1.2. részben elemzem a magyar biztosítási közbeszerzési piacot. Kiderült, hogy viszonylag kevés, mindössze hét biztosító tudott nyerni 2011-től valamilyen közbeszerzést. Ennél valamivel persze többen adtak be érvényes ajánlatot, de számuk nem haladja meg a tíz-tizenkettőt. Az igazán esélyes biztosítók pedig mindössze hárman voltak ebben az időszakban. Könnyen el lehet képzelni, hogy ezek a társaságok igen jól ismerik egymást, akár egymás gyengéit, erősségeit is. Ezért igazán érdekes a biztosítások közbeszerzési piacán vizsgálni az összefogás, kartellképzés lehetőségeit, mert ennek igen nagy előfeltétele, hogy jól ismerjék egymást az ajánlattevők. Kevés társaság által uralt piacon általában olyan kartellek jönnek létre, amelyek a piac felosztására irányulnak, hiszen mondjuk három társaság ezt nagyon könnyen meg is teheti. Amelyik piacokon jóval több az esélyes induló vállalat, ott inkább ármegkötő kartellek szoktak létrejönni, hiszen túl sok cégnek kellene összefogni egymással, hogy fel tudják osztani a piacot. Így azokon a közbeszerzési piacokon (pl. építési beruházások), ahol nagyon sokféle vállalat indul, nem lenne értelme piacfelosztó kartellek létrejöttét vizsgálni. Ezért izgalmas a biztosítási közbeszerzésekkel foglalkozni ebben a témában. Ehhez először is nézzük meg, hogyan működnek a közbeszerzési eljárások.

A most hatályos közbeszerzési törvény a 2011. évi CVIII. törvény (Jogtár, 2011). Ezen törvényben leírják, hogy a közbeszerzések célja, hogy biztosítsa a közpénzek ésszerű és hatékony felhasználását, megteremtse ezek nyilvános ellenőrzésének lehetőségét, valamint a szabályrendszer segítségével lehet biztosítani a közbeszerzések során a verseny tisztaságát. A 2. §-ban olvashatjuk, hogy milyen intézkedéseket kell tenni az ajánlatkérőnek és az ajánlattevőknek a verseny tisztasága érdekében, úgy mint esélyegyenlőséget és egyenlő bánásmódot kell biztosítania az ajánlatkérőnek a gazdasági szereplők számára, kötelesek a jóhiszeműség és a tisztesség, valamint a rendeltetésszerű joggyakorlás követelményeinek eleget tenni. El lehet képzelni, hogy igen nehéz ellenőrizni ezen elvek betartását, és igen elképzelhető, hogy valamelyik fél a haszon maximalizálása érdekében szívesen eltér ezektől. A Gazdasági Versenyhivatal külön is foglalkozik a közbeszerzések esetén létrejövő kartellek (szövetségek) kiderítésével és felszámolásával, ami bizonyítja, hogy ilyenre van példa, érdemes ezzel foglalkozni.

A közbeszerzési eljárás szereplői az ajánlatkérő (államigazgatási és egyéb költségvetési szerv) és az ajánlattevők (gazdasági szereplők, vállalatok, amelyek ajánlatot nyújtanak be). Az eljárás az indító hirdetmény feladásával indul, amely tartalmazza a közbeszerzés típusát (árubeszerzés, építési beruházás vagy szolgáltatás megrendelés), tárgyát (pl. gépjármű kötelező felelősségbiztosítás), a teljesítés helyét (pl. Budapest és Pest megye), a keretmegállapodás időtartamát (pl. 48 hónap), a szerződés szerinti mennyiséget (pl. hány gépjárműre), az ajánlattevőre vonatkozó feltételeket (alkalmasság mibenléte, kizáró okok), gazdasági és pénzügyi alkalmasság kritériumait, műszaki és szakmai alkalmasság kritériumait, az eljárás fajtáját (nyílt, meghívásos), a bírálati szempontokat, az ajánlattételi határidőt és egyéb kiegészítő információkat.

Ezen szakdolgozatban az ajánlattevők biztosító társaságok, a közbeszerzés típusa pedig minden esetben biztosításra vonatkozó szolgáltatás megrendelése. A biztosítás tárgya már igen sokféle lehet, ezen fejezet végén kisebb ízelítőt mutatok belőle. Az eljárás fajtáját illetően általában nyílt eljárásokkal foglalkozok, ilyen tárgyú közbeszerzéseknél ez a leggyakoribb.

A bírálati szempont a legtöbb esetben az ár, azaz a legalacsonyabb árat benyújtó ajánlattevő kapja a megbízást, persze vannak ésszerűségi keretek, azaz irreálisan alacsony ár esetében kiegészítő információkat kér a hatóság, esetleg kizárással bünteti

Bírálati szempont	Súlyszám
A vagyonbiztosítás díjtétele a biztosítandó ingatlanok értékéhez viszonyítva (ezrelék)	45
Az általános és bérbeadói felelősségbiztosítás díja (nettó HUF)	10
A bérlői felelősségbiztosítás díja (nettó HUF)	10
A káralakulástól függő díjvisszatérítés mértéke	10
A Ptk. 543. § (1) bekezdése szerinti respirótól az ajánlattevő javára történő eltérés (nap)	5
A káresemény bekövetkeztekor, a jogalap elbírálását követő 5 munkanapon belül a biztosított és/vagy a károsult részére folyósított kárelőleg mértéke	5
A biztosítási szerződésben vállalt fedezet terjedelme:	
Szublimitek mértéke	5
Kockázat kizárás, kockázat szűkítés köre	10

1.1. táblázat. Bírálati szempontok

az adott vállalatot. Kirívóan alacsony ár esetében az ajánlatkérő indokolást és az ajánlati elemre vonatkozó adatokat köteles kérni. Az erre adott válasz a gazdasági ésszerűséggel össze nem egyeztethetőnek minősül főleg akkor, ha az adott munka elvégzéséhez szükséges emberek munkabérét és azok járulékait sem lehet az adott ajánlatból kifizetni.

Viszont nem csak árat vehet figyelembe az ajánlatkérő, hanem nézheti az összességében legelőnyösebb ajánlatot is. Ez esetben részletesen meg kell adnia, hogy az áron kívül milyen egyéb szempontokat vesz figyelembe, és ezt már a kiírásban a résztvevők tudtára kell adnia. Az ajánlatkérők sokszor élnek is e lehetőséggel, példaként nézzük meg az alábbi közbeszerzést (Közbeszerzés-Online.hu, 2013):

- Az ajánlatkérő a Nemzeti Eszközkezelő Zrt.
- A közbeszerzés tárgya: NET nyíltvégű egyedi biztosítási szerződés, rögzített díjtételű, adatközlésen alapuló all risks vagyon- és felelősségbiztosítás.
- Bírálati szempont az összességében legelőnyösebb ajánlat az 1.1. táblázat alapján.

Emiatt igen sokrétű feltételeknek kell megfelelnie az ajánlattevőnek ahhoz, hogy nyerni tudjon egy biztosító az ilyen közbeszerzési eljárásokban.

A hirdetmény feladását követően a közbeszerzésen indulni kívánó vállalatoknak az ajánlattételi határidőig van idejük elkészíteni és benyújtani ajánlatukat. A határidő lezárultával az ajánlatkérő meghatározza az eljárás nyertesét, azaz azt a biztosítót, amelyik a meghatározott értékelési szempontok szerint a legkedvezőbb ajánlatot nyújtotta be, és ajánlata nem volt érvénytelennek minősítve. Érvénytelen lesz egy ajánlat, ha a kiírásban szereplő valamely feltételnek nem tesz eleget, és később sem tudja ennek ellenkezőjét igazolni az ajánlattevő. Az eljárás eredménytelen, ha nem nyújtottak be ajánlatot, vagy ha kizárólag érvénytelen ajánlatot nyújtottak be, illetve hogyha valamelyik ajánlattevőnek az eljárás tisztaságát súlyosan sértő cselekménye miatt az ajánlatkérő az eljárást eredménytelennek nyilvánítja. Ezek után az ajánlatkérő köteles írásban tájékoztatni az ajánlattevőket az eljárás eredményéről. Végül a nyertes ajánlattevővel megkötik a szerződést.

„Az ajánlatkérő a nyertes ajánlattevővel szemben csak abban az esetben mentesül a közbeszerzési szerződés megkötésének kötelezettsége alól, ha az eredményhirdetést követően – általa előre nem látható és elháríthatatlan ok következtében – beállott lényeges körülmény miatt a közbeszerzési szerződés megkötésére vagy teljesítésére nem képes. (Consulting, 2013) ”

Nézzünk egy-két példát biztosításra vonatkozó közbeszerzési eljárásra (Közbeszerzés-Online.hu, 2013):

- All risks vagyon- és üzemszünetbiztosítás a Hungarocontrol Zrt. részére (határidő: 2013.04.22.)
- Győr megyei jogú város Önkormányzata és intézményei vagyon- és felelősségbiztosítása (határidő: 2013.02.23)
- A Főtáv Zrt. magyarországi üdülőire vonatkozó teljes körű vagyonbiztosítási szerződés, 1 éves határozott időre (határidő: 2013.03.18.)
- Gépjármű casco biztosítás szolgáltatás nyújtása a Közbeszerzési és Ellátási Főigazgatóság részére 2013. évben (határidő: 2013.02.26., becsült érték: 32.775.000 HUF)
- Biztosítási szolgáltatások nyújtása az NMHH részére (határidő: 2013.03.05.)

A példák között láthattunk egy olyat, ahol ún. becsült értéket is megadott az ajánlatkérő. A becsült érték a közbeszerzés megkezdésekor annak tárgyáért általában kért, általános forgalmi adó nélkül számított, legmagasabb összegű teljes ellenszolgáltatás (Dr.Perczel, 2013). Tehát ennél magasabb ajánlatot nem fognak elfogadni, azaz ha a legkedvezőbb ajánlat a becsült értéknél magasabb, akkor eredménytelennek nyilvánítják az eljárást. Ezen érték kiszámítására a törvény részletes szabályozást tartalmaz, annak figyelembevételével számítható ki a közbeszerzés tárgyának becsült értéke. Ez igen fontos, ugyanis a becsült érték nagyságától függ, hogy az ajánlatkérőnek kell-e közbeszerzési eljárást indítania, illetve hogy milyen típusút kell. Továbbá az összefogás vizsgálatánál is jó, ha ismerjük az adott közbeszerzés becsült értékét, a megtalálható adatokban sok helyen ez nem volt feltüntetve.

A 3.4. részben részletezem, hogy egy ilyen közbeszerzési eljárás leírható egy elsőáras zárt licites aukciós játékkal, ahol megengedjük azt is, hogy az ajánlattevők (avagy licitálók) egymással összefogjanak, és együtt határozzák meg licitjeiket. Ez természetesen nem fér bele a verseny tisztaságába, de mint ismeretes, kartellek mindig is léteztek, léteznek. A híradásokból sok ilyenről lehet tudomást szerezni. A 4. részben mutatom be, hogy az optimális magatartás a haszonmaximalizáló társaságok számára az, hogyha összefognak mindannyian, és az így megszerzett hasznot szétosztják maguk között. Sőt mint ki fog derülni, ez olyannyira jó megoldás, hogy nem éri meg kilépni ebből az összefogásból, mert úgy csak csökkenteni tudják a kilépők a profitjukat. Érdekes kérdés, hogy hogyan lehet ezt a kedvezőtlen képet befolyásolni olyan eszközökkel, amelyek a profit szempontjából visszatartóak (a dolgozat végén fel is vetek egy ilyen lehetőséget), hiszen törvényes eszközök természetesen most is rendelkezésre állnak, a közbeszerzési törvényben benne is van a verseny tisztaságának megszüntetését célzó tevékenységek tiltása. Valamint szintén hasznos egy olyan eszköz keresése, amellyel a hatóság meg tudja sejteni az összefogást azokból az információkból, amelyek hozzá eljuthatnak (nevezetesen a ajánlattevők licitjeiből). A dolgozatból világosan kiderül, hogy nem elég az egyének vizsgálata, hanem az ajánlattevők együttes viselkedéséből lehet következtetni az összefogásra, vagy a tiszta versenyre. A mostani törvényben ilyen jellegű vizsgálatra nincs példa.

A 2. fejezetben kezdek hozzá a szituáció matematikai leírásához, ahol először is szükségünk lesz egy olyan struktúrára, amely leírja az ajánlattevők között fennálló hierarchiát (ez most abból fakad, hogy eltérő módon értékelik a különböző biztosító társaságok az adott közbeszerzés értékét). A 3. fejezetben bemutatom, hogy az a biztosító, aki a legalacsonyabban tudja vállalni az adott kockázatot, az kihagyhatatlan az összefogásból, és egyben a végeredményből is. Ezt a struktúrát írják le nekünk az antimatroidok, bevezetésük a 2.2. fejezetben történik. Valamint ezután szükségünk van az aukciós játékok vizsgálatára (3. fejezet), és annak bizonyítására, hogy az elsőáras zárt licites aukciós játékokkal valóban modellezni lehet a közbeszerzési eljárásokat. Ezután fogom megmutatni a 4. részben, hogy miért optimális megoldás az, ha minden ajánlattevő összefog. Sőt még egy lehetséges eszközt is fogok mutatni az összefogással elért haszon szétosztására (Shapley, 1953).

Így a Shapley-értékből és annak a 4. részben bizonyított jó tulajdonságából (stabilitás) a biztosító társaságok viselkedésére tudunk választ adni. A licitek ábrázolásából, és a köztük lévő viszony értelmezéséből pedig arra tudunk következtetni, hogy összefogtak-e a biztosítók, avagy sem. Ez csak egy lehetőség, ha arra következtetünk, hogy összefogtak, az még nem jelenti biztosan azt, hogy szövetkeztek, még más eszközökkel ezt bizonyítania kell a hatóságnak. Viszont ha azt a következtetést fogjuk levonni, hogy nagy valószínűséggel nem szövetkeztek, akkor azt el lehet hinni, mert belátható ebben az esetben, hogy szövetkezés esetén nem ilyenek lennének a licitek (ilyen licitekkel összefogás esetén kisebb hasznot érnek el, mint másféle licitekkel). Érdekes pontja lesz ezen vizsgálatnak az, hogy éppen a magas liciteket kell majd figyelni, amiről a törvényben nem igen esik szó (ott inkább csak a kirívóan alacsony árat nézik).

Most nézzük meg, hogy mekkora is a biztosítások közbeszerzésének piaca.

1.2. A biztosítások közbeszerzésének piaca

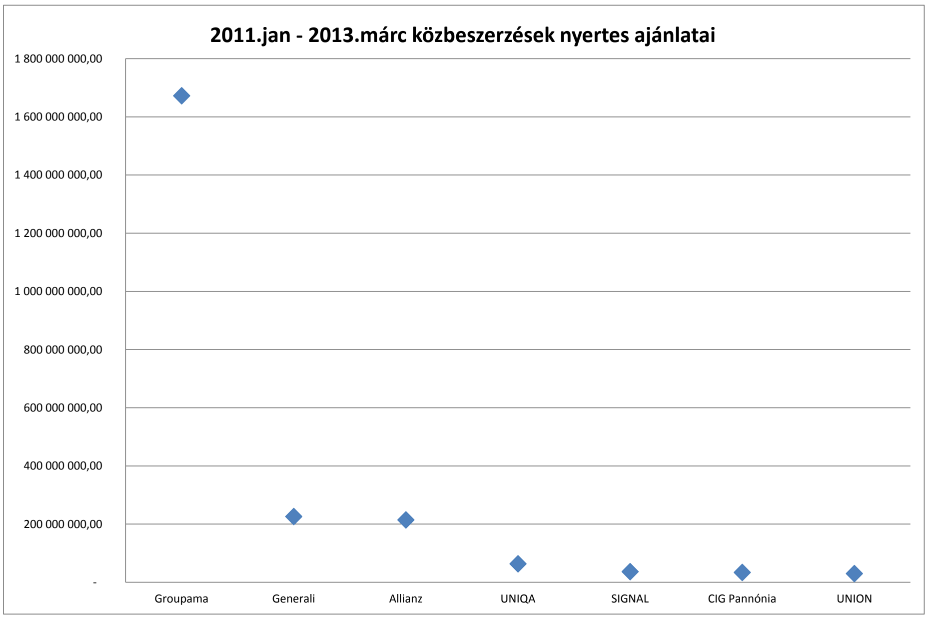
Az adataim 2011. január 1. - 2013. március 8. tartalmazzák a kiírt és elbírált biztosítási szolgáltatások beszerzésére vonatkozó közbeszerzéseket (Közbeszerzés-Online.hu, 2013). Összesen 81 db. ilyen közbeszerzést írtak ki, ebből mindössze 9 volt eredménytelen. Az 1.2. táblázat éves bontásban tartalmazza, hogy mennyi eljárást indítottak az adott évben, illetve hány volt ezek közül eredménytelen:

Időszak	Kiírt eljárás (db)	Ebből eredménytelen
2013. január 1. - 2013. március 8.	11	3
2012. január 1. - 2012. december 31.	31	2
2011. január 1. - 2011. december 31.	39	4

1.2. táblázat. Biztosítási közbeszerzések darabszámai

A nyertes biztosító társaságok ezen időszakban mindösszesen 7-en voltak, ennél persze valamennyivel többen is nyújhattak be ajánlatot (erre nincs adatom), de nem valószínű, hogy sokan lennének. A nyertes ajánlatot benyújtó társaságok a Groupama Biztosító Zrt., a Generali Providencia Biztosító Zrt., az Allianz Hungária Biztosító Zrt., a SIGNAL Biztosító Zrt., a UNION Vienna Insurance Group Biztosító Zrt., az UNIQA Biztosító Zrt. és a CIG Pannónia Első Magyar Általános Biztosító Zrt. A legkiemelkedőbbek a Groupama 30 megnyert közbeszerzéssel, a második az Allianz 15 megnyert pályázattal és harmadik a Generali 14 nyertes ajánlattal. Ők az összes kiírt pályázatból 72,83 %-ot nyertek meg, a többin osztozott a többi társaság.

Összesen ezen időszak alatt a nyertes biztosítók 2.276.687.217 Ft értékben nyertek közbeszerzést. Az 1.1. ábrán látható ezen összeg eloszlása az egyes biztosítók között.



1.1. ábra. A megnyert összegek biztosítónként

Látható, hogy ebben a közel két és fél évben a Groupama uralta ezt a piacot, és rajta kívül számottevően csak ketten voltak a nyertesek között.

Ezen közbeszerzések legnagyobb része teljes körű vagyon- és felelősségbiztosítás valamilyen önkormányzat vagy kormányhivatal intézményei részére, illetve ezeken kívül a gépjármű kötelező felelősségbiztosítás és casco biztosítás a legszámottevőbb. Néha előfordul még csoportos baleset és felelősségbiztosítás, orvos szakmai felelősségbiztosítás és egyéb érdekességek is (pl. nukleáris kárfelelősségbiztosítás). Tehát látható, hogy körülbelül megegyezik ezen biztosítások tárgya, talán evvel is magyarázható, hogy viszonylag kevés biztosító nyújtott be nyertes ajánlatot, illetve egyáltalán nyújtott be ajánlatot ezen kiírásokra.

Mint látható, elég sok eljárást írnak ki, és viszonylag nagy értékűeket, tehát szerintem van értelme ezzel a témával tovább foglalkozni.

Ezek után lássunk hozzá a matematikai modellezéshez.

2. fejezet

Antimatroidokon értelmezett TU-játékok

2.1. TU-játékok bevezetése

Szakdolgozatomban az átruházható hasznosságú kooperatív játékokkal foglalkozom, amit ezentúl röviden csak TU-játéknak fogok hívni. Az átruházható hasznosság annyit jelent, hogy a játékosok a koalíciók nyereségét egymás között tetszőlegesen és szabadon szét tudják osztani. A TU-játékokat és a Shapley-érték (Shapley, 1953) axiomatizálását Pintér (2009) cikke és Márkus (2011) szakdolgozata alapján dolgozom fel.

Jelölje $\mathcal{P}(N)$ az N halmaz összes részhalmazainak osztályát, az N halmaz a játékosok halmaza.

2.1. definíció. *Legyen $N \neq \emptyset$, $|N| < \infty$, és $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $v(\emptyset) = 0$. Ekkor N-t a játékosok halmazának, v-t pedig átruházható hasznosságú koalíciós formában adott játéknak, röviden TU-játéknak nevezzük. Továbbá, $\mathcal{G}^N$ jelöli az N játékoshalmazzal rendelkező játékok osztályát, valamint nagykoalíciónak hívjuk, amikor minden játékos benne van a koalícióban, azaz N létrejön.*

Egy $S \subseteq N$ halmazt koalíciónak nevezünk, a koalíció tagjai által elérhető $v(S)$ számot pedig a koalíció értékének hívjuk. A koalíció szemléletesen a játékosok egy csoportját jelenti, a $v(S)$ pedig azt a pénzmennyiséget, amit szétoszthatnak maguk között.

2.2. definíció. *Legyen $v \in \mathcal{G}^N$. Ekkor az i játékost nulla-játékosnak nevezzük, ha minden $S \subseteq N$-re $v(S) = v(S \cup \{i\})$.*

Azaz egy nulla-játékos bármilyen koalícióhoz csatlakozik is, nem tud hozzátenni a koalíció értékéhez, sem elvenni belőle. A következő definícióval az egyetértési játékokat vezetjük be, ezekre a játékokra a 3. fejezetben lesz szükségünk.

2.3. definíció. *Legyen N, $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$ tetszőleges rögzített, és minden $S \subseteq N$-re*

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } T \subseteq S \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \tag{2.1}$$

Az u_T játékot a T koalíción értelmezett egyetértési játéknak nevezzük.

Az egyetértési játékban csakis akkor lesz egy koalíció értéke nullától különböző, ha abban a koalícióban benne vannak a T halmaz játékosai. Például csak akkor lehet megszavazni egy javaslatot, ha azzal minden T-beli játékos egyetért. A következő állítás bizonyítása megtalálható Peleg és Sudhölter (2003) munkájában.

2.4. állítás. *Az $\{u_T\}_{T \subseteq N,\ T \neq \emptyset}$ bázisa az $\mathbb{R}^{|2^N|-1}$ térnek, azaz minden v TU-játék egyértelműen előállítható az egyetértési játékok lineáris kombinációjaként.*

Vezessük be a megoldás fogalmát.

2.5. definíció. *Az $f : A \to \mathbb{R}^N$ függvényt, ahol $A \subseteq \mathcal{G}^N$, az A halmazon értelmezett megoldásnak nevezzük.*

A Shapley-érték a TU-játékokon értelmezett megoldási koncepciók egyik legnépszerűbbike, ezért használom én is ezt a megoldást a nagykoalíció értékének szétosztására a játékosok között.

2.6. definíció. *Shapley (1953) Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőleges rögzített, és minden $i \in N$-re legyen*

$$Sh_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \, \frac{|S|!(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!} \ . \tag{2.2}$$

Most bevezetjük azokat az axiómákat, amelyeket a Shapley-féle (Shapley, 1953) axiomatizáláshoz használunk.

2.7. definíció. *Legyen f az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ halmazon értelmezett megoldás. Az f megoldás*

1. *hatékony, ha minden $v \in A$-ra $\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N)$,*

2. *nulla játékos tulajdonságú, ha minden $v \in A$-ra és minden $i \in N$-re, ha $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$, ahol $S \subseteq N$, akkor $f_i(v) = 0$,*

3. *egyenlően kezelő, ha minden $v \in A$-ra és minden olyan $i, j \in N$ játékosra, amelyre $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, ahol $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ teljesül, hogy $f_i(v) = f_j(v)$,*

4. additív, ha minden $v, w \in A$-ra úgy, hogy $v+w \in A$ teljesül, hogy $f(v)+f(w) = f(v+w)$.

2.8. tétel. *(Shapley, 1953) Legyen f egy $\mathcal{G}^N$-en értelmezett megoldás. Ekkor az f megoldás pontosan akkor hatékony, nulla játékos tulajdonságú, egyenlően kezelő és additív, ha f a Shapley-megoldás.*

Az 1.1. részben már megemlítettük a stabilitás tulajdonságot, amelyet teljesítő megoldást bizonyos értelemben optimálisnak lehet nevezni.

2.9. definíció. *(Gillies, 1959) A $v \in \mathcal{G}^N$ játék magját jelölje Core(v), amelyet a következőképpen definiálhatunk. Core(v) $= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; v(N) = \sum\limits_{i \in N} x_i \text{ és } v(S) \leq \sum\limits_{i \in S} x_i \right\}$*

A Shapley-érték pontértékű megoldás (minden játékoshoz hozzárendel egy értéket), míg a mag halmazértékű megoldás. Egy magbeli megoldásban minden koalíció a lehető legjobban jár, azaz ez a megoldás stabil, semelyik koalíciónak sincs érdekében kilépni belőle.

Most térjünk rá az antimatroidok ismertetésére, amely korlátozza a létrejöhető koalíciókat, és amely struktúra segítségével végül modellezni tudjuk majd a közbeszerzési eljárásokat.

2.2. Az antimatroidok bevezetése

Az antimatroidokat és a rajtuk értelmezhető Shapley-érték tételeket az Algaba et al (2003) cikk alapján dolgozom fel. Az előzőekben bevezetett játékokban megengedtük bármelyik koalíció létrejöttét. Most ezt a feltételt fogjuk megszorítani, méghozzá úgy, hogy csak bizonyos koalíciókat engedünk meg létrejönni, és ezen az új struktúrán tekintjük az adott játékot. Azt a struktúrát, amely egy feltételrendszer mellett megadja a létrejöhető (megengedett) koalíciókat antimatroidnak (Dilworth, 1940) nevezzük.

2.10. definíció. *Legyen N véges és nemüres halmaz és $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(N)$ egy antimatroid, ha a következő feltételek teljesülnek rá.*

- *$\emptyset \in \mathcal{A}$,*
- *Elérhetőség: ha $E \in \mathcal{A}$ és $E \neq \emptyset$, akkor létezik olyan $i \in E$, hogy $E \setminus \{i\} \in \mathcal{A}$,*
- *Únió zártság: ha $E, F \in \mathcal{A}$, akkor $E \cup F \in \mathcal{A}$.*

A definíciót felhasználva be lehet látni a növekedési következményt, amely azt mondja ki, hogy ha $E, F \in \mathcal{A}$ és $|E| > |F|$, akkor létezik olyan $i \in E \setminus F$, amelyre $F \cup \{i\} \in \mathcal{A}$.

Ezek után nézzük meg a normalitás axiómáját. Mostantól csak olyan antimatroidokkal foglalkozunk, amelyek a fentieken kívül a normalitás axiómáját is kielégítik.

2.11. definíció (Normalitás). *Minden $i \in N$-re létezik olyan $E \in \mathcal{A}$, amelyre $i \in E$.*

A normalitásból egyenesen következik, hogy $N \in \mathcal{A}$. Most megnézünk az antimatroidokhoz kapcsolódó néhány fontos fogalmat, amelyekre szükségünk lesz az elkövetkezőkben.

2.12. definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy antimatroid N-en. Értelmezzük minden $E \subseteq N$ halmaz belsejét az $\mathcal{A}$ antimatroidra nézve a következőképpen:* $\operatorname{int}_{\mathcal{A}} : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{A}$

$$\operatorname{int}_{\mathcal{A}}(E) = \bigcup_{F \subseteq E, F \in \mathcal{A}} F \ . \tag{2.3}$$

A belseje operátor a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- $\operatorname{int}_{\mathcal{A}}(\emptyset) = \emptyset$,
- $\operatorname{int}_{\mathcal{A}}(E) \subseteq E$,
- ha $E \subseteq F$, akkor $\operatorname{int}_{\mathcal{A}}(E) \subseteq \operatorname{int}_{\mathcal{A}}(F)$,
- $\operatorname{int}_{\mathcal{A}}(\operatorname{int}_{\mathcal{A}}(E)) = \operatorname{int}_{\mathcal{A}}(E)$,
- ha $i, j \in \operatorname{int}_{\mathcal{A}}(E)$ és $j \notin \operatorname{int}_{\mathcal{A}}(E \setminus \{i\})$, akkor $i \in \operatorname{int}_{\mathcal{A}}(E \setminus \{j\})$.

2.13. definíció (Végpont (extrém pont)). *Az $E \in \mathcal{A}$ halmaznak az $i \in E$ pontja végpont, hogyha $E \setminus \{i\} \in \mathcal{A}$. Azaz a végpontoknak megfelelő játékosokat el is lehet hagyni az E megvalósítható koalícióból és E ezután is megvalósítható marad.*

Az elérhetőségi feltétel miatt minden nemüres $\mathcal{A}$-ban lévő koalíció tartalmaz legalább egy végpontot.

2.14. definíció. *Az $E \in \mathcal{A}$ koalíciót útvonalnak nevezzük, ha egyetlen végpontja van. Továbbá az $E \in \mathcal{A}$ útvonalat i-útnak nevezzük, ha az i végpontja E-nek. Az i-utak halmazát jelölje $A(i)$.*

A definícióból következik, hogy $E \in \mathcal{A}$ pontosan akkor, ha E $\mathcal{A}$-beli útvonalak úniója. Továbbá, az is következik, hogy minden $E \in \mathcal{A}$-ra, minden $i \in E$-hez létezik egy F i-út, amelyre igaz, hogy $F \subseteq E$.

2.15. definíció (Útvonal tulajdonság)**.** *Egy $\mathcal{A}$ antimatroid az N-en teljesíti az útvonal tulajdonságot, ha kielégíti a következő két feltételt:*

1. *Minden E útvonalnak van egy egyedi megvalósítható sorrendje, azaz $E = \{i_1, \ldots, i_t\}$, hogy $\{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{A}$ minden $1 \leq k \leq t$-re. Továbbá minden útvonalra ezen sorrendek uniója az N-nek egy részsorrendje lesz.*

2. *Ha E, F és $E \setminus \{i\}$ útvonalak olyanok, hogy F végpontja megegyezik $E \setminus \{i\}$ végpontjával, akkor $F \cup \{i\} \in \mathcal{A}$.*

Látható, hogy minden útvonalnak létezik egyedi megvalósítható sorrendje pontosan akkor, ha minden E i-útra, amelyre $|E| > 1$ az $E \setminus \{i\}$ is útvonal. Ez addig folytatható, míg el nem érünk $|E| = 2$-ig. Az éppen elhagyott i-kből valóban készíthető egy sorrend.

A 2.1. részben a TU-játékok értelmezéséhez szükségünk volt egy N véges és nemüres halmazra, a játékosok halmazára, illetve egy $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvényre. Egy $E \subseteq N$ koalíció értékét $v(E)$-vel jelöltük. Ha viszont egy $\mathcal{A}$ antimatroid által meghatározott struktúrán szeretnénk vizsgálni az E koalíció értékét, értelmeznünk kell a v játék egy korlátozott változatát az $\mathcal{A}$ antimatroidon, hiszen nincs minden E koalíció benne a struktúrában. A következő definíció megtalálható Derks és Peters (1992) cikkében is.

2.16. definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy antimatroid az N-en, és $E \in \mathcal{A}$. Ekkor az E koalíció értékét a következőképpen értelmezzük:*

$$v_{\mathcal{A}}(E) = v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E))$$

A TU-játékok megoldását f-fel jelöltük, ami megmondta, hogy egy játékos mennyi kifizetést fog kapni a játék eredményeképpen. Az $\mathcal{A}$ antimatroidon az $f : \mathcal{G}^{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}^N$ függvényt nevezzük megoldásnak, $f^{\mathcal{A}}(v)$-val jelöljük. A Shapley-értéket is szeretnénk értelmezni az antimatroidokon. Ezt úgy tehetjük meg, hogy az antimatroidon értelmezett játékra vonatkozó korlátozott Shapley-értéket számítjuk ki, ami nem más, mint az eddig megismert Shapley-érték a korlátozott játékon. A korlátozott Shapley-értéket az antimatroidokon jelölje $Sh_i^{\mathcal{A}}$.

2.17. definíció. *A korlátozott Shapley-érték a következő képlettel értelmezhető:*

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(v) = Sh_i(v_{\mathcal{A}}) = \sum_{\{E \subseteq N : i \in E\}} \frac{d_{v_{\mathcal{A}}}(E)}{|E|} \ , \tag{2.4}$$

ahol $d_v(E) = \sum_{T \subseteq E} (-1)^{|E|-|T|} v(T)$, amit Harsányi-osztalékként is szoktak használni.

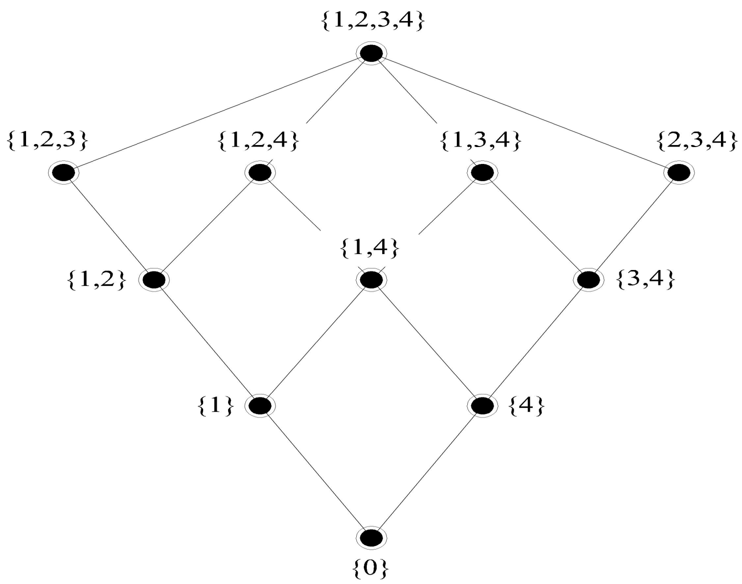
A poset antimatroidok olyan speciális antimatroidok, amelyek metszetzártak is. Az aukciós játékokat leíró struktúra egy poset antimatroid, annak is egy egyszerű változata, egy lánc.

2.18. definíció (Poset antimatroid)**.** *Az $\mathcal{A}$ egy poset antimatroid, ha minden $E, F \in \mathcal{A}$-ra $E \cap F \in \mathcal{A}$.*

Az eddig ismertetett fogalmakat két példán keresztül szemléletesen is bemutatom.

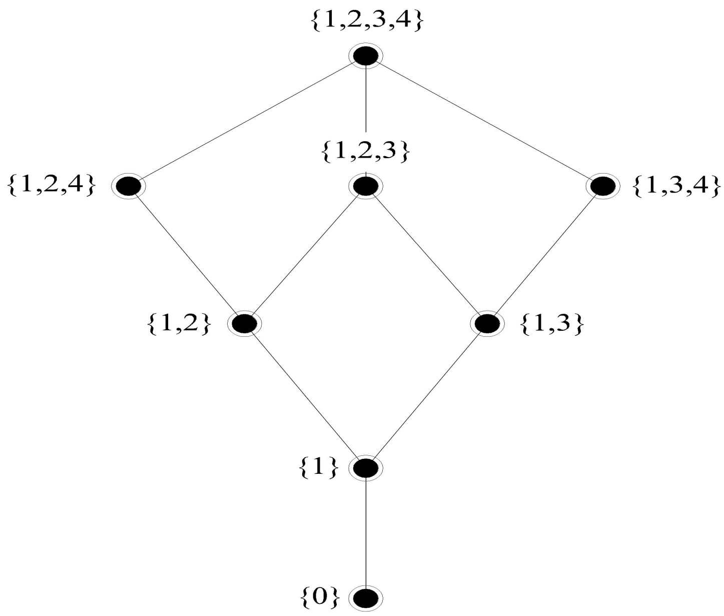
2.19. *példa.* A 2.1. ábrán látható egy egyszerű antimatroid. A következő útvonalak találhatóak benne: $\{1\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$. A különböző i-utak halmazai: $A(1) = \{1\}, A(2) = \{\{1,2\}, \{2,3,4\}\}, A(3) = \{\{1,2,3\}, \{3,4\}\}, A(4) = \{4\}$.

Az is ellenőrizhető, hogy ez az antimatroid nem teljesíti az útvonal tulajdonságot, hiszen legyen $E = \{2,3,4\}$ és $F = \{1,2,3\}$, ekkor E egy 2-út, F egy 3-út, és $E \setminus \{2\} = \{3,4\}$ egy 3-út, de $\{2\} \in F$, ami miatt nem teljesül a 2.15. definíció *2.* pontja.



2.1. ábra. A 2.19. példához tartozó antimatroid

2.20. *példa.* Ebben a példában egy olyan antimatroidot mutatok be, amely teljesíti az útvonal tulajdonságot, könnyen látható, hogy a 2.2. ábrán látható antimatroidban van minden útvonalnak egyedi megvalósítható sorrendje. Nézzük meg itt is, hogy melyek lesznek az útvonalak: $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, a különböző i-utak: $A(1) = \{1\}$, $A(2) = \{\{1,2\}\}$, $A(3) = \{\{1,3\}\}$, $A(4) = \{\{1,2,4\},\{1,3,4\}\}$.



2.2. ábra. A 2.20. példához tartozó antimatroid

Ezek után nézzük meg a korlátozott Shapley-érték axiomatizációját.

2.3. Antimatroidon értelmezett Shapley-érték

Ebben a részben definiáljuk az $f^{\mathcal{A}}(v)$ megoldáshoz köthető axiómákat, amelyek hasonlítani fognak a 2.7. definícióban bevezetett tulajdonságokhoz. Majd az Algaba et al (2003) cikk alapján bemutatjuk azt a két tételt, amely kimondja, hogy a korlátozott Shapley-érték az egyetlen olyan megoldás, amely teljesíti ezeket az axiómákat.

2.21. axióma (Hatékonyság)**.** *Minden $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ játékra és $\mathcal{A}$ antimatroidra N-en az $f^{\mathcal{A}}(v)$ megoldás hatékony, ha $\sum_{i\in N} f_i^{\mathcal{A}}(v) = v(N)$.*

Akkor hatékony egy megoldás, ha a nagykoalíció értékét a megoldásban szétosztjuk a játékosok között. Antimatroidokra leszűkített játékokon a hatékonyságot tehát ugyanúgy értelmezzük, mint a nem korlátozott játékokon (2.7. definíció *1*-es pontja).

2.22. axióma (Additivitás)**.** *Minden $v, w \in \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ játékra és $\mathcal{A}$ antimatroidra N-en az $f^{\mathcal{A}}(v)$ megoldás addtitív, ha $f^{\mathcal{A}}(v+w) = f^{\mathcal{A}}(v) + f^{\mathcal{A}}(w)$.*

Látható, hogy az additivitást is úgy tudjuk értelmezni, mint a nem korlátozott játékok esetében (2.7. definíció *2*-es pontja).

2.23. axióma (Szükséges játékos tulajdonság). *Minden $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ monoton játékra és $\mathcal{A}$ antimatroidra N-en az $f^{\mathcal{A}}(v)$ megoldás teljesíti a szükséges játékos tulajdonságot, ha $i \in N$-re igaz, hogy $v(E) = 0$ minden $E \subseteq N \setminus \{i\}$ esetén, akkor $f_i^{\mathcal{A}}(v) \geq f_j^{\mathcal{A}}(v)$ minden $j \in N$-re.*

Minden olyan játékost szükségesnek nevezünk, akire igaz, hogy azok a koalíciók, amelyekben ő nincs benne, nem tudnak eredményt (pozitív kifizetést) elérni.

A következő axióma előtt ismerkedjünk meg a szükségtelen játékos fogalmával. Antimatroidon értelmezett játékokban a nulla-játékost ugyanúgy definiáljuk, mint a 2.2. definícióban tettük, avval a különbséggel, hogy itt a korlátozott játékban teljesül minden $S \subseteq N$-re, hogy $v_{\mathcal{A}}(S) = v_{\mathcal{A}}(S \cup \{i\})$, ha i nulla-játékos.

2.24. definíció. *Jelöljük az i játékoshoz tartozó útvonalcsoportot P^i-vel, ahol $P^i = \bigcup_{E \in A(i)} E$. Ez azt jelenti, hogy az unióját vesszük az összes i-útnak.*

Az i játékoshoz tartozó útvonalcsoportban azok a játékosok vannak benne, akik nélkül az i játékos nem tudna megvalósítható koalíciót alkotni.

2.25. definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy antimatroid az N-en. Azt mondjuk, hogy az i játékos szükségtelen játékos, hogyha az i és minden olyan j játékos, amelyre $i \in P^j$ 0-játékosok a v játékban az $\mathcal{A}$ antimatroidon. Eszerint minden olyan i játékos szükségtelen, aki 0-játékos és azok is 0-játékosok, akik csak az i játékoson keresztül képesek megvalósítható koalíciót alkotni.*

Nézzünk egy példát a fenti fogalmakra.

2.26. *példa.* A 2.1. ábrán lévő antimatroid esetében $P^{\{3\}} = \{1,2,3\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\}$, vagy $P^{\{2\}} = \{1,2\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$. Valamint az $i = 3$ akkor szükségtelen játékos, ha ő maga 0-játékos és $j = 2$ játékos is 0-játékos, hiszen $\{3\} \in P^{\{3\}}$ és $\{3\} \in P^{\{2\}}$.

2.27. axióma (Szükségtelen játékos tulajdonság). *Minden $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ játékra és $\mathcal{A}$ antimatroidra N-en az $f^{\mathcal{A}}(v)$ megoldás teljesíti a szükségtelen játékos tulajdonságot, hogyha i egy szükségtelen játékos az $\mathcal{A}$ antimatroidban, akkor $f_i^{\mathcal{A}}(v) = 0$.*

A szükségtelen játékos tulajdonság a 2.7. definíció *3.* pontjában bevezetett nulla-játékos tulajdonsághoz hasonlít.

2.28. definíció. *Jelöljük az i játékoshoz tartozó alapútvonal csoportot P_i-vel, ahol $P_i = \bigcap_{E \in A(i)} E$.*

Eszerint P_i azon játékosokat tartalmazza, amelyek nélkül az i nem lenne képes megvalósítható koalíciót létrehozni.

2.29. *példa.* A 2.1. ábrán látható antimatroidban $P_{\{3\}} = \{3,4\} \cap \{1,2,3\} = \{3\}$, azaz csak önmagán múlik, hogy képes lesz-e megvalósítható koalíciót alkotni. Ellenben a 2.2. ábrán lévő antimatroidban már $P_{\{4\}} = \{1,4\}$, azaz a 4-es játékosnak szüksége van az 1-es játékosra ahhoz, hogy megvalósítható koalícióban szerepelhessen. Látható, hogy se a 2-es, se a 3-as, se a 4-es nem tud az 1-es nélkül megvalósítható koalíciót kialakítani, míg ilyen következtetés a 2.1. ábrán látható antimatroidnál nem mondható el, hiszen ott pl. a 3-as tud az 1-es nélkül megvalósítható koalíciót alkotni a 4-esen keresztül, de a 4-es nélkül is tud megvalósítható koalíciót kialakítani az 1-esen keresztül, ezért a 2.1. ábrán lévő antimatroidban egyeleműek az alapútvonal csoportok.

2.30. axióma (Strukturális monotonitás)**.** *Minden $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ játékra és $\mathcal{A}$ antimatroidra N-en az $f^{\mathcal{A}}(v)$ megoldás teljesíti a strukturális monotonitás tulajdonságát, hogyha $j \in N$, akkor minden $i \in P_j$-re $f_i^{\mathcal{A}}(v) \geq f_j^{\mathcal{A}}(v)$.*

Azaz akik nélkül a j játékos nem tudnak megvalósítható koalíciót alkotni, azok a végső eredményből ne kapjanak nála kevesebbet.

2.31. axióma (Korrektség)**.** *Minden $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ játékra és $\mathcal{A}$ antimatroidra N-en az $f^{\mathcal{A}}(v)$ megoldás korrekt, hogyha $E \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $\mathcal{A} \backslash E$ is antimatroid N-en, akkor $f_i^{\mathcal{A}}(v) - f_i^{\mathcal{A} \backslash E}(v) = f_j^{\mathcal{A}}(v) - f_j^{\mathcal{A} \backslash E}(v)$ minden $i, j \in E$-re.*

Eszerint, ha törlünk $\mathcal{A}$-ból egy E megvalósítható koalíciót úgy, hogy $\mathcal{A} \backslash E$ ezután is antimatroid marad, akkor a kifizetések változása minden E-beli játékosra ugyanaz legyen.

2.32. *példa.* Egyáltalán nem biztos, hogy elhagyva egy E koalíciót $\mathcal{A} \setminus E$ továbbra is antimatroid marad, nézzünk erre egy példát: a 2.2. ábrán lévő antimatroidból elhagyva az $E = \{1,2,3\}$ koalíciót, $\mathcal{A} \setminus E$ nem lesz antimatroid, hiszen $\{1,2\} \cup \{1,3\} \notin \mathcal{A} \setminus E$. De ha elhagyjuk az $F = \{1,3,4\}$ koalíciót, akkor $\mathcal{A} \setminus E$ továbbra is antimatroid marad.

Most megmutatjuk, hogy mikor marad $\mathcal{A} \setminus E$ antimatroid.

2.33. definíció. *Azt mondjuk, hogy az $F \in \mathcal{A}$ koalíció befedi az $E \in \mathcal{A}$ koalíciót, ha $E \subseteq F$ és $|F| = |E| + 1$.*

2.34. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egy antimatroid N-en, és $E \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $E \notin \{\emptyset, N\}$. Ekkor $\mathcal{A} \backslash E$ antimatroid akkor és csak akkor, ha E útvonal, valamint minden $F \in \mathcal{A}$-ra, amely befedi E-t, F nem útvonal.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\mathcal{A}\backslash E$ egy antimatroid. Ha E nem lenne útvonal, akkor léteznének $i, j \in E$, amire $E \setminus \{i\}$, $E \setminus \{j\} \in \mathcal{A} \setminus E$. Ebből következik, hogy $E \setminus \{i\} \cup E \setminus \{j\} \in \mathcal{A} \setminus E$, ami ellentmondás, hiszen $E \setminus \{i\} \cup E \setminus \{j\} = E$. Ha létezne olyan F útvonal az $\mathcal{A}$-ban, amely befedi E-t, akkor $\mathcal{A} \setminus E$ megsértené az elérhetőség tulajdonságot az antimatroid definíciójában, hiszen F-nek a végpontját elhagyva éppen E-t kapjuk meg, de az nincs benne $\mathcal{A} \setminus E$-ben, tehát F nem lehet útvonal.

Most tegyük fel, hogy E egy útvonal $\mathcal{A}$-ban, és minden $F \in \mathcal{A}$-ra, amely befedi E-t, F nem útvonal. Azt kell belátnunk, hogy $\mathcal{A}\backslash E$ egy antimatroid. A 2.10. definíció pontjait nézzük végig.

- $\emptyset \in \mathcal{A} \setminus E$,
- Legyen $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \setminus E$. Indirekt tegyük fel, hogy $E_1 \cup E_2 = E$. Ekkor legyen E egy i-út. Feltehetjük, hogy $i \in E_1$. Ez ellentmond annak, hogy $E_1 \subseteq E$, $E_1 \neq E$ és E egy i-út.
- Legyen $F \in \mathcal{A} \setminus E$ és $F \neq \emptyset$. Ha nincs olyan $i \in F$, amelyre $F \setminus \{i\} \in \mathcal{A} \setminus E$, akkor egyértelműen létezik $i \in F$, amelyre $F \setminus \{i\} \in \mathcal{A}$. Ezenfelül $F \setminus \{i\} = E$, ami ellentmond annak, hogy minden megvalósítható koalíció, amely E-t befedi nem útvonal.

$\blacksquare$

Most nézzük meg a korlátozott Shapley-érték axiomatizációjára vonatkozó tételeket.

2.35. tétel. *Algaba et al (2003) A* (2.4) *képlettel értelmezett korlátozott Shapley-érték kielégíti a hatékonyság, az additivitás, a szükséges játékos tulajdonság, a szükségtelen játékos tulajdonság, a strukturális monotonitás és a korrektség axiómáit.*

Bizonyítás. Legyen $v, w \in \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ egy játék és $\mathcal{A}$ egy antimatroid N-en.

1. **Hatékonyság:** Mivel $N \in \mathcal{A}$, azért a Shapley-értékre vonatkozó hatékonyságból következik, hogy
$$\sum_{i \in N} Sh_i^{\mathcal{A}}(v) = \sum_{i \in N} Sh_i(v_{\mathcal{A}}) = v_{\mathcal{A}}(N) = v(int_{\mathcal{A}}(N)) = v(N) \ .$$
2. **Additivitás:**
$$\begin{aligned} Sh_i^{\mathcal{A}}(v) + Sh_i^{\mathcal{A}}(w) &= Sh_i(v_{\mathcal{A}}) + Sh_i(w_{\mathcal{A}}) \\ = Sh_i(v_{\mathcal{A}} + w_{\mathcal{A}}) &= Sh_i((v+w)_{\mathcal{A}}) = Sh_i^{\mathcal{A}}(v+w) \ . \end{aligned}$$

3. **Szükséges játékos tulajdonság:** Legyen v egy monoton játék és legyen $i \in N$ úgy, hogy $v(E) = 0$ minden $E \subseteq N \setminus \{i\}$-re. Az Algaba et al (2000) cikkben megtalálható a bizonyítása annak, hogy ekkor $v_{\mathcal{A}}$ monoton játék. Mivel $\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E) \subseteq E$, ezért $v_{\mathcal{A}}(E) = v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E)) \leq v(E) = 0$ minden $E \subseteq N \setminus \{i\}$ esetén. A $v_{\mathcal{A}}$ monotonitásából és abból a tényből, hogy $v_{\mathcal{A}}(\emptyset) = v(\emptyset) = 0$ következik, hogy $v_{\mathcal{A}}(E) \geq 0$ minden $E \subseteq N$-re, és fennáll, hogy $v_{\mathcal{A}}(E) = 0$ minden $E \subseteq N \setminus \{i\}$ esetén. Minden $j \in N$-re az $e = |E|$ jelöléssel következik, hogy

$$
\begin{aligned}
Sh_i^{\mathcal{A}}(v) = &\sum_{\{E \subseteq N:\ i \in E\}} \frac{(e-1)!(n-e)!}{n!}(v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E \setminus \{i\})) \\
\geq &\sum_{\{E \subseteq N:\ i,j \in E\}} \frac{(e-1)!(n-e)!}{n!}(v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E \setminus \{i\})) \\
\geq &\sum_{\{E \subseteq N:\ i,j \in E\}} \frac{(e-1)!(n-e)!}{n!}(v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E \setminus \{j\})) \\
= &\sum_{\{E \subseteq N:\ j \in E\}} \frac{(e-1)!(n-e)!}{n!}(v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E \setminus \{j\})) = Sh_j^{\mathcal{A}}(v)\ ,
\end{aligned}
$$

az egyenlőtlenségek abból következnek, hogy $v_{\mathcal{A}}$ monoton játék.

4. **Szükségtelen játékos tulajdonság:** A 2.1. részben láttuk, hogy a Shapley-érték kielégíti a nulla-játékos tulajdonságot. Ezért elég belátni azt, hogy a szükségtelen játékosok az antimatroidon értelmezett játék nulla-játékosai. Legyen i egy szükségtelen játékos a v játékban az $\mathcal{A}$ antimatroidon és legyen E olyan, amelyre $i \in E$. Legyen $F = \mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E) \setminus \mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E \setminus \{i\})$. Megmutatjuk, hogy $i \in P^j$ minden $j \in F$-re, ahol P^j a j játékoshoz tartozó útvonalcsoport (2.24. definíció).

   Indirekt tegyük fel hogy létezik $j \in F$ és $i \notin P^j$. Ekkor az i nincs benne egyetlen j-útban sem. Mivel $j \in \mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E)$, ezért létezik egy olyan H j-út, ami benne van $\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E)$-ben, de i nincs benne H-ban, valamint $H \subseteq E \setminus \{i\}$. Az $\mathrm{int}_{\mathcal{A}}$ operátor definíciójából és abból, hogy $H \in \mathcal{A}$ következik, hogy $H \subseteq \mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E \setminus \{i\}$. Ezek alapján $\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E) \subseteq H \subseteq \mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E \setminus \{i\})$, valamint látható, hogy $j \in \mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E \setminus \{i\})$, ami ellentmondás.

   Ezek után, ha $F = \{j_1, \ldots, j_p\}$, akkor az előzőek alapján látható, hogy $j_1, \ldots,$ j_p mind nulla-játékosok a korlátozott játékban, ezért

$$
\begin{aligned}
v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E)) - v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E) \setminus \{j_1\}) &= 0 \\
v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E)) - v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E) \setminus \{j_1, j_2\}) &= 0 \\
&\vdots \\
v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E)) - v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E) \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_{p-1}\}) &= 0 \\
v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E)) - v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E) \setminus F) &= 0 \ .
\end{aligned}
$$

5. **Strukturális monotonitás:** Legyen v egy monoton játék, ekkor tudjuk Algaba et al (2000) cikke alapján, hogy $v_{\mathcal{A}}$ is monoton. Először három tulajdonság teljesülését fogjuk megnézni, amelyek abból következnek, hogy $j \in N$, $i \in P_j$ és v monoton.

   - Minden $E \subseteq N$ esetén, mivel $v_{\mathcal{A}}$ monoton, teljesül a következő egyenlőtlenség.

   $$v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E \setminus \{i\}) \geq 0 \ . \tag{2.5}$$

   - Legyen adott egy $E \subseteq N$ koalíció, ekkor igaz, hogy

   $$
   \begin{aligned}
   \mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E \setminus \{i\}) = \bigcup_{\{F \in \mathcal{A}:\ F \subseteq E \setminus \{i\}\}} F &= \bigcup_{\{F \in \mathcal{A}:\ F \subseteq E \setminus \{i,j\}\}} F \\
   &\subseteq \bigcup_{\{F \in \mathcal{A}:\ F \subseteq E \setminus \{j\}\}} F = \mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E \setminus \{j\}) \ ,
   \end{aligned}
   $$

   Az első egyenlőség a 2.12. definíció felírása, a második azért igaz, mert az i játékos nélkül a j nem tudna megvalósítható koalíciót kialakítani, de eleve csak olyan koalíciókat nézhetünk, amelyekben nincs benne i. Ebből következik, hogy

   $$v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E \setminus \{i\}) \geq v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E \setminus \{j\}) \ . \tag{2.6}$$

   - Minden $E \subseteq N \setminus \{i\}$-re

   $$\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E) = \bigcup_{\{F \in \mathcal{A}:\ F \subseteq E\}} F = \bigcup_{\{F \in \mathcal{A}:\ F \subseteq E \setminus \{j\}\}} F = \mathrm{int}_{\mathcal{A}}(E \setminus \{j\}) \ ,$$

   ezért

   $$v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E \setminus \{j\}) = 0 \ , \tag{2.7}$$

   minden $E \subseteq N \setminus \{i\}$ esetén.

A 2.5. , a 2.6. és a 2.7. definíciókból következik, hogy

$$
\begin{aligned}
Sh_i^{\mathcal{A}}(v) = Sh_i(v_{\mathcal{A}}) &= \sum_{\{E\subseteq N:\ i\in E\}} \frac{(e-1)!(n-e)!}{n!}(v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E\setminus\{i\})) \\
&\geq \sum_{\{E\subseteq N:\ i,j\in E\}} \frac{(e-1)!(n-e)!}{n!}(v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E\setminus\{i\})) \\
&\geq \sum_{\{E\subseteq N:\ i,j\in E\}} \frac{(e-1)!(n-e)!}{n!}(v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E\setminus\{j\})) \\
&= \sum_{\{E\subseteq N:\ j\in E\}} \frac{(e-1)!(n-e)!}{n!}(v_{\mathcal{A}}(E) - v_{\mathcal{A}}(E\setminus\{j\})) \\
&= Sh_j(v_{\mathcal{A}}) = Sh_j^{\mathcal{A}}(v).
\end{aligned}
$$

6. **Korrektség:** Legyen $E \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $\mathcal{A}\setminus E$ is egy antimatroid marad N-en, továbbá legyen $\{i,j\} \subseteq E$. Nézzük a következő három tulajdonságot.

- Derks és Peters (1992) alapján minden $F \notin \mathcal{A}$ esetén

$$d_{v_{\mathcal{A}}}(F) = 0\ . \tag{2.8}$$

- Ha $F \in \mathcal{A}$ és $\{i,j\} \nsubseteq F$, akkor

$$F \neq E\ . \tag{2.9}$$

- Ha $\{i,j\} \nsubseteq F$, akkor $E \nsubseteq F$ és ekképpen $E \nsubseteq T$ minden $T \subseteq F$ esetében.

Tehát

$$\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(T) = \bigcup_{\{H\in\mathcal{A}:\ H\subseteq T\}} H = \bigcup_{\{H\in\mathcal{A}\setminus E:\ H\subseteq T\}} H = \mathrm{int}_{\mathcal{A}\setminus E}(T)$$

minden $T \subseteq F$-re. Ennélfogva

$$
\begin{aligned}
d_{v_{\mathcal{A}}}(F) &= \sum_{T\subseteq F}(-1)^{|F|-|T|}v_{\mathcal{A}}(T) = \sum_{T\subseteq F}(-1)^{|F|-|T|}v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}}(T)) \\
&= \sum_{T\subseteq F}(-1)^{|F|-|T|}v(\mathrm{int}_{\mathcal{A}\setminus E}(T)) = \sum_{T\subseteq F}(-1)^{|F|-|T|}v_{\mathcal{A}\setminus E}(T) \\
&= d_{v_{\mathcal{A}\setminus E}}(F)\ .
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Vezessük be a következő jelölést: $\mathcal{A}_i = \{E \in \mathcal{A}:\ i \in E\}$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
Sh_i^{\mathcal{A}}(v) - Sh_j^{\mathcal{A}}(v) &= Sh_i(v_{\mathcal{A}}) - Sh_j(v_{\mathcal{A}}) \\
&= \sum_{F \in \mathcal{A}_i} \frac{d_{v_{\mathcal{A}}}(F)}{|F|} - \sum_{F \in \mathcal{A}_j} \frac{d_{v_{\mathcal{A}}}(F)}{|F|} \\
&= \sum_{\{F \in \mathcal{A}_i\colon\ j \notin F\}} \frac{d_{v_{\mathcal{A}}}(F)}{|F|} - \sum_{\{F \in \mathcal{A}_j\colon\ i \notin F\}} \frac{d_{v_{\mathcal{A}}}(F)}{|F|} \\
&= \sum_{\{F \in \mathcal{A}_i \setminus E\colon\ j \notin F\}} \frac{d_{v_{\mathcal{A}}}(F)}{|F|} - \sum_{\{F \in \mathcal{A}_j \setminus E\colon\ i \notin F\}} \frac{d_{v_{\mathcal{A}}}(F)}{|F|} \\
&= \sum_{\{F \in (\mathcal{A} \setminus E)_i\colon\ j \notin F\}} \frac{d_{v_{\mathcal{A} \setminus E}}(F)}{|F|} - \sum_{\{F \in (\mathcal{A} \setminus E)_j\colon\ i \notin F\}} \frac{d_{v_{\mathcal{A} \setminus E}}(F)}{|F|} \\
&= \sum_{F \in (\mathcal{A} \setminus E)_i} \frac{d_{v_{\mathcal{A} \setminus E}}(F)}{|F|} - \sum_{F \in (\mathcal{A} \setminus E)_j} \frac{d_{v_{\mathcal{A} \setminus E}}(F)}{|F|} \\
&= Sh_i(v_{\mathcal{A} \setminus E}) - Sh_j(v_{\mathcal{A} \setminus E}) = Sh_i^{\mathcal{A} \setminus E}(v) - Sh_j^{\mathcal{A} \setminus E}(v)\ .
\end{aligned}
$$

A második egyenlőség a 2.8. tételből következik, a negyedik a 2.9. definícióból, míg az ötödik a 2.10. állításból.

■

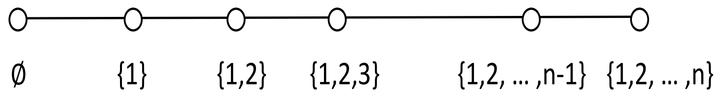
2.36. tétel. *Algaba et al (2003) Legyen f az $\bigcup_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}^N\ ,\ \mathcal{A}\ \text{antimatroid}} \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$ játékosztályon értelmezett megoldás. Ekkor f egyenlő a korlátozott Shapley-értékkel ($Sh^{\mathcal{A}}$), ha teljesíti a hatékonyság, az additivitás, a szükséges játékos tulajdonság, a szükségtelen játékos tulajdonság, a strukturális monotonitás és a korrektség axiómáit.*

Bizonyítás. A 2.35. tételből tudjuk, hogy a korlátozott Shapley-érték kielégíti a fentebb tárgyalt hat axiómát. Azt kell belátnunk, hogy egyetlen olyan f megoldása van az antimatroidokon értelmezett TU-játékoknak, amely kielégíti ezt a hat axiómát.

Az unicitás bizonyításához tegyük fel, hogy az f megoldás kielégíti a hatékonyság, az additivitás, a szükséges játékos tulajdonság, a szükségtelen játékos tulajdonság, a strukturális monotonitás és a korrektség axiómáit. Tekintsünk egy $\mathcal{A}$ antimatroidot N-en, és egy $w_T = c_T u_T$ monoton játékot, ahol $T \subseteq N$, $c_T \geq 0$ és u_T az egyetértési játék, amit a 2.3. definícióban vezettünk be. Megmutatjuk indukcióval $|\mathcal{A}|$-ra, hogy $f^{\mathcal{A}}(w_T)$ egyértelműen meghatározott. Tudjuk, hogy $|\mathcal{A}| \geq n+1$, hiszen $|N| = n$ és minden 1-től n-ig lévő számra kell, hogy legyen annyi elemű részhalmaz $\mathcal{A}$-ban, és még ott van az $\emptyset$, így jön ki $n+1$.

Kezdőlépésként ha $|N| = 1$, akkor $\mathcal{A} = \{\emptyset, N\} = \{\emptyset, \{1\}\}$, így a hatékonyság axiómájából adódik, hogy a nagykoalíció értékét kell szétosztani, most egyetlen játékosra, azaz neki odaadjuk az egészet, tehát egyértelműen van meghatározva a megoldás.

Ha $|\mathcal{A}| = n + 1$, akkor létezik minden i játékosra egyedi i-út az $\mathcal{A}$-ban. Ennek az esetnek megfelelő a 2.3. ábrán látható antimatroid. Ebben az esetben triviális módon $P^i = P_i$ minden $i \in N$-re, hiszen $A(i)$ egyelemű. Az indukció ezen kiinduló lépésében három esetet tudunk megkülönböztetni:



2.3. ábra. Az indukció kiinduló lépésének megfelelő antimatroid

1. Ha $i \in T$, akkor a szükséges játékos tulajdonság alapján létezik $c \in \mathbb{R}$, amelyre $f_i^{\mathcal{A}}(w_T) = c$ minden $i \in T$-re és $f_i^{\mathcal{A}}(w_T) \leq c$ minden $j \in N \setminus T$-re. T tekinthető a szükséges játékosok halmazának, tehát minden $i \in T$-nek többet kell kapnia, mint a nem szükséges játékosoknak, és a szükséges játékos tulajdonság alapján azt is tudjuk, hogy minden szükséges játékosnak ugyanannyit kell kapnia.

2. Ha $i \notin T$ és nincs olyan $j \in T$, amelyre $i \in P^j$, akkor a szükségtelen játékos tulajdonság miatt $f_i^{\mathcal{A}}(w_T) = 0$.

3. Ha $i \notin T$ és van olyan $j \in T$, amelyre $i \in P^j = P_j$, azaz i játékos nélkül a j szükséges játékos nem tudna megvalósítható koalíciót alkotni. Ekkor a strukturális monotonitás és az első eset alapján $f_i^{\mathcal{A}}(w_T) = c$. A strukturális monotonitás alapján nem kaphat kevesebbet, mint a T-beliek, de az első esetbeli meggondolás alapján többet sem.

   Most legyen $P^T = \bigcup_{j \in T} P^j$. A hatékonyság axiómája miatt $c = \frac{c_T}{|P^T|}$, és így $f^{\mathcal{A}}(w_T)$ egyértelműen meghatározott, hiszen

$$\sum_{i \in N} f_i^{\mathcal{A}}(w_T) = \sum_{i \in T} f_i^{\mathcal{A}}(w_T) + \sum_{i \notin T, j \in T, i \in P_j} f_i^{\mathcal{A}}(w_T) = \frac{c_T}{|P^T|} \left|P^T\right| = c_T \ .$$

Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy az $f^{\mathcal{A}'}(w_T)$ egyedien meghatározott, ha $|\mathcal{A}'| < |\mathcal{A}|$. Megemlítendő, hogy innentől $P^i \neq P_i$, ezért mostmár négy esetet kell megkülönböztetnünk egymástól. Az első három eset ugyanaz, mint az indukció kezdő lépésében, a negyedik a következő:

4. Legyen $i \notin T$ úgy, hogy létezik olyan $j \in T$, amelyre $i \in P^j$, de nincs olyan $j \in T$, amelyre $i \in P_j$. Tekintsünk egy olyan $j \in T$-t, amelyre $i \in P^j \setminus P_j$. Ekkor létezik olyan E j-út, hogy $E \neq N$ és $i \in E$, valamint létezik olyan F j-út, hogy $F \neq N$ és $i \notin F$.

   Definiáljunk egy láncot az E koalíciótól az N-ig, amely az $(E_0, E_1, \ldots, E_t)$ koalíciók sorozata, és $E_0 = E$, $E_t = N$. Legyen továbbá $(h_1, \ldots, h_t)$ különböző játékosok sorozata úgy, hogy $h_k \in N \setminus E_{k-1}$ és $E_k = E_{k-1} \cup \{h_k\}$ minden $k \in \{1, \ldots, t\}$-re. A növekedési tulajdonság miatt létezik $\mathcal{A}$-ban lánc E-től N-ig, és F-től N-ig, mert $E, N \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $|N| > |E|$, és ekkor létezik $h_1 \in N \setminus E$, amire $E \cup \{h_1\} \in \mathcal{A}$ és legyen $E_1 = E \cup \{h_1\}$ és így tovább.

   Úgy válasszunk egy-egy láncot E-től N-ig, és F-től N-ig, hogy az első közös M koalíció a lehető legnagyobb legyen, megjegyzendő, hogy első közös koalíció biztosan létezik, hiszen N mindig egy közös koalíció. Az a célunk, hogy találjunk egy olyan koalíciót, amely tartalmazza i-t és j-t is és erre alkalmazzuk a korrektség axiómáját. Ha $H \in \mathcal{A}$ és $|H| = |E| + 1$, $E \subset H$ és H nem útvonal $\mathcal{A}$-ban, akkor $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus E$ a 2.34. lemma miatt szintén egy antimatroid. Egyébként legyen $E_1 \in \mathcal{A}$ egy útvonal úgy, hogy $|E_1| = |E| + 1$ és $E \subset E_1$. Ekkor megtörténhet, hogy van olyan $H \in \mathcal{A}$, amelyre $|H| = |E_1| + 1$ és $E_1 \subset H$, valamint H nem útvonal $\mathcal{A}$-ban. Ekkor legyen $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus E_1$. Válasszunk egy $E_1, \ldots, E_m$ útvonalakból álló sorozatot $\mathcal{A}$-ban és ha van olyan $H \in \mathcal{A}$, amelyre $|H| = |E_m| + 1$ és $E_m \subset H$, valamint H nem útvonal $\mathcal{A}$-ban, akkor $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus E_m$. Ezzel az eljárással egy maximális E_m útvonalat kapunk, amelyre $|E_m| = |M| - 1$ és $E_m \subset M$. Ekkor már nem létezik olyan $Q \in \mathcal{A}$, $Q \neq M$, $|Q| = |E_m| + 1$, $E_m \subset Q$, mert ekkor a választott lánc F-től N-ig és az alternatív lánc E-től N-ig Q-n keresztül tartalmazna egy nagyobb első közös koalíciót, mint M. Tehát legyen $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus E_m$ és alkalmazzuk a 2.34. lemmát erre az $\mathcal{A}'$-re, miszerint $\mathcal{A}'$ egy antimatroid. Írjuk fel a korrektség axiómáját: ha $i, j \in E_m$, akkor $f_i^{\mathcal{A}}(w_T) - f_i^{\mathcal{A}'}(w_T) = f_j^{\mathcal{A}}(w_T) - f_j^{\mathcal{A}'}(w_T)$. Amiből átrendezéssel azt kapjuk, hogy $f_i^{\mathcal{A}}(w_T) = f_j^{\mathcal{A}}(w_T) - f_j^{\mathcal{A}'}(w_T) + f_i^{\mathcal{A}'}(w_T) = c - c_i$, ahol

$c_i = f_i^{\mathcal{A}'}(w_T) - f_j^{\mathcal{A}'}(w_T)$.

A c_i már meghatározott az indukciós hipotézis által. c meghatározásához pedig alkalmazzuk a hatékonyság axiómáját, tehát $c\left|P^T\right| - \sum_{i \in P^T \setminus P_T} c_i = c_T$, ahol $P^T = \bigcup_{j \in T} P^j$ és $P_T = \bigcup_{j \in T} P_j$. Mivel az indukciós hipotézis miatt minden c_i már meghatározott, ezáltal c is, így $f^{\mathcal{A}}(w_T)$ is egyértelműen meghatározott.

Most tegyük fel, hogy $w_T = c_T u_T$ és $c_T < 0$. Ekkor w_T nem monoton, nem alkalmazható a szükséges játékos tulajdonság és a strukturális monotonitás sem. Legyen $v_0 \in \mathcal{G}^N$ a nulla játék, azaz minden $E \subseteq N$-re $v_0(E) = 0$. A szükségtelen játékos tulajdonság alapján $f_i^{\mathcal{A}}(v_0) = 0$ minden $i \in N$-re. Ekkor $-w_T = -c_T u_T$ úgy, hogy $-c_T \geq 0$ és $(v_0)_{\mathcal{A}} = (w_T)_{\mathcal{A}} + (-w_T)_{\mathcal{A}}$. Az f monotonitásából és $-w_T$ monotonitásából következik, hogy $f^{\mathcal{A}}(w_T) = f^{\mathcal{A}}(v_0) - f^{\mathcal{A}}(-w_T) = -f^{\mathcal{A}}(-w_T)$. Ez így már egyértelműen meghatározott, tehát $f^{\mathcal{A}}(c_T u_T)$ minden c_T-re egyértelműen meghatározott.

A 2.4. állításból tudjuk, hogy minden v játék az N-en kifejezhető az egyetértési játékok lineáris kombinációjaként, tehát az additivitásból következően $f^{\mathcal{A}}(v)$ egyértelműen meghatározott. ∎

Ezek után áttérünk egy speciális antimatroid vizsgálatára, és megnézzük, hogy mennyiben változnak az előbb bebizonyított tételek a korlátozott Shapley-értékről.

2.4. A poset antimatroidok vizsgálata

A poset antimatroidokat is Algaba et al (2003) cikke alapján dolgozzuk fel. A poset antimatroidokat a 2.18. definícióval vezettük be. Tehát az olyan antimatroidokat nevezzük poset antimatroidoknak, amelyekre igaz, hogyha $\mathcal{A}$ egy antimatroid, akkor bármely $E, F \in \mathcal{A}$-ra $E \cap F \in \mathcal{A}$.

Ezek olyan antimatroidok, ahol minden játékoshoz tartozik egyedi útvonal, amelyen ő elérhető. Ezáltal az $\mathcal{A}$ antimatroid az N-en pontosan akkor poset antimatroid, ha minden $i \in N$-re $P^i = P_i$. Ez könnyen látható, hiszen bármilyen i-útból csak egyetlen van, így ezek metszete és úniója is ugyanaz lesz. És ha lenne például több, mondjuk kettő i-út, akkor azok metszete $\{i\}$ lenne, de $\{i\} \notin \mathcal{A}$, mert különben ő maga lenne az egyetlen i-út.

Most nézzük meg a korlátozott Shapley-értékre mit kapunk, ha poset antimatroidokkal dolgozunk.

2.37. tétel. *Algaba et al (2003) A poset antimatroidokon értelmezett játékok f megoldása egy $\mathcal{A}$ poset antimatroidon a korlátozott Shapley-érték pontosan akkor, ha f*

teljesíti a hatékonyság, az additivitás, a szükséges játékos tulajdonság, a szükségtelen játékos tulajdonság és a strukturális monotonitás axiómáit.

Bizonyítás. Gyakolatilag a 2.36. tétel bizonyítását lehet lemásolni annyi különbséggel, hogy az indukciós lépés belátásánál bejövő negyedik esetre nincs szükség, hiszen $P^i = P_i$ minden $i \in N$-re, tehát ezek szerint a tétel bizonyításához a korrektség axiómájára sincs szükség. ∎

A 2.37. tételből az következik, hogy nem kell feltegyük a korrektség axiómájának teljesülését ahhoz, hogy az egyedüli megoldásunk a korlátozott Shapley-érték legyen poset antimatroidokon. Most nézzük meg, hogy mit lehet elmondani a Shapley-érték képletéről poset antimatroidok esetében:

2.38. tétel. *Ha $\mathcal{A}$ egy poset antimatroid N-en, akkor a korlátozott Shapley-érték képlete a következő, minden $i \in N$-re és minden $v \in \mathcal{G}^N$-re:*

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(v) = Sh_i(v_{\mathcal{A}}) = \sum_{\{T \subseteq N:\ i \in P^T\}} \frac{d_v(T)}{|P^T|} \ . \tag{2.11}$$

Bizonyítás. A 2.35. tétel bizonyításában már láttuk, hogy minden olyan E koalícióra, amely nincs benne $\mathcal{A}$-ban, $d_v(E) = 0$. Valamint ugyanazen bizonyításban vezettük be a következő jelölést: $\mathcal{A}_i = \{E \in \mathcal{A} :\ i \in E\}$. Ezekkel a következő adódik:

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(v) = Sh_i(v_{\mathcal{A}}) = \sum_{E \in \mathcal{A}_i} \frac{d_{v_{\mathcal{A}}}(E)}{|E|} = \sum_{E \in \mathcal{A}_i} \frac{\sum_{\{T \subseteq E: E = P^T\}} d_v(T)}{|E|} = \sum_{\{T \subseteq N:\ i \in P^T\}} \frac{d_v(T)}{|P^T|} \ .$$

∎

A következő tétel karakterizálja a poset antimatroidokat a korlátozott Shapley-érték segítségével.

2.39. tétel. *Algaba et al (2003) Legyen $\mathcal{A}$ egy antimatroid N-en. Ekkor $\mathcal{A}$ poset antimatroid pontosan akkor, ha a Shapley-érték az egyetlen olyan megoldás $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$-n, amely kielégíti a hatékonyság, az additivitás, a szükséges játékos tulajdonság, a szükségtelen játékos tulajdonság és a strukturális monotonitás axiómáit.*

Bizonyítás. A 2.37. tételből következik, hogy ha adott egy $\mathcal{A}$ poset antimatroid, akkor $Sh^{\mathcal{A}}$ az egyetlen olyan megoldás, amely kielégíti a tételben szereplő öt axiómát. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ nem egy poset antimatroid. Definiáljuk a $g^{\mathcal{A}}$ megoldást a következőképpen:

$$g_i^{\mathcal{A}}(u_T) = \tfrac{1}{|P^T|}, \text{ ha } i \in P_T = \bigcup_{i \in T} P_i, \text{ és 0 egyébként.}$$

Valamint egy tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékra:

$$g_i^{\mathcal{A}}(v) = \sum_{T \subseteq N} d_v(T) g_i^{\mathcal{A}}(u_T) = \sum_{\{T \subseteq N:\ i \in P_T\}} \frac{d_v(T)}{|P_T|} .$$

Ez az egyenlőség mutatja, hogy $g^{\mathcal{A}}$ kielégíti a hatékonyság, az additivitás, a szükséges játékos tulajdonság, a szükségtelen játékos tulajdonság és a strukturális monotonitás axiómáit. Már csak azt kell bebizonyítani, hogy $g^{\mathcal{A}} \neq Sh^{\mathcal{A}}$. Vegyük észre, hogyha $\mathcal{A}$ nem egy poset antimatroid, akkor létezik olyan $j \in N$, amelyre $P^j \neq P_j$. Ez alapján a 2.38. tételből adódik, hogy $g^{\mathcal{A}}(u_T) \neq Sh^{\mathcal{A}}(u_T)$ ha $j \in T$ és $(P^j \setminus P_j) \cap T \neq \emptyset$. ■

Az eddigi tételek alapján felírható az alábbi következmény, amelyet az aukciós játékokra vonatkozó Shapley-érték tétel bizonyításánál használtak fel az Algaba et al (2003) cikkben. Mi ezt a bizonyítást nem fogjuk közölni, hiszen maga a tétel sem lesz igaz, lásd a 3.6. és a 3.9. tételeket.

2.40. következmény. *Legyen $\mathcal{A}$ egy poset antimatroid N-en, amely eleget tesz az útvonal tulajdonságnak. Ekkor $Sh^{\mathcal{A}}$ az egyedüli olyan megoldás $\mathcal{G}^{\mathcal{A}}$-n amely kielégíti a hatékonyság, az additivitás, a szükséges játékos tulajdonság, a szükségtelen játékos tulajdonság és a strukturális monotonitás axiómáit.*

Most pedig térjünk rá az aukciós játékok leírására, és az Algaba et al (2003) cikkben szereplő az aukciós játékok megoldására vonatkozó Shapley-érték axiomatizálására, amely mint később belátom nem igaz az aukciós játékok osztályán.

3. fejezet

Aukciós játékok

3.1. Az aukciós játékok bevezetése

Az aukció, vagy más szóval árverés egyike a legősibb piaci formáknak, már Krisztus előtt is ismerték. Mára sok fajtáját ismerjük, és a hagyományos aukciós tárgyak listája is kibővült. Egy aukción kínálhatnak egyedi tárgyakat (általában műtárgyak) vagy az áruk bizonyos mennyiségét (például állampapírok, olaj), mi most árucikként egy közbeszerzési eljárás keretében kiírt biztosítást fogunk tekinteni. Tehát pl. valamelyik minisztérium casco biztosítást szeretne kötni a vezetők cégautójára.

Egy másik módja az aukciók csoportosításának, hogy nyílt vagy zárt licites (borítékos) aukcióról van-e szó. A nyílt árverés angol aukcióként ismert, a legelterjedtebb licitálási rendszer. A kikiáltó a rezervációs ár (a legalacsonyabb ár, amelyen még hajlandó eladni az adott árucikket) bemondásával nyitja meg az aukciót. Ezután a licitálók egyre magasabb árakat mondanak be, általában kell az ajánlatok között lennie egy minimális licitkövetelménynek, amikor a legmagasabb ár után már senki sem hajlandó többet mondani, akkor ezt az ajánlatot megtevő licitáló viheti el a tárgyat, méghozzá az ajánlott áron.

A zárt licites aukciók során mindenki leírja az ajánlatát egy papírra, majd beleteszi egy borítékba. Így mindenki csak egyetlen ajánlatot tehet. Azután ezeket a borítékokat összegyűjtik, és kibontják. Az árucikket a legmagasabb ajánlatot tevő licitáló fogja megkapni, az első áras esetben azon az áron, amelyet megjelölt. Ezt a fajta árverést gyakran használják különböző beruházások során, ahol az építtető vállalat egy bizonyos munka elvégzésére kér ajánlatokat vállalkozóktól, és aki a legalacsonyabb ajánlatot teszi meg, azé lesz a munka, természetesen azon az áron, amelyet megjelölt, amelyért hajlandó elvégezni. Ugyanilyen rendszerrel zajlanak le a közbeszerzések is, avval a különbséggel, hogy ott általában valamilyen költségvetési szerv ír ki tendert egy bizonyos munka elvégzésére (autópályaépítés, vasútvonal felújítás, a Nemzeti Színház megtervezése, valamilyen szolgáltatás megrendelése), ami rendszerint igen nagy értékű.

Ebben a szakdolgozatban azokkal a közbeszerzési eljárásokkal foglalkozom, amelyeknél valamilyen biztosítást akarnak kötni az ajánlatkérők, kiírók. Hogy pontosan hogyan zajlanak le az ilyen tárgyú közbeszerzési eljárások, azt a bevezető fejezetben részletesen bemutattam. Ezek az eljárások modellezhetőek egy első áras zárt licites aukcióval, a későbbiekben ez alapján fogom megnézni, hogy milyen viselkedés lenne az optimálisabb az ajánlattevők szempontjából, és hogy ez mennyire sérti a törvényt.

A zárt licites aukciók másik fajtája a második áras, vagy Vickrey-aukció, (Vickrey, 1962). Ez a fajta aukció ugyanúgy zajlik le, mint az elsőáras, avval a különbséggel, hogy itt a legmagasabb árat bemondó licitálónak nem ezt az árat kell megfizetnie, csak a második legmagasabbat. Vickrey (1962) mutatta meg, hogy a második áras aukciók során a domináns egyensúlyi stratégia az igazmondás, feltéve, hogy nincs összefogás, tehát akkora licitet kell tenni, amennyire valóban értékeljük az adott jószágot. Szintén ő mutatta meg, hogy az angol árverés stratégiailag egyenértékű a második áras zárt aukcióval.

Ha az eladó (ajánlatkérő) szempontjából nézzük a zárt licites aukciókat, nyilvánvaló, hogy számukra az első áras jobbnak hangzik, hiszen itt magasabb árat kapnak, ami növeli a hasznukat. Pontosan ez a baj a második áras aukcióval, hogy ugyan ott megtudhatjuk minden ajánlattevő pontos értékelését, de mégsem kapjuk meg a legmagasabb ajánlatot.

A következőkben a zárt licites aukciós játékokban megengedjük, hogy a játékosok összefogjanak, ami már nem tartozik hozzá a klasszikus Vickrey-féle aukciós modellhez. Először a 3.2. részben egy szemléletes példán keresztül mutatom be, hogy hogyan képzelhető el egy lánc hierarchiával rendelkező játék leírása, majd röviden formálisan is bevezetem a fogalmakat. Ezután mindkét zárt licites aukció esetében bemutatom az őket leíró játékot, ami egy TU-játék poset antimatroid (lánc) struktúrán. A Shapley-érték karakterizációját csak olyan feltétellel tudták levezetni (Algaba et al, 2003) cikkükben, amellyel kilépünk az adott zárt licites aukciós játékok osztályáról. A tétel, amit kimondanak az axiomatizálásról nem igaz, lehet mutatni ellenpéldát, ami szintén teljesíti az axiómákat és mégsem a korlátozott Shapley-érték.

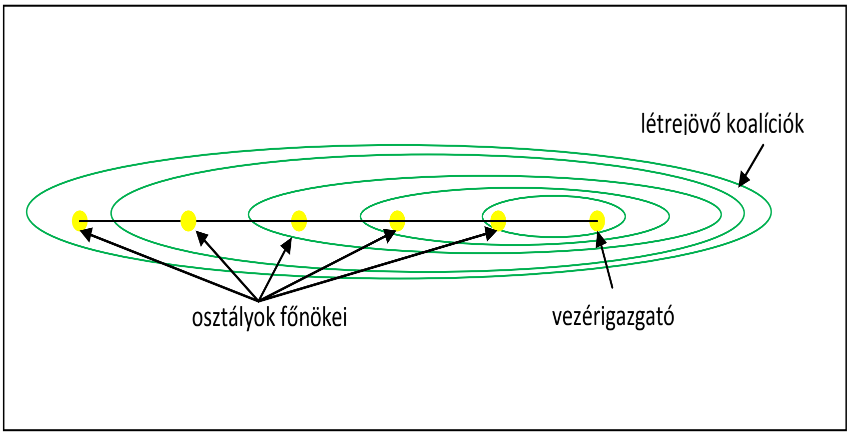
Szakdolgozatomban a második áras esetet is részletezem, mert az Algaba et al (2003) cikkben szereplő bizonyítás második áras esetre szól, és ez alapján fogom tudni levezetni az első áras esetben felírható hasonló tételeket.

3.2. A lánc struktúrával megadható TU-játékok

Először egy példán keresztül mutatom be, hogy hogyan lehet elképzelni egy olyan játékot, ahol a játékosok egy láncba rendezhetők és a létrejöhető koalíciók, amelyekben i játékos szerepel, mindig tartalmazzák az i játékos és a vezető közötti játékosokat.

3.1. *példa.* Képzeljünk el egy vállalatot, ahol van egy vezérigazgató, és több egymásnak alárendelt osztály. Az osztályokat most mindig egy ember fogja képviselni, az osztály főnöke, hogy egyszerűbb legyen a modell. Minden főnök ismeri a hozzá tartozó osztályok főnökeit, hiszen beosztottai, és az ő közvetlen felettesét, de a további főnökök kilétéről nincs fogalma. Minden osztály főnökének van egy olyan ötlete, amellyel többlet hasznot érhet el a cég, és ha meg tudja valósítani, akkor valóban extra profitot is ér ez a cégnek. Jelölje a_i az i főnökhöz tartozó ötlet végrehajtásával elérhető profitot. A vezérigazgatónak is van ötlete, ő ezt bármikor végre is hajthatja, nem kell senkinek a beleegyezése hozzá. Azonban a főnökök nem tudják saját szakállukra kivitelezni ötletüket, kell hozzá az összes felettesük jóváhagyása.

A 3.1. ábrán látható a játék struktúrája.



3.1. ábra. A játék struktúrája

Magyarán az i főnök úgy tudja a javaslatát érvényesíteni, ha sikerül meggyőznie erről a felettesét, annak az ő felettesét és így tovább a vezérigazgatót is. Legyen a $P(i) = [1, i]$ leképezés az, amelyik leírja azoknak a koalícióknak a halmazát, ahol a javaslat érvényesíthető, feltételezve, hogy 1-essel a vezérigazgatót jelöljük és $[1, i] = \{1, 2, \ldots, i\}$. Továbbá jelöljük T-vel a 3.1. ábrán látható láncot, azaz a játék struktúráját. Tehát a többi koalícióban nem fogják tudni érvényesíteni javaslatukat az összefogók, hiszen valamelyik főnökük nem járult hozzá, így nem tudnak extra profitot elérni az ötletükkel.

Egy ilyen szituációt tehát az (N, P, a) hármassal lehet jellemzni, ahol N a főnökök számát adja meg a vezérigazgatóval együtt, P a játék struktúráját írja le, míg a minden főnökre az ötlet végrehajtásával elérhető profitot adja meg.

Az ilyen szituációk leírhatóak egy TU-játékkal, ahol a játékosok halmaza a főnökök halmazának feleltethető meg. Ezt a megfeleltetést a következő definíció írja le formálisan. A következő fogalmak megtalálhatóak Branzei et al (2000) cikkében. A szituáció és annak kezelése hasonlít a repülőtér játékhoz, amelynek leírása megtalálható Thomson (2007) cikkében, valamint Márkus (2011) szakdolgozata is ezzel a témakörrel foglalkozik.

3.2. definíció. *Az (N, P, a) hármassal leírható szituáció a következő formulával adott v TU-játéknak felel meg.*

$$v(S) := \sum_{i:\ P(i) \subset S} a_i$$

minden $S \subseteq N$-re, valamint $v(\emptyset) = 0$.

Minden hierarchikus struktúrával rendelkező játék kifejezhető az egyetértési játékok nemnegatív kombinációjaként, ahol az egyetértési játékok az egyes létrejövő koalíciókhoz tartoznak. Azaz legyen $u_{[1,i]}$ az i játékoshoz tartozó $[1, i]$ létrejöhető koalíció egyetértési játéka.

3.3. tétel. *(Branzei et al, 2000) Minden olyan játék, amely felírható egy (N, P, a) hármassal a következő alakban is előáll.*

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{[1,i]} \ . \tag{3.1}$$

A következő részben bemutatom, hogy a másodáras zárt licites aukció leírható egy ilyen lánc struktúrán értelmezett TU-játékkal.

3.3. A második áras zárt licites aukció

A második áras zárt licites aukciós játékokat Algaba et al (2003) cikke és Branzei et al (2000) cikke alapján mutatom be. A második áras zárt licites aukció során az eladó kínál eladásra valamilyen tárgyat, amire megszabja saját rezervációs árát, jelölje ezt r. Ennél alacsonyabb áron nem hajlandó eladni a tárgyat. Továbbá van n db. pontenciális vevő, licitáló, akik szeretnék elnyerni a tárgyat. Minden licitáló leírja egy darab papírra a licitjét, amennyiért hajlandó megvenni a tárgyat, majd lezárja azt egy borítékba. A borítékokat az eladó felbontja, és a legmagasabb árat ajánlott vevőnek adja oda a tárgyát, de a második legmagasabb áron.

Minden licitáló tehát ad valamilyen licitet, ezeket jelöljük $b_1, \dots, b_n$-nel, illetve minden licitálónak van egy saját értékelése az adott tárgyról, amennyire ő az árát taksálja a saját habitusának, kvalitásának megfelelően, ezeket a rezervációs árakat jelölje rendre $w_1, \dots, w_n$. Ezekre az értékelésekre gondolhatunk úgy is, mint azokra a pénzösszegekre, amelyeket még éppen hajlandóak lennének megfizetni a licitálók a tárgyért. Ehhez csak annyit kell magunknak feltenni, hogy a hasznosságot pénzben mérjük. Ezekből következik, hogy a megtett licitek nem lehetnek magasabbak, mint az értékelések. Feltehetjük továbbá, hogy minden licitáló legalább az r rezervációs árra értékeli a tárgyat, hiszen ellenkező esetben nem is lenne érdemes licitálnia. Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy $w_1 > w_2 > \dots > w_n \geq r$.

A licitálók az eladó tudta nélkül akár meg is egyezhetnek egymás között, hogy a közülök legtöbbre értékelő licitálónak segítenek elnyerni a tárgyat, cserébe kapnak valamit a haszonból. Például a 2-es játékos nem tudja elnyerni a tárgyat, de ha összefog az 1-es játékossal, akkor az 1-esnek nem kell olyan sokat ajánlania, mint a saját rezervációs ára, tehát haszonra tesz szert, amiből ad valamennyit a 2-esnek a segítségéért. Így a 2-es játékos is el tud érni pozitív kifizetést. Ha a 2-es fog össze a 3-assal, akkor nem tudják elvinni a tárgyat, mert az 1-es továbbra is a legtöbbet ajánlja.

Nézzük meg ezután, hogy az egyes koalíciók létrejötte esetén mi lesz a koalícióban szereplő játékosok optimális stratégiája, és mennyi lesz az egyes esetekben a koalíció értéke. Jegyezzük meg, hogy a 2.1. definícióban kimondtuk, hogy egy TU-játék megadásához az N játékosok halmazára és a v karakterisztikus függvényre van szükségünk. Az N halmazban a licitálók vannak benne, a v függvényt pedig most fogjuk definiálni, ezzel tehát leírjuk egy TU-játékkal a második áras zárt licites aukciókat.

- Ha minden játékos egyedül van, azaz nincs összefogás, akkor mindenkinek egyforma lesz a stratégiája, méghozzá az igazmondás, azaz $b_i = w_i$. Ebben az esetben nyilván az 1-es játékos fogja elnyerni a tárgyat, hiszen ő ajánlja a legtöbbet, de csak a második legmagasabb árat, b_2 kell megfizetnie, ezért az ő haszna $v(1) = w_1 - w_2$. A többi játékos haszna ebben az esetben 0, tehát $v(i) = 0$, ha $i \neq 1$.

- Ha létrejön a nagykoalíció, akkor mindenki az 1-es játékost segíti hozzá a tárgyhoz, azaz $b_1 = w_1$, és a többiek a lehető legkisebb tétet teszik meg, azaz $b_i = r$ minden $i \in N \setminus \{1\}$-re. Tehát ebben az esetben is az 1-es játékos fogja elnyerni a tárgyat, és a második legmagasabb ár, amit fizetnie kell, az az r. Itt viszont a haszon az egész nagykoalícióé, hiszen segítettek neki, hogy minél kevesebbet kelljen fizetnie, tehát a haszon, amit szét kell valahogyan osztani a koalíció tagjai között $v(N) = w_1 - r$. Ennek a haszonnak a szétosztására lehet használni például a Shapley-értéket.

- Ha $S \neq N$ koalíció, amelyben benne van az 1-es játékos is, ekkor megint csak a koalíció tagjai hozzásegítek az 1-es játékost ahhoz, hogy a lehető legkevesebbért megkaphassa a tárgyat, azaz $b_1 = w_1$ és ha $[1,k] \subset S$, de $k+1 \notin S$, akkor $b_2 = \cdots = b_k = r$, valamint azok akik nincsenek benne a koalícióban úgy járnak el, mintha egyedül lennének, tehát $b_{k+1} = w_{k+1}, \ldots, b_n = w_n$. Ebben az esetben is az 1-es játékos fogja megkapni a tárgyat, azonban a hasznot az egész koalíció között szét kell osztani. Az 1-es játékosnak a második legmagasabb árat kell megfizetnie, ami most w_{k+1}, tehát az S koalíció haszna $v(S) = w_1 - w_{k+1}$. A koalícióban nem szereplő licitálók haszna pedig 0. Az olyan koalícióknak, amelyekben az 1-es játékos nincs benne, nem sok értelmük van, hiszen nem tudnak hasznot elérni.

Most pedig lássuk be, hogy miért ösztönöz igazmondásra ez a fajta aukció, ha nincs összefogás.

3.4. állítás. *(Vickrey, 1962) A második áras zárt licites aukcióban minden játékosnak megéri a saját rezervációs árát megtennie ajánlatként, feltéve, hogy nincs összefogás a játékosok között.*

Bizonyítás. Legyen az egyszerűség kedvéért csak két játékos, több játékosra is könnyen megmutatható az állítás. Tehát legyen $N = \{1, 2\}$, és a licitek b_1, b_2, az értékelések pedig w_1, w_2. Tegyük fel, hogy $w_1 > w_2$, természetesen fordítva ugyanígy menne a bizonyítás. Ha $b_1 > b_2$, akkor az 1-es játékos haszna $w_1 - b_2$, a második játékosé 0. Ha pedig $b_2 > b_1$, akkor az első játékos haszna 0. Ha $b_2 < w_1$, akkor érdemes b_2-nél nagyobbat mondania az 1-es játékosnak, ha pedig $b_2 \geq w_1$, akkor pedig érdemes b_2-nél kisebbet mondani, mert csak veszteséggel szállhatnánk ki egyébként a játékból, tehát $b_1 = w_1$ optimális választás lesz mindkét esetben. ■

A következő állítás egyszerűen belátható, ezért itt nem foglalkozunk vele. (A bizonyítás megtalálható Branzei et al (2000) cikkében.)

3.5. állítás. *A fent értelmezett második áras zárt licites aukciós játék v, ahol N a licitálók halmaza, v pedig a fenti módon adja meg az egyes koalíciók hasznát megfeleltethető egy (N, P, a) hármassal megadott lánc struktúrán értelmezett játékkal, ahol $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $P(i) = [1, i]$ egy T lánchoz tartozó lehetséges koalíciókat megadó leképezés, valamint $a_i = w_i - w_{i+1}$ minden $i \in N$-re, és $w_{n+1} = r$.*

Könnyen látható, hogy ez a struktúra, a lánc, egy antimatroid, méghozzá a poset antimatroidok közül is az egyik legspeciálisabb. Triviális módon teljesíti a lánc az útvonal tulajdonságot (2.15. definíció), erre majd a Shapley-érték bizonyításánál (3.6. tételnél) szükségünk is lesz. Jelöljük a láncot leíró antimatroidot $\mathcal{A}$-val.

Most térjünk rá a korlátozott Shapley-érték levezetésére a második áras zárt licites aukciós játékok esetében. Ehhez először is célszerű észrevenni, hogy amit a_i-vel jelöltünk, azt az antimatroidon értelmezett Shapley-érték képletében $d_v(\{1, 2, \ldots, i\})$-vel jelöltük. Ahhoz, hogy a korlátozott Shapley-értékre vonatkozó axiómákat értelmezni lehessen térjünk át az értékelések közötti szigorú egyenlőtlenségről a gyengére, azaz legyen most $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n \geq r$. Evvel a feltevéssel kilépünk a második áras zárt licites aukciós játékok világából, és egy teljesen más játékosztályon haladunk tovább. Ez elég baj, mert így az axiomatizálás nem arra a játékosztályra szól, amelyre szeretnénk. Tehát maga a tétel (3.6. tétel) sem igaz, lehet rá ellenpéldát (3.7. ellenpélda) mutatni. Az axiómákkal pedig az a baj, hogy van olyan axióma, ami az aukciós játékokon semmitmondó.

Jelölje $f^{\mathcal{A}}(w, r)$ a $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n \geq r$ rezervációs árakkal és r-el megadott játékot. Könnyen látható, hogy ez nem egy aukciós játék ilyen feltételekkel már. Nézzük meg mit mondanak ebben az esetben az axiómák.

1. **Hatékonyság**: Azt mondja ki, hogy $\sum_{i \in N} f_i^{\mathcal{A}}(w, r) = w_1 - r = v(N)$, ami még az aukciós játékokon is teljesül, nem kell hozzá gyengítünk a rezervációs árak közötti relációkat.

2. **Szükségtelen játékos tulajdonság**: Azt mondja ki, hogy $f_i^{\mathcal{A}}(w, r) = 0$, ha $w_i = r$. Tehát ha i szükségtelen játékos, akkor $w_i = r$, hiszen ekkor i nulla-játékos, ami szerint $S = \{1, 2, \ldots, i\}$-re $v(S) = v(S \setminus \{i\})$, amiből $w_i = w_{i+1}$, és minden olyan $j \in N$, amelyre $i \in P^j = P_j$, j is nulla-játékos. Ezek a j-k az $i+1, i+2, \ldots, n$, tehát $w_{i+1} = w_{i+2}, \ldots, w_n = r$, ami tényleg azt jelenti, hogy $w_i = r$. Ez az axióma például már semmitmondó lesz az aukciós játékok osztályán.

3. **Strukturális monotonitás**: Azt mondja ki, hogy $f_i^{\mathcal{A}}(w, r) \geq f_j^{\mathcal{A}}(w, r)$, ha $w_i \geq w_j$. Ha $w_i \geq w_j$, akkor nyilván $i \in P_j$, mert minden olyan i játékosra

szüksége van j-nek, hogy megvalósítható koalíciót tudjon alkotni, aki nála többre értékeli a tárgyat, aki biztosítja a kapcsolatot közte és a vezető között.

4. **Additivitás**: Az additivitás meghatározásánál ügyelnünk kell arra, hogy az alapul szolgáló megengedett struktúra ne változzon. Ezért az additivitást úgy követeljük meg, hogy megőrizzük a játékosok sorrendjét, azaz $f^{\mathcal{A}}(w+z, r+s) = f^{\mathcal{A}}(w, r) + f^{\mathcal{A}}(z, s)$, ha $w_i \geq w_j$ pontosan akkor, ha $z_i \geq z_j$. Ezt sorrendet megőrző additivitásnak fogjuk hívni.

5. **Szükséges játékos tulajdonság**: Ezen tulajdonság létét nem kell megkövetelnünk, hiszen minden teljesülni fog. Látható, hogy az egyetlen szükséges játékos az 1-es, ő pedig mindig többet vagy legalább ugyanannyit fog kapni, mint a vele egy koalícióban lévők.

Megjegyzendő, hogy a korrektség axiómájára itt most nincs szükség, hiszen az $\mathcal{A}$ struktúránk egy poset antimatroid, és a 2.37. tételben már láttuk, hogy a korrektség axiómája nélkül is igaz a tétel a korlátozott Shapley-érték egyedüliségéről. Az Algaba et al (2003) cikkben megtalálható tétel azt mondja ki, hogy a korlátozott Shapley-érték az egyetlen olyan megoldás a második áras zárt licites aukciókra, amely teljesíti a fenti axiómákat. Ez a tétel nem igaz, ezen a játékosztályon nem a Shapley-érték az egyetlen olyan megoldás, amely teljesíti az axiómákat, erre nézünk is egy ellenpéldát.

3.6. tétel. *A korlátozott Shapley-érték ($Sh^{\mathcal{A}}(w, r)$) az egyedüli olyan megoldása azon második áras zárt licites aukciókon, ahol megengedünk egyenlőséget is a rezervációs árak között, amely teljesíti a hatékonyság, a szükségtelen játékos tulajdonság, a strukturális monotonitás és a sorrendet megőrző additivitás axiómáit. A korlátozott Shapley-érték képlete ebben az esetben:*

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w, r) = \frac{w_i}{i} - \sum_{h=i+1}^{n} \frac{w_h}{h(h-1)} - \frac{r}{n} \ . \tag{3.2}$$

Nézzünk egy ellenpéldát az eredeti, az Algaba et al (2003) cikkben szereplő tétel megcáfolására.

3.7. Ellenpélda. *Tekintsük azt a megoldást, amelyben a nagykoalíció értékét egyenlően osszuk szét azon játékosok között, amelyeknek a rezervációs értéke nem r. Azt kell belátnunk, hogy ez a megoldás teljesíti a tételben megfogalmazott axiómákat. A hatékonyságot és az additivitást egyértelműen teljesíti. A strukturális monotonitást is, hiszen legalább egyenlőséggel mindig teljesíti, hogy $f_i^{\mathcal{A}}(w, r) \geq f_j^{\mathcal{A}}(w, r)$, ha $w_i \geq w_j$. A szükségtelen játékos tulajdonságot is, hiszen maximum egy olyan játékos lehet, akinek a rezervációs ára r, de ő nulla kifizetést is kap.*

Egy egyszerű példán keresztül bemutatjuk, hogy a korlátozott Shapley-érték és a most bemutatott egyenletes szétosztás nem ugyanazt az eredményt adják. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$, *a rezervációs árak pedig* $w_1 = 100$, $w_2 = 50$, $w_3 = 40$, *valamint* $r = 20$. *A nagykoalíció értéke, amit szét kell osztanunk* $v(N) = w_1 - r = 80$. *A korlátozott Shapley-érték a következő megoldást adja:*

- $Sh_1^{\mathcal{A}}(w, r) = \frac{w_1}{1} - \sum_{h=2}^{3} \frac{w_h}{h(h-1)} - \frac{r}{n} = 100 - \frac{50}{2} - \frac{40}{6} - \frac{20}{3} = 61\frac{2}{3}$.
- $Sh_2^{\mathcal{A}}(w, r) = \frac{w_2}{2} - \sum_{h=3}^{3} \frac{w_h}{h(h-1)} - \frac{r}{n} = \frac{50}{2} - \frac{40}{6} - \frac{20}{3} = 11\frac{2}{3}$.
- $Sh_3^{\mathcal{A}}(w, r) = \frac{w_3}{3} - \sum_{h=4}^{3} \frac{w_h}{h(h-1)} - \frac{r}{n} = \frac{40}{3} - \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

Míg az egyenletes szétosztás során mindhárom játékos 80/3*-at kap, ami láthatóan nem egyenlő a Shapley-megoldásban kapottal.*

A Shapley-érték képletének levezetését azért nézzük meg, hogy ez alapján tudjuk majd levezetni az első áras esetben is a Shapley-értéket, amire a 4. fejezetben szükségünk lesz a számoláshoz.

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w, r) = \sum_{\{T \subseteq N:\ i \in P^T\}} \frac{d_v(T)}{|P^T|} = \sum_{h=1}^{n} \frac{a_h}{h} = \sum_{h=1}^{n} \frac{w_h - w_{h+1}}{h} .$$

A képletből látszik, hogy miért jó, ha a nekünk kellő TU-játékokhoz fel tudjuk írni a megfelelő (N, P, a) hármast, hiszen akkor a számlálóba egyszerűen csak a_i-t kell helyettesíteni. Ez a felírás megtalálható Fragnelli et al (2005) előadásában. A következő részben az első áras zárt licites aukciókról nézzük meg ugyanazokat a tulajdonságokat és tételeket, amelyeket eddig megnéztünk a második áras esetben. Sok helyen csak alkalmazva ugyanezt a gondolatmenetet.

3.4. Az első áras zárt licites aukció

Legyen itt is n db. licitálónk van (ők lesznek az ajánlattevő biztosító társaságok), és egy eladó (ajánlatkérő). Az eladó rezervációs árát jelölje r. Ez az aukció úgy zajlik le, hogy a licitálók felírják licitjüket egy papírra, majd beleteszik egy borítékba. Az eladó ezeket a borítékokat egyszerre kibontja, és amelyiken a legmagasabb licit van, annak adja a tárgyat, azon az áron, amennyi a nyertes licit volt. Most is az általánosság megsértése nélkül tegyük fel, hogy $w_1 > w_2 > \ldots > w_n \geq r$. A liciteket jelölje $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Legyen továbbá ε az a licitemelés, amire teljesül, hogy $\varepsilon < w_i - w_{i+1}$ minden $i \in N$-re. Most is kezdetnek nézzük meg, hogy az egyes létrejövő koalíciók esetében milyen stratégiát követnek a játékosok. Könnyen látható, hogy ebben a játékban nem éri meg a játékosoknak bemondani a saját rezervációs árukat, hiszen mondjuk a legmagasabb rezervációs árú játékosnak elég csak egy kicsivel magasabbat mondani a második legmagasabb rezervációs árú játékos rezervációs áránál, és akkor biztosan ő fogja elvinni a tárgyat, de kevesebbet kell fizetnie. Persze ehhez meg kell tippelnie a rezervációs árakat, ami nem könnyű feladat. Most feltesszük, hogy mindenki ismeri az összes játékos rezervációs árát, a következő fejezetben pedig megvizsgáljuk, hogy mikor lehet azt mondani, hogy igen jó sejtésük van a játékosoknak a többiek rezervációs áráról.

Első áras zárt licites aukciós játékoknál a játék definíciója megtalálható Branzei et al (2000) cikkében.

- Ha mindenki egyedül van, akkor a licitek $b_i = w_{i+1}+\varepsilon$ minden $i \in N$ játékosra. Ekkor az 1-es játékos ajánlja a legtöbbet, és övé a tárgy, méghozzá b_1 áron. Az 1-es játékos haszna: $v(1) = w_1 - (w_2+\varepsilon)$. A többi játékos haszna ebben az esetben 0.

- Ha létrejön a nagykoalíció, akkor az 1-es játékos licitje $b_1 = r + \varepsilon$, a többieké pedig r. Ekkor a legmagasabb tétet ismét az 1-es játékos tette meg, de a haszon nem csak őt illeti, hanem az egész koalíciót, hiszen segítettek neki minél nagyobb hasznot elérni (minél olcsóbban hozzájutni a tárgyhoz). A koalíció haszna $v(N) = w_1 - (r + \varepsilon)$. Ezen kell valahogy osztozkodniuk.

- Ha létrejön egy $S \neq N$ koalíció úgy, hogy $\{1\} \in S$. Ekkor a licitek, ha $[1, k] \subset S$, de $k+1 \notin S$, a következők lesznek: $b_1 = w_{k+1}+\varepsilon$, a koalíció többi tagjának licitje r, a koalíción kívülieké pedig $b_{k+1} = w_{k+2} + \varepsilon, \ldots, b_n = r + \varepsilon$. Ekkor megint csak az 1-es játékos viszi el a tárgyat, viszont a haszon az S koalícióé, ami $v(S) = w_1 - (w_{k+1} + \varepsilon)$.

Az elsőáras zárt licites aukciós játék is megadható egy (N, P, a) hármassal. A következő állítást hasonló módon lehet belátni, mint a második áras esetben, ezért ezt nem részletezem.

3.8. állítás. *Az előbb értelmezett v játék (első áras zárt licites aukció) megfeleltethető egy (N, P, a) hármassal megadott játéknak, ahol $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, T egy lánc (a legegyeszerűbb poset antimatroid), $P(i) = [1, i]$ minden i-re és $a_1 = w_1 - w_2 - \varepsilon$ valamint $a_i = w_i - w_{i+1}$, ha $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.*

Most vizsgáljuk meg a Shapley-értékhez szükséges axiómákat ebben a játékban. A szükséges játékos tulajdonság és a korrektség axiómákra a másodáras esetben látott magyarázat miatt most sincs szükség. Valamint itt is át kell térnünk a rezervációs árak közötti nem szigorú egyenlőtlenségre, mert akkor némely axióma semmitmondó. Ezzel tehát itt is elhagyjuk az elsőáras zárt licites aukciós játékok osztályát, tehát amilyen osztályra megnézzük az axiómákat, az már nem aukciós játék. Jelölje most is a lánc struktúrát leíró antimatroidot $\mathcal{A}$.

- **Hatékonyság**: Azt mondja ki, hogy $\sum_{i \in N} f_i^{\mathcal{A}}(w,r) = w_1 - r - \varepsilon$. A stratégiáknál is láttuk, hogy valóban ennyi a nagykoalíció haszna. Ez most is igaz az aukciós játékok osztályára, mint második áras esetben.
- **Szükségtelen játékos tulajdonság** : Azt mondja ki, hogy $f_i^{\mathcal{A}}(w,r) = 0$, ha $w_i = r$, hiszen $w_1 - w_{i+1} - \varepsilon = v(S) = v(S \setminus \{i\}) = w_1 - w_i - \varepsilon$, tehát $f_i(w,r) = 0$ pontosan akkor, ha $w_i = r$. Ez az axióma sem mond sokat az aukciós játékok körében.
- **Strukturális monotónia**: Azt mondja ki, hogy $f_i^{\mathcal{A}}(w,r) \geq f_j^{\mathcal{A}}(w,r)$, ha $w_i \geq w_j$. Ez is teljesen ugyanaz, mint második áras esetben, hiszen itt is aki többre értékeli az adott tárgyat, az többet is részesüljön a haszonból.
- **Additivitás**: Ebben az esetben is nagyon fontos, hogy megmaradjon a struktúra, amelyből kiindultunk, hogy ne változzon a sorrend az értékelések között. Ezért most is a sorrendet megőrző additivitást kell használnunk.

Első áras esetben is úgy tudjuk kimondani a karakterizációs tételt, hogy egy bővebb játékosztályon igaz, amikor megengedünk egyenlőségeket is a rezervációs árak között.

3.9. tétel. *A korlátozott Shapley-érték ($Sh^{\mathcal{A}}(w,r)$) az egyedüli olyan megoldása azon első áras zárt licites aukciókon, ahol megengedünk egyenlőséget is a rezervációs árak között, amely teljesíti a hatékonyság, a szükségtelen játékos tulajdonság, a strukturális monotonitás és a sorrendet megőrző additivitás axiómáit. A korlátozott Shapley-érték képlete a következő:*

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w,r) = \begin{cases} \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{w_j - w_{j+1}}{j} + w_1 - w_2 - \varepsilon, & \text{ha } i = 1 \\ \sum\limits_{j=i}^{n} \frac{w_j - w_{j+1}}{j} \ , & \text{ha } i = 2, \dots, n \end{cases} \tag{3.3}$$

A következő ellenpéldával megmutatjuk, hogy a valódi első áras zárt licites aukciós játékok osztályán már nem a korlátozott Shapley-érték az egyetlen ilyen megoldás.

3.10. Ellenpélda. *Ugyanazt az egyenletes szétosztást használhatjuk, mint a 3.7. ellenpéldában, mert hiszen itt is ugyanazokat az axiómákat kell teljesítenie. Most is* *nézzünk egy egyszerű számpéldát, amely megmutatja, hogy a kétféle megoldás nem ugyanazt az eredményt adja. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$, a rezervációs árak pedig $w_1 = 100$, $w_2 = 50$, $w_3 = 40$, valamint $r = 20$. Legyen továbbá a licitemelés $\varepsilon = 5$. A nagykoalíció értéke, amelyet szét kell osztanunk: $v(N) = w_1 - (r + \varepsilon) = 75$. A korlátozott Shapley-érték a következő szétosztást adja:*

- $Sh_1^{\mathcal{A}}(w, r) = \sum_{j=2}^{3} \frac{w_j - w_{j+1}}{j} + w_1 - w_2 - \varepsilon = \frac{10}{2} + \frac{20}{3} + 100 - 50 - 5 = 56\frac{2}{3}$.
- $Sh_2^{\mathcal{A}}(w, r) = \sum_{j=2}^{3} \frac{w_j - w_{j+1}}{j} = \frac{10}{2} + \frac{20}{3} = 11\frac{2}{3}$.
- $Sh_3^{\mathcal{A}}(w, r) = \sum_{j=3}^{3} \frac{w_j - w_{j+1}}{j} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

Míg az egyenletes szétosztás során mindhárom játékos $\frac{75}{3}$-ot kapna, ami nem ugyanaz, mint a Shapley-megoldásban kapott eredmény.

Most nézzük meg, hogy hogyan lehet alkalmazni az első áras zárt licites aukciós játékokat a biztosítások közbeszerzésének modellezésére.

4. fejezet

Optimális viselkedés

4.1. A Shapley-érték tulajdonságai

Még egyszer nézzük meg részletesen, hogy miért nem lesznek igazak az aukciós játékokra vonatkozó karakterizációs tételek. Láttuk, hogy csak akkor lesznek igazak, ha megengedünk egyenlőségeket is a rezervációs árak között (3.6. és 3.9. tétel). Ha megengedjük az egyenlőségeket azzal egyedül az a baj, hogy mindkét zárt licites aukciós játék esetében a játék leírásánál, értelmezésénél egyértelműen azt tettük fel, hogy $w_1 > w_2 > \ldots > w_n \geq r$. Továbbá erre igen nagy szükségünk van akkor, amikor kiszámítjuk a különböző koalíciók értékét. Hiszen gondoljunk bele, hogy ha például másodáras esetben $w_1 = w_2$, akkor mindkettejük licitje a saját értékelésük, azaz w_1. Viszont ebben az esetben két győztese lenne az aukciónak, amit nem tudunk értelmezni és kezelni. Ebben az esetben minden eddigi feltevésünk nem fog teljesülni, megváltozik a struktúra (már nem egy lánc lesz, hanem egy kétgyökerű fa), nem tudjuk eldönteni, hogy ki nyeri az aukciót, és nem tudjuk megállapítani a koalíciók értékét sem, ami által nem tudjuk értelmezni a játékot magát.

Elsőáras esetben ha valahol az értékelések között egyenlőség van, akkor $\varepsilon = 0$ lesz, aminek a következményeként egyenlő licitek fognak kialakulni, tehát megint megváltozik a struktúra és nem fogjuk tudni eldönteni, hogy melyik licitáló a győztes. Például, ha $w_1 > w_2 = w_3 > r$, akkor $b_1 = w_2 + \varepsilon = w_2$ és $b_2 = w_3 + \varepsilon = w_3 = w_2$. Azaz első áras esetben sem tudjuk értelmezni a játékot, hogyha egyenlőséget engedünk meg a rezervációs árak között.

Ebből látható, hogy ilyen módosított feltevések mellett levezetett eredmény, nevezetesen a Shapley-érték képlete, nem adja a zárt licites aukciós játékok olyan egyetlen megoldását, amely teljesíti a szükségtelen játékos tulajdonság, a strukturális monotónitás, az additivitás, és a hatékonyság axiómáit. Mutatható olyan a Shapley-értéktől különböző megoldás, amely teljesíti ezen axiómákat, például a 3.7.

ellenpéldában látott megoldás. De persze könnyen látható, hogy az aukciós játékok körében a szükségtelen játékos axióma értelmezhetetlen. Ezek után úgy tűnik, mintha feleslegesen vezettük volna le a Shapley-értékét mindkét esetben, hiszen nem adja azt a megoldást, amit vártunk volna tőle.

Tehát nem igaz, hogy ez a Shapley-érték az első és másodáras zárt licites aukcióknak az egyedüli olyan megoldását adná, amely teljesíti a fentebb említett axiómákat. Ennek ellenére természetesen ez egy szétosztási módja a nagykoalíció értékének (a hatékonyságot azért továbbra is mindig teljesíti), tehát egy megoldás. Most be fogom bizonyítani erről a megoldásról, hogy rendelkezik egy másik tulajdonsággal, ami nagyon meggyőzővé teszi, és mindenki számára elfogadhatóvá, még ha az axiómákat nem is teljesíti.

Ezt a tulajdonságot nevezzük stabilitásnak, magbeliségnek. Ezt a tulajdonságot értelmeztük a 2.9. definícióban.

Most lássuk be, hogy az elsőáras zárt licites aukciónál levezetett Shapley-érték magbeli az elsőáras zárt licites aukciós játékok osztályán. A másodárasra külön nem látom be, mert arra nem lesz szükségünk a későbbiek során.

4.1. tétel. *Az első áras zárt licites aukciónál levezetett Shapley-érték magbeli az elsőáras zárt licites aukciós játékok osztályán.*

$$Sh_i^{\mathcal{A}}(w,r) = \begin{cases} \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{w_j - w_{j+1}}{j} + w_1 - w_2 - \varepsilon, & \textit{ha } i = 1 \\ \sum\limits_{j=i}^{n} \frac{w_j - w_{j+1}}{j} & \textit{különben} \end{cases} \tag{4.1}$$

Bizonyítás. Először is a hatékonyság axiómáját ugyanúgy tudjuk értelmezni, akkor is, ha nem engedünk meg egyenlőségeket a rezervációs árak között, ezáltal mivel a Shapley-érték teljesíti a hatékonyság axiómáját, a mag tulajdonság első része is teljesül, tehát $v(N) = \sum\limits_{i \in N} x_i$.

Már csak a második állítást kell belátnunk, miszerint $v(S) \leq \sum\limits_{i \in S} x_i$ teljesül, minden $S \subseteq N$ koalíció esetében. N-re már tudjuk a hatékonyság axiómájából, tehát elég $S \subset N$-re vizsgálni. Tegyük fel, hogy $[1,k] \subset S$, de $k+1 \notin S$. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &= \sum_{j=2}^{n} \frac{w_j - w_{j+1}}{j} + w_1 - w_2 - \varepsilon + \sum_{i=2}^{k} \sum_{j=i}^{n} \frac{w_j - w_{j+1}}{j} \\ &= \frac{w_2 - w_3}{2} + \frac{w_3 - w_4}{3} + \cdots + \frac{w_n - r}{n} + w_1 - w_2 - \varepsilon + \frac{w_2 - w_3}{2} \\ &\quad + \frac{w_3 - w_4}{3} + \cdots + \frac{w_n - r}{n} + \frac{w_3 - w_4}{3} + \frac{w_4 - w_5}{4} + \cdots \\ &\quad + \frac{w_n - r}{n} + \cdots + \frac{w_k - w_{k+1}}{k} + \frac{w_{k+1} - w_{k+2}}{k+1} + \cdots + \frac{w_n - r}{n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= w_1 - w_2 - \varepsilon + w_2 - w_3 + w_3 - w_4 + \cdots + w_k - w_{k+1} \\
&+k\frac{w_{k+1} - w_{k+2}}{k+1} + k\frac{w_{k+2} - w_{k+3}}{k+2} + \cdots + k\frac{w_n - r}{n} \\
&> w_1 - w_{k+1} - \varepsilon
\end{aligned}
$$

■

Ez alapján tehát nem kell a szemétbe dobni a Shapley-értékre vonatkozó eredményünket, hiszen igaz, hogy axiomatizálni nem tudjuk az aukciós játékokon, viszont magbeli, azaz ebből a szempontból jó tulajdonságú. Ezért fogom alkalmazni a Shapley-értéket a haszon szétosztására a biztosítások közbeszerzésénél.

Tehát mit mondhatunk a biztosítók optimális viselkedéséről? Látható, hogyha az összes biztosítótársaság összefog és az alapján határozza meg egyéni ajánlatát, valamint a haszon szétosztására az első áras zárt licites aukcióra vonatkozó Shapley-értéket használják, akkor nem éri meg semelyik biztosítónak sem kiszállni ebből a szövetségből. És mivel a magbeliségnél azokat az eseteket is megvizsgáltuk, amikor $|S| = 1$, tehát amikor egyes biztosítók, vagy mindenki nem szövetkeznek (azaz törvényesen járnak el), kijön, hogy ezáltal létre is kell jönnie a nagykoalíciónak (azaz, hogy mindenki összefog). Így tudják elérni a lehető legnagyobb hasznot, ami az elérendő cél egy haszonmaximalizáló vállalat esetében. A biztosító társaságok pedig igencsak tekinthetőek haszonmaximalizálónak.

Most egy olyan dologgal foglalkozunk, ami igazán a Versenyhivatal szempontjából érdekes, hiszen mutatunk egy olyan eszközt, amellyel következtetést lehet levonni az összefogás létével kapcsolatban.

4.2. Liciteloszlások elemzése

Most az 1.1. részben megelőlegezett gondolatot vizsgáljuk meg, miszerint meg tudjuk sejteni a licitekből az összefogás létét. Nagyon fontos kihangsúlyozni, hogy ez csak sejtés, de azért ad egy támpontot a hatóságnak ahhoz, hogy kell-e több energiát fordítani egyes közbeszerzések tisztaságának vizsgálatára, vagy nem.

Először is fiktív adatok alapján megrajzolok egy-két olyan liciteloszlást, amely sejteti az összefogást. Az első áras zárt licites aukciós játék leírásánál láttuk, hogy milyen ajánlatokat fognak tenni a résztvevők, hogyha létrejön a nagykoalíció. Feltettük, hogy van n db. licitáló, akik rezervációs árai rendre $w_1 > w_2 > \ldots > w_n \geq r$. A licitek pedig nagykoalíció esetén a következők voltak $b_1 = r+\varepsilon$ és $b_2 = b_3 = \ldots = b_n = r$, ahol $\varepsilon < w_i - w_{i+1}$. Itt most ezt meg kell fordítani, hiszen most a legalacsonyabb árú ajánlat fog nyerni.

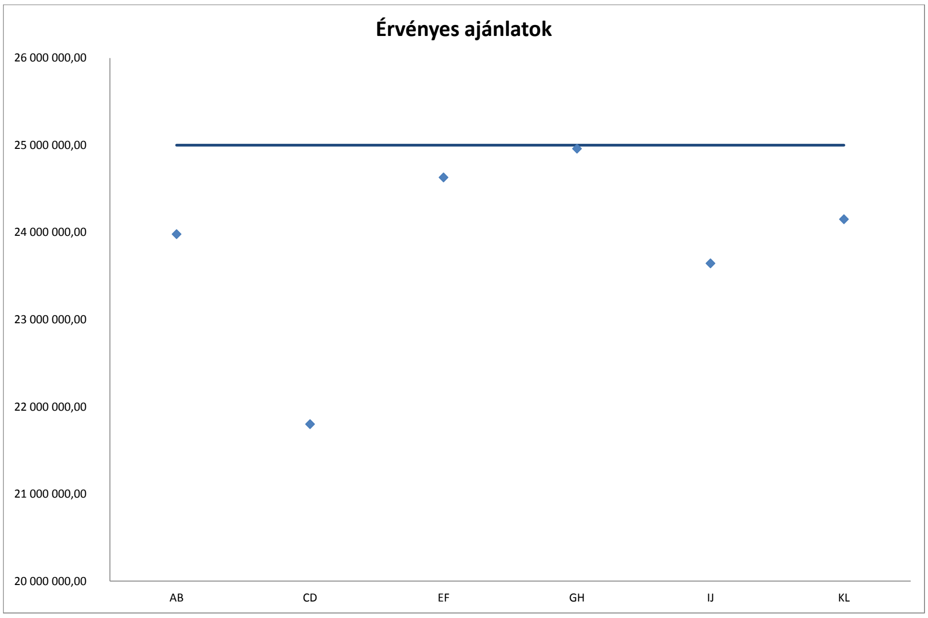
Ajánlatkérő	XY Minisztérium
Közbeszerzés tárgya	Az XY Minisztérium dolgozóinak felelősségbiztosítása
A közbeszerzés becsült értéke	25.000.000 HUF
A közbeszerzésen érvényes ajánlatot tevők:	AB Biztosító Társaság CD Biztosító Társaság EF Biztosító Társaság GH Biztosító Társaság IJ Biztosító Társaság KL Biztosító Társaság

4.1. táblázat. A fiktív közbeszerzésünk adatai

Ehhez természetesen a rezervációs árak között is fordított sorrendnek kell lennie, azaz $w_1 < w_2 < \ldots < w_n \leq r$. Az eladó rezervációs ára (r) itt most a közbeszerzés becsült értékének felel meg. Valamint ebben a fordított esetben a licitek a következőek a nagykoalíció létrejötte esetében $b_1 = r - \varepsilon$, és $b_2 = b_3 = \ldots = b_n = r$, ahol ε-t ugyanúgy értelmezzük.

A valóságban persze nem ilyen ajánlatokat fogunk látni, még akkor sem, hogyha valóban szövetkeznek az ajánlattevők. Hiszen egy ilyen ajánlateloszlás túl feltűnő volna, ezért csak erre hasonlító ajánlateloszlás jöhet létre. Azaz aki a legkevesebbre értékeli, az a saját értékelésénél nagyobb, de $r - \varepsilon$-nál (jóval) kisebb ajánlatot fog tenni, a többiek pedig a becsült érték igen kis környezetébe fogják tenni ajánlatukat (persze sosem adnak annál magasabb ajánlatot, hiszen az érvénytelen volna). Könnyen látható, hogy annál nagyobb a haszon (annál jobban megéri összefogni), minél nagyobb lesz a különbség a legkevesebbre értékelő ajánlattevő ajánlata és valós értékelése között. Mert hiszen ezt a különbséget, mint elért hazsnot tudják a szövetkezők egymás között szétosztani. Tekintsünk ezután egy kitalált közbeszerzési eljárást, amely modellezi az összefogás esetén kapható ajánlateloszlásokat.

4.2. *példa.* A 4.1. táblázatban megtalálhatóak fiktív közbeszerzésünk adatai. A számolás kedvéért megadom a biztosítók értékeléseit. A valóságban persze ezeket egymásról nem tudják, és valószínű, hogy összefogás esetén sem mondják el egymásnak a valós értékelésüket, csak valami ahhoz közelit. Erre a Shapley-érték (a haszon szétosztásának) számítása miatt van szükségünk. A 4.2. példához a megtett ajánlatokat és a rezervációs árakat a 4.2. táblázat mutatja meg. A 4.1. ábrán látható ajánlateloszlás tartozik a példához, ami elég szépen mutatja, hogy van egy kiugró ajánlat (de nem kirívóan alacsony, hanem inkább elég magas), a többi viszont még magasabb,



4.1. ábra. A 4.2. példához tartozó liciteloszlás

a becsült érték (most nem olyan kis) környezetében csoportosul.

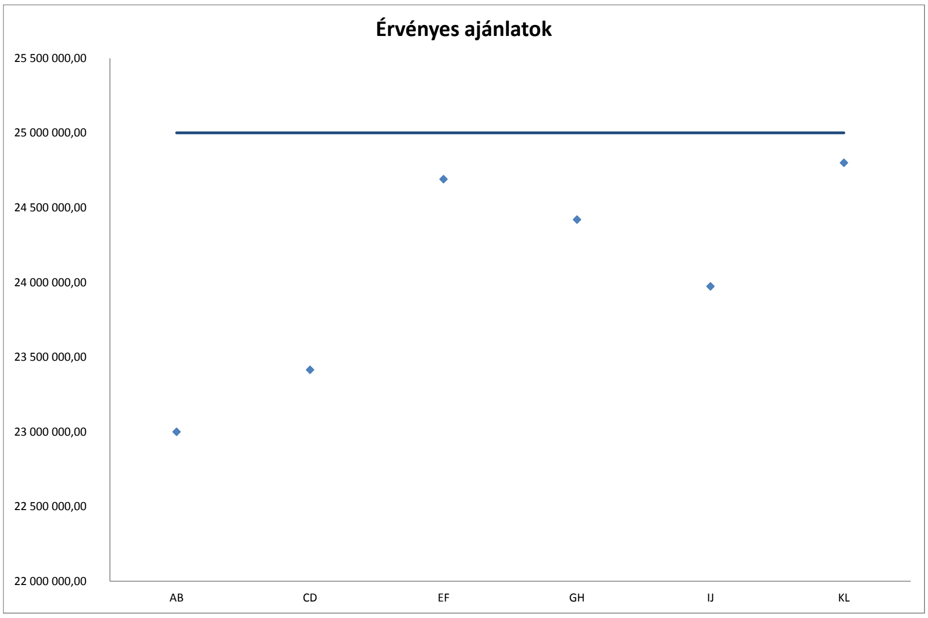
Biztosító társaság	Megadott ajánlat	Rezervációs ár
AB	23.980.000 HUF	18.550.000 HUF
CD	21.800.990 HUF	18.360.450 HUF
EF	24.630.500 HUF	19.320.000 HUF
GH	24.960.330 HUF	21.000.000 HUF
IJ	23.645.000 HUF	19.440.000 HUF
KL	24.150.990 HUF	20.100.000 HUF

4.2. táblázat. A 4.2. példához tartozó adatok

Ebből kiszámítható az összefogás által elért haszon, ami 21.800.990 – 18.360.450 = 3.440.540 HUF. Ezt a hasznot tudják maguk között szétosztani, amely szétosztásra egy megfelelő mód a Shapley-érték. Azt a képletet használom, amelyet az elsőáras zárt licites aukciónál levezettem. Ugyan megnéztük, hogy ezt a Shapley-értéket nem lehet axiomatizálni az elsőáras zárt licites aukciós játékokon, de ettől függetlenül egy jó szétosztási mód, hiszen magbeli, tehát ennél több hasznot nem tudnak a felek elérni. Könnyen belátható, hogy ha nem fognak össze ebben a példában, akkor kevesebb lesz a realizálható haszon, mint összefogás és a Shapley-érték alkalmazása esetén. Tehát a következőképpen lehet szétosztani ezt a hasznot:

- AB: 751.253 HUF
- CD: 818.997 HUF
- EF: 549.931 HUF
- GH: 348.610 HUF
- IJ: 529.015 HUF
- KL: 442.734 HUF

4.3. *példa.* A 4.2. ábrán egy olyan ajánlateloszlás látható, ami a 4.2. példában bemutatott közbeszerzéshez tartozik, ugyanazok a valós rezervációs árak is, csak a megtett licitek változnak.



4.2. ábra. A 4.3. példához tartozó liciteloszlás

A 4.2. ábrán az látható, hogy sokkal közelebb van az összes ajánlat a becsült értékhez. Első ránézésre talán kevésbé látszik feltűnőnek ez az ajánlateloszlás. De jobban megnézve, nem annyira természetes jelenség, hogy ennyire közel legyen egymáshoz az összes ajánlat, és hogy ennyire a becsült érték közelében helyezkedjenek el. Azzal, hogy itt nincs egy kiugró alacsonyabb ajánlat a koalíció nagyobb hasznot realizál magának, ami számszerűen $23.150.000 - 18.360.450 = 4.639.700$ HUF.

Biztosító társaság	Megadott ajánlat	Részesedés
AB	23.000.150 HUF	1.104.449 HUF
CD	23.415.000 HUF	1.013.094 HUF
EF	24.690.375 HUF	741.604 HUF
GH	24.420.000 HUF	470.113 HUF
IJ	23.973.215 HUF	713.397 HUF
KL	24.800.000 HUF	597.044 HUF

4.3. táblázat. A 4.3. példához tartozó számítások

A 4.3. táblázatban összefoglalom a megtett ajánlatokat, valamint a Shapley-értékkel kapott szétosztását az előbb kiszámolt haszonnak.

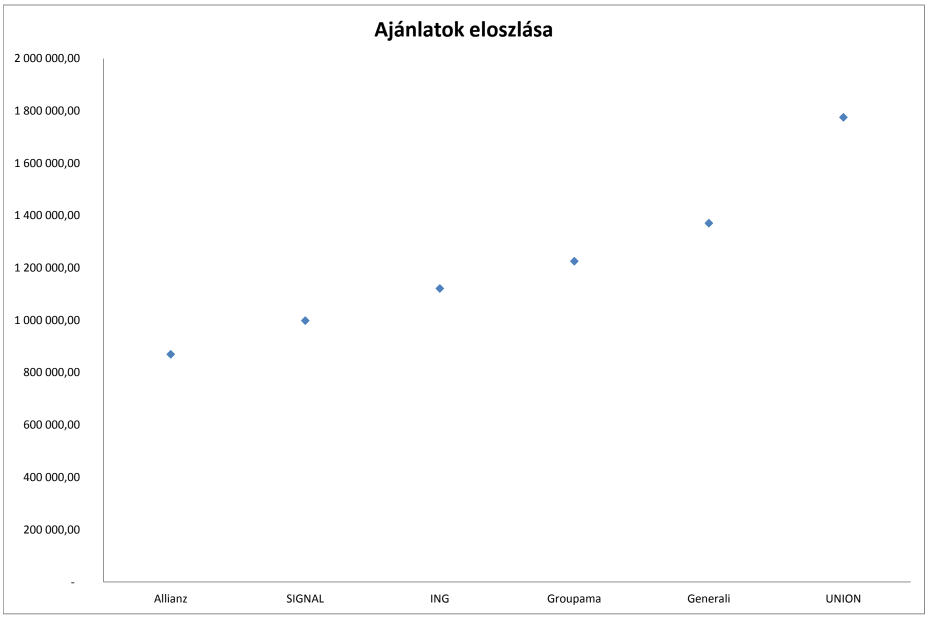
Láthatóan ebben az esetben nagyobb lett a szövetségben lévő biztosítók nyeresége. Ekkor is könnyen ellenőrizhető, hogy kevesebb hasznot tudnak elérni, ha nem szövetkeznek egymással.

Meg kell jegyezni, hogy az ajánlateloszlásról csak akkor tudunk következtetést levonni, ha legalább négy ajánlattevő tett érvényes ajánlatot, ennél kevesebb ajánlattevő esetében igen nehéz bármit is mondani, nem tudjuk megsejteni sem az összefogást. Valamint az is látható, hogy összefogás esetén biztosan nem fog kirívóan alacsony ár kialakulni, hiszen úgy csak csökkenthető a haszon nagysága. Az persze nem állítható, hogyha nincs kirívóan alacsony ár, akkor biztosan összefogtak. De ha a struktúra azt sejteti, hogy összefogtak és van kirívóan alacsony ár, akkor az elgondolkodtató, hogy lehet, hogy csak véletlenül alakult így az ajánlateloszlás.

Most pedig nézzünk meg egy már lezárult és értékelt valós közbeszerzést. Itt majd látható lesz, hogy nem valószínű az összefogás, lentebb részletesen megnézem miért.

- Az ajánlatkérő a Budapesti Távhőszolgáltató Zártkörűen Működő Részvénytársaság.
- A közbeszerzés tárgya csoportos személyi biztosítási szerződés, határozott időre.
- A közzététel időpontja 2013. március 22.
- Az ajánlattevők (akik mind megfeleltek a feltételeknek), az Allianz Hungária Biztosító Zrt, a SIGNAL Biztosító Zrt, az ING Biztosító Zrt, a Groupama Biztosító Zrt, a Generali-Providencia Biztosító Zrt és a UNION Vienna Insurance Group Biztosító Zrt.

Itt sajnos nem volt benne a közbeszerzés összegzésében a becsült érték, pedig nagyon jó lenne azt is tudni. Ennek ellenére nézzük meg az ajánlateloszlást:



4.3. ábra. Az érvényes ajánlatok (valós adatok)

Az látható, hogy nincs egy kiugró alacsonyabb ár sem, valamint hogy nagyon nagy a szórása a legalacsonyabb ajánlaton kívüli ajánlatoknak, tehát bárhol is legyen a becsült érték, biztosan nem csoportosulnak körülötte az ajánlatok. Ebből sejthető, hogy nincs összefogás az induló biztosítók között. Persze egészen biztosan nem állíthatunk semmit, de itt valószínűleg, ha ezek az ajánlatok és összefogtak, akkor jobban is járhatna a legkevesebbre értékelő biztosító, ha kiszáll a szövetségből.

Sajnos adatok hiányában nem tudok még több ilyen közbeszerzést kielemezni, hiszen mint említettem már, csak azokról lehet érdemben mondani valamit, ahol legalább négy induló van. Valamint igen kevés helyen lehet olyan adatokra bukkanni, ahol mind az összes induló ajánlatát leírják, márpedig csak az első, vagy első kettő ajánlatból még nem lehet semmit sem mondani. Így nem tudok amellett avagy ellene érvelni, hogy vajon a biztosítók a valóságban összefognak-e vagy sem, szétosztják-e a piacot maguk között, vagy pedig minden esetben kialakul egy rendes versenyhelyzet. Az ebben a részben ismertetett gondolat kiindulópontja lehet egy módszertannak.

5. fejezet

Összegzés

A bevezetőben bemutattuk a közbeszerzési eljárásokat, ezen belül a biztosításokra vonatkozó közbeszerzéseket is. Megnéztük, hogy hogyan zajlanak le ezek az eljárások a 2011-es Közbeszerzési Törvény (Jogtár, 2011) és egyéb interneten található anyagok alapján (Számadó és Dr.Stocz, 2013; Wikipédia, 2013; Közbeszerzés-Online.hu, 2013; Consulting, 2013; Dr.Perczel, 2013). Észrevettük, hogy a biztosításokra vonatkozó közbeszerzéseket le lehet írni elsőáras zárt licites aukciós játékokkal, amire az egész elemzésünk épül.

Az 1.2. részben elemeztük, hogy mekkora is a biztosítási közbeszerzések piaca. Láttuk, hogy 2011. január 1-je óta összesen 81 db. biztosítási szolgáltatás megrendelésére kiírt eljárás volt, ami véleményem szerint jelentősnek mondható. Azt is megvizsgáltuk, hogy mindössze hét olyan biztosító volt, akik 2011 óta nyerni tudtak ezeken az eljárásokon, ez viszont azt mutatta, hogy igen kicsi a piac, tehát érdemes piacfelosztó kartellek (szövetségek) létrejöttét vizsgálni ezen a piacon.

Ezután a 2. fejezetben hozzáláttunk a biztosítási közbeszerzések modellezéséhez szükséges játékelméleti fogalmak bevezetéséhez. A 2.1. részben először bevezettük az átruházható hasznosságú kooperatív játékokat (TU-játékok), és megnéztük a TU-játékokon értelmezett megoldás Shapley-féle axiomatizálását, és definiáltuk a Shapley-érték fogalmát (Shapley, 1953). A későbbi részek során ezt a Shapley-értéket korlátoztuk le a nekünk kellő struktúrára, az antimatroidokra. Az antimatroidokat a 2.2. részben vezettük be. Két példán keresztül szemléletesen is bemutattuk az antimatroidokkal kapcsolatos legfontosabb fogalmakat. Ezután a 2.3. részben az antimatroidokon értelmezett korlátozott Shapley-érték axiomatizálását néztük végig az Algaba et al (2003) cikk alapján, majd beláttuk, hogy az $Sh^{\mathcal{A}}$ korlátozott Shapley-érték az egyetlen olyan megoldás, amely teljesíti a vizsgált axiómákat.

A 2.4. részben az axiomatizációra vonatkozó eredményeket néztük meg a poset antimatroidok osztályán (Algaba et al, 2003), ezek olyan antimatroidok, amelyek még metszetzártak is. Azért volt szükség külön megnézni a poset antimatroidokról szóló eredményeket, mert az aukciós játékokat leíró struktúra megfeleltethető egy igen speciális poset antimatroidnak, ez a struktúra volt a lánc. Ezeket a tételeket, és nevezetesen a 2.40. következményt, használták fel az Algaba et al (2003) cikkben az aukciós játékokra vonatkozó Shapley-érték karakterizációs tételének bizonyításánál, amelyről láttuk, hogy nem igaz, és mutattunk rá ellenpéldát is.

A következő 3. fejezetben először is bemutattuk az aukciók különböző fajtáit, kiemelve az első és másodáras zárt licites aukciókat, hiszen ezekkel foglalkozik ezen szakdolgozat. Ezután egy példán keresztül a 3.2. részben megnéztük, hogy hogyan néz ki egy olyan játék, amely lánc struktúrával rendelkezik, ezekről részletesen Branzei et al (2000) cikkben lehet olvasni, a dolgozatban mi csak a legfontosabb definíciókat és tételeket emeltük ki.

A 3.3. részben a második áras zárt licites aukciós játékok elemzését mutattuk be Branzei et al (2000) és Algaba et al (2003) alapján. Azért volt szükségünk a második áras eset részletes vizsgálatához, hogy az első áras zárt licites aukciós játékokat is elemezni tudjuk, hiszen a Branzei et al (2000) cikkben mindössze maga a játék van definiálva. Mindkét esetben beláttuk, hogy az Algaba et al (2003) cikkben található Shapley-érték karakterizációra vonatkozó tétel az aukciós játékok osztályán nem igaz, egy ellenpélda segítségével tudtunk mutatni még egy olyan megoldást, amely teljesíti a megadott axiómákat.

A 4. fejezetben először megnéztük, hogy az elsőáras zárt licites aukciós játékokra vonatkozó Shapley-értéknek azért van jó tulajdonsága is, nevezetesen, hogy magbeli, azaz egy stabil megoldás. Ezért mondhatjuk egy jó szétosztási módnak, még akkor is, ha a karakterizáció nem teljesül rá. A 4.2. részben azt néztük meg, hogyan tud a hatóság egy esetleges összefogást észrevenni a megtett ajánlatok alapján. Ezért először két fiktív példán keresztül megnéztük, hogy hogyan alakulhatnak az összefogást feltéve a liciteloszlások, ha azért a résztvevők figyelnek arra, hogy ne legyen feltűnő, amit csinálnak. Ezekben az esetekben kiszámítottuk azt is, hogy milyen haszonra tehetnek szert a résztvevők, ha a Shapley-értéket használják az elért összhaszon szétosztására. Aztán egy konkrét már lezajlott közbeszerzési eljárást elemeztünk, amelyről az látszott, hogy ott nem volt összefogás a licitek alapján.

A 4.2. részben látott gondolatmenet kiindulópontja lehet egy módszertannak, amelynek segítségével meg lehet sejteni az összefogást a biztosítási közbeszerzések piacán. Érdemes még egyszer megemlíteni, hogy ez a gondolatmenet olyan közbeszerzési piacokon nem működik, ahol nagyon sok résztvevő van, és nem ismerhetik ennyire jól egymást az ajánlattevők. Hiszen itt az a lényeg, hogy minden induló összefog egymással, aminek feltétele, hogy viszonylag kevesen legyenek és jól ismerjék egymást.

Tehát beláttuk, hogy a biztosítók szempontjából a kartellképzéssel lehet a legnagyobb hasznot elérni, aminek szétosztására használhatják a Shapley-értéket. A Versenyhivatal pedig a liciteloszlások ábrázolásából és elemzéséből tud következtetni egy esetleges összefogás létére, amit utána más eszközökkel részletesen is kivizsgálhat.

Egy érdekes kérdés lehet, hogy mi történik akkor, ha van egy non-profit biztosító, aki minden közbeszerzési eljárásban részt vesz, és releváns ajánlatot nyújt be. Ezzel valószínűleg értelmetlenné tenné a kartellek létrejöttét, mert nem tudnák az árat annyira felvinni, amely már megéri. A kérdéskörrel ebben a szakdolgozatban nem foglalkoztunk, egy másik elemzés tárgyát képezheti.

Irodalomjegyzék

Algaba E, Bilbao J, van den Brink R, Jiménez-Losada A (2000) Cooperative games on antimatroids. CentER Discussion Paper 124

Algaba E, Bilbao J, van den Brink R, Jiménez-Losada A (2003) Axiomatizations of the shapley value for cooperative games on antimatroids. Mathematical Methods of Operations Research

Branzei R, Fragnelli V, Tijs S (2000) On the computation of the nucleolus of line-graph peer group games. Scientific Annals of the Alexandru Ioan Cuza University of Iasi

Consulting P (2013) A közbeszerzési szerződés megkötése. URL `http://www.primeconsulting.hu/kozbeszerzes/ajanlatkero/kozbeszerzesi-eljaras-menete/eredmenyhirdetes-es-szerzodeskotes/`

Derks J, Peters H (1992) A shapley value for games with restricted coalitions. Int J Game Theory

Dilworth R (1940) Lattices with unique irreducible decompositions. Annals of Mathematics 41:771–777

DrPerczel Z (2013) Közbeszerzés értéke. URL `http://www.perczelzsofia.hu/kozbeszerzesi-kalauz/9-kozbeszerzes-erteke`

Fragnelli V, Branzei R, Meca A, Tijs S (2005) On cooperative games arising from deterministic auction situation. AIRO2005

Gillies D (1959) Solutions to general non-zero-sum games, Contributions to the Theory of Games, vol IV. Princeton University Press

Jogtár (2011) 2011. évi cviii. törvény a közbeszerzésekről. URL `http://net.jogtar.hu/jr/gen/hjegy_doc.cgi?docid=A1100108.TV&celpara=#xcelparam`

Márkus J (2011) A Shapley-megoldás airport játékokon. BA diplomamunka, Budapesti Corvinus Egyetem

Közbeszerzés-Onlinehu (2013) Pénzügyi és biztosítási szolgáltatások közbeszerzése. URL http://www.kozbeszerzes-online.hu/public-procurement-hu/penzugyi-es-biztositasi-szolgaltatasok-kozbeszerzese--79.htm

Peleg B, Sudhölter P (2003) Introduction to the theory of cooperative games. Kluwer

Pintér M (2009) A shapley-érték axiomatizálása. Alkalmazott Matematikai Lapok

Shapley LS (1953) A value for n-person games. Annals of Mathematical Studies

Számadó R, DrStocz F (2013) Közbeszerzési útmutató a közbeszerzésekről szóló 2011. évi CVIII. törvény alapján

Vickrey W (1962) Auctions and biddig games. Princeton University Press Princeton Coference Series 29:15–27

Wikipédia (2013) Közbeszerzés magyarországon. URL http://hu.wikipedia.org/wiki/Közbeszerzés

Thomson W (2007) Cos allocation and airport problems Working Paper 538