Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

CDO-k árazása: a Gauss kopula és a korrelációs struktúra általánosításai

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc szakdolgozat

Szerző:
Szabó Beáta Tünde

Témavezető:
Dr. Molnár-Sáska Gábor

2013. június 6.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A 2007-ben, az Egyesült Államokban kirobbant gazdasági válság hatása máig tart. Elterjedt nézet, hogy a bonyolult derivatív pénzügyi termékek árazási formulái fontos szerepet játszottak a válság elmélyülésében. A szóban forgó hitelderivatívák közül a válság szempontjából az egyik legfontosabb a CDO. A CDO-k árazása tehát különösen aktuális téma. A dolgozatban a hangsúly a CDO árazási modelleken van, magáról a válság lefolyásáról Medvegyev, Gyarmati [13] és Király, Nagy Márton, Szabó [16] ad alapos áttekintést.

A dolgozat első fejezetében a hitelderivatívák, ezen belül pedig hangsúlyosan a CDO-k kerülnek bemutatásra. A megértéshez szükséges példán, és valós adatok bemutatásán keresztül járjuk körbe a termék működését. Ezután ismertetjük a főbb árazási irányokat, kiemelve a korrelációs struktúrák kalibrálásának problémáját.

A második részben az egyfaktoros Gauss kopulával való modellezést, a legegyszerűbb árazási modellt mutatjuk be. A CDS-ek árazásából kiindulva, építjük fel a modellünket, melyet a valós adatokra illesztünk is. Az illesztés során kialakul az implicit korrelációkból álló korrelációmosoly, ami a leginkább tükrözi a modell hiányosságait.

A bonyolultabb korrelációs stuktúrákra való kiterjesztést a sztochasztikus korreláción alapuló megközelítéssel kezdjük. Ezeket a modelleket főként Burtschell, Gregory, és Laurent [5] és [6] munkái alapján tárgyaljuk. Kitérünk az árazás során használt paraméterek hatásaira, és kalibráljuk a modelleket valós adatokra. A két- és háromállapotú modell egyaránt három-három paraméter kalibrálását kívánja meg, ezek részletes eredményei a függelékben találhatóak.

A kiterjesztés egy másik formája, a többfaktoros modellezés is bemutatásra kerül a 4. fejezetben. Ezt az árazási formula implementálhatóságának szempontjából közelítjük, Glasserman és Suchintabandid [11] alapján. A modell hatványsorokkal való közelítést alkalmaz az árazáshoz, ezzel csökkentve a számításigényt. Ezen megközelítés elméleti hátterének bemutatása után implementáljuk a modellt a valós adatokra. Ez az árazási formula a hatványsorral való egyszerűsítés ellenére is már három faktorra is nagyon számításigényes, és mivel a két faktoros modell ennek speciális esete, a három faktoros modellt kalibráljuk.

A dolgozat zárásaként az 5. fejezetben összegezzük az eredményeket, és a további általánosítási lehetőségeket vázoljuk fel.

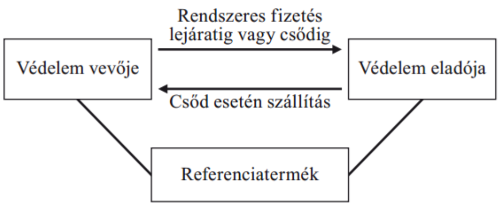
2. A CDO-k bemutatása

2.1. A hitelderivatívák és az értékpapírosítás

Ahhoz, hogy jövőbeli pénzáramlásokat át lehessen csomagolni bizonyos szempontból kedvezőbb tulajdonságú pénzáramlássá, értékpapírosítás szükséges. Vagyis egy rendszeres pénzáramlású eszközből készül egy másik rendszeres pénzáramlású eszköz, például egy likvidebb, kedvezőbb kamatozású, vagy kisebb hitelkockázatú eszköz. Az alábbi pénzügyi termékeket Király, Nagy, Szabó [16] és Gyarmati [12] alapján ismertetem.

Az **ABS** (asset backed security) egy hitel alapú értékpapír, olyan eszközalapú kötvény, amelyek mögött homogén adósságcsoportok referenciaportfóliói állnak (hitelkártyák, diákhitelek stb.). Ennek egyik formája a **MBS** (mortgage backed security), ahol az értékpapírt jelzáloghitelekből képzett alap fedezi. Ez lehet üzleti (CMBS), és lakossági (RMBS). Ezek a termékek azért tudtak elterjedni, mert az értékpapírosítás képes a kívánt lejáratot és kamatozást előállítani.

A dolgozat szempontjából az egyik legfontosabb hitelderivatíva a mulasztási csereügylet, azaz **CDS** (credit default swap). CDS-nek nevezünk egy adott mögöttes termékre kötött biztosítást, ahol az egyik fél adott időközönként, általában negyedévente, adott lejáratig, vagy csőd bekövetkeztéig, a névérték bizonyos százalékát fizeti azért cserébe, hogy a mögöttes termék (állampapír, kötvény, stb.) esetleges nem fizetése esetén a névérték megtérüléssel (recovery) csökkentett százalékát megkapja. A CDS-ek árazását a következő fejezetben tárgyaljuk.



A CDS-ek pénzáramlása, forrás: [13]

A **kosár hitelderivatívák** (basket credit derivatives) olyan pénzügyi termékek, melyek a CDS-hez hasonlóak, ám a hitelkockázattal bíró referenciatermékek köre bővül. Például a *first-to-default* típus az elsőként csődölő hitelre biztosít védelmet, vagyis a kosárban lévő termékek első csődeseményéig, vagy a lejáratig tart a negyedévenkénti prémium fizetése, és az első csőd bekövetkeztekor az eladó a megtérüléssel csökkentet névértéket fizeti. Ahhoz, hogy az ilyen típusú termékeket jól lehessen árazni, fontos a kosárban szereplő referenciatermékek együttes viselkedésének, közöttük lévő korreláció vizsgálata.

Alacsony korreláció esetén magas lesz a díj, hiszen nem valószínű, hogy egy csőd sem fog bekövetkezni, míg magas korreláció esetén annak a valószínűsége, hogy egy csőd sem lesz, magasabb, ezért a termék ára alacsonyabb lesz.

A már átcsomagolt pénzáramlások továbbcsomagolása során alakult ki az ún. fedezett adósságkötelezvény, amely fedezete lehetett kötvény, ABS, vagy akár többféle hitel. Ezek a termékek a **CDO**-k (collateralised debt obligation), melyek már nem csak homogén pénzáramlásokat csomagolnak át. A CDO-k a fent bemutatott CDS-ek segítségével szintetikusan is előállíthatóak, vagyis nem kell a pénzáramlás alapját képező eszközt megvenni. Ebben az esetben a hitelkockázat a CDS-eken keresztül épül be a CDO-ba, így szintetikus a kockázat. Például az iTraxx Europe 125 vállalat CDS-ének portfóliója, ahol minden vállalat egyenlő súllyal szerepel, és ennek átcsomagolásával hoznak létre CDO-kat.

Az CDO-k értékpapírosítására a hitelintézet létrehoz egy, a pénzáramlásokat áttranszformáló különleges célú társaságot, **SPV**-t (special purpose vehicle). A CDO kibocsátója a háttér-eszközportfóliót (referenciaportfólió) eladja az SPV-nek, az sávokra darabolja azt, és így adja tovább a befektetőknek, akiknek az SPV az referenciaportfólió eszközeiből befolyó pénzből prémiumot fizet a hitelkockázat vállalásáért cserébe.

2.2. A szintetikus CDO-k felépítése

A CDO (collateralized debt obligation) tehát egy olyan másodlagos értékpapír, ami alkalmas nagy portfóliók (referenciaportfólió) értékpapírosítására, amely portfóliók állhatnak kölcsönökből, kötvényekből, vagy akár CDS-ekből (credit default swap).

A mögöttes portfólió kockázatát ún. tranche-ekre darabolják, és ezeket a trancheeket külön-külön értékesítik.

A dolgozatban szintetikus CDO-kkal foglalkozunk, azaz olyan CDO-kkal, melyek CDS-ekből álló portfóliót értékpapírosítanak. A CDO-k mögött tehát CDS-ekből álló referenciaportfólió van, ugyanolyan lejárati időpontokkal.

Tranche sorszám	Tranche név	alsó határ	felső határ
1	Equity	0%	3%
2	Mezzanine	3%	7%
3	Senior	7%	15%
4	Super Senior	15%	100%

Egy adott tranche-be befektető prémiumot kap a tranche eladásakor (upfront), majd a lejáratig negyedévente a névérték meghatározott százalékát (running spread)[1] Abban az esetben, ha a portfólió vesztesége százalékosan meghaladja az adott tranche alsó határát, a befektető a tranche méretével arányosan a névérték százalékában fizet. Vagyis upfront díjért, és negyedévenkénti bevételért cserébe a CDO tranche befektetője bizonyos hitelkockázatot vállal. Annak, aki például az Equity tranche-be fektet, már akkor csökken a befektetése, ha akár egy CDS is becsődöl, egészen addig, amíg a CDS-ek 3%-a be nem csődöl. Ekkor lépünk be a Mezzanine tranche-be, azaz az ebbe a tranche-be fektetők befektetett pénze csak akkor csökken, ha legalább 3%-nyi CDS becsődöl.

[1] Léteznek olyan tranche-ek, ahol upfrontot nem kell fizetni, csak a running spreadet, általában ez a felsőbb sávokra jellemző.

2.2.1. Példa

Az alábbi példát Schoutens és Cariboni [22] alapján ismertetjük.

Fektessünk be 1 millió Eurot a következőképpen:

- a referenciaportfólió álljon 125 CDS-ből
- a 3 év lejáratú Mezzanine tranche-be fektessünk be.

A kapott prémium legyen a következő:

- 7,5%-os kezdeti prémium, azaz 75000 Euro
- negyedévenkénti 1%-os prémium, azaz 10000 Euro

Ekkor ha a lejáratig hétnél kevesebb CDS csődöl be, az a tranche-et nem érinti. Ha azonban legalább hét CDS becsődöl, akkor egyenlő súlyozás esetén és 40%-os megtérüléssel számolva már legalább $(0,6 \cdot 7)/125 = 3,36\%$-os a veszteség, azaz beléptünk a tranche-be.

A portfólió vesztesége 7 csőd esetén éppen $3,36\%$, és mivel nem merítettük ki teljesen a tranche-et, azaz nem haladtuk meg az 5%-os veszteséget, ezért nem veszítettük el a teljes befektetett összeget, csak annak $(3,36\% - 3\%)/(7\% - 3\%) = 9\%$-át.

Azaz 90 000 Eurot fizetünk. A továbbiakban a negyedévenkénti kamatot a fennmaradó 910 000 Eurora kapjuk (9100 Euro), amíg le nem jár a CDO, vagy újabb csődeseményig.

2.2.2. A felhasznált adatsor

A számításokhoz használt adatsor egy 125 CDS-ből álló referenciaportfólió alapján árazott CDO. A CDS-ek lejáratai 3, 5, és 7 év. A tranche-ek a fenti 4 Equity, Mezzanine, Senior és Super Senior sávok. A lejáratok minden tranche-re ugyanúgy 3, 5, és 7 év, akár a CDS-ek esetében. A tranche-ek megvásárlásakor upfront díj fizetendő, a későbbi, negyedévenkénti running spread fizetésén túl.

Az adatok 2010.okt.1-jeiek, tehát a tranche-eket akkor lehet megvásárolni az upfront díj ellenében, a running spread pedig negyedévente fizetendő, az első fizetés ideje 2010.dec.20., majd 2011.márc.20., stb. Minden adatot a Morgan Stanley hozzájárulásával használtam, titkosított nevekkel, vagyis minden CDS-re csak a CDS prémiumokról szóló adatokat kaptam meg, azt, hogy mire vonatkozott a CDS, nem. A számításokhoz felhasználtam még az adott negyedévenkénti lejáratokra a 2010.okt.1-jei diszkontfaktorokat.

A CDO adatait a következő táblázat foglalja össze.

Tranche	Running spread	3 éves upfront	5 éves upfront	7 éves upfront
Equity	500	24,88 %	42,56%	50,38%
Mezzanine	100	7,5%	20,88%	31%
Senior	100	0,31%	4,5 %	9,25%
Super Senior	25	0,11%	0,73%	1,13%

A running spreadek bázispontban, a befektetéssel arányosan, az upfront díjak pedig a befektetett összeggel és a tranche méretével arányosan vannak megadva. A megtérülést konstansnak, 0,4-nek tételezzük fel minden CDS esetén.

2.3. Árazási megközelítések

A CDO tranche-ek árazása minden modellben azon alapul, hogy feltételezzük a kockázatsemleges mérték létezését. Vagyis az eszközárazás alaptétele alapján feltesszük, hogy a piac arbitrázsmentes, ami ekvivalens állítás a kockázatsemleges mérték létezésével. Feltesszük továbbá, hogy a piac teljes, ekkor ez a kockázatsemleges mérték egyértelmű is. Így az árazás fő feladata, hogy a prémiumok jelenértékének a kockázatsemleges mérték szerinti várható értéke és a csőd esetén fizetendő pénzáramlás jelenértékének kockázatsemleges mérték szerinti várható értéke legyen egyenlő. Ezért a dolgozat további részében minden számítás a kockázatsemleges mérték szerint zajlik.

A CDO-k árazásának nagyon sok megközelítése létezik, ám a legtöbb az egyfaktoros Gauss kopulából indul ki. Ennek a modellnek a legkirívóbb hiányossága, hogy különböző tranche-ekre különböző korrelációt tételez fel a csődök bekövetkezése között. Ez azt jelenti, hogy ugyanazon referenciaportfólió elemei között más tranche-ek árazásakor más összefüggést tételezünk fel, vagyis nem konzisztens a modell. Ennek a problémának a kiküszöbölésére jöttek létre a korrelációs struktúra különböző általánosításai, melyekkel a dolgozatban is foglalkozunk.

A sztochasztikus korrelációt feltételező modellek azzal a feltételezéssel élnek, hogy a CDS-ek közötti korreláció nem determinisztikus, hanem egy valószínűségi változó, ld. Burtschell, Gregory, Laurent [6]. Ezek a modellek tehát az egyszerű egyfaktoros Gauss kopula modellnél már összetettebb struktúrát teteleznek fel, leginkább 2, vagy 3 állapotú korrelációval számolnak.

A korrelációs struktúra egy másik általánosítási megközelítése a többfaktoros modellezés. Ekkor Andersen, Sidenius [1] és Glasserman, Suchintabandid [11] cikkei alapján feltesszük, hogy van néhány közös faktor, amire valahogyan reagálnak a CDS-ekhez rendelt állapotváltozók, és ebből számolunk korrelációkat. A módszer hátránya, hogy könnyen vezet nagyon bonyolult, számításigényes struktúrákhoz, és a paraméterek nehezen becsülhetőek.

Az árazási probléma úgy is felfogható, mint egy időben változó struktúra modellezési feladata. Ezzel a megközelítéssel jöttek létre a dinamikus, többperiódusos modellek. Ennek lényege, hogy a korrelációt időtől függő valószínűségi változóként kezeljük, vagyis azzal a feltételezéssel élünk, hogy az összefüggőségi viszonyok nem állandóak. Ezzel a feltevéssel egy bonyolultabb, de pontosabb modellt kapunk, mint az egyfaktoros, statikus gaussi kopula modelljéből, ld. Sidenius, Piterbarg, Andersen [21], Jackson, Kreinin, Zhang [14].

A CDO árazás egy további problémája, hogy az egyfaktoros gaussi modell konstans megtérüléseket tételez fel az egyes CDS-ek esetén. Ennek feloldására vezethető be sztochasztikus megtérülés, és mivel az empirikus adatok azt mutatják, hogy a csődök gyakorisága és a megtérülés nagysága összefügg, ezért a sztochasztikus megtérülést a csődökkel összefüggésben vezetik be, ld. Andersen, Sidenius [1].

A dolgozat az implementálhatóságot, és a valós adatokra való kalibrálhatóságot tartja szem előtt, és elsősorban a korrelációs struktúrát volt célunk feltárni, ezért a sztochasztikus korreláció modelljeit, és a többfaktoros árazást vizsgáljuk részletesebben, és az adatokra ezek alapján állítunk fel modelleket.

3. CDO árazás egyfaktoros Gauss kopulával

3.1. CDS-ek árazása

Világos, hogy szintetikus CDO-k esetén, ahol a referenciaportfólió CDS-ekből áll, a modell nagyban függ a CDS-ek árazási modelljétől. Így a kiindulópont a CDS-ek árai mögött húzódó megfontolások modellezése.

Legyen (Ω, $\mathcal{F}$, P) egy filtrált valószínűségi mező P kockázatsemleges valószínűségi mértékkel. Az i-edik CDS becsődölésének idejét tekintsük egy pozitív valószínűségi változónak, legyen ez a valószínűségi változó τ_i. Ekkor az, hogy t-ig az i-edik CDS becsődöl, $p_i(t) = P(\tau_i \leq t)$.

Az i-edik CDS-hez tartozó (determinisztikus) csődintenzitás függvényt jelölje λ_i. Ekkor a csődvalószínűségeket a következőképp számíthatjuk:

$$p_i(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_i(s)\ ds} \tag{3.1.1}$$

A CDS árazása azon alapul, hogy a prémium- és a csődfizetések jelenértékének várható értéke megegyezzék. A prémium ág

$$E(PV_{\text{Prémium}}) = \sum_{j=1}^{k} d(t_i) \cdot P(t_j\text{-ig nincsen csőd}) \cdot c_i \cdot \Delta t,$$

ahol

k a T lejáratig vett prémiumfizetések száma

t_i a kifizetések időpontja, azaz $0,25, 0,5, 0,75 \ldots T$

$d(t_i)$ a t_i időponthoz tartozó diszkontfaktor, $r(t)$ spot-kamatláb mellett

$$d(t_i) = e^{-\int_0^{t_i} r(s)\ ds}$$

c_i az i-edik CDS-re fizetett negyedévenkénti prémium évesített értéke

$P(t_j\text{-ig nincsen csőd}) = 1 - p_i(t_j)$.

Vezessük be a $g(t)$ függvényt, és segítségével írjuk fel az i-edik CDS prémium ágának jelenértékének várható értékét.

$$g(t) = e^{-\int_0^{t_i} r(s)+\lambda(s)\ ds}$$

$$\begin{aligned} E(PV_{\text{Prémium}}) &= \sum_{j=1}^{k} c_i \cdot g(t_j) \cdot \Delta t \\ &\approx c_i \cdot \int_0^k g(s)\ ds. \end{aligned}$$

Az i-edik CDS-hez tartozó csőd esetén való kifizetés jelenértékének várható értéke R megtérülés esetén

$$\begin{aligned} E(PV_{\text{Csőd}}) &= (1-R) \cdot E\left(d(\tau_i)\chi_{\{\tau_i \leq T\}}\right) \\ &= (1-R) \cdot \int_0^T d(t)\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(s)\ ds}\ dt \\ &= (1-R) \cdot \int_0^T \lambda(t)g(t)\ dt, \end{aligned}$$

hiszen (3.1.1) szerint

$$E\left(\chi_{\{\tau_i \leq T\}}\right) = P(T\text{-ig csőd}) = p_i(T) = \int_0^T \lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}\ dt.$$

Mivel a két várható értéknek meg kell egyeznie, folytonos prémiumfizetések esetén a következőt írhatjuk

$$c_i \cdot \int_0^T g(t)\ dt = (1-R) \cdot \int_0^T \lambda(t) g(t)\ dt.$$

Konstans $\lambda(t)$ esetén $\lambda = c_i/(1-R)$. A dolgozatban a $\lambda_i(t)$ i-edik intenzitásfüggvény n lépcsőből álló lépcsős függvény, ahol n az adott eszközre köthető CDS-ek lejáratainak száma, az ugrás helyei pedig a lejáratok. Tehát például 3, 5, és 7 éves lejáratokra az i-edik CDS csődintenzitás-függvénye:

$$\lambda_i(t) = \sum_{j=1}^{3} \lambda_i^j \cdot \chi_{\{t \in (T_{j-1}, T_j]\}},$$

ahol $T_0 = 0, T_1 = 3, T_2 = 5, T_3 = 7$. A $\lambda_i^1, \lambda_i^2, \lambda_i^3$ értékek Baranovski, von Lieres és Wilch [3] alapján bootstrap módszerrel számolhatóak, azaz először λ_i^1-et számoljuk, ami megközelítőleg $c_i/(1-R)$, hisz a prémiumfizetés negyedévenkénti, és nem folytonos. Ezután λ_i^2-t a már meglévő λ_i^1 használatával tudjuk számolni, például Newton-Raphson-iterációval. Ezeket a kalkulációkat Matlab segítségével végeztem, és az árazáshoz felhasználtam, az eredmények a függelékben találhatóak.

3.2. CDO-k fair prémiuma

Egy N CDS-ből álló referenciaportfólióval (pf) bíró CDO t-ig vett veszteségfüggvénye ($t \leq T$)

$$L_{pf}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (1-R) \cdot \chi_{\{\tau_i \leq t\}}.$$

A j-edik tranche határait jelölje A_{j-1} és A_j. Ekkor a tranche várható vesztesége felírható két Equity tranche várható veszteségének különbségeként a következőképp

$$\begin{aligned} L_j(t) &= \min\left(L_{pf}(t), A_j\right) - \min\left(L_{pf}(t), A_{j-1}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } L_{pf}(t) < A_{j-1} \\ L_{pf}(t) - A_{j-1}, & \text{ha } A_{j-1} \leq L_{pf}(t) < A_j \\ A_j - A_{j-1}, & \text{ha } A_j \leq L_{pf}(t) \end{cases} \end{aligned}$$

A j-edik tranche t-beli egyenlegét jelölje $V_j(t)$. Felírható, hogy

$$\begin{aligned} V_j(t) &= (A_{j-i} - A_j) - L_j(t) \\ &= \begin{cases} A_j - A_{j-1}, & \text{ha } L_j(t) < A_j \\ A_j - L_j(t), & \text{ha } A_{j-1} \leq L_j(t) < A_j \\ 0, & \text{ha } A_j \leq L_j(t). \end{cases} \end{aligned}$$

Ez, ahogy a példából is látszott, azt jelenti, hogy ha a referenciaportfólió vesztesége "belép" a tranche-be, akkor a tranche-be fektetett összeg csökkenni fog, a veszteséggel és a tranche méretével arányosan. Azaz t-ben a befektetett összeg százalékában az egyenleg $V_j(t)/(A_j - A_{j-1})$. A megvételkor való upfront prémium kifizetése után a prémiumok fizetése negyedévenként történik (konstans running spread), azaz $\Delta t = 0,25$. A prémium fizetése egészen addig tart, amíg ki nem merül a tranche, vagy a lejárat be nem következik. Az egyszerűsítés kedvéért tegyük fel, hogy a csődök a periódusok felénél következnek be. A megvételkor fizetett prémiumot u_j-vel, a negyedévenként fizetendő évesített értékét s_j-vel jelölve a prémiumok jelenértékének várható értéke és a csődkifizetések jelenértékének várható értéke determinisztikus $d(t)$ diszkontfaktorok mellett

$$E(PV_{\text{Prémium}_j}) = u_j \cdot (A_j - A_{j-1}) + \sum_{i=1}^{k} s_j \cdot d(t_i) \cdot \Delta t \cdot \frac{E\left(V_j(t_i) + V_j(t_{i-1})\right)}{2}$$

$$E(PV_{\text{Csőd}_j}) = \sum_{i=1}^{k} d(t_i) \cdot E\left(L_j(t_i) - L_j(t_{i-1})\right)$$

Modellemben a negyedévenkénti prémiumot, mint paramétert tekintem, és a kezdeti kifizetést célom meghatározni. Ezért az egyenletet u_j-re rendezem, hiszen a két várható értéknek fair árazás mellett meg kell egyeznie. Tehát
(3.2.1)

$$u_j = \frac{1}{A_j - A_{j-1}} \sum_{i=1}^{k} d(t_i) \left[E\left(L_j(t_i) - L_j(t_{i-1})\right) - r_j \cdot \Delta t \cdot \frac{E\left(V_j(t_i) + V_j(t_{i-1})\right)}{2} \right]$$

Egy másik megközelítés, hogy nem paraméterként tekintjük az running spreadet, hanem az upfront kifizetést "beolvasztjuk" a negyedévenkénti prémiumba, és az így kialakuló running spreadet keressük az árazásnál. Tehát keressük azt az s'_j-t minden j tranche-re, hogy ismert upfront- és running spread esetén legyen

$$\begin{aligned} E(PV_{\text{Prémium}}) &= \sum_{i=1}^{k} s'_j \cdot d(t_i) \cdot \Delta t \cdot \frac{E(V_j(t_i) + V_j(t_{i-1})}{2} \\ &= u_j \cdot (A_j - A_{j-1}) + \sum_{i=1}^{k} s_j \cdot d(t_i) \cdot \Delta t \cdot \frac{E\left(V_j(t_i) + V_j(t_{i-1})\right)}{2}. \end{aligned}$$

Mivel a csőd-ág a fizetés mikéntjétől nem függ, az így kapott s'_j-ket az árazási formulából a következőképp kapjuk

$$s'_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} d(t_i) \cdot E(L_j(t_i) - L_j(t_{i-1})}{\sum_{i=1}^{k} d(t_i) \cdot \Delta t \cdot E(V_j(t_i) - V_j(t_{i-1})) \cdot \frac{1}{2}}.$$

3.3. Kopulák alkalmazása CDO árazáshoz

A kopulákat David Li 2000-es [17] cikke alapján tárgyalom, hiszen ez volt az a cikk, ami elindította a hitelderivatívák árazásának kopulákkal való megközelítését. A kopulák legnagyobb előnye, hogy együttes eloszlásokat képesek egyszerűen modellezni adott marginális eloszlásokra.

Mivel az egyes CDS-ek csődeloszlásait ismertnek tekintjük, a fő kérdés, hogy hogyan viselkednek együttesen ezek a pénzügyi eszközök, milyen valószínűséggel csődöl be adott százalékuk t-ig. Az együttes eloszlásokból marginálisokat tudunk számítani, a fordított irány azonban nem egyértelmű. A kopulák használata egy egyszerű módszer a probléma megoldására, de egyértelmű megoldás nem létezik, azaz adott marginálisokra több együttes eloszlás is illeszthető, a kopula ezek közül kínál egyet.

Definíció.
Legyen $U_1, U_2, \dots U_n$ $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Az ezekhez tartozó kopula $C : [0,1]^n \to [0,1]$ $n-$dimenziós eloszlásfüggvény, amelyre

$$C(u_1, u_2 \dots u_n) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_n \leq u_n)$$

Azaz a kopulák egyenletes peremeloszlású többdimenziós eloszlásfüggvények. Az egyenletes peremeloszlás persze nem volna elég az árazáshoz, hiszen pénzügyi folyamatokat egyenletes eloszlással nem célszerű modellezni. Sklar tétele biztosítja a kopulák sokrétű használhatóságát, vagyis a tetszőleges peremeloszlásokra való kopula illeszthetőségét.

Tétel. (Sklar, 1959.)
Legyen $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy n-dimenziós eloszlásfüggvény $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ peremeloszlásokkal. Ekkor létezik, és folytonos peremeloszlások esetén egyértelmű az a C_F kopula, amelyre

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = C_F(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$$

Fordítva, ha C_F egy n dimenziós kopula, $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots F_n(x_n)$ eloszlásfüggvények, akkor az előbb definiált F éppen n-dimenziós eloszlásfüggvény lesz $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ peremekkel.

Azaz a tétel szerint létezik, és egyértelmű az a kopula, amivel modellezhetünk adott marginálisok esetén együttes eloszlásokat. A peremeloszlások a modelltől függően választhatóak, és az illesztett kopula folytonos. Ez a kopula F n-dimenziós eloszlásfüggvény és $F_1, F_2 \dots F_n$ peremeloszlások esetén a következőképp áll elő

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)).$$

Fontos megjegyezni, hogy egyenletes eloszlású valószínűségi változót ξ-hez tartozó $F(x)$ eloszlásfüggvényből úgy kaphatunk, ha a valószínűségi változót beírjuk saját eloszlásfüggvényébe, azaz $F(\xi)$ eloszlása $[0,1]$ intervallumon egyenletes. Ebből következik, az is, hogy ha η $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor $F^{-1}(\eta)$ eloszlása meg fog egyezni ξ eloszlásával.

Az árazás folyamán felhasználom, hogy szigorúan növekvő transzformáció esetén a függőséget leíró kopula nem változik.

Tétel. (A kopula invarianciája) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók folytonosak, C_ξ kopulával. Legyenek $h_1, h_2, \dots, h_n$ szigorúan monoton növekvő függvények a megfelelő ξ_i valószínűségi változó értékkészletén. Ekkor

$$C_{h(\xi)} = C_\xi,$$

azaz szigorúan monoton növő transzformációra a kopula invariáns.

Bizonyítás. Legyen a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók eloszlásfüggvénye rendre $F_1, F_2, \ldots, F_n$, és legyen a $h_1(\xi_1), h_2(\xi_2), \ldots, h_n(\xi_n)$ valószínűségi változóké $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Mivel h_i függvények szigorúan monotonak, létezik inverzük, így

$$\begin{aligned}
C_{h(\xi)}\left(G_1(x_1), G_2(x_2) \ldots, G_n(x_n)\right) &= P(h_1(\xi_1) \leq x_1, h_2(\xi_2) \leq x_2, \ldots, h_n(\xi_n) \leq x_n) \\
&= P(\xi_1 \leq h_1^{-1}(x_1), \xi_2 \leq h_2^{-1}(x_2), \ldots, \xi_n \leq h_n^{-1}(x_n)) \\
&= C_\xi(F_1(h_1^{-1}(x_1)), F_2(h_2^{-1}(x_2)), \ldots, F_n(h_n^{-1}(x_n))) \\
&= C_\xi(G_1(x_1), G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)),
\end{aligned}$$

hiszen $F_i(h_i^{-1}(x)) = P(\xi_i \leq h_i^{-1}(x)) = P(h_i(\xi_i) \leq x) = G_i(x)$.

A Gauss kopula fontos szerepet játszik a hitelderivatívák árazásában, a kezdeti modellben is ezt használjuk, ezért ezt érdemes külön definiálni.

Definíció. Gauss kopulának nevezzük a fentiek alapján a

$$C_{\mathcal{G}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2), \ldots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

kopulát, ahol Φ_Σ a Σ korrelációs mátrixú n dimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvénye, Φ pedig egyváltozós standard normális eloszlás eloszlásfüggvény.

A kopula a CDO árazásakor úgy jelenik meg, hogy a τ_i csődidők eloszlásának vizsgálata helyett bevezetünk ξ_i állapotváltozókat ($i = 1, 2, \ldots, N$), és ezen állapotváltozók megfelelő küszöbparaméterre vett eloszlását vizsgáljuk, azaz az i-edik CDS t-ig bekövetkező csőd valószínűsége megegyezik az állapotváltozó bizonyos $x_i(t)$ küszöb alá kerülésének valószínűségével. Vagyis a együttes csődeloszlás

$$\begin{aligned}
P(\tau_1 \leq t, \tau_2 \leq t, \ldots, \tau_N \leq t) &= P(\xi_1 \leq x_1(t), \xi_2 \leq x_2(t), \ldots, \xi_n \leq x_N(t)) \\
&= \Phi_\Sigma(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)),
\end{aligned}$$

ahol Φ_Σ az N-dimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli, Σ korrelációs mátrix-szal, ami a modellektől függően változik.

3.4. A várható veszteség meghatározása

A CDO tranche-ek árazásának legfontosabb kérdése az adott t időpontig bekövetkezett veszteség várható értékének meghatározása. Ezt Eberlein, Frey, és McNeil [8] alapján vizsgáljuk.

Tegyük fel, hogy a CDS-ek korrelációja függ egy közös, piaci faktortól (M). Ekkor persze erre a közös faktorra feltételesen független csődökről beszélhetünk, amely feltételesen független csődökkel lényegesen könnyebb a számolás, különösen ilyen nagy adatsor esetén. Azaz a várható veszteséghez elég ezekből a feltételesen független csődeseményekből számított eloszlást a közös faktor szerint integrálni.

A referenciaportfólió minden CDS-éhez rendeljük hozzá egy ξ_i valószínűségi változót, és tegyük fel, hogy minden i, j-re ezen az állapotváltozók közötti ρ^2 korreláció megegyezik[2].

$$\xi_i = \rho \cdot M + \sqrt{1-\rho^2} \cdot \eta_i$$

Minden i-re $(1 \leq i \leq N)$ legyen η_i, és M független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} E(\xi_i) &= \rho E(M) + \sqrt{1-\rho^2} E(\eta_i) = 0 \\ D^2(\xi_i) &= \rho^2 D^2(M) + \left(1-\rho^2\right)(\eta_i) = 1, \end{aligned}$$

azaz minden i-re ξ_i standard normális eloszlású, és minden $i, j, i \neq j$-re ezen az állapotváltozók közötti ρ^2 korreláció megegyezik.

$$\begin{aligned} \mathrm{Corr}(\xi_i, \xi_j) &= E(\xi_i \xi_j) - E(\xi_i)E(\xi_j) \\ &= \rho^2 E(M^2) + (1-\rho^2)E(\eta_i)E(\eta_j) + \rho\sqrt{1-\rho^2} E(M)E(\eta_i + \eta_j) = \rho^2. \end{aligned}$$

Vagyis a 125 állapotváltozó korrelációs mátrixa

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \rho^2 & \dots & \rho^2 \\ \rho^2 & 1 & \dots & \rho^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^2 & \rho^2 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahhoz, hogy a CDS-re vonatkozó állapotváltozót vizsgáljuk, felhasználjuk, hogy a CDS-ek csődvalószínűségeit már ismerjük. Legyen x_i az az időtől függő küszöb, ami éppen akkora valószínűséggel haladja meg ξ_i állapotváltozót, mint amekkorával t meghaladja τ_i-t, ahol τ_i továbbra is az i-edik CDS csődjének bekövetkezési ideje. Megmutatjuk, hogy ξ_i állapotváltozókkal modellezhető a τ_i csődidők függőségi rendszere. Figyelembe véve, hogy $\xi_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p_i(t) &= P(\tau_i \leq t) = P(\xi_i \leq x_i(t)) = \Phi(x_i(t)) \\ x_i(t) &= \Phi^{-1}(p_i(t)) \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Mivel $x_i(t)$ monoton növő függvények kompozíciójaként áll elő, ezért maga is monoton nő. Így a csőd bekövetkezési ideje felírható, mint a legkorábbi időpont, ahol ξ_i állapotváltozó a küszöbérték alá esik.

$$\tau_i = \inf(t \geq 0 \mid \xi_i \leq \Phi^{-1}(p_i(t))).$$

Így a kopulák invarianciájáról szóló tétel, és (3.4.1) egyenlet alapján már kapjuk a kívánt eredményt, vagyis a csődidők függőségi rendszerét valóban tudjuk vizsgálni az állapotváltozókkal, hiszen τ_i eloszlása és $p_i^{-1}(\Phi(\xi_i))$ eloszlása megegyezik:

$$p_i(t) = P(\xi_i \leq \Phi^{-1}(p_i(t))) = P(p_i^{-1}(\Phi(\xi_i)) \leq t).$$

Az árazáshoz szükségünk van a veszteség eloszlására, ehhez először a piaci faktorra vett feltételes eloszlását számítjuk az n db CDS-nek. Egy CDS csődjének feltételes eloszlása

$$p_i(t \mid M) := P(\tau_i \leq t \mid M) = P(\xi_i \leq x_i(t) \mid M) = \Phi\left(\frac{x_i(t) - \rho M}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

[2]Megjegyezzük, hogy a szakirodalom egy részében a $\xi_i = \sqrt{\rho}M + \sqrt{1-\rho}$ felírás használatos, ekkor a korreláció nem ρ^2, hanem ρ.

Az l db csőd bekövetkezésének feltételes valószínűsége függ a CDS-ek vizsgálatakor meghatározott csődvalószínűségektől. Figyelembe kell vennünk hogy minden CDS más intenzitásfüggvénnyel rendelkezik (más értékeket vesz fel a lépcsőkön). Arra vagyunk tehát kíváncsiak, hogy $k = 1, 2, \ldots N$ db CDS-ből milyen feltételes valószínűséggel következik be éppen l csőd t időpontig. Jelölje $q^k(l, t|M)$ az l csőd bekövetkezésének M-re feltételes valószínűségét k CDS-ből. Rekurziót használunk $N = 125$ CDS feltételes csődeloszlásának kiszámításához. A rekurzióhoz felhasználjuk, hogy a k-adik CDS csődjének feltételes valószínűsége $p_k(t|M)$.

$$\begin{aligned}
q^0(0, t|M) &= 1 \\
q^{k+1}(0, t|M) &= q^k(0, t|M)(1 - p_{k+1}(t|M)) \\
q^{k+1}(l, t|M) &= q^k(l, t|M)(1 - p_{k+1}(t|M)) + q^k(l-1, t|M)p_{k+1}(t|M), \\
& \quad l = 1, 2, \ldots k \\
q^{k+1}(k+1, t|M) &= q^k(k, t|M)p_{k+1}(t|M).
\end{aligned}$$

A rekurzió értelmezése a következő. A kezdeti érték legyen 1, azaz 0 CDS-ből álló referenciaportfólióban annak a valószínűsége, hogy 0 CDS fog becsődölni, 1. Ekkor, ha ismerjük a k CDS-ből álló referenciaportfólió csődeloszlását, akkor a $k + 1$ CDS-ből álló csődeloszlása 3 esetre oszlik.

- Egyrészt annak a valószínűsége, hogy 0 csőd következik be, úgy számolható, hogy a k+1-edik CDS túlélési valószínűségével $(1-p_{k+1}(t|M))$ szorozzuk annak a valószínűségét, hogy a k CDS-ből álló portfólióban nincs csőd $(q^k(0, t|M))$.

- Másrészt, $k + 1$-nél kisebb számú l db csőd bekövetkezése úgy lehetséges, hogy az l csőd bekövetkezik már az első k CDS-ben, és a $k + 1$-edik CDS "túlél", vagy úgy, hogy az első k CDS-ből $l - 1$ csőd következik be, és a $k + 1$-edik CDS csődöl.

- Harmadik esetben, a $k + 1$ csőd bekövetkezési valószínűsége csak úgy adódhat, hogy az első k CDS csődöl, és a $k + 1$-edik is csődöl.

Az implementálás során célszerű mátrixot készíteni a rekurzióból, és az utolsó sor kumulált összegét felhasználni eloszlásfüggvény számításához.

A feltétel nélküli eloszlás a feltételes csődeloszlásból integrálással számítható, felhasználva, hogy M standard normális eloszlású:

$$q(l, t) = \int_{-\infty}^{\infty} q^N(l, t \mid m) dF_M(m) = \int_{-\infty}^{\infty} q^N(l, t \mid m) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2}} \, dm.$$

Az eloszlásfüggvény legyen $F(t, h)$, ami t időpontig bekövetkezett csődök N-nel arányos eloszlását mutatja. Jelölje a t-ig bekövetkezett csődök számát $\Theta(t)$, arányát $\vartheta(t) = \Theta(t)/N$. Ekkor az eloszlásfüggvény

$$F(t, h) = P(\vartheta(t) < h) = \sum_{i=1}^{\Theta(t)} q(i, t)$$

A megtérülést is figyelembe véve a referenciaportfólió $t-$ig bekövetkezett százalékos vesztesége $L_{pf}(t) = \vartheta(t)(1-R)$. A várható veszteség ekkor

$$\begin{aligned}
E(L_j(t)) &= E\left[\min\left(L_{pf}(t), A_j\right)\right] - E\left[\min\left(L_{pf}(t), A_{j-1}\right)\right] \\
&= (1-R)\cdot\left[E\left[\min\left(\vartheta(t), \frac{A_j}{1-R}\right)\right] - E\left[\min\left(\vartheta(t), \frac{A_{j-1}}{1-R}\right)\right]\right] \\
&= (1-R)\cdot\left[0\cdot P\left(\vartheta(t) < \frac{A_{j-1}}{1-R}\right)\right. \\
&+ \left(E\left(\vartheta(t)\;\middle|\;\frac{A_{j-1}}{1-R} \le \vartheta(t) < \frac{A_j}{1-R}\right) - \frac{A_{j-1}}{1-R}\right)\cdot P\left(\frac{A_{j-1}}{1-R} \le \vartheta(t) < \frac{A_j}{1-R}\right) \\
&+ \left.\left(\frac{A_j}{1-R} - \frac{A_{j-1}}{1-R}\right)\cdot P\left(\frac{A_j}{1-R} \le \vartheta(t)\right)\right]
\end{aligned}$$

Integrálva $\vartheta(t)$ eloszlásfüggvénye szerint, a fenti számítás a következőképp írható: (3.4.2)

$$E(L_j(t)) = (1-R)\cdot\int_{\frac{A_{j-1}}{1-R}}^{\frac{A_j}{1-R}} h - \frac{A_{j-1}}{1-R}\,dF(t,h) + \frac{A_j - A_{j-1}}{1-R}\left(1 - F\left(t, \frac{A_j}{1-R}\right)\right).$$

Vegyük észre, hogy a várható veszteség másképp felírva

$$\begin{aligned}
E(L_j(t)) &= E\left[\min\left(L_{pf}(t), A_j\right)\right] - E\left[\min\left(L_{pf}(t), A_{j-1}\right)\right] \\
&= E[L_{pf}(t) - A_{j-1}]^+ - E[L_{pf}(t) - A_j]^+.
\end{aligned}$$

Valóban,

$$\begin{aligned}
&[L_{pf}(t) - A_{j-1}]^+ \\
&-[L_{pf}(t) - A_j]^+ =
\end{aligned}
\begin{cases}
0 - 0 = 0, & \text{ha } L_{pf}(t) < A_{j-1} \\
L_{pf}(t) - A_{j-1} - 0, & \text{ha } A_{j-1} \le L_{pf}(t) < A_j \\
L_{pf}(t) - A_{j-1} - L_{pf}(t) + A_j = A_j - A_{j-1}, & \text{ha } A_j \le L_{pf}(t)
\end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy a j-edik tranche várható vesztesége előáll két olyan Super Senior, legfelső tranche várható veszteségének különbségeként, amely tranche-ek alsó határai rendre a vizsgálni kívánt j-edik tranche alsó- és felső határa. Ez a megfigyelés abból adódik, hogy egy Senior tranche várható vesztesége $E[L_{pf}(t) - A_{j-1}]^+$, hiszen ilyen tranche-ek esetében $A_j = 100\%$.

3.5. Az adatokon végzett számítások

Az árazás menete a következő volt.

Először a CDS-ek csődvalósínűségeit számoltam ki minden negyedévre, a legtávolabbi lejáratig a fent bemutatott módszerrel, a csődintenzitások meghatározásával.

Ezután a feltételes csődvalószínűségeket határoztam meg M piaci faktorra, adott t időpontig, ρ^2 korreláció mellett.

A feltételes csődvalószínűségekből ezután elkészítettem a feltételes csődeloszlást, ami adott csődarányhoz rendel valószínűséget M piaci faktor, t lejárat és ρ^2 korreláció mellett.

A feltételes csődeloszlásból a feltétel nélkülit az eloszlásfüggvény és a standard normális sűrűségfüggvény szorzatának numerikus integrálásával kaptam.

A tranche veszteségének várható értéke – a kiszámított feltétel nélküli eloszlással súlyozott Riemann-Stieltjes integrálás elvégzése után – a modellbeli (3.4.2) képletek alapján adódott.

Az upfront prémiumot a (3.2.1) képlet alapján kaptuk, a megfelelő diszkontfaktorok felhasználásával.

3.6. A korreláció szerepe

Az árazás során a korreláció mutatja, hogy mekkora közös mozgást feltételezünk az állapotváltozókra, és így arra, hogy a t-ig bekövetkezett csődök mennyire szorosan függenek össze.

Heurisztikusan megközelítve, a magas korreláció azt jelenti, hogy nagy lesz a CDS csődök együttmozgása, vagyis nagy valószínűséggel lesz sok csőd, és nagy valószínűséggel egyáltalán nem lesz csőd. Ez a legalsó, Equity tranche-nek biztonságot nyújt, hiszen ha egyáltalán nincsenek csődök, az azt jelenti, hogy nem lépünk be a tranche-be. A legfelső Super Senior tranche azonban kockázatosabbá válik, hiszen a sok csőd együttes bekövetkezése éppen a Super Senior tranche-be való belépést jelenti.

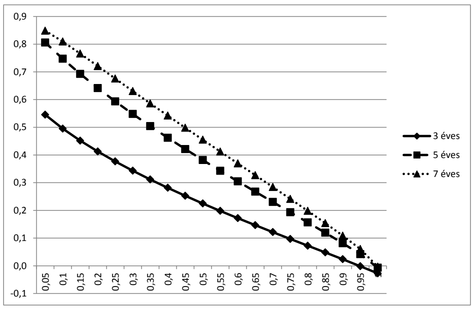
Az alacsony korreláció úgy interpretálható, hogy kevésbé mozognak együtt a CDS-csődök, tehát alacsony valószínűséggel következik be sok csőd, de nagy valószínűséggel lesz csőd. Ez az Equity tranche-et kockázatosabbá teszi, hiszen már egy csőd bekövetkeztekor is belépünk a tranche-be. A Super Senior tranche viszont biztonságosabb lesz alacsony korreláció esetén, hiszen a sok csőd együttes bekövetkezésének valószínűsége kicsi.

Magas kockázat magasabb, alacsony kockázat alacsonyabb prémiumot vár el a tranche vásárlójától, ezért a korreláció növekedésével az Equity tranche prémiuma csökken, a Super Senioré pedig nő.

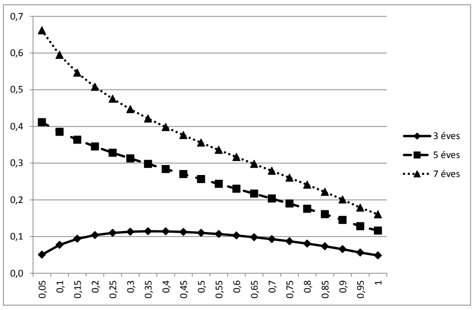
Ennek pontos, matematikai megfogalmazását a következő fejezetben ismertetjük. Világos, hogy bonyolultabb struktúrák esetén az, hogy mennyire függenek össze események, nem olyan könnyen értelmezhető, mint az egyfaktoros Gauss kopulával való modellezés esetén. Összetettebb esetekben szupermoduláris értelemben vett összefüggőségi intenzitást fogunk vizsgálni.

Az alábbi ábrákon az egyes tranche-ek 3 éves lejárat esetén vizsgált upfrontjai láthatóak a korreláció függvényében. Látható, hogy míg az Equity tranche monoton csökkenő upfrontokat mutat, a Super Senior monoton növekvőeket.

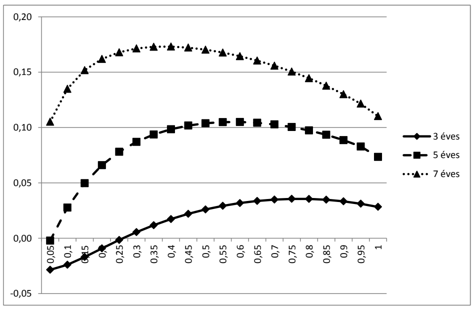
Ahogy látható, bizonyos esetekben negatív upfrontot kapunk egyes korrelációk esetén. Ez úgy értelmezhető, hogy a running spread során túl sokat kell fizetni a tranche-ért, tehát az összes fizetendő prémium akkor fair, ha upfront fizetése helyett kapunk valamekkora összeget. Ez a gyakorlatban is megfigyelhető – mivel adott tranche-hez minden lejáratra azonos running spread tartozik, a piacon létezik negatív upfronttal bíró tranche.



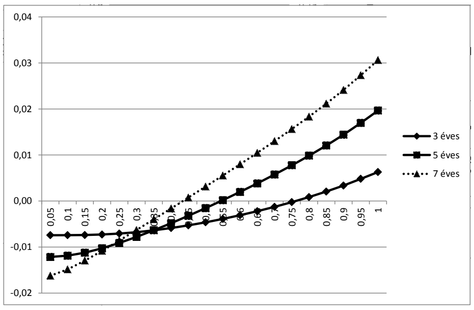
Equity tranche-ek prémiuma



Mezzanine tranche-ek prémiuma

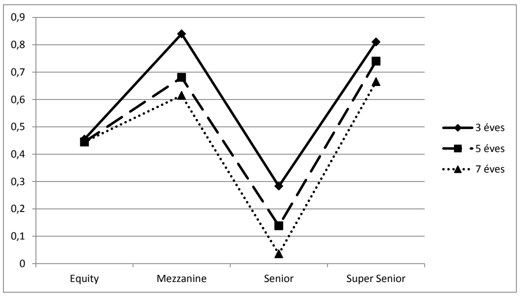


Senior tranche-ek prémiuma



Super Senior tranche-ek prémiuma

Az egyfaktoros Gauss kopula egyik legnagyobb hibája, hogy különböző tranche-ekre visszaszámolt korreláció nem egyezik. Ez persze ellentmond minden racionális feltevésnek, hiszen az, hogy melyik tranche-et árazzuk, nem befolyásolhatja a korrelációt, az a CDS-ek sajátja, attól függetlenül, hogy épül-e rájuk pénzügyi termék, vagy sem. Ezt a jelenséget mutatja az alábbi ábra, ahol a tranche-ek függvényében ábrázolom azt a korrelációt, amellyel az árazó formula az adatsor-beli értéket adja.



A korrelációmosoly

4. Kiterjesztés bonyolultabb korrelációs struktúrára

Ahogy láttuk, az egyfaktoros Gauss kopula legnagyobb hibája a különböző implicit korrelációk megjelenése. Ebben a fejezetben ezért olyan modelleket vizsgálunk, melyek a korrelációkra próbálnak olyan struktúrát találni, amely minden tranche-re fennáll, tehát valamilyen értelemben minimalizálja a modellből kapott árak és a valós árak eltéréseit ugyanazon korreláció-struktúra. A valós adatokra való kalibrálás során négyzetesen legkisebb eltérést keresünk.

Arról van tehát szó, hogy az előző fejezetben már bevezetett ξ_i állapotváltozók közötti korrelációs mátrix egy bonyolultabb összefüggési rendszert tükröz, nem írható fel egyetlen korrelációs elemmel. Felmerül a Monte-Carlo szimuláció lehetősége, hiszen adott korreláció mátrixra Cholesky-dekompozíció segítségével az állapotváltozók generálhatóak, és így viselkedésük modellezhető. Ezzel a megközelítéssel az a probléma, hogy a kellő pontossághoz nagyon sok szimulációt kell végezni, és a számításigény túl nagy – mivel 125 állapotváltozó van, minden szimulációt 125-szörösen kell futtatni, miközben léteznek olyan modellek, melyek jó közelítést adnak ugyanerre a problémára, kisebb számításigénnyel.

4.1. A sztochasztikus korreláció

Az első gondolat, hogy a korrelációkat ne konstansnak feltételezzük - sztochasztikus korrelációval modellezzünk. Ennek a modellnek egyik nagy erőssége, hogy valamilyen szinten képes kezelni a korreláció nem konstans voltát. Az állapotváltozók továbbra is egy faktortól függenek, ezért az egyszerűsítésért kárpótol bennünket, hogy a feltételes csődvalószínűségeket könnyen, a számításigény csekély növekedésével tudjuk számítani, és a feltételes csődvalószínűségek kiszámítása után a modell ugyanúgy áraz, mint az előző fejezetben az egyfaktoros Gauss esetben árazó formula.

4.1.1. Két állapotú sztochasztikus korreláció

A legegyszerűbb esete a sztochasztikus korrelációnak Burtschell, Gregory, és Laurent [5] alapján az, amikor a korreláció két értéket vehet fel. Legyen most a ξ_i háttérváltozó a ρ_1^2 és ρ_2^2 korrelációktól függő, úgy, hogy q valószínűséggel ρ_1, és $1-q$ valószínűséggel ρ_2 érvényes, és $0 \le \rho_2 \le \rho_1 \le 1$, és $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1$. Azaz

$$
\begin{aligned}
\xi_i &= B_i \cdot \left(\rho_1 \cdot M + \sqrt{1-\rho_1^2} \cdot \eta_i \right) + (1-B_i) \cdot \left(\rho_2 \cdot M + \sqrt{1-\rho_2^2} \cdot \eta_i \right) \\
&= (B_i \rho_1 + (1-B_i)\rho_2) \cdot M + \sqrt{1-(B_i\rho_1 + (1-B_i)\rho_2)^2} \cdot \eta_i,
\end{aligned} \tag{4.1.1}
$$

ahol M és η_i a korábbi modellhez hasonlóan standard normális, páronként független eloszlású valószínűségi változó, és B_i Bernoulli-eloszlású valószínűségi változó, vagyis

$$
B_i = \begin{cases} 1, & q \text{ valószínűséggel} \\ 0, & 1-q \text{ valószínűséggel.} \end{cases}
$$

Bayes-tétel segítségével könnyen igazolható, hogy ξ_i most is standard normális eloszlású lesz, mivel előáll két standard normális eloszlású változó eloszlásfüggvényének

q és $1-q$ súlyokkal vett lineáris kombinációjaként, hiszen

$$\begin{aligned}P(\xi_i \le x) &= P(\xi_i \le x \mid B_i = 1)\, P(B_i = 1) + P(\xi_i \le x \mid B_i = 0)\, P(B = 0) \\ &= P\left(\rho_1 M + \sqrt{1-\rho_1^2}\,\eta_i\right) q + P\left(\rho_2 M + \sqrt{1-\rho_2^2}\,\eta_i\right)(1-q).\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Látható, hogy ez a modell azt feltételezi, hogy kétféle korreláció figyelhető meg a piacon a referenciaportfólióbeli CDS-ek csődidejei között, mégpedig sztochasztikusan változó, hogy melyik CDS-párra melyik korreláció vonatkozik. Az M és η_i függetlensége miatt tehát ξ_i-k most is feltételesen független, standard normális eloszlásúak.

Így az M-re feltételes csődvalószínűségek a következő alakban állnak elő

$$p_i(t \mid M) = q\Phi\left(\frac{x_i(t) - \rho_1 M}{\sqrt{1-\rho_1^2}}\right) + (1-q)\Phi\left(\frac{x_i(t) - \rho_2 M}{\sqrt{1-\rho_2^2}}\right). \tag{4.1.3}$$

Ezek után az árazás menete ugyanaz, vagyis ez a megközelítés a feltételes csődvalószínűségek meghatározásában tér el az előző fejezetben ismertetett modelltől. Látható, hogy most három paramétert kell becsülni az árazáshoz. Kétféle korrelációt, és azok fellépési valószínűségét. Ez a modellt összetettebbé teszi, most nem lehet egyszerűen visszaszámítani a korrelációkat a tranche-árakból, és éppen ez az előnye is, hiszen így lehetővé válik egy olyan struktúra kialakítása, ami stabilabb a tranche-ek változtatásakor.

Vizsgáljuk most a paraméterek változtatásának hatását az árakra. Heurisztikusan fogalmazva, arra vagyunk kíváncsiak, hogy az összefüggőség mértékét mennyire, és milyen irányba befolyásolja az egyes paraméterek növelése, hiszen az összefüggőség nagyságának a tranche árakra való hatását az előző fejezetben ismertettük. Ehhez először egy összefüggőségi rendezést definiálunk.

Definíció.
Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, és legyen $\Delta_i^\epsilon f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \epsilon e_i) - f(\mathbf{x})$ differenciáloperátor úgy, hogy e_i az i-edik egységvektor, és $\epsilon > 0$. Ekkor azt mondjuk, hogy f *szupermoduláris*, ha $\Delta_i^\epsilon \Delta_j^\delta f(\mathbf{x}) \ge 0$, másképpen minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $1 \le i \le j \le n$, és $\epsilon, \delta > 0$-ra

$$\begin{aligned}&f(x_1, x_2, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) \\ &- f(x_1, x_2, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_n) + f(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge 0.\end{aligned}$$

Definíció.
Egy $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó *szupermoduláris értelemben kisebb* az $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ valószínűségi vektorváltozónál, ha $E\,(f(\mathbf{X})) \le E\,(f(\mathbf{Y}))$ minden olyan f szupermoduláris függvényre, amely esetén a várható értékek léteznek.

A szupermoduláris értelemben vett reláció kifejezi az összefüggőség intenzitását, vagyis szupermodulárisan kisebb valószínűségi vektorváltozó koordinátái között gyengébb az összefüggés.

Állítás.
Növekvő ρ_1, ρ_2, p esetén szupermoduláris értelemben nő a ξ_i állapotváltozókból álló valószínűségi vektorváltozó.

Bizonyítás.
A bizonyítás vázlatát közöljük, mivel a teljeskörű igazoláshoz további lemmák szükségesek, melyek bizonyításaikkal együtt megtalálhatóak Müller és Scarsini [20] munkájában.

Legyen $q \leq q'$, és legyenek $C_1, C_2, \ldots, C_n$ Bernoulli eloszlású változók p/p' paraméterrel, és $D_1, D_2, \ldots, D_n$ szintén Bernoulli eloszlásúak, q' paraméterrel. Ekkor $\min(C_i, D_i)$ is Bernoulli eloszlású q paraméterrel, hiszen

$$\min(C_i, D_i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } C_i = 1 \text{ és } D_i = 1 \Rightarrow q/q' \cdot q' = q \text{ valószínűséggel} \\ 0 & \text{különben } \Rightarrow 1 - q \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

Legyenek most az állapotváltozók a következőképp definiálva

$$\xi_i = \min(C_i, D_i)\left(\rho_1 \cdot M + \sqrt{1-\rho_1^2} \cdot \eta_i\right) + (1 - \min(C_i, D_i)) \cdot \left(\rho_2 \cdot M + \sqrt{1-\rho_2^2} \cdot \eta_i\right).$$

$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$ ekkor ρ_1, ρ_2, q paraméterű korrelációs struktúrával bír. Hasonlítsuk ezt össze

$$\xi_i' = D_i\left(\rho_1' \cdot M + \sqrt{1-\rho_1'^2} \cdot \eta_i\right) + (1 - D_i) \cdot \left(\rho_2' \cdot M + \sqrt{1-\rho_2'^2} \cdot \eta_i\right)$$

valószínűségi változókból alkotott $\boldsymbol{\xi'}$ vektorváltozóval úgy, hogy $\rho_1 \leq \rho_1' \leq 1$, és $\rho_2 \leq \rho_2' \leq 1$. Világos, hogy $\boldsymbol{\xi'}$ korrelációs struktúrája ρ_1', ρ_2', q' paraméterekkel bír, és a (4.1.2) levezetéshez hasonlóan belátható, hogy ξ_i-k és ξ_i'-k normális eloszlásúak. Az (4.1.1) egyenlethez hasonlóan ekkor felírható, hogy

$$\begin{aligned} \xi_i &= \hat{\rho}M + \sqrt{1-\hat{\rho}^2}\eta_i, \text{ és} \\ \xi_i' &= \tilde{\rho}M + \sqrt{1-\tilde{\rho}^2}\eta_i \end{aligned}$$

ahol a sztochasztikus korreláció felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \rho_1 \min(C_i, D_i) + \rho_2(1 - \min(C_i, D_i)) \\ \tilde{\rho} &= \rho_1' D_i + \rho_2'(1 - D_i). \end{aligned}$$

A feltételekből egyszerűen látszik, hogy $\hat{\rho} \leq \tilde{\rho}$, és Müller és Scarsini [20] többdimenziós normális eloszlásokra vonatkozó lemmái alapján igaz az, hogy ekkor $\boldsymbol{\xi}$ szupermoduláris értelemben kisebb, mint $\boldsymbol{\xi'}$. Azaz kaptuk, hogy a két állapotú sztochasztikus modellben a három paraméter közül bármelyik változtatása növeli a szupermoduláris értelemben vett függőséget az állapotváltozók között.

Vagyis a tételből azt kaptuk, hogy bármelyik paramétert növeljük, az összefüggőség növekedésének következtében az Equity tranche-ért fizetendő prémiumok csökkennek, a Super Senioré pedig nőnek.

4.1.2. Három állapotú sztochasztikus korreláció

A két állapotú korreláció kézenfekvő kiterjesztése, hogy – bizonyos megszorításokkal – megengedjük, hogy három értéket vegyen fel a korreláció, ezt a megközelítést Burtschell, Gregory, és Laurent [6] és Mounfield [19] alapján tárgyaljuk. Ebben a modellben az N db állapotváltozó értékei

$$\xi_i = ((1-B')(1-B_i)\rho + B')M + \left((1-B')\left((1-B_i)\sqrt{1-\rho^2} + B_i\right)\right)\eta_i,$$

ahol M most is a közös faktor, η_i az egyedi, vállalatspecifikus faktor, függetlenek és standard normális eloszlásúak, és $B', B_1, B_2, \ldots, B_N$ ezektől, és egymástól is független Bernoulli eloszlású valószínűségi változók, $P(B_i = 1) = q$, és $P(B' = 1) = q'$, $\rho \in [0,1]$ pedig a korreláció háttérváltozója. Így

$$\xi_i = \begin{cases} M & qq' + (1-q)q' = q' \text{ valószínűséggel} \\ \eta_i, & q(1-q') \text{ valószínűséggel} \\ \rho M + \sqrt{1-\rho^2}\eta_i, & (1-q)(1-q') \text{ valószínűséggel} \end{cases}, \tag{4.1.4}$$

ez úgy is felfogható az egyfaktoros Gauss modell mentén értelmezve a felírást, hogy q' valószínűséggel a korreláció 1, és így az η_i nem szerepel a felírásban, $q(1-q')$ valószínűséggel a korreláció 0, ekkor az M piaci faktor nem szerepel a felírásban, és $(1-q)(1-q')$ valószínűséggel a korreláció ρ^2, és ekkor a már látott módon áll össze az állapotváltozó M-ből és η_i-ből. Az is látszik a felírásból, hogy ξ_i az eddigi modellekhez hasonlóan standard normális eloszlást követ.

Másképpen írva, a sztochasztikus, három állapotú korrelációs paraméter ebben az esetben

$$\hat{\rho}_i = (1-B')(1-B_i)\rho + B'.$$

Valóban,

$$\xi_i = \hat{\rho}_i M + \sqrt{1-\hat{\rho}_i{}^2}\eta_i,$$

hiszen egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy

$$(1-B')\left((1-B_i)\sqrt{1-\rho^2} + B_i\right) = \sqrt{1-\hat{\rho}_i{}^2}.$$

Az árazáshoz meg kell határoznunk a feltételes csődvalószínűségeket, ami ebben az esetben is könnyen adódik. Az M-re feltételesen független csődvalószínűségeket kapunk:

$$\begin{aligned} p_i(t \mid M) &= P(\tau_i \leq t|M) \\ &= P(\xi_i \leq x_i(t)|M) \\ &= (1-q')\left((1-q)\Phi\left(\frac{x_i(t)-\rho M}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + q p_i(t)\right) + q'\chi_{\{M \leq x_i(t)\}}. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

A küszöbérték most is $x_i(t)$, $p_i(t)$ pedig az i-edik CDS t-ig való becsődölésének valószínűsége. A feltételes csődvalószínűségek függetlensége Bayes tétellel a két állapotú sztochasztikus korrelációhoz hasonlóan látható be, a felírt egyenlőség pedig (4.1.4)-ból adódik a következő megfontolásokból:

- Egyrészt $P(M \leq x_i(t)|M) = \chi_{\{M \leq x_i(t)\}}$, és annak a valószínűsége, hogy $\xi_i = M$, éppen q'.

- Másrészt $P(\eta_i \leq x_i(t)|M) = \Phi(x_i(t)) = p_i(t)$, hiszen η_i standard normális eloszlású. Annak a valószínűsége, hogy $\xi_i = \eta_i$, éppen $q(1-q')$.

- Végül $P\left(\rho M + \sqrt{1-\rho^2}\eta_i \leq x_i(t) \middle| M\right) = \Phi\left(\frac{x_i(t)-\rho M}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$, ahogyan azt már az egyfaktoros esetben is láttuk, és annak a valószínűsége, hogy $\xi_i = \rho M + \sqrt{1-\rho^2}\eta_i$, éppen $(1-q')(1-q)$.

Az árazás ekkor már könnyen adódik – ahogy ez előző modelleknél is, a feltételes csődvalószínűség normális eloszlás sűrűségfüggvényével vett szorzatának integrálásával kapjuk a feltétel nélküli csődvalószínűségeket, amiből azután számolni tudjuk a tranche-ek várható veszteségeit. Fontos megjegyezni, hogy ebben az esetben is három paraméterrel árazunk, ρ, q, q'-vel, ám most a korrelációnak 3 potenciális értéke van, $1, 0$, és ρ^2, és a paraméterválasztással ezek valószínűségeit tudjuk megadni. Speciális paraméterválasztások esetén megkapjuk a két állapotú esetet:

$$\begin{aligned} &\text{ha } q = 0, \text{ akkor a modell megegyezik a } \rho_1 := 1, \rho_2 := \rho, q =: q' \text{ esettel} \\ &\text{ha } q = 1, \text{ akkor a modell megegyezik a } \rho_1 := 1, \rho_2 := 0, q =: q' \text{ esettel} \\ &\text{ha } q' = 0, \text{ akkor a modell megegyezik a } \rho_1 := 0, \rho_2 := \rho, q =: q \text{ esettel} \\ &\text{ha } q' = 1, \text{ akkor a modell megegyezik a } \rho_1 := 1, q =: 1 \text{ esettel.} \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Az állapotváltozókból alkotott vektorváltozók között ugyanúgy felállíthatunk rendezést, ahogy a két állapotú sztochasztikus estben. Mivel a sztochasztikus korreláció most $\hat{\rho} = (1-B')(1-B_i)\rho + B_i$ alakú, a növekvő függőséghez (szupermoduláris értelemben), és így a csökkenő Equity prémiumokhoz, és növekvő Super Senior prémiumokhoz a ρ és q' növelése, vagy q csökkenése vezet. Ennek bizonyítása az előző alfejezetben leírttal analóg, és megtalálható Burtschell, Gregory, Laurent [6] cikkében.

4.1.3. Általános eset

A két-, és három állapotú sztochasztikus korrelációs modellek általánosítása [6] alapján úgy zajlik, hogy minden ξ_i háttérváltozó most egy – a $[0,1]$ intervallumon értékeket felvevő, M közös, és η_i egyedi, független standard normális eloszlású faktoroktól független – $\hat{\rho}_i$ korrelációt reprezentáló valószínűségi változótól függ. Azaz

$$\xi_i = \hat{\rho}_i M + \sqrt{1-\hat{\rho}_i^{\,2}}\eta_i$$

Adott ρ_i-re ξ_i most is standard normális eloszlást követ, és így az előzőekhez hasonlóan belátható, hogy ξ_i standard normális eloszlású. A fenti, két állapottal számoló példa valóban az általános modell egy speciális esete, hiszen

$$\hat{\rho}_i = B_i\rho_1 + (1-B_i)\rho_2,$$

a három állapotot felvevő korreláció esetén pedig, ahogy a vonatkozó alfejezetben is említettük,

$$\hat{\rho}_i = (1 - B')(1 - B_i)\rho + B'.$$

Általános esetben az M piaci faktorra vett feltételes csődvalószínűségek F eloszlással bíró $\hat{\rho}$ sztochasztikus korreláció-paraméter esetén függetlenek, és a következő alakban írhatóak.

$$\begin{aligned}
p_i(t|M) &= P(\xi_i \leq x_i(t)|M) \\
&= P\left(\hat{\rho}_i M + \sqrt{1 - \hat{\rho}_i{}^2}\eta_i \leq x_i(t) \;\middle|\; M\right) \\
&= P\left(\eta_i \leq \frac{x_i(t) - \hat{\rho}}{M}\sqrt{1 - \hat{\rho}^2} \;\middle|\; M\right) \\
&= \int_0^1 \Phi\left(\frac{x_i(t) - rM}{\sqrt{1 - r^2}}\right) dF(r).
\end{aligned}$$

Két általános sztochasztikus korreláció alapú modellt összefüggőségének összehasonlításához legyenek $\boldsymbol{\xi}$ és $\boldsymbol{\xi'}$ olyanok, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, N$-re

$$\begin{aligned}
\xi_i &= \hat{\rho}_i M + \sqrt{1 - \hat{\rho}_i{}^2}\eta_i, \text{ és} \\
\xi'_i &= \tilde{\rho}_i M + \sqrt{1 - \tilde{\rho}_i{}^2}\eta_i,
\end{aligned}$$

és legyen $\hat{\rho}_i$-k eloszlásfüggvénye F, $\tilde{\rho}_i$-k eloszlásfüggvénye G, és legyen minden $u \in [0, 1]$ esetén $G(u) \leq F(u)$, vagyis minden i-re $\hat{\rho}_i \leq \tilde{\rho}_i$ elsőrendű sztochasztikus értelemben[3]. Ekkor léteznek $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N$ nem negatív, M-től és η_i-ktől független valószínűségi változók úgy, hogy eloszlásban $\tilde{\rho}_i = \hat{\rho}_i + \epsilon_i$, ha például $\epsilon_i = G^{-1}(F(\hat{\rho}_i)) - \hat{\rho}_i$, hiszen egy valószínűségi változót az eloszlásfüggvényébe írva $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változót kapunk. Ekkor $\boldsymbol{\xi}$ és $\boldsymbol{\xi'}$ N dimenziós normális eloszlásúak $\hat{\rho}_i$ és $\hat{\rho}_i + \epsilon_i$ sztochasztikus korrelációkkal. Így, a már idézett Müller, Scarsini [20] alapján $\boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\xi'}$ szupermoduláris értelemben, vagyis általánosan is kimondható, hogy eloszlásban nagyobb sztochasztikus korrelációhoz tartozó állapotváltozók között erősebb az összefüggés.

4.1.4. Az adatokon végzett számítások

Sztochasztikus korrelációs modellt a fenti két alfejezet alapján illesztettünk. Az árazás és kalibrálás menete mindkét esetben hasonló volt.

Az egyfaktoros Gauss kopulával való árazás során ismertetett módon árazunk, azzal a különbséggel, hogy a piaci faktorra vett feltételes csődvalószínűségeket máshogyan számítjuk. Ezeket a feltételes csődvalószínűségeket aztán ugyanúgy numerikusan integráljuk a normális eloszlás szerint, és az árazási formula nem változik.

Tehát ezekben a modellekben nem csak ρ a paraméterünk, hanem kétállapotos esetben ρ_q, ρ_2, és q, háromállapotos esetben pedig q, q', és ρ. Vagyis mindkét modellben három paraméterünk van, és a feltételes csődvalószínűségeket (4.1.3) és (4.1.5) alapján tudjuk számítani, utóbbihoz szükséges egy bináris változó bevezetése, ami a $\chi_{\{M \leq x_i(t)\}}$-et reprezentálja.

[3] X valószínűségi változó elsőrendű sztochasztikus értelemben dominálja Y valószínűségi változót, ha minden u-ra $P(X > u) \geq P(Y > u)$

A paraméterbecslés úgy zajlott, hogy először tizedesjegyes változtatásokkal vizsgáltuk a paramétereket, majd miután látszott, hogy mely paraméterek mentén illeszkedik jól a modell, Newton-Raphson iteráció módosított változatát, a szelő módszert használtuk, melynek lényege, hogy az analitikus derivált helyett numerikus deriválttal számol[4]. Mivel mindkét modellben három paramétert kell meghatároznunk, kettőt rögzítünk, és a harmadikat keressük. Az optimalizálandó függvény a 12 tranche ár (4 tranche, 3 lejárat) valós és modell alapján számított upfront díjak eltéréseinek négyzetösszege. Az előzetes, rácspontokban való számításokra azért van szükség, mert a szelő módszer lassan konvergál, és így számításigény csökkentése miatt célszerű egy előzetes képet kapni a hibafüggvény viselkedéséről.

Mindkét kalibráció során az inputot a korrelációnak, tehát ρ_1^2-nek, és ρ_2^2-nek választottuk, hogy a valós korrelációról pontosabb képet kapjunk.

Először a két állapotú esetben kalibrálunk. Ehhez három paramétert kell becsülni, ám a formula ρ_1-re és ρ_2-re szimmetrikus olyan értelemben, hogy a (ρ_1, ρ_2, q) paraméterhármas ugyanazt az árat adja, mint a $(\rho_2, \rho_1, (1-q))$ paraméterhármas, valamint azonos ρ_1 és ρ_2 esetén az egyfaktoros gaussi modellel számított árat kapjuk $\rho = \rho_1$ esetre.

A függelékben található táblázat mutatja a rácspontokban számolt négyzetes eltérést, a korrelációk, és a valószínűség függvényében. Az eredmények alapján 10 lépéses iterációt indítottunk q-ra onnan, ahol $0,011$-nél kisebb hibát kaptunk. A kezdeti értéket a $q_0 = q - 0.05$, a második értéket pedig $q' = q_0 + 0,01$-nek választottuk az iteráció során. Ezen iterációk alapján a legjobb paraméterválasztás a $\rho_1^2 = 0,2, \rho_2^2 = 0,8,\ q = 0,45$, ebben az esetben a hiba $0,0065$.

A három állapotú sztochasztikus korreláció modellezésekor figyelembe vettük, hogy a két állapotú esetet visszakaphatjuk bizonyos esetekben – ha ugyanis $q' = 0$, akkor az árak megegyeznek a $(\rho_1, \rho_2, q) = (0, \rho, q)$ esettel a két állapotú modellben, valamint vizsgáltuk a (4.1.6)-ben látott $q = 1$ és $q' = 1$ elfajuló eseteket. Ezért a rácspontok felvételénél a $q' = 0$ eseteket nem vizsgáltuk. A kapott hibákat mutatja a függelékbeli táblázat, iterációt most is a $0,11$-nél kisebb hibákból indítottunk, az előző modellhez hasonlóan, ρ^2-re. Az eredményeket a vonatkozó táblázat mutatja, a legjobb modell a $q' = 0,3, q = 0,2, \rho^2 = 0,45$ esetén adódik, a hiba ekkor $0,005$.

Vagyis a három állapottal rendelkező sztochasztikus korrelációs modell 0,0015-tel kisebb hibát ad. Ez nem jelentős eltérés, aminek oka, hogy habár itt eggyel több állapotot vehet fel a korreláció, ezt nem szabadon választott három érték közül teheti, csak a 0, 1 vagy a paraméterként megjelenő ρ-ból adódó ρ^2 értéket veheti fel.

Összevetve az egyfaktoros gaussi modellel az eredményt – ahol a hiba legjobb esetben is $0,02$-t, 0,455 implicit korreláció esetén – azt kapjuk, hogy sztochasztikus korrelációval egy nagyságrenddel kisebb hibák adódtak. Az egyfaktoros gaussi modell hibáira vonatkozó táblázat a függelékben található, és azt mutatja, hogy az egyes tranche-ekre vonatkozó implicit korrelációkkal számolva mekkora a 12 tranche valós upfrontoktól való eltérés-négyzetösszege.

[4]Az érintő módszer [2] alapján $f(x)$ függvény zérushelyét a két kezdőérték mellett a következő iterációval számolja: $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{Q(x_{n-2}, x_{n-1})}$, ahol $Q(x_{n-2}, x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}$

4.2. Többfaktoros modellezés

A modell egy további általánosítása, amikor több faktortól függenek az állapotváltozók. Ezt a megközelítést Glasserman, Suchintabandid [11] cikke alapján tárgyaljuk. Ahogy az egyfaktoros Gauss kopula tárgyalásánál láttuk, az árazás lényegi része úgy is felfogható, hogy a célunk minden t-re a legfelső tranche-ek (egy bizonyos A-tól egészen 100%-ig tartó sáv) várható veszteségének számítása $(E(L_{pf}(t) - A)^+)$, hiszen minden további tranche- várható vesztesége ezen felső tranche-ek különbségeként adódik. Az alábbi modell fő erőssége, hogy hatványsorokkal való közelítéssel számítja a várható veszteséget, ami nagyban gyorsítja a számításokat, amelyekhez több faktor esetén többdimenziós numerikus integrál volna szükséges.

Legyenek most a piaci faktorok $M_1, M_2, \ldots, M_d$, és minden állapotváltozó ettől a d db közös faktortól és η_i egyedi faktortól függjön oly módon, hogy

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{21} \\ \vdots \\ \rho_{N1} \end{pmatrix} M_1 + \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ \rho_{22} \\ \vdots \\ \rho_{N2} \end{pmatrix} M_2 + \cdots + \begin{pmatrix} \rho_{1d} \\ \rho_{2d} \\ \vdots \\ \rho_{Nd} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_1\eta_1 \\ \tau_2\eta_2 \\ \vdots \\ \tau_N\eta_N \end{pmatrix}$$

ahol a közös és a piaci faktorok is független, standard normális eloszlásúak, és $\rho_{i1}^2 + \rho_{i2}^2 + \cdots + \rho_{id}^2 + \tau_i^2 = 1$ minden i-re, azaz $\tau_i = \sqrt{1 - \rho_{i1}^2 + \rho_{i2}^2 + \cdots + \rho_{id}^2}$. Minden i-re ekkor ξ_i standard normális eloszlású, ahogy már az előző modellekben is láttuk, és az i-edik és j-edik állapotváltozó közötti korreláció, kihasználva a faktorok függetlenségét

$$\begin{aligned} \mathrm{Corr}(\xi_i, \xi_j) &= E(\xi_i\xi_j) \\ &= \rho_{i1}\rho_{j1}E(M_1^2) + \rho_{i2}\rho_{j2}E(M_2^2) + \cdots + \rho_{id}\rho_{jd}E(M_d^2) \\ &= \rho_{i1}\rho_{j1} + \rho_{i2}\rho_{j2} + \cdots + \rho_{i2}\rho_{j2} \end{aligned}$$

Vagyis az $\mathbf{R} = [\rho_{ij}]_{N\times d}$ mátrix egyértelműen meghatározz $\mathbf{C} = [\hat{\rho}_{ij}]_{N\times N}$ korrelációmátrixot, hiszen $\hat{\rho}_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \rho_{ik}\rho_{jk}$. Látható, hogy a modell jóval összetettebb, a korreláció-struktúra kezelése ugrásszerűen nehezedett, hiszen egy olyan alakú mátrix helyett, ahol minden elem ρ^2, és csak a főátlóban vannak egyesek, egy bonyolultabb felépítésű mátrix is előállhat a paraméterek megválasztásától függően.

Az egyfaktoros modell alapján úgy kellene eljárnunk, hogy vesszük minden $M_1, M_2, \ldots, M_d$ faktorra a t-ig vett csőd bekövetkezésének valószínűségét, és ezt minden faktor szerint kiintegráljuk numerikusan. Mivel már az egyfaktoros modell esetén is az integrálás volt az implementálás leginkább számításigényes része, ezért kézenfekvő a más módon való megközelítések keresése.

A [11] alapján állított modell megkülönböztet gyenge, és erős korrelációt az állapotváltozók között oly módon, hogy a gyenge korreláció-struktúra modelljét módosítja arra az esetre, ha szorosabb összefüggést tételezünk fel, vagyis nagyobb ρ-kat. Dolgozatomban ezért ezen logika mentén haladva először a gyenge összefüggőségi struktúrát vizsgálom.

4.2.1. Modellállítás gyenge korreláció esetén

A célunk most a felső tranche-ek várható veszteségének felírása a független esetben kiszámított várható veszteségek segítségével, hiszen független esetben a számításigény alacsony, mivel nem kell numerikusan integrálni. Mivel most csak egy adott t-ig vett periódusra vizsgáljuk a várható veszteséget, így az időtől függést most nem jelöljük, a számítások minden t-re hasonlóak. Első lépésben parametrizáljuk az állapotváltozók közti összefüggést leíró $\mathbf{C}$ korrelációs mátrixot $a \in [0,1]$ paraméter-segítségével a következőképpen. Legyen minden a-ra

$$\mathbf{C}_a = \begin{pmatrix} 1 & a\hat{\rho}_{12} & a\hat{\rho}_{13} & \dots & a\hat{\rho}_{1N} \\ a\hat{\rho}_{21} & 1 & a\hat{\rho}_{23} & \dots & a\hat{\rho}_{2N} \\ a\hat{\rho}_{31} & a\hat{\rho}_{32} & 1 & \dots & a\hat{\rho}_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a\hat{\rho}_{N1} & a\hat{\rho}_{N2} & a\hat{\rho}_{N3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

A fenti modell $a = 1$ alakban áll elő, míg a független eset $a = 0$ alakban. Tehát amikor ki akarjuk számítani várható veszteséget, a független esetből kiindulva úgy haladunk a kívánt korrelációk melletti eredmény felírásához, hogy a-t a $[0,1]$-on növeljük. Az egyes a paraméter-értékekhez tartozó várható veszteséget jelöljük $E_a(L_{pf} - A)^+$-val.

A legfontosabb lépés, hogy belássuk, hogy ez a várható érték jól közelíthető egyszerűen előállítható hatványsorral. A hatványsor az a paraméter és δ_i együtthatók segítségével áll elő, ahol a δ_i konstansok a független esetből kiszámított várható veszteségből kerülnek kifejezésre. Vagyis azt állítjuk, hogy

$$E_a(L_{pf} - A)^+ = \delta_0 + \delta_1 a + \delta_2 \frac{a^2}{2} + \dots . \tag{4.2.1}$$

Térjünk most rá δ_i együtthatók meghatározására. A következőkben megmutatjuk, hogy δ_i közelíthető véges összeggel, vagyis implementálás szempontjából könnyen számítható. A számítás menete a következő. Legyen $H_k(x)$ az $k-$ad fokú Hermite-polinom, vagyis

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= x \\ H_k(x) &= xH_{k-1}(x) - (k-1)H_{k-2}(x), \text{ ha } k \geq 1, \end{aligned}$$

és legyen minden $k \geq 1$-ra meghatározva

$$G_k(x) = f(x)H_{k-1}(x),$$

ahol $f(x)$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét jelöli. A Hermite-polinomok és ezen keresztül a fent definiált $G_k(x)$ polinomok használatának ötlete Kibble [15] számításaiból adódik, az ő eredményei alapján ugyanis igaz, hogy ha $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{C}_a)$, ahol $\mathbf{C}_a$ a fenti korrelációs mátrix, akkor

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \dots, X_N > x_N) = b_0 + b_1 a + b_2 \frac{a^2}{2!} + \dots,$$

és b_i-k meghatározhatóak az alábbi módon

$$b_i = \sum_{\substack{1\le k_1<l_1\le N\\ 1\le k_2<l_2\le N\\ \vdots\\ 1\le k_i<l_i\le N}} \hat\rho_{k_1l_1}\cdot\hat\rho_{k_2l_2}\cdots\hat\rho_{k_il_i}G_{h_1}(x_1)G_{h_2}(x_2)\dots G_{h_N}(x_N),$$

Ahol h_j 1 és N közé eső szám, és azt mutatja, hogy j hányszor fordul elő $k_1, l_1, k_2, l_2, \dots, k_n, l_n$ között. Sok név esetén, (125 a kapott adatokkal dolgozva) nagyon számításigényes a hatványsorbeli együtthatók ilyen módon való számolása, ezért – továbbra is Kibble eredményeit használva – a számításigény csökkentését szem előtt tartva keressük a δ_i együtthatókat.

Legyen a d faktoros modell esetén $D = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, d, -d\}$, és az ebből képzett n-szeres Descartes szorzat legyen $D^n = \{(j_1, j_2, \dots, j_n) : j_1, j_2, \dots, j_n \in D\}$, $n = 0$ esetén D^0 az üres halmaz.

Rendeljünk továbbá minden $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$-hez egy $v_\mathbf{j}(i, k)$ segédváltozót a következő rekurzióval. Legyen $\mathbf{j}'$ az a $\mathbf{j}$−ből kapott vektor, amit j_n utolsó elem eltörlésével kapunk, és legyen s konstans. Legyen továbbá $\rho(i, j) = \rho_{ij}$, $\rho(i, -j) = -\rho_{ij}$, és $\rho(i, 0) = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&v_j(i,0) = 1\\
&v_j(i,1) = s\rho_{ij}\\
&v_j(i,k) = 0, \text{ ha } k \neq 0, 1.\\
&v_\mathbf{j}(i,k) = v_{\mathbf{j}'}(i,k) + s\rho(i, j_n)v_{\mathbf{j}'}(i, k-1), \text{ ha } 1 \le k \le n.\\
&v_\mathbf{j}(i,k) = 0, \text{ ha } k < 0 \text{ vagy } n < k.
\end{aligned}$$

Látható, hogy $s \to 0$ esetén $v_\mathbf{j}(i, k) \to 0$. Ezen segédváltozókkal definiáljuk minden $\mathbf{j}$-re a t-ig bekövetkezett csődvalószínűségek (p_i) közelítését x_i küszöbértékek segítségével $(i = 1, 2, \dots, N)$.

$$p_i^{(\mathbf{j})} = p_i + \sum_{k=1}^{n} G_k(x_i)v_\mathbf{j}(i,k). \tag{4.2.2}$$

$J = \emptyset$ esetén $p_i^{(\mathbf{j})} = p_i$ minden i-re. A fent említett konvergencia miatt kellően kicsi s-ek esetén $p_i^{(\mathbf{j})} \to p_i$. A δ_i együtthatók közelítéséhez vezessük be $w_\mathbf{j}$ súlyokat, minden $\mathbf{j} \in D^n$-ra

$$w_\mathbf{j} = \frac{(-2d)^l}{(2s^2)^n},$$

ahol l a $\mathbf{j}$-ben szereplő 0-k száma, és jelöljük a független állapotváltozók esetén $p_i^{(\mathbf{j})}$-k segítségével kiszámított várható veszteséget $\hat E_\mathbf{j}(L_{pf} - A)^+$-val. Ekkor $s \to 0$ esetén teljesül, hogy

$$\sum_{\mathbf{j}\in D^n} w_\mathbf{j}\hat E_\mathbf{j}(L_{pf} - A)^+ \to \delta_n. \tag{4.2.3}$$

Ez azt jelenti, hogy $w_\mathbf{j}$ súlyok és független csődesemények esetén bekövetkező várható veszteségek kiszámolásával kellően jól tudjuk azokat a δ_i súlyokat közelíteni, melyek a várható veszteség hatványsorában együtthatóként szerepeltek az (4.2.1) egyenletben. Megjegyezzük, hogy δ_i-k nem csak határértékként határozhatóak meg, explicit kifejezhetőek, lásd Glasserman, Suchintabandid [11], ám implementálási szempontból célravezetőbb a határértékként való megközelítést használni.

A közelítés pontossága természetesen függ a hatványsor kiszámolt tagjainak számától, a számítást n-edrendben végezni azt jelenti, hogy $n+1$ db δ_i-t kell kiszámítanunk $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$. Egy konkrét i-re δ_i meghatározásához a fenti meggondolások alapján ki kellene számolnunk minden $0, 1, 2, \ldots, n$ elemű $\mathbf{j}$ vektorra $\hat{E}_{\mathbf{j}}(L_{pf} - A)^+$-t. Elég azonban az n eleműekre, azaz ahol $\mathbf{j} \in D^n$, hiszen $\mathbf{j}' = (j_1, j_2, \ldots, j_{l-1}) \in D^{l-1}$ és $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_{l-1}, 0) \in D^l$ esetén, kihasználva, hogy $\rho(i, j_l) = \rho(i, 0) = 0$, kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
p_i^{(\mathbf{j})} &= p_i + \sum_{k=1}^{n} G_k(x_i) v_{\mathbf{j}}(i,k) \\
&= p_i + \sum_{k=1}^{n} G_k(x_i) \left(v_{\mathbf{j}'}(i,k) + s\rho(i, j_l) v_{\mathbf{j}'}(i, k-1)\right) \\
&= p_i + \sum_{k=1}^{n} G_k(x_i) v_{\mathbf{j}'}(i,k) \\
&= p_i^{(\mathbf{j}')}.
\end{aligned}
$$

A másik, a számításokat lényegesen leegyszerűsítő megfigyelés, hogy nem kell minden D^n-beli $\mathbf{j}$ vektorra elvégezni a (4.2.3)-beli összegzést, elegendő a sorrendtől eltekintve különböző $\mathbf{j}$-kre. Vagyis elég D^n-nek egy olyan Δ_n részhalmazából választani vektorokat, ahol monoton rendezve vannak az elemek: $\Delta_n = \{(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in D^n : j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_n\}$. Ez azt jelenti, hogy a (4.2.3)-beli összegzéshez $|D^n| = (2d+1)^n$ számítás helyett elegendő $|\Delta_n| = \binom{2d+1+n-1}{n} = \binom{2d+n}{n}$ számítást végezni (Δ_n elemszáma ismétléses kombináció segítségével számítható). Ez a megfigyelés azért igaz, mert a $p_i^{(\mathbf{j})}$-k kiszámítása a $\mathbf{j}$ elemeinek sorrendjére nézve invariáns. Vizsgáljuk a szimmetriát a következő egyszerű esetben. Legyen $n = 3$, $\mathbf{j_1} = (1, 3, 2)$ és $\mathbf{j_2} = (2, 3, 1)$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
v_{(1,3,2)}(i,1) &= v_{(1,3)}(i,1) + s\rho(i,2) v_{(1,3)}(i,0) \\
&= v_{(1)}(i,1) + s\rho(i,3) v_{(1)}(i,0) + s\rho(i,2) \\
&= s\rho_{i1} + s\rho_{i3} + s\rho_{i2} \\
v_{(1,3,2)}(i,2) &= v_{(1,3)}(i,2) + s\rho(i,2) v_{(1,3)}(i,1) \\
&= v_{(1)}(i,2) + s\rho(i,3) v_{(1)}(i,1) \\
&\quad + s\rho(i,2) \left(v_{(1)}(i,1) + s\rho(i,3) v_{(1)}(i,0)\right) \\
&= s\rho_{i3} s\rho_{i1} + s\rho_{i2} s\rho_{i1} + s\rho_{i2} s\rho_{i3} \\
v_{(1,3,2)}(i,3) &= v_{(1,3)}(i,3) + s\rho(i,2) v_{(1,3)}(i,2) \\
&= v_{(1)}(i,3) + s\rho(i,3) v_{(1)}(i,2) \\
&\quad + s\rho(i,2) \left(v_{(1)}(i,2) + s\rho(i,3) v_{(1)}(i,1)\right) \\
&= s\rho_{i2} s\rho_{i3} s\rho_{i1}
\end{aligned}
$$

Vessük ezt össze $v_{\mathbf{j_2}}(i,k)$-kal.

$$\begin{aligned}
v_{(2,3,1)}(i,1) &= v_{(2,3)}(i,1) + s\rho(i,1)v_{(2,3)}(i,0) \\
&= v_{(2)}(i,1) + s\rho(i,3)v_{(2)}(i,0) + s\rho(i,1) \\
&= s\rho_{i2} + s\rho_{i3} + s\rho_{i1} \\
v_{(2,3,1)}(i,2) &= v_{(2,3)}(i,2) + s\rho(i,1)v_{(2,3)}(i,1) \\
&= v_{(2)}(i,2) + s\rho(i,3)v_{(2)}(i,1) \\
&\quad + s\rho(i,1)\left(v_{(2)}(i,1) + s\rho(i,3)v_{(2)}(i,0)\right) \\
&= s\rho_{i3}s\rho_{i2} + s\rho_{i1}s\rho_{i2} + s\rho_{i1}s\rho_{i3} \\
v_{(2,3,1)}(i,3) &= v_{(2,3)}(i,3) + s\rho(i,1)v_{(2,3)}(i,2) \\
&= v_{(2)}(i,3) + s\rho(i,3)v_{(2)}(i,2) \\
&\quad + s\rho(i,1)\left(v_{(2)}(i,2) + s\rho(i,3)v_{(2)}(i,1)\right) \\
&= s\rho_{i1}s\rho_{i3}s\rho_{i2}
\end{aligned}$$

A fenti levezetéshez hasonlóan általános esetben is belátható, hogy $v_{\mathbf{j}}(i,k)$ a $\mathbf{j}$ koordinátáinak sorrendjétől nem függ, továbbá az (4.2.2)-beli kifejezésben szereplő minden tag független a $\mathbf{j}$ vektortól, vagyis $p_i^{(\mathbf{j})}$ valóban szimmetrikus lesz a $\mathbf{j}$ elemeire nézve, tehát elegendő Δ_n halmazbeli vektorokra kiszámolni $\hat{E}_{\mathbf{j}}(L_{pf}-A)^+$-t.

Glasserman és Suchintabandid [11] cikkében megtalálható a fenti elmélet általánosítása analitikus függvények (melyeket előállít Taylor-soruk) várható értékének konvergenciájára, és az ehhez kapcsolódó fő tételek bizonyítása.

A fentiekből is látszik, hogy a korrelációs struktúra ilyetén kiterjesztésének legnagyobb előnye, hogy az árazás a hatványsorba fejtés gyors konvergenciája miatt, és mivel a független esetet gyorsan lehet árazni, nem igényel kivitelezhetetlenül hosszú számítást. Tegyük fel, hogy n-edrendben akarjuk becsülni a várható értéket egy d faktoros modellben, vagyis az (4.2.1) egyenletbeli közelítést az első $n+1$ taggal kívánjuk megtenni, azaz kiszámítjuk $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ értékét. Ehhez a fenti indoklás miatt elég kiszámolni minden Δ_n-beli $\mathbf{j}$-re $\hat{E}_{\mathbf{j}}(L_{pf}-A)^+$-t. Mivel Δ_n elemszáma $\binom{2d+n}{n}$, ezért a számításigény $\binom{2d+n}{n}$-szerese annak, amit a független esetben igényel a várható veszteség kiszámítása.

Az egyik legfontosabb tényező, a faktorok számának megválasztása szintén kalibrációs kérdés. Két faktor esetén nem egyértelmű, hogy gyorsabb volna a hatványsoros közelítés a numerikus integrálnál. Azonban $d=3$ esetén, vagyis 3 piaci faktor feltételezésekor már érdemes a fenti számolást alkalmazni. Természetesen a sok piaci faktorral való számolás túl bonyolulttá, lassúvá teszi a számolást, hiszen figyelembe kell vennünk, hogy a várható veszteség kiszámítása csak egy időpontban történik meg a hatványsor számolásakor.

Vagyis ahhoz, hogy valódi árakat tudjunk számítani, a várható veszteséget minden negyedévre ki kell számítani, 3 éves lejárat estén összesen 12-szer, 7 éves lejáratra már 28-szor. Ez azt jelenti, hogy 3 faktor esetén, harmadrendben, ahol már [11] szerint elfogadható a közelítés pontossága $\binom{2\cdot 3+3}{3} \cdot 12 = 1008$-szor annyi ideig tart a számolás, mint amennyi ideig az egy időpontra vett várható veszteség számítása tart független esetben.

Fontos megjegyezni, hogy a közelítés pontosságát n-edrendben nagy mértékben befolyásolja a korreláció-struktúra milyensége. Nagy korrelációk és sok faktor esetén nagyobb n-re lesz csak viszonylag pontos számításunk. Ezért szorosabban összefüggő csődök estén másképp érdemes számolni, amit következő, erős korreláció-struktúra esetén való modellillesztésről szóló alfejezetben tárgyalunk.

4.2.2. Az erős korreláció

Ahogy láttuk, erős korreláció esetén érdemes módosítanunk a számításainkat, hiszen a hatványsor csak sok tag kiszámolása után lesz kellően pontos. Ezért Glasserman és Suchintabandid más módszert ajánl az olyan esetekre, ahol szorosabb összefüggést sejtünk a háttérben. A módszer lényegi változtatása a gyengébb korreláció esetéhez képest, hogy a korábbitól eltérően a $\mathbf{C}$ korreláció mátrixot úgy parametrizáljuk, hogy egy $\mathbf{R}$ korreláció-mátrixot és $\mathbf{C}$-t súlyozzuk az $a \in [0, 1]$ paraméter segítségével

$$\mathbf{C}_a = (1 - a)\mathbf{R} + a\mathbf{C}$$

Az $\mathbf{R}$ egy kevés, összesen r faktoros modell korrelációs mátrixa, és érdemes ezt az r-t a d-nél jóval kisebbre választani. Azaz $\mathbf{C}_a$ egy erős korrelációhoz vezet egy gyengébb összefüggőségi struktúrát tükröző $\mathbf{R}$-ből kiindulva, ahogy a paraméter 0-tól halad az 1 felé (a gyenge korreláció esetében is hasonló megközelítéssel éltünk azzal a különbséggel, hogy ott a független esettől mentünk a kívánt korreláció felé a paraméter növelésével) Mivel az árazás már viszonylag alacsony d esetén is számításigényes, r-t 1-nek választjuk. Legyen $\mathbf{R}$ a következő felépítésű:

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ \gamma_i\gamma_j, & \text{ha } i \neq j, \end{cases}$$

ahol $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ konstansok. Úgy is tekinthetjük tehát $\mathbf{R}$-t, mint egy, a modellünktől független X_i az állapotváltozók alábbi felírásából adódó korrelációs mátrix

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} M' + \begin{pmatrix} \sqrt{1-\gamma_1^2}\ Y_1 \\ \sqrt{1-\gamma_2^2}\ Y_2 \\ \vdots \\ \sqrt{1-\gamma_N^2}\ Y_N \end{pmatrix},$$

ahol M, és Y_i-k független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

Az a paramétertől függő várható veszteséget (az időparamétert most szintén nem jelöljük) ekkor szintén közelíthetjük hatványsorral

$$E_a(L_{pf} - A)^+ \approx \varDelta_0 + \varDelta_1 a + \varDelta_2 \frac{a^2}{2!} + \cdots + \varDelta_n \frac{a^n}{n!},$$

ahol a $\varDelta_i$-k a későbbiekben fognak adódni a várható veszteség feltételes várható értékének közelítéséből.

Vegyük észre, hogy egy olyan $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ valószínűségi változó-vektor, amely N-dimenziós normális eloszlást követ 0 várható értékkel, és $\mathbf{C}_a$ korrelációs mátrix-szal, felbontható az $\mathbf{R}$ segítségével:

$$\xi_i = \gamma_i M + \sqrt{1 - \gamma_i^2}\ \tilde{\eta}_i,$$

ahol $M \sim \mathcal{N}(0,1)$ a megszokott piaci faktor, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ pedig M-től független N-dimenziós normális eloszlású vektor 0 várható értékkel, ám az egyfaktoros Gauss kopulával ellentétben ezek korrelációs mátrixa most nem csak egy konstans ρ-t tartalmaz a főátlón kívül:

$$\Sigma_{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} 1 & a\sigma_{12} & a\sigma_{13} & \dots & a\sigma_{1N} \\ a\sigma_{21} & 1 & a\sigma_{23} & \dots & a\sigma_{2N} \\ a\sigma_{31} & a\sigma_{32} & 1 & \dots & a\sigma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a\sigma_{N1} & a\sigma_{N2} & \dots & a\sigma_{N3} & 1 \end{pmatrix}$$

ahol

$$\sigma_{ij} = \frac{\hat{\rho}_{ij} - \gamma_i\gamma_j}{\sqrt{(1-\gamma_i^2)(1-\gamma_i^2)}}$$

Valóban, $a = 1$ esetben az állapotváltozók közötti korrelációra adódik, hogy

$$\begin{aligned} \operatorname{Corr}(\xi_i, \xi_j) &= \gamma_i\gamma_j + \sqrt{1-\gamma_i^2}\sqrt{1-\gamma_j^2}\ \operatorname{Corr}(\tilde{\eta}_i, \tilde{\eta}_j) \\ &= \gamma_i\gamma_j + \sqrt{1-\gamma_i^2}\sqrt{1-\gamma_j^2}\ \frac{\hat{\rho}_{ij} - \gamma_i\gamma_j}{\sqrt{(1-\gamma_i^2)(1-\gamma_i^2)}} \\ &= \hat{\rho}_{ij}. \end{aligned}$$

Azaz előállítottuk a ξ_i állapotváltozókat egy piaci faktoros modellel, ezért az egyszerűsítésért azonban az egyedi faktorok közti korreláció mátrix összetettségével fizettünk. Azért volt szükség erre a lépésre, hogy tudjunk egy közös faktorra vett feltételes várható értéket számolni, visszavezetve a gyenge korrelációs esetre a modellt.

A számolás gondolatmenete hasonló az egyfaktoros Gauss kopulához, ugyanis M-re feltételesen olyan modellt kapunk, amely korrelációs mátrixa éppen $\Sigma_{\boldsymbol{\eta}}$, amit pedig már tudunk kezelni a gyenge korreláció során leírt módszerrel. Ez azt jelenti, hogy a paraméterrel fel tudjuk írni a feltételes várható eloszlást.

$$E_a\left[(L_{pf} - A)^+ \middle| M = m\right] = \delta_0(m) + \delta_1(m)a + \delta_2(m)\frac{a^2}{2!} + \dots$$

Ahol a $\delta_k(m)$ úgy számolható, hogy ahogy a gyenge korreláció esetén, azzal a különbséggel, hogy (4.2.3)-ban most nem a teljesen független, hanem a feltételesen független várható értékekkel közelítünk.

A Δ_i-k ekkor a $\delta_i(m)$-ek várható értékeként adódnak. Mivel $M \sim \mathcal{N}(0,1)$, ezért sűrűségfüggvénye $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, és a Δ_i-k számításakor, az M feltétel szerint integrálás során kapjuk, hogy

$$\Delta_i = E(\delta_i(m)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_i(m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-m^2/2}dm.$$

A módszer hatékonysága abból adódik, hogy d faktoros modell esetén minden piaci faktorra vett feltételes várható értéket tudjuk csak kezelni. Ezt azután ki kell integrálni d dimenzióban, ami sokkal számításigényesebb, mint a fenti, egy dimenziós integrál. Legyen d' a $\Sigma_{\boldsymbol{\eta}}$ korreláció mátrix faktorainak száma, vagyis $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ koordinátái d' faktoros összefüggésben állnak. Ez azt jelenti heurisztikusan, hogy d' piaci szektort tételezünk föl, a $\Sigma_{\boldsymbol{\eta}}$ gyakran blokkokból áll össze. Az $r = 1$ esetben, vagyis amikor $\mathbf{R}$ egy faktoros struktúrájú, $d' = d - 1$.

Ekkor a számításigény csupán a numerikus integrálásnál felvett pontok $\binom{2d'+n}{n}$-szerese. Ez abból adódik, hogy az integrálközelítő összeg minden pontjára ki kell számolni $\delta_i(m)$-et, amihez szükség van a feltételesen független várható értékek súlyozásából adódó közelítő összegre, és így a $\Sigma_{\boldsymbol{\eta}}$ korrelációs struktúrájától függő nagyságú számolás kell.

Az erősen összefüggő struktúrát tehát visszavezettük a gyenge korreláció struktúrájára, a számításigény pedig egy nagyságrenddel nőtt (ha megelégszünk a numerikus integrál 10 pontban való számításával).

A felhasznált adatsorral, mivel a CDS-ekről semmiféle mögöttes információ nem állt rendelkezésre (milyen szektorbeliek, mely CDS-ek mozoghatnak erősen együtt, stb.), az erős korreláció esetén állított modell használata nem képes jobb eredménnyel szolgálni a gyenge korreláció esetén kapott árazásnál, hiszen a $\Sigma_{\boldsymbol{\eta}}$ struktúrája olyan blokkokból áll, melyek attól függenek, hogy a CDS-ek hogyan oszlanak szektorokba.

4.2.3. Az adatokon végzett számítások

Az eredményeket [18] programkód saját modellre való implementálásával, és az így számolt δ_i-k felhasználásával kaptam. Az árazás menete gyenge korrelációs struktúra esetén a következő.

A CDS árakból a 3. fejezetben látott módon megkapott csődintenzitásokból (minden CDS-re a lépcsős függvény 3 értéke) kiszámítjuk az adott t-ig bekövetkező $p_i(t)$ csődvalószínűségeket minden negyedévre, és mind a 125 névre, hiszen ezek segítségével határozható meg a független esetben a várható veszteség, amelyek segítségével előáll a közelítőösszeg.

Ezután generáljuk a Δ-beli vektort, vagyis a közelítés rendjétől (n) és a faktorok számától (d) függően $\binom{2d+n}{n}$ darab n dimenziós vektort, melyekben a koordináták monoton növő, $-d$ és d közötti egészek.

A közelítéshez szükség van még $p_i^{\mathbf{j}}$-k kiszámítására, ezek a korábban számított $p_i(t)$ csődvalószínűségekből, az $x_i(t)$ küszöbértékek G_k polinomokba helyettesített értékeikből, és $v_{\mathbf{j}}$ rekurzívan számított együtthatókból állnak össze.

A δ_i együtthatók közelítéséhez $w_{\mathbf{j}}$-n kívül szükség van még a független esetben számolt várható veszteségeket eredményül adó segédprogramra. Ezt az egyfaktoros Gauss esetben leírt rekurzióhoz hasonlóan számoljuk, azzal a különbséggel, hogy most nem a feltételes csődvalószínűségeket, hanem – mivel függetlenségi feltétellel élünk az állapotváltozókra – a csődintenzitásokból számított tényleges valószínűségeket használjuk, és így keressük a t-ig bekövetkezett csődarányok bekövetkezési valószínűségeit.

A fenti segédprogramokkal már képesek vagyunk a δ_i együtthatók közelítésére. A program először a várható veszteséget számolja ki egyszerű, diszkrét esetbeli várható érték számítással – a $p_i^{\mathbf{j}}$ valószínűségeket $\max(k \cdot 0,6 - A; 0)$-val súlyoztuk (a megtérülést most is konstans 0,4-nek teteleztük fel), ahol k a bekövetkező csődök aránya. A várható veszteségekből pedig már egyszerű összegzéssel adódnak a keresett δ_i együtthatók. Változtatható paraméter az $\mathbf{R}$, a 0-t közelítő s, a faktorok száma, és a közelítés rendje. Output az $n+1$ db δ_i, amiből a legfelső tranche-ek t-ig vett várható vesztesége számolható.

A legfelső tranche-ek várható veszteségeinek számítása után adódnak a vizsgálni kívánt tranche-ek várható veszteségei, A_{k-1} és A_k közötti k tranche t-ig vett várható vesztesége

$$E(L_k(t)) = E(L_{pf}(t) - A_{j-1})^+ - E(L_{pf}(t) - A_j)^+.$$

Ezután, minden negyedévre meghatározva a fenti várható értéket, az egyfaktoros Gauss kopula modell árazásának mentén a fair prémium (3.2.1) képlete alapján adódik az upfront ár.

Mivel a kapott CDS adatok jogi okokból kifolyólag csak a prémiumokra vonatkoztak, tehát a szektorokba sorolást elvégezni az adatok alapján nem lehetett, a többfaktoros modellt úgy kerül felállításra, hogy minden név ugyanolyan érzékeny az egyes faktorokra (ezért a ρ_{ij}-ket csak egy index-szel, a faktoréval látjuk el). Megjegyezzük, hogy ebben az esetben a korreláció $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \cdots + \rho_d^2$ úgy, hogy $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \cdots + \rho_d^2 \leq 1$ bármely két állapotváltozó között. Ez a feltevés nagyon erős egyszerűsítéssel él, az eredmények ezért illeszkedésben jóval elmaradnak a sztochasztikus korreláció modelljétől.

A modellt három faktorra alkalmaztuk harmadrendű közelítésben, vagyis $d = 3$ és $n = 3$. A kalibrálást úgy végeztük, hogy először megvizsgáltuk a faktorérzékenységek nagyságrendjeit, vagyis 10^{-1} $10^{-2}, \ldots, 10^{-5}$ nagyságrendű érzékenységek esetén vizsgáltuk az árazás hibáját azonos nagyságrendű, és szigorúan csökkenő nagyságrendű paramétercsoportokra (a ρ_i faktorérzékenységekre szimmetrikus az árazás).

Ebből adódott, hogy a legjobb eredményt az adja, ha 10^{-1}, $10^{-2}, 10^{-3}$ nagyságrendűek a faktor-érzékenységek. Az eredményeket a függelékben található táblázat tartalmazza. Ezután ρ_1, ρ_2, ρ_3 paraméterhármast becsültük ezekkel a nagyságrendekkel. Azt kaptuk, hogy ha bármely faktorra $0,3$-nál érzékenyebbek az állapotváltozók, a hiba egész értékű, ezért minden érzékenységi paramétert ez alá becsültük. A számításigény miatt a rácspontok számát 50 alatt tartottuk, így alakultak ki a függelékben található kalibrációk.

Látható, hogy a legjobb illeszkedés is 0,5117, ami az előző modellekhez képest két nagyságrenddel rosszabb. Ennek legfőbb oka a már említett információhiány, vagyis a túlzott homogenitás feltevése. Mivel a módosított Newton-Raphson módszer konvergenciája lassú, és érdemi javulásra ilyen feltételek mellett nem számítottunk, iterációkat nem végeztünk.

Négyfaktoros modell illesztése a számításigény majdnem kétszereződésével jár (ha a független esetben való várható veszteség számításideje adott t-re α, akkor a három faktoros modell 84α, a négyfaktoros modell 165α időegységet használ). Ezért, azonos faktorérzékenységi feltevés miatt négy faktoros modellt nem kalibráltunk.

5. Összefoglalás, kitekintés

A dolgozatban CDO árazási modelleket vizsgáltunk. Először, a CDO bemutatása után az egyfaktoros Gauss kopulát használtuk, mint minden modell alapját. Ezzel, várakozásainkkal összhangban, a valós adatokra való illesztés során megkaptuk a korrelációmosolyt, vagyis a valós árakból visszaszámolt korrelációkat.

Ezután továbbléptünk általánosabb modellekre, amelyekben a korrelációs struktúra bonyolultabb, ezért jobban illeszthető az adatokra. Először szochasztikus korreláción alapuló modelleket vizsgáltunk, két- és három állapotú esetet. Ezek kalibrálása során azt kaptuk, hogy az illeszkedés mértéke nagyságrendben azonos, a valós upfrontoktól való eltérés négyzetösszege a két állapotú modellben $0,0065$, a három állapotúban $0,005$. A kalibrációt a paraméterek rácspontjain való árazás után módosított Newton-Raphson iterációval végeztük.

A korrelációs struktúra másik, vizsgált kiterjesztése a többfaktoros modell volt. Ezt az egyfaktoros modell alapján többdimenziós numerikus integrállal lehet közelíteni, ám ennek implementálásakor a számításigény nagyon magas. Ezért más technikát alkalmaztunk, hatványsorok segítségével. A három faktoros modellt vizsgáltuk, ám mivel a CDO referenciaportfóliójáról nem állt elég adat rendelkezésre, a szektorokra osztást nem tudtuk elvégezni. Ezért homogén modellt állítottunk, azaz adott faktorra minden CDS intenzitását azonosnak tételeztük fel. Ennek az egyszerűsítésnek az volt az ára, hogy a négyzetes hibák összege (0,5117) nagyságrendekkel nagyobb lett az előző modellben számoltaknál.

A dolgozatban elméleti áttekintést található azon esetekre, amikor sok faktortól függenek az állapotváltozók, és magasak a fatorokra vett érzékenységek, ekkor az erős korreláció modellje használható, aminek hátterében szintén a háttérportfólió elemeinek strukturálása áll.

Ahogy látható, a kalibrálás egyik akadálya volt az adatok hiányossága, ezért további számítások folytathatóak, ha a referenciaportfólió adatai rendelkezésre állnak. Ekkor a mátrix, amely megadja a faktoroktól való függést, felírható blokkokkal, ami a blokkok jó becslése esetén lényegesen javíthatja a kalibrálást.

Más irányú általánosítása a korrelációs struktúráknak a dinamikus modellek állítása. Ezek a modellek időtől függő korrelációt tételeznek fel, és ezzel próbálnak jó közelítést adni a CDO tranche-ek áraira. Ez tehát azt jelenti, hogy amikor negyedévenként számítjuk a várható veszteséget, akkor más és más korrelációkat tételezünk fel. Tehát periódusonként illeszthető az egyfaktoros Gauss kopula.

Egy másik út a megtérülések pontosítása, hiszen a fenti modellek mindegyike konstans megtérülést tételezett fel minden CDS-re, ez pedig erős egyszerűsítés. Ezek az árazási technikák sztochasztikus megtérülést tételeznek fel, és azzal számolnak, hogy a csődök, és a megtérülés összefügg, és ezt az összefüggést próbálják modellezni.

További modelleket kapunk, ha Gauss kopulát, hanem [5] alapján pl. t- vagy Clayton kopulát illesztünk. A tanulmányok azt mutatják, hogy ezek a modellek közel áraznak a Gauss kopulához.

A CDO árazásának tehát nagyon sokféle megközelítése van, ám egyik irányról sem mondható el, hogy képes tökéletesen árazni, sőt az sem, hogy lényegesen jobb volna más irányoknál, egységes matematikai háttér nincsen az árazási modellek mögött. A cél mindig olyan modell alkotása, amely valamilyen (a dolgozatban négyzetes eltérésben legkisebb) értelemben jól illeszkedik az adott referenciaportfólió minden származtatott CDO tranche-ére, ám a paraméterek száma nem túl magas, és az árazás számításigénye alacsony.

Az ismertetett modellek közül a kapott adatokra való illesztés során az adódott, hogy jelen esetben erre leginkább a három állapotú sztochasztikus korreláción alapuló modell volt alkalmas.

6. Függelék

Az implicit korrelációkkal számolt árak négyzetes hibái

Tranch	**Lejárat**	**Implicit korreláció**	**Négyzetes hiba**
	3	0,455	0,020
Equity	5	0,445	0,020
	7	0,445	0,020
	3	0,840	0,259
Mezzanine	5	0,681	0,097
	7	0,615	0,057
	3	0,283	0,093
Senior	5	0,138	0,289
	7	0,036	0,575
	3	0,810	0,221
Super Senior	5	0,740	0,147
	7	0,665	0,086

A módosított Newton-Raphson iterációk sztochasztikus korrelációra

A két állapotú modell

ρ_1^2	ρ_2^2	q_0	hiba	q
0,00	0,60	0,05	0,0098	0,1086
0,10	0,80	0,25	0,0072	0,3088
0,20	*0,80*	*0,45*	*0,0065*	*0,4500*
0,20	0,90	0,35	0,0105	0,4117
0,30	0,80	0,45	0,0093	0,5232
0,30	0,90	0,65	0,0070	0,6500
0,40	0,90	0,65	0,0110	0,7282

A három állapotú modell

q'	q	ρ_0^2	hiba	ρ^2
0,10	0,20	0,65	0,0064	0,6791
0,30	0,00	0,25	0,0057	0,3052
0,30	*0,20*	*0,45*	*0,0050*	*0,5194*
0,30	0,20	0,55	0,0059	0,5500
0,50	0,00	0,15	0,0065	0,1979
0,50	0,20	0,25	0,0088	0,2970

Kétesetes sztochasztikus korrelációval számolt árak négyzetes hibái

ρ_1^2	ρ_2^2	q	hiba	ρ_1^2	ρ_2^2	q	hiba	ρ_1^2	ρ_2^2	q	hiba	ρ_1^2	ρ_2^2	q	hiba	ρ_1^2	ρ_2^2	q	hiba
0	0,5	0,1	0,021	0,1	0,5	0,1	0,017	0,2	0,5	0,1	0,017	0,3	0,5	0,1	0,018	0,4	0,5	0,1	0,020
0	0,5	0,3	0,128	0,1	0,5	0,3	0,046	0,2	0,5	0,3	0,027	0,3	0,5	0,3	0,020	0,4	0,5	0,3	0,019
0	0,5	0,5	0,312	0,1	0,5	0,5	0,113	0,2	0,5	0,5	0,056	0,3	0,5	0,5	0,029	0,4	0,5	0,5	0,019
0	0,5	0,7	0,521	0,1	0,5	0,7	0,206	0,2	0,5	0,7	0,099	0,3	0,5	0,7	0,045	0,4	0,5	0,7	0,022
0	0,5	0,9	0,708	0,1	0,5	0,9	0,315	0,2	0,5	0,9	0,154	0,3	0,5	0,9	0,067	0,4	0,5	0,9	0,026
0	0,6	0,1	0,011	0,1	0,6	0,1	0,020	0,2	0,6	0,1	0,027	0,3	0,6	0,1	0,033	0,4	0,6	0,1	0,039
0	0,6	0,3	0,081	0,1	0,6	0,3	0,020	0,2	0,6	0,3	0,013	0,3	0,6	0,3	0,016	0,4	0,6	0,3	0,025
0	0,6	0,5	0,262	0,1	0,6	0,5	0,081	0,2	0,6	0,5	0,034	0,3	0,6	0,5	0,018	0,4	0,6	0,5	0,018
0	0,6	0,7	0,485	0,1	0,6	0,7	0,181	0,2	0,6	0,7	0,081	0,3	0,6	0,7	0,034	0,4	0,6	0,7	0,018
0	0,6	0,9	0,698	0,1	0,6	0,9	0,306	0,2	0,6	0,9	0,147	0,3	0,6	0,9	0,062	0,4	0,6	0,9	0,024
0	0,7	0,1	0,026	0,1	0,7	0,1	0,049	0,2	0,7	0,1	0,062	0,3	0,7	0,1	0,074	0,4	0,7	0,1	0,084
0	0,7	0,3	0,048	0,1	0,7	0,3	0,008	0,2	0,7	0,3	0,012	0,3	0,7	0,3	0,026	0,4	0,7	0,3	0,044
0	0,7	0,5	0,219	0,1	0,7	0,5	0,057	0,2	0,7	0,5	0,019	0,3	0,7	0,5	0,012	0,4	0,7	0,5	0,022
0	0,7	0,7	0,450	0,1	0,7	0,7	0,161	0,2	0,7	0,7	0,066	0,3	0,7	0,7	0,024	0,4	0,7	0,7	0,015
0	0,7	0,9	0,688	0,1	0,7	0,9	0,298	0,2	0,7	0,9	0,141	0,3	0,7	0,9	0,057	0,4	0,7	0,9	0,022
0	0,8	0,1	0,067	0,1	0,8	0,1	0,102	0,2	0,8	0,1	0,121	0,3	0,8	0,1	0,138	0,4	0,8	0,1	0,154
0	0,8	0,3	0,027	0,1	0,8	0,3	0,008	0,2	0,8	0,3	0,023	0,3	0,8	0,3	0,046	0,4	0,8	0,3	0,074
0	0,8	0,5	0,182	0,1	0,8	0,5	0,039	0,2	0,8	0,5	0,010	0,3	0,8	0,5	0,010	0,4	0,8	0,5	0,030
0	0,8	0,7	0,417	0,1	0,8	0,7	0,143	0,2	0,8	0,7	0,054	0,3	0,8	0,7	0,017	0,4	0,8	0,7	0,014
0	0,8	0,9	0,677	0,1	0,8	0,9	0,291	0,2	0,8	0,9	0,135	0,3	0,8	0,9	0,053	0,4	0,8	0,9	0,019
0	0,9	0,1	0,137	0,1	0,9	0,1	0,182	0,2	0,9	0,1	0,207	0,3	0,9	0,1	0,229	0,4	0,9	0,1	0,250
0	0,9	0,3	0,020	0,1	0,9	0,3	0,020	0,2	0,9	0,3	0,045	0,3	0,9	0,3	0,077	0,4	0,9	0,3	0,114
0	0,9	0,3	0,151	0,1	0,9	0,3	0,027	0,2	0,9	0,3	0,005	0,3	0,9	0,3	0,013	0,4	0,9	0,3	0,040
0	0,9	0,7	0,384	0,1	0,9	0,7	0,129	0,2	0,9	0,7	0,044	0,3	0,9	0,7	0,011	0,4	0,9	0,7	0,012
0	0,9	0,9	0,664	0,1	0,9	0,9	0,285	0,2	0,9	0,9	0,131	0,3	0,9	0,9	0,050	0,4	0,9	0,9	0,017

Három állapotú sztochasztikus korrelációs modellel számolt árak négyzetes hibái

q'	q	ρ^2	hiba	q'	q	ρ^2	hiba	q'	q	ρ^2	hiba	q'	q	ρ^2	hiba	q'	q	ρ^2	hiba
0,1	0	0	0,65	0,3	0	0	0,35	0,5	0	0	0,13	0,7	0	0	0,03	0,9	0	0	0,25
0,1	0	0,1	0,28	0,3	0	0,1	0,12	0,5	0	0,1	0,02	0,7	0	0,1	0,05	0,9	0	0,1	0,31
0,1	0	0,2	0,13	0,3	0	0,2	0,04	0,5	0	0,2	0,01	0,7	0	0,2	0,08	0,9	0	0,2	0,34
0,1	0	0,3	0,05	0,3	0	0,3	0,01	0,5	0	0,3	0,02	0,7	0	0,3	0,12	0,9	0	0,3	0,36
0,1	0	0,4	0,01	0,3	0	0,4	0,01	0,5	0	0,4	0,05	0,7	0	0,4	0,16	0,9	0	0,4	0,39
0,1	0	0,5	0,02	0,3	0	0,5	0,04	0,5	0	0,5	0,1	0,7	0	0,5	0,21	0,9	0	0,5	0,41
0,1	0	0,6	0,06	0,3	0	0,6	0,09	0,5	0	0,6	0,16	0,7	0	0,6	0,27	0,9	0	0,6	0,44
0,1	0	0,7	0,13	0,3	0	0,7	0,17	0,5	0	0,7	0,23	0,7	0	0,7	0,33	0,9	0	0,7	0,47
0,1	0	0,8	0,23	0,3	0	0,8	0,27	0,5	0	0,8	0,32	0,7	0	0,8	0,4	0,9	0	0,8	0,5
0,1	0	0,9	0,36	0,3	0	0,9	0,39	0,5	0	0,9	0,43	0,7	0	0,9	0,47	0,9	0	0,9	0,52
0,1	0	1	0,55	0,3	0	1	0,55	0,5	0	1	0,55	0,7	0	1	0,55	0,9	0	1	0,55
0,1	0,2	0	0,65	0,3	0,2	0	0,35	0,5	0,2	0	0,13	0,7	0,2	0	0,03	0,9	0,2	0	0,25
0,1	0,2	0,1	0,36	0,3	0,2	0,1	0,17	0,5	0,2	0,1	0,04	0,7	0,2	0,1	0,04	0,9	0,2	0,1	0,29
0,1	0,2	0,2	0,23	0,3	0,2	0,2	0,09	0,5	0,2	0,2	0,02	0,7	0,2	0,2	0,06	0,9	0,2	0,2	0,32
0,1	0,2	0,3	0,13	0,3	0,2	0,3	0,04	0,5	0,2	0,3	0,01	0,7	0,2	0,3	0,08	0,9	0,2	0,3	0,34
0,1	0,2	0,4	0,07	0,3	0,2	0,4	0,01	0,5	0,2	0,4	0,02	0,7	0,2	0,4	0,11	0,9	0,2	0,4	0,36
0,1	0,2	0,5	0,03	0,3	0,2	0,5	0,01	0,5	0,2	0,5	0,03	0,7	0,2	0,5	0,14	0,9	0,2	0,5	0,38
0,1	0,2	0,6	0,01	0,3	0,2	0,6	0,01	0,5	0,2	0,6	0,06	0,7	0,2	0,6	0,18	0,9	0,2	0,6	0,4
0,1	0,2	0,7	0,01	0,3	0,2	0,7	0,03	0,5	0,2	0,7	0,09	0,7	0,2	0,7	0,22	0,9	0,2	0,7	0,42
0,1	0,2	0,8	0,02	0,3	0,2	0,8	0,06	0,5	0,2	0,8	0,14	0,7	0,2	0,8	0,26	0,9	0,2	0,8	0,44
0,1	0,2	0,9	0,05	0,3	0,2	0,9	0,1	0,5	0,2	0,9	0,19	0,7	0,2	0,9	0,31	0,9	0,2	0,9	0,46
0,1	0,2	1	0,11	0,3	0,2	1	0,17	0,5	0,2	1	0,25	0,7	0,2	1	0,36	0,9	0,2	1	0,48
0,1	0,4	0	0,65	0,3	0,4	0	0,35	0,5	0,4	0	0,13	0,7	0,4	0	0,03	0,9	0,4	0	0,25
0,1	0,4	0,1	0,45	0,3	0,4	0,1	0,22	0,5	0,4	0,1	0,06	0,7	0,4	0,1	0,03	0,9	0,4	0,1	0,28
0,1	0,4	0,2	0,34	0,3	0,4	0,2	0,15	0,5	0,4	0,2	0,04	0,7	0,4	0,2	0,04	0,9	0,4	0,2	0,3
0,1	0,4	0,3	0,26	0,3	0,4	0,3	0,11	0,5	0,4	0,3	0,02	0,7	0,4	0,3	0,06	0,9	0,4	0,3	0,32
0,1	0,4	0,4	0,2	0,3	0,4	0,4	0,07	0,5	0,4	0,4	0,01	0,7	0,4	0,4	0,07	0,9	0,4	0,4	0,33
0,1	0,4	0,5	0,15	0,3	0,4	0,5	0,05	0,5	0,4	0,5	0,01	0,7	0,4	0,5	0,09	0,9	0,4	0,5	0,34

Három állapotú sztochasztikus korrelációs modellel számolt árak négyzetes hibái

q'	q	ρ^2	hiba	q'	q	ρ^2	hiba	q'	q	ρ^2	hiba	q'	q	ρ^2	hiba	q'	q	ρ^2	hiba
0,1	0,4	0,6	0,11	0,3	0,4	0,6	0,03	0,5	0,4	0,6	0,02	0,7	0,4	0,6	0,11	0,9	0,4	0,6	0,36
0,1	0,4	0,7	0,08	0,3	0,4	0,7	0,02	0,5	0,4	0,7	0,03	0,7	0,4	0,7	0,13	0,9	0,4	0,7	0,37
0,1	0,4	0,8	0,06	0,3	0,4	0,8	0,02	0,5	0,4	0,8	0,04	0,7	0,4	0,8	0,15	0,9	0,4	0,8	0,39
0,1	0,4	0,9	0,04	0,3	0,4	0,9	0,02	0,5	0,4	0,9	0,06	0,7	0,4	0,9	0,18	0,9	0,4	0,9	0,4
0,1	0,4	1	0,04	0,3	0,4	1	0,03	0,5	0,4	1	0,08	0,7	0,4	1	0,21	0,9	0,4	1	0,42
0,1	0,6	0	0,65	0,3	0,6	0	0,35	0,5	0,6	0	0,13	0,7	0,6	0	0,03	0,9	0,6	0	0,25
0,1	0,6	0,1	0,52	0,3	0,6	0,1	0,26	0,5	0,6	0,1	0,08	0,7	0,6	0,1	0,03	0,9	0,6	0,1	0,27
0,1	0,6	0,2	0,45	0,3	0,6	0,2	0,22	0,5	0,6	0,2	0,06	0,7	0,6	0,2	0,04	0,9	0,6	0,2	0,28
0,1	0,6	0,3	0,4	0,3	0,6	0,3	0,19	0,5	0,6	0,3	0,05	0,7	0,6	0,3	0,04	0,9	0,6	0,3	0,29
0,1	0,6	0,4	0,35	0,3	0,6	0,4	0,16	0,5	0,6	0,4	0,04	0,7	0,6	0,4	0,05	0,9	0,6	0,4	0,3
0,1	0,6	0,5	0,31	0,3	0,6	0,5	0,14	0,5	0,6	0,5	0,03	0,7	0,6	0,5	0,05	0,9	0,6	0,5	0,31
0,1	0,6	0,6	0,27	0,3	0,6	0,6	0,12	0,5	0,6	0,6	0,03	0,7	0,6	0,6	0,06	0,9	0,6	0,6	0,32
0,1	0,6	0,7	0,24	0,3	0,6	0,7	0,1	0,5	0,6	0,7	0,03	0,7	0,6	0,7	0,07	0,9	0,6	0,7	0,33
0,1	0,6	0,8	0,21	0,3	0,6	0,8	0,09	0,5	0,6	0,8	0,02	0,7	0,6	0,8	0,08	0,9	0,6	0,8	0,34
0,1	0,6	0,9	0,19	0,3	0,6	0,9	0,08	0,5	0,6	0,9	0,03	0,7	0,6	0,9	0,09	0,9	0,6	0,9	0,35
0,1	0,6	1	0,16	0,3	0,6	1	0,07	0,5	0,6	1	0,03	0,7	0,6	1	0,11	0,9	0,6	1	0,36
0,1	0,8	0	0,65	0,3	0,8	0	0,35	0,5	0,8	0	0,13	0,7	0,8	0	0,03	0,9	0,8	0	0,25
0,1	0,8	0,1	0,59	0,3	0,8	0,1	0,31	0,5	0,8	0,1	0,11	0,7	0,8	0,1	0,03	0,9	0,8	0,1	0,26
0,1	0,8	0,2	0,56	0,3	0,8	0,2	0,29	0,5	0,8	0,2	0,1	0,7	0,8	0,2	0,03	0,9	0,8	0,2	0,27
0,1	0,8	0,3	0,53	0,3	0,8	0,3	0,27	0,5	0,8	0,3	0,09	0,7	0,8	0,3	0,03	0,9	0,8	0,3	0,27
0,1	0,8	0,4	0,51	0,3	0,8	0,4	0,26	0,5	0,8	0,4	0,08	0,7	0,8	0,4	0,03	0,9	0,8	0,4	0,28
0,1	0,8	0,5	0,49	0,3	0,8	0,5	0,24	0,5	0,8	0,5	0,08	0,7	0,8	0,5	0,04	0,9	0,8	0,5	0,28
0,1	0,8	0,6	0,46	0,3	0,8	0,6	0,23	0,5	0,8	0,6	0,07	0,7	0,8	0,6	0,04	0,9	0,8	0,6	0,29
0,1	0,8	0,7	0,44	0,3	0,8	0,7	0,22	0,5	0,8	0,7	0,07	0,7	0,8	0,7	0,04	0,9	0,8	0,7	0,29
0,1	0,8	0,8	0,42	0,3	0,8	0,8	0,2	0,5	0,8	0,8	0,06	0,7	0,8	0,8	0,04	0,9	0,8	0,8	0,29
0,1	0,8	0,9	0,4	0,3	0,8	0,9	0,19	0,5	0,8	0,9	0,06	0,7	0,8	0,9	0,05	0,9	0,8	0,9	0,3
0,1	0,8	1	0,38	0,3	0,8	1	0,18	0,5	0,8	1	0,06	0,7	0,8	1	0,05	0,9	0,8	1	0,3

Három állapotú sztochasztikus korreláció: az elfajuló esetek

q'	q	hiba
0,1	1	0,6482
0,3	1	0,3503
0,5	1	0,1256
0,7	1	0,0299
0,9	1	0,2521
1	$\in [0,1]$	0,5547

Többfaktoros modellezés, a paraméterek nagyságrendje, $d = 3$, $n = 3$

ρ_1	ρ_2	ρ_3	hiba
10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}	0,5977
10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	0,7058
10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	0,7206
10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	0,5117
10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	0,729
10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	0,749

Többfaktoros modellezés, $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ $d = 3$, $n = 3$

ρ_1	ρ_2	ρ_3	hiba	ρ_1	ρ_2	ρ_3	hiba	ρ_1	ρ_2	ρ_3	hiba
0,1	0,02	0,002	0,6907	0,2	0,02	0,002	0,5506	0,3	0,02	0,002	0,5117
0,1	0,02	0,004	0,6971	0,2	0,02	0,004	0,5574	0,3	0,02	0,004	0,5159
0,1	0,02	0,006	0,6895	0,2	0,02	0,006	0,5526	0,3	0,02	0,006	0,5133
0,1	0,02	0,008	0,6875	0,2	0,02	0,008	0,5479	0,3	0,02	0,008	0,5130
0,1	0,04	0,002	0,6880	0,2	0,04	0,002	0,5557	0,3	0,04	0,002	0,5281
0,1	0,04	0,004	0,6923	0,2	0,04	0,004	0,5594	0,3	0,04	0,004	0,5302
0,1	0,04	0,006	0,6838	0,2	0,04	0,006	0,5535	0,3	0,04	0,006	0,5272
0,1	0,04	0,008	0,6819	0,2	0,04	0,008	0,5490	0,3	0,04	0,008	0,5283
0,1	0,06	0,002	0,6717	0,2	0,06	0,002	0,5383	0,3	0,06	0,002	0,5447
0,1	0,06	0,004	0,6775	0,2	0,06	0,004	0,5442	0,3	0,06	0,004	0,5486
0,1	0,06	0,006	0,6707	0,2	0,06	0,006	0,5396	0,3	0,06	0,006	0,5457
0,1	0,06	0,008	0,6712	0,2	0,06	0,008	0,5388	0,3	0,06	0,008	0,5460
0,1	0,08	0,002	0,6586	0,2	0,08	0,002	0,5287	0,3	0,08	0,002	0,5796
0,1	0,08	0,004	0,6627	0,2	0,08	0,004	0,5310	0,3	0,08	0,004	0,5820
0,1	0,08	0,006	0,6544	0,2	0,08	0,006	0,5251	0,3	0,08	0,006	0,5777
0,1	0,08	0,008	0,6560	0,2	0,08	0,008	0,5247	0,3	0,08	0,008	0,5810

Hivatkozások

[1] Andersen, L., Sidenius, J. (2004): Extensions to the Gaussian copula: Random recovery and random factor loadings *Journal of Credit Risk Volume* 1(1), 05.

[2] Anstee, R. (2006): The Newton-Raphson Method
http://www.math.ubc.ca/ anstee/math104/104newtonmethod.pdf

[3] Baranovski, A., von Lieres und Wilkau, C., Wilch, A. (2009): New recipes for estimating default intensities (No. 2009, 004). SFB 649 discussion paper.

[4] Baeuerle, N., Mueller, A (1998): Modeling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios *Astin Bulletin* 28, 59-76.

[5] Burtschell, X., Gregory, J., Laurent, J. P. (2005): A comparative analysis of CDO pricing models

[6] Burtschell, X., Gregory, J., Laurent, J. P. (2007): Beyond the Gaussian copula: stochastic and local correlation *Journal of Credit Risk*, 3(1), 31-62.

[7] Choros, B., Härdle, W., Okhrin, O. (2009): CDO pricing with copulae *(No. SFB649DP2009-013). Sonderforschungsbereich 649*, Humboldt University, Berlin, Germany.

[8] Eberlein, E., Frey, R., Von Hammerstein, E. A. (2008): Advanced credit portfolio modeling and CDO pricing *(pp. 253-279). Springer Berlin Heidelberg.*

[9] Elizalde, A. (2006): Credit risk models IV: Understanding and pricing CDOs *Documentos de Trabajo (CEMFI)*, (8), 1.

[10] Gibson, Michael S. (2004): Understanding the Risk of Synthetic CDOs *FEDS Working Paper*, 2004-36
http://ssrn.com/abstract=596442 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.596442

[11] Glasserman, P., Suchintabandid, S. (2007): Correlation expansions for CDO pricing *Journal os Banking & Finance*, 31, 1375-1398

[12] Gyarmati, Á. (2010): CDO-k árazása és szerepük a pénzügyi válságban *Tudományos Diákköri Dolgozat*
http://publikaciok.lib.uni-corvinus.hu/publikus/tdk/GYA_20100329222135.pdf

[13] Gyarmati, Á., Medvegyev, P. (2011): Válság és hitelderivatívák - A szintetikus fedezett adósságkötelezettségek (CDO-k) árazása és kockázataik *Közgazdasági Szemle*, 58, 949-969

[14] Jackson, K., Kreinin, A., Zhang, W. (2011): Analytic Dynamic Factor Copula Model
ftp://ftp.cs.utoronto.ca/public_html/cs/ftp/public_html/dist/reports/na/Analytic.Dynamic.Factor.Copula.2011a.Models.pdf

[15] Kibble, W. F. (1945): An extension of a theorem of Mehler's on Hermite polynomials. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 41, No. 01, pp. 12-15). Cambridge University Press.

[16] Király, J., Nagymárton-Szabó, E. V. (2008): Egy különleges eseménysorozat elemzése - a másodrendű jelzáloghitel-piaci válság és (hazai) következményei *Közgazdasági Szemle*, 573-621.

[17] Li, D. X. (1999): On default correlation: a copula function approach. Available at SSRN 187289.

[18] Dr. Miemec, A.: Correlation Expansion for CDO pricing http://www.quantcode.com/modules/mydownloads/singlefile.php?lid=527

[19] Mounfield, C. (2009): Synthetic CDOs: Modelling, valuation and risk management.*Cambridge University Press*

[20] Müller, A., Scarsini, M. (2000): Some Remarks on the Supermodular Order *Journal Multivariate Analysis*, **73**, 107-119

[21] Sidenius, J., Piterbarg, V., Andersen, L. (2008): A new framework for dynamic credit portfolio loss modelling *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 11(02), 163-197.

[22] Schoutens, W., Cariboni, J. (2010): Lévy processes in credit risk (Vol. 519). Wiley.

[23] Wolfstetter, E. (1993): Stochastic dominance: theory and applications. Humboldt-Univ., Wirtschaftswiss. Fak. http://www2.wiwi.hu-berlin.de/institute/wt1/research/1996/stochastic_dominance.pdf