Spektrális kockázati mértékek a részvénytartás kockázatának meghatározására

Készítette: Szabó Dávid Zoltán
ELTE TTK-BCE KTK
Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak
Kvantitatív pénzügyek szakirány
2013

Témavezető: Dr. Csóka Péter

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni azon emberek segítségét, akik valamilyen formában elősegítették a szakdolgozatom elkészítését. A teljesség igénye nélkül elsősorban a következő tanároknak tartozom köszönettel: Csóka Péter, Arató Miklós, Balázs Márton, Zempléni András, Dömötör Barbara, Tóth Bálint.

Köszönettel tartozom az évfolyamtársaimnak is, akik egy rendkívül inspiráló közeget alkottak.

Szeretném megköszönni a családom támogatását is, melyet a tanulmányaim során kaptam tőlük.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A diplomamunkában a spektrális kockázati mértékeket fogjuk vizsgálni. A spektrális kockázati mértékek a koherens kockázati mértékek egy családját alkotják, és Acerbi [5] vezette be őket 2002-ben.
A spektrális kockázati mértékek az Expected Shortfall egyfajta általánosításának tekinthetők, úgy, hogy ezen mértékek figyelembe veszik az egyén saját veszteségelutasítási hajlamát. Míg az Expected Shortfallra úgy tekintünk, mint az α százaléknyi legrosszabb kimenet átlagára, addig a spektrális kockázati mértékek súlyozott átlagát adják a lehetséges kimeneteknek. A legnagyobb súlyt a legnagyobb veszteséghez rendeljük hozzá, és a kisebb veszteségekhez minden spektrális kockázati mérték esetén gyengén kisebb súlyt rendelünk.
A spektrális kockázati mértékek szoros kapcsolatba hozhatók a Choquet integrálokkal. Schmeidler és Gilboa [10] belátta, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a Choquet integrál kockázati mértékek, és a spektrális kockázati mértékek között. Ezen összefüggéseket felhasználva Nguyen, Pham és Tran [9] 2012-ben vizsgálta a spektrális kockázati mértéket abból a szempontból, hogy a statisztikai, vagy a kockázatsemleges mértékben kell-e számolni a mérték értékét egy részvényre. Ők a részvényárfolyam mozgásra GBM(geometriai Brown-mozgás)-t feltételezve belátták, hogy alkalmas mérték a kockázatsemleges.
Jelen dolgozat 2. fejezetében a spektrális kockázati mértékek általános tulajdonságairól írunk, a 3. fejezetben ismertetjük Nguyen, Pham és Tran eredményeit, a 4. fejezetben a Lévy folyamatokról írunk röviden. Az 5. fejezetben az FMLS(Finite Moment Log Stable) részvényárfolyam modellre, az 6. fejezetben a Variance gamma részvényárfolyam modellre, a 7. fejezetben pedig a CGMY(Carr-Geman-Madan-Yor) részvényárfolyam modellre általánosítjuk önálló tételek segítségével a GBM-ra épülő részvényárfolyam modell esetén ismert eredményeket. A 8. fejezetben megvizsgáljuk a spektrális kockázati mértékek és a hasznosságfüggvények kapcsolatát. A 9. fejezetben röviden összefoglaljuk a dolgozat eredményeit.

2. A spektrális kockázati mértékről általánosságban

2.1. Kockázati mértékekről röviden

A kockázati mértékeket a pénzügyi matematikában használják, többek között a tőkekövetelmény meghatározásának kiszámítására, portfólió optimalizálásra és teljesítmény értékelésre is. A tőkekövetelmény egy pénzügyi szabályozó szervezet által megkövetelt pénzmennyiség, melynek célja, hogy a jövőbeni lehetséges pénzügyi veszteségek esetén is likvid maradjon a pénzügyi szervezet, illetve, hogy ne folytasson olyan tevékenységet amely növeli a csődbejutás valószínűségét.
Az utóbbi években a koherens és a konvex kockázati mértékek irányába fordult a figyelem a kockázati mértékeken belül.

1. Definíció (Koherens kockázati mérték). *[16] Tekintsük a V valószínűségi változót, melynek eloszlása a portfóliónk nyereség-eloszlása. Ekkor a $\rho : V \to \mathbb{R}$ függvényt koherens kockázati mértéknek nevezzük, amennyiben a következők teljesülnek:*

- *monotonitás:* $X, \quad Y \in V,\, Y \geq X \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$,
- *pozitív homogenitás:* $X \in V,\, h > 0,\, hX \in V \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(X)$,
- *szubadditivitás:* $X, \quad Y, \quad X + Y \in V \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,
- *transzláció invariancia:* $X \in V,\, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + a) = \rho(X) - a$.

Csóka, Herings és Kóczy 2007-es [19] cikkükben a koherens kockázati mértékeket kompatibilisnek találták egy olyan általános egyensúlyelméleti modellből eredő kockázati mértékkel, ahol a piac teljes. Ugyanakkor ebben a modellben a spektrális kockázati mértékek esetén a csak az eloszlástól függés (law invariance) követelmény nem tűnik természetesnek.
Két közismert kockázati mérték a VaR és az Expected Shortfall (ES).

Amennyiben X-el jelöljük a portfóliónk nyereség-eloszlásfüggvényét, akkor ennek általánosított inverzét a következőképpen kapjuk:

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x|F_X(x) \geq p\}.$$

Ennek segítségével az α konfidenciaszinthez tartozó felső VaR-t a következőképpen kapjuk:

$$VaR^{\alpha} = -F_X^{-1}(\alpha).$$

A VaR nem koherens kockázati mérték, mivel nem szubadditív.
Az α-Expected Shortfall-t $\alpha \in [0, 1]$ esetén a következő képlettel definiáljuk:

$$ES_{\alpha}(x) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F_X^{-1}(p)\mathrm{d}p.$$

Az Expected Shortfallról belátható, hogy koherens kockázati mérték [4].
Fontos megemlíteni, hogy az Expected Shortfall szoros kapcsolatban van a feltételes VaR-ral, melyet a következő képlettel kapunk:

$$CVaR_{\alpha}(x) = -\mathbb{E}(X|X \leq F_X^{-1}(\alpha)).$$

A CVaR azonban nem feltétlenül koherens kockázati mérték. A CVaR és az Expected Shortfall bizonyos feltételek esetén megegyezik, ilyen feltétel például az eloszlásfüggvény folytonossága. Ebben az esetben természetesen a CVaR is koherens.
Az Expected Shortfall tehát koherens kockázati mérték, és spektrális kockázati mérték is lesz, melyet a következőkben definiálunk.

2.2. Alternatív definíciók a spektrális kockázati mértékre

A spektrális kockázati mértéket a következő képlettel definiáljuk:

$$M_{\phi} = -\int_0^1 F_X^{-1}(p)\phi(p)\mathrm{d}p,$$

ahol $\phi \in L^1([0, 1])$, melyre a következő tulajdonságok teljesülnek:

- ϕ pozitív;
- ϕ monoton csökkenő;
- $||\phi|| = 1$.

Ebben a defínicióban az X-re úgy gondolunk, mint egy jövő időpontbeli nyereségre, mely nyilván valószínűségi változó. Ebben a definícóban a pozitív előjelű nyereségek, vagyis a profitok kapnak pozitív előjelet.

Cotter, Dowd és Sorwar 2007-es cikkében [14] egy alternatív definícióját adta a spektrális kockázati mértékeknek:

$$N_\gamma = \int_0^1 \gamma(p) q_p \mathrm{d}p,$$

ahol $\gamma \in L^1([0,1])$, melyre a következő tulajdonságok teljesülnek:

- γ pozitív;
- γ növekvő;
- $||\gamma|| = 1$.

q_p definíció szerint az Y valószínűségi változó általánosított eloszlásfüggvény-inverzének a p helyen felvett értéke. Ebben a definícióban az Y-re úgy gondolunk, mint egy jövő időpontbeli veszteségre, mely valószínűségi változó. Ebben a definícióban tehát a pozitív előjelű nyereségek, vagyis a profitok negatív előjelet kapnak.

Az alábbiakban saját bizonyítást adunk a két definícó ekvivalenciájára.

2.1. Lemma. *A két definíció ekvivalens a $\phi(p) = \gamma(1-p)$ választással.*

Bizonyítás: Nézzük a folytonos eloszlásfüggvény esetét.
Vegyük észre, hogy
$F_X^{-1}(p) = -q_{1-p}$, hiszen a fenti leírásból adódik, hogy $X = -Y$, és így:

$$F_X^{-1}(p) = c \Leftrightarrow p = F_X(c) = \mathbb{P}(X \leq c) \Leftrightarrow 1 - p =$$

$$= \mathbb{P}(X \geq c) = \mathbb{P}(-X \leq -c) = \mathbb{P}(Y \leq -c) \Leftrightarrow q_{1-p} = -c.$$

Ennek következményeként:

$$M_\phi(X) = -\int_0^1 F_X^{-1}(p)\phi(p)\mathrm{d}p = \int_0^1 q_{1-p}\phi(p)\mathrm{d}p.$$

Az $\phi(p) = \gamma(1-p)$ választással:

$$\int_0^1 q_{1-p}\phi(p)\mathrm{d}p = \int_0^1 q_{1-p}\gamma(1-p)\mathrm{d}p.$$

$1-p=r$ helyettesítéssel kapjuk($dr = -dp$):

$$\int_0^1 q_{1-p}\gamma(1-p)\mathrm{d}p = -\int_1^0 q_r\gamma(r)\mathrm{d}r = \int_0^1 q_r\gamma(r)\mathrm{d}r = N_\gamma.$$

Sikerült tehát belátnunk az állítást a folytonos esetre. A diszkrét esetre szintén belátható az állítás. ∎

Nguyen, Pham és Tran a második, veszteség alapú megközelítést használták a cikkükben a spektrális kockázati mérték kiszámolására, így jelen dolgozat is ezt a megközelítésmódot fogja választani.

2.3. A Choquet integrál és a spektrális kockázati mérték kapcsolata

A spektrális kockázati mértékek és a Choquet integrálok között fennáló kapcsolatot felhasználva különböző tételeket fogunk felírni a spektrális kockázati mértékekre, ezzel megkönnyítve a kérdéskörünk vizsgálatát.

2. Definíció (Choquet integrál). *[7] Legyen S egy halmaz, és F az S részhalmazainak egy halmaza. Tekintsük az $f: S \to \mathbb{R}$ függvényt, és egy monoton $\mu: F \to \mathbb{R}^+$ halmazfüggvényt. Tegyük fel, hogy f mérhető a μ függvényre, vagyis: $\forall \quad x \in \mathbb{R} : \{s|f(s) \geq x\} \in F$. Ekkor az f függvénynek a μ mértékre vonatkozó Choquet integrálját a következőképpen kaphatjuk meg:*

$$\int f\mathrm{d}\mu := \int_{-\infty}^0 (\mu(\{s|f(s) \geq x\}) - \mu(S))\mathrm{d}x + \int_0^\infty \mu(\{s|f(s) \geq x\})\mathrm{d}x,$$

ahol a jobboldali integrálok a szokásos Riemann integrálok.

A Choquet integrálok külön eseteként tekinthetünk a Choquet kockázati mértékekre. Ebben az esetben az X valószínűségi változónak nézzük egy adott mértékre vonatkozó Choquet integrálját. Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változóra mint függvényre tekintünk, amely az eseményekhez rendel egy valós számot. Legyen $\mu : A \to [0, 1]$ mérték. Ekkor:

$$\int X \mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{0} (\mu(\{\omega | X(\omega) \geq x\}) - 1) \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mu(\{\omega | X(\omega) \geq x\}) \mathrm{d}x,$$

a Choquet integrálok egy alesete, mely az X valószínűségi változónak a μ mértékre vonatkozó Choquet integrálja.

Ennek azt a speciális esetét, amikor $\mu = h \circ P$ alakban fennáll, fogjuk Choquet integrál kockázati mértéknek nevezni. Ebben az esetben tehát:

$$\rho_h(X) = \int_{0}^{\infty} h(1 - F_X(x)) \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} [h(1 - F_X(x)) - 1] \mathrm{d}x.$$

Schmeidler tételének [10] egyik következményeként kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a Choquet integrál kockázati mértékek és a spektrális kockázati mértékek között.
A kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéshez nézzük a spektrális kockázati mértéknek a veszteség alapú megközelítését. A kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az $h(t) = 1 - \int_0^{1-t} \gamma(s) ds$, illetve $\gamma(s) = h'(1 - s)$ összefüggések mellett igaz. A h függvényt elutasítás függvénynek nevezzük. Mivel $\gamma(s) = \phi(1 - s)$ igaz, ezért $h'(s) = \phi(s)$ is teljesülni fog. A továbbiakban a h' jelölést fogjuk használni.

2.4. Alapvető tételek a spektrális kockázati mértékkel kapcsolatban

Ebben a részben néhány fontos, alapvető, saját eredményt fogunk ismertetni a spektrális kockázati mértékekkel kapcsolatban, melyeket a későbbiekben, más tételek bizonyításánál fel fogunk haszálni.

2.2. Lemma. *A spektrális kockázati mérték értéke $\gamma \equiv 1$ függvény esetén minimális.*

Bizonyítás: Tekintsük a spektrális kockázati mértéknek a Cotter, Dowd és Sorwar [14] cikkében alkalmazott definícióját.

$$N_\gamma = \int_0^1 \gamma(p) q_p \mathrm{d}p,$$

ahol γ monoton növő függvény, q szintén monoton növő függvény, hiszen eloszlásfüggvény inverze. Tekintsük a $[0,1]$ intervallumon azonosan 1 függvényt, és egy ettől eltérő γ függvényt. Mindkettőre igaz a γ definíciója miatt, hogy:

$$\int_0^1 \gamma(p)\mathrm{d}p = \int_0^1 1\mathrm{d}p = 1.$$

Mivel γ monoton növekvő, és integrálja 1, ezért biztosan van egy olyan legkisebb $a \in [0,1]$ pont, ahol $\gamma(a) \geq 1$. Induljunk ki a következő, definíció szerint igaz egyenletből:

$$\int_0^1 (1-\gamma(p))\mathrm{d}p = 0 = \int_0^a (1-\gamma(p))\mathrm{d}p + \int_a^1 (1-\gamma(p))\mathrm{d}p.$$

Nézzük meg a két spektrális kockázati mérték különbségét:

$$\int_0^1 q_p(1-\gamma(p))\mathrm{d}p = \int_0^a q_p(1-\gamma(p))\mathrm{d}p + \int_a^1 q_p(1-\gamma(p))\mathrm{d}p,$$

erről a kifejezésről szeretnénk belátni, hogy nempozitív. Mivel γ monoton növekvő függvény, ezért $p < a$-ra $\gamma(p) < 1$, $p \geq a$-ra $\gamma(p) \geq 1$. Mindkét integrált felül tudom becsülni, ha q_p helyére q_a-t írok, hiszen q monoton növő függvény.

Vagyis:

$$\int_0^1 q_p(1-\gamma(p))\mathrm{d}p = \int_0^a q_p(1-\gamma(p))\mathrm{d}p + \int_a^1 q_p(1-\gamma(p))\mathrm{d}p \leq$$

$$\leq q_a \int_0^a (1-\gamma(p))\mathrm{d}p + q_a \int_a^1 (1-\gamma(p))\mathrm{d}p = q_a \int_0^1 (1-\gamma(p))\mathrm{d}p = 0.$$

Tehát bebizonyítottuk, hogy tetszőleges γ függvény esetén a spektrális kockázati mérték értéke biztosan nem kisebb a $\gamma \equiv 1$ esetnél. ■

2.3. Lemma. *Ha a γ függvény pozitív Lebesgue mértékű halmazon eltér az azonosan 1 függvénytől, akkor a spektrális kockázati mérték értéke nagyobb a minimális értéknél.*

Bizonyítás: Mivel γ monoton növő függvény, ezért a pozitív Lebesgue mértékű halmaz ahol eltér az 1-től a függvény, biztosan egy $[0, v]$, és egy $[w, 1]$ alakú intervallum lesz, ahol a $[0, v]$ intervallumon nem nagyobb γ értéke 1-nél, $[w, 1]$ intervallumon nem kisebb γ értéke 1-nél és előfordulhat, hogy $v = w$. Ellenkező esetben ha nem két ilyen intervallumon térne el az értéke az azonosan 1 függvénytől, akkor nem pozitív mértékű lenne a halmaz Lebesgue mértéke, ahol eltér γ 1-től, hiszen a γ függvény integrálja $[0, 1]-$en 1.
Az általánosított veszteségeloszlás-függvény inverz biztosan nem konstans, mivel egy véletlen valószínűségi változót tekintünk. Másrészről monoton növő függvény, ezért biztosan létezik olyan $v' \in [0, v]$, és $w' \in [w, 1]$ pontpáros, amelyre $q_{v'} < q_{w'}$. Tekintsük a következő kifejezések közül a minimálisat:

$$\int_0^{v'} (1 - \gamma(p))\mathrm{d}p, \int_{w'}^1 (\gamma(p) - 1)\mathrm{d}p.$$

Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $\int_0^{v'} (1-\gamma(p))\mathrm{d}p$ a kisebb. Ekkor vegyük azt a $w'' > w'$ pontot, melyre:

$$\int_0^{v'} (1 - \gamma(p))\mathrm{d}p = \int_{w''}^1 (\gamma(p) - 1)\mathrm{d}p.$$

Ilyen w'' pont biztosan létezik, hiszen az integrálfüggvény folytonos, és $\lim_{x \to 1} \int_x^1 (\gamma(p) - 1)\mathrm{d}p = 0$, valamint $\int_{w'}^1 (\gamma(p) - 1)\mathrm{d}p > \int_0^{v'} (1 - \gamma(p))\mathrm{d}p > 0$. Mivel $q_{v'} < q_{w'}$, ezért $q_{v'} < q_{w''}$ is teljesülni fog a monoton növekedés miatt. Vagyis:

$$\int_0^1 q_p(1 - \gamma(p))\mathrm{d}p = \int_0^{v'} q_p(1 - \gamma(p))\mathrm{d}p + \int_{w''}^1 q_p(1 - \gamma(p))\mathrm{d}p+$$

$$+ \int_{v'}^a q_p(1 - \gamma(p))\mathrm{d}p + \int_a^{w''} q_p(1 - \gamma(p))\mathrm{d}p \leq$$

$$\leq q_{v'} \int_0^{v'} (1 - \gamma(p))\mathrm{d}p + q_{w''} \int_{w''}^1 (1 - \gamma(p))\mathrm{d}p+$$

$$+q_a \int_{v'}^a (1 - \gamma(p))\mathrm{d}p + q_a \int_a^{w''} (1 - \gamma(p))\mathrm{d}p,$$

ahol $a \in [0,1]$ itt is az a legkisebb pont, amelyre $\gamma(a) \geq 1$.
A v' és w'' pontok megválasztása miatt a következő biztosan igaz:

$$\int_{v'}^{a} (1-\gamma(p))\mathrm{d}p + \int_{a}^{w''} (1-\gamma(p))\mathrm{d}p = 0.$$

Tehát az integrálokat úgy alakítottuk, hogy páronként mínusz egyszeresei legyenek egymásnak, így az utolsó két tag kiesik:

$$\int_0^1 q_p(1-\gamma(p))\mathrm{d}p \leq$$

$$\leq (q_{v'} - q_{w''}) \int_0^{v'} (1-\gamma(p))\mathrm{d}p < 0.$$

■

2.4. Megjegyzés. $\gamma \equiv 1$ *esetében a spektrális kockázati mérték értéke a portfólió várható nyereségének mínusz egyszerese, vagyis a portfólió várható vesztesége.*

A fentiek segítségével megkaptuk, hogy a spektrális kockázati mérték értéke biztosan nem kisebb a pozíció várható veszteségénél, és csak akkor egyenlő, ha a γ függvényünk nullmértékű halmaz kivételével az azonosan 1 függvény.

2.5. A spektrális kockázati mérték értékének növekedése a részvénytartás idejének növekedésével

Az elmúlt években komoly közgazdasági vita tárgyát képezte, hogy a részvénytartás kockázata a részvénytartás idejének növekedésével nő-e vagy csökken.
Bodie 1995-ös [24] cikkében az addigi konvencióval szemben arról írt, hogy a részvénytartás kockázatának az idő növelésével növekednie kell. A kockázatot az addigiaktól eltérően kezelte. A kockázatot addig azzal a kérdéssel hozták összefüggésbe, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy a részvényem értéke ($S(t)$) egy jövőbeli pillanatban (t) kisebb lesz, mint ha a jelenlegi

részvényárfolyamot (S_0) kockázatmentes kamatláb mellett befektetném. Ekkor a betétem értéke S_0e^{rt} lenne a t időpontban. Annak a valószínűsége, hogy a részvényem értéke $S_0e^{rt}-$nél kisebb lesz valóban csökken t növekedésével. Ez a megközelítés azonban nem veszi figyelembe, hogy mennyivel kisebb a részvényem értéke $S_0e^{rt}-$nél, és t növekedésével a részvényem értéke nyilván jóval nagyobb nagyságrendben térhet el $S_0e^{rt}-$nél.
Bodie mindezek miatt egy ettől eltérő megközelítését választotta a kockázat mérésére. Azt vizsgálta, hogy hogyan változik annak a put ociónak az ára, mellyel el tudom érni, hogy t időpontban legalább S_0e^{rt} összeggel rendelkezzek a put opció és a részvény 0 időpontban történő egyidejű megvásárlásával. Tehát egyfajta portfólióbiztosítás árát vizsgálta különböző t időpontokban, és azt találta, hogy a put opció ára t növekedésével növekszik, vagyis a kockázat az idővel növekszik ebben a megközelítésben.

Bodie-nak ez a megközelítése azonban számos kritikát kapott, és egy vita alakult ki az állítása helyességéről. Taylor és Brown 1996-os [21] cikkében a konstans szórás feltételezését találta alkalmatlannak Bodie bizonyításában. Dempsey, Hudson, Littler és Keasey [15] szintén 1996-os cikkében arról ír, hogy Bodie elbukta a vitát.
Treussard 2006-os [11] cikkében azonban mégis Bodie megközelítésére alapozva vizsgálta a VaR és az Expected Shortfall értékét a GBM részvényárfolyam modellben.
Nguyen, Pham és Tran [9] pedig szintén Bodie tételét vette alapul, és ezzel vizsgálta a GBM részvényárfolyam modellben a spektrális kockázati mérték kiszámítását, és arra következtettek, hogy a kockázatsemleges mértékben kell kiszámolni ezeket a mértékeket, Treussard sejtését figyelembe véve. Itt Treussard sejtése lényegében Bodie tétele, és mi is így fogjuk hívni a következőkben azt a megfontolást, miszerint a részvénytartás kockázatának növekednie kell az időhorizont növelésével.
Mi is Treussard sejtését alapul véve fogjuk vizsgálni a spektrális kockázati mérték értékének kiszámítását különböző részvényárfolyam modellekben.

3. Spektrális kockázati mérték a GBM részvényárfolyam modellben

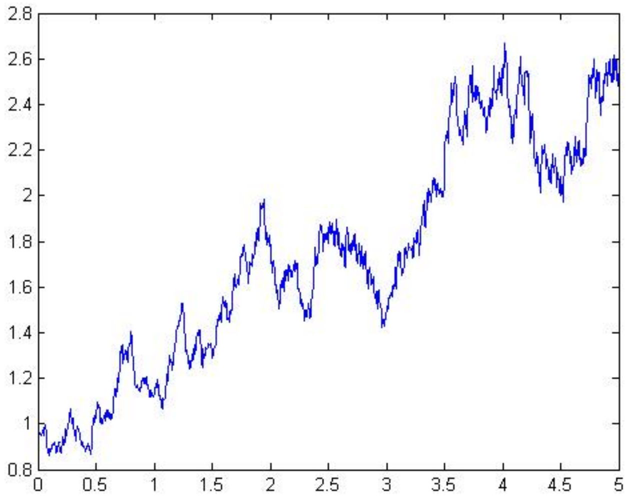
Nguyen, Pham és Tran cikkének fő kérdése az volt, hogy milyen feltételek mellett lehet biztosítani az előzőekben említett időkonzisztencia feltételt spektrális kockázati mértékek számításakor.

A következő, ismert részvényárfolyam modellt vezették be:

$$dS_t = \mu S_t d_t + \sigma S_t dW_t. \tag{1}$$

Vagyis a részvényárfolyam mozgására a szokásos geometriai Brown-mozgást feltételezték.

$S(t)$-vel jelölve a t. időpontbeli részvényárat, a 0. időpontban a befektető eldöntheti, hogy az S_0 részvényárfolyamnyi pénzt vagy befekteti r kockázatmentes kamatláb mellett, vagy megveszi a részvényt.



1. ábra. A geometriai Brown-mozgás egy 5 éves szimulációja $\mu = 0,12$ és $\sigma = 0,21$ paraméterekkel.

A következő véletlen változónak fogjuk a kockázatát vizsgálni:

$$Y(t) = S_0 e^{rt} - S(t).$$

Tehát a biztos pénzből levonjuk a kockázatos részvényárfolyamot. Amennyiben $Y(t)$ pozitív (biztosan nem nagyobb S_0e^{rt}-nél), akkor a részvény rosszul teljesített, ha $Y(t)$ negatív, a részvény jól szerepelt.
Mivel $\gamma : [0,1] \to [0,\infty]$ monoton növekvő függvény, így a pozitív $Y(t)$ elemekhez fogja a nagyobb értékeket rendelni, vagyis amikor a részvénnyel veszítettünk volna.
Ezzel a véletlen változóval tehát a pozíciónknak a veszteség alapú vizsgálatához jutunk.
A geometriai Brown-mozgás (1) adott t időpontbeli eloszlását a következő képlettel kapjuk:

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\sqrt{t}Z},$$

ahol $W(t)$ a Wiener folyamat t helyen felvett értéke, Z pedig egy sztenderd normális eloszlású valószínűségi változó. A fenti átalakítás igaz, hiszen $W(t)$ egy t szórásnégyzetű, 0 várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó. A fenti formula miatt igaz a következő összefüggés:

$$F_t(x) = \mathbb{P}(S(t) \leq x) = \Phi\left(\frac{ln(\frac{x}{S_0}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

ahol F_t az $S(t)$ eloszlásfüggvénye, Φ pedig a sztenderd normális valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

Az $Y(t)$ spektrális kockázati mértékét az alábbi összefüggéssel kapjuk meg:

$$\rho(h(Y(t))) = \int_0^\infty h(\mathbb{P}(Y(t) > x))dx + \int_{-\infty}^0 [h(\mathbb{P}(Y(t) > x)) - 1]dx.$$

A következőben a GBM részvényárfolyam modell mellett igaz általános formulát adjuk meg a spektrális kockázati mértékek kiszámolására.

A spektrális kockázati mérték kiszámításához a következő valószínűségre lesz szükségünk:

$$\mathbb{P}(Y(t) > x) = \mathbb{P}(S_0e^{rt} - S(t) > x) = \mathbb{P}(S(t) < S_0e^{rt} - x) =$$

$$= \Phi\left(\frac{ln(\frac{S_0 e^{rt}-x}{S_0}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

A következő helyettesítéssel élünk:

$$\frac{ln(\frac{S_0 e^{rt}-x}{S_0}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} = z, \quad \text{vagyis} \quad dx = -\sigma\sqrt{t}S_0 e^{z\sigma\sqrt{t}+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t}dz.$$

Ebből adódik, hogy:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 \int_{-\infty}^{C} h(\Phi[z])\sigma\sqrt{t}e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\sqrt{t}z}\mathrm{d}z+$$

$$+S_0 \int_{C}^{\infty} [h(\Phi[z]) - 1]\sigma\sqrt{t}e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\sqrt{t}z}\mathrm{d}z.$$

ahol

$$C = \frac{rt - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

Egyszer parciálisan integrálva kapjuk, hogy:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z].$$

Megkaptuk tehát az általános formulánkat a spektrális kockázati mérték kiszámítására.

A szerzők különböző tételeket bizonyítottak be $\rho(h(Y(t)))$ értékére, mindezt annak a kérdésnek az eldöntése érdekében, hogy a Treussard sejtés milyen feltételek esetén teljesül, illetve sérül. Különös tekintettel azt vizsgálták, hogy a statisztikai, vagy a kockázatsemleges mértékben kell-e számolni a spektrális kockázati mértéket.

A statisztikai mértékben a részvényárfolyam a következő dinamikával írható le:

$$dS_t = \mu S_t d_t + \sigma S_t dW_t,$$

ahol μ a részvény megfigyelt hozamának tekinthető.
A kockázatsemleges mértékben a részvényárfolyam a következő dinamikával írható le:

$$dS_t = rS_t d_t + \sigma S_t dW_t,$$

ahol r a kockázatmentes kamatlábnak tekinthető.

Ismert, hogy a kockázat megfelelő portfólió kialakításával kiküszöbölhető, így az opcióárazást a kockázatsemleges mértékben kell elvégezni. Nyitott kérdés azonban, hogy a spektrális kockázati mérték számítását melyik mértékben végezzük. Ezzel kapcsolatban ismertettek tételeket a szerzők.

3.1. Tétel. *Ha $h'(\cdot)$ alulról korlátos valamely $C \neq 0$ konstanssal, akkor a GBM részvényárfolyam modell esetén $\rho(h(Y(t)))$ negatív megfelelően nagy $t-$re a statisztikai mértékben.*

Bizonyítás:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z \geq$$
$$\geq C\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z \geq C \geq 0,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség belátásához vegyük észre, hogy az integrál pont 1, mivel egy normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényét integráljuk $-\infty-$től $\infty-$ig.

Mivel a statisztikai mértékben $\mu > r$, ezért:

$$e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z$$

kifejezés tart a végtelenbe, ha t tart végtelenbe. Vagyis $\rho(h(Y(t)))$ tart $-\infty-$be, a tétel tehát helyes. ∎

Vagyis megkaptuk, hogy amennyiben a legkisebb veszteséghez is pozitív súlyt rendelünk, vagyis az összes lehetséges portfólió-kimenet pozitív súllyal szerepel, akkor a statisztikai mértékben a spektrális kockázati mérték értéke tart a mínusz végtelenbe, ha $t-$vel tartunk végtelenbe.

3.2. Tétel. *Ha h' folytonos minden pontban és $\mu - r - \frac{\sigma^2}{2} > 0$, akkor a GBM részvényárfolyam modell esetén $\rho(h(Y(t)))$ negatív kellően nagy $t-$re a statisztikai mértékben.*

Bizonyítás:

Mivel h' nemnegatív, monoton csökkenő, folytonos és integrálja $[0,1]-$en 1, emiatt biztosan létezik egy olyan zárt A intervallum $[0,1]-$en, amire igaz:

$$h'(x) \geq c \quad \forall \quad x \in A,$$

ahol $c > 0$. Emiatt a következőt kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z =$$

$$= \int_{\Phi^{-1}A} h'(\Phi[z]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{R\setminus\Phi^{-1}A} h'(\Phi[z]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z \geq$$

$$\geq c \int_{\Phi^{-1}A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{R\setminus\Phi^{-1}A} h'(\Phi[z]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z.$$

Mivel h' monoton csökkenő, ezért biztos, hogy az A intervallum $[0,a]$ alakú, ahol $0 < a < 1$. Ekkor $\Phi^{-1}(A) = (-\infty, b]$, ahol $b = \Phi^{-1}(a)$. A $(-\infty, b]$ intervallum $\forall \quad x$ elemére tehát $h'(x) \geq c$. Vegyük ennek az intervallumnak a $[a', b]$ részintervallumát. Mivel $h' \geq 0$ mindenhol, ezért:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z \geq$$

$$\geq c \int_{a'}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z =$$

$$= c[\Phi(b - \sigma\sqrt{t}) - \Phi(a' - \sigma\sqrt{t})].$$

Ahol az utolsó átalakítás azért igaz, mert a $\sigma\sqrt{t}$ várható értékű, 1 szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényét integráltuk az $[a', b]$ intervallumon.

A középértéktételt felhasználva:

$$c[\Phi(b - \sigma\sqrt{t}) - \Phi(a' - \sigma\sqrt{t})] \geq$$

$$\geq c(b - a') e^{\frac{-1}{2}(d-\sigma\sqrt{t})^2},$$

valamely $d \in [a', b]-$re.

Tehát:

$$e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z \geq$$
$$\geq e^{(\mu-r)t}c\cdot(b-a')e^{\frac{-1}{2}(d-\sigma\sqrt{t})^2} =$$
$$= c\cdot(b-a')e^{(\mu-r-\frac{\sigma^2}{2})t+d\sigma\sqrt{t}-\frac{1}{2}d^2}.$$

Mely kifejezés a $\mu-r-\frac{\sigma^2}{2}>0$ feltétel miatt végtelenbe tart, ha $t-$vel tartunk végtelenbe. Vagyis a tétel valóban igaz, hiszen egy $-\infty-$be és egy $\infty-$be tartó tényező szorzata $-\infty-$be tart. ■

A következő saját eredmény is igaz.

3.3. Tétel. *3.2 tetszőleges h' függvény esetén igaz.*

Bizonyítás: Mivel h' monoton csökkenő függvény egy zárt intervallumon, ezért csak megszámlálható sok szakadása lehet, vagyis majdnem mindenütt folytonos.
Két eset lehetséges: létezik olyan $c, d > 0$, hogy $[c, d]-$n pozitív h', illetve, hogy nem létezik ilyen $c, d > 0$.

Első esetben a bizonyítás befejezhető az előző tétel segítségével $A = [c, d]$ választással.

Második esetben ha nincs olyan $[c, d]$ intervallum, ahol pozitív a függvény, az azt jelenti, hogy $h'(a) = 0 \quad \forall \quad a > 0$ esetén. Ellenkező esetben $[0, a]$ megfelelő intervallum lenne.
Ebben az esetben lényegében a degenerált Dirac delta lesz a h' függvényünk. Csak a legnagyobb veszteséghez fog súlyt rendelni a kockázati mértékünk, minden máshoz 0 nulla súlyt rendel. Vagyis ebben az esetben a spektrális kockázati mérték értéke: $(S_0e^{rt} - \max(S(t)))$ lesz. Ez a kifejezés biztosan tart a mínusz végtelenbe.

■

3.4. Tétel. *Ha $h'(1) > 0$, akkor a GBM részvényárfolyam modell esetén $\rho(h(Y(t)))$ negatív megfelelően nagy $t-$re a statisztikai mértékben.*

Bizonyítás:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z \geq$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{t}} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z$$

Parciálisan integrálva kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{t}} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z =$$

$$= [h'(\Phi[z])G_t(z)]_{-\infty}^{\sigma\sqrt{t}} - \int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{t}} h''(\Phi[z])\phi(z)G_t(z)\mathrm{d}z,$$

ahol $G_t(z)$ a $\sigma\sqrt{t}$ várható értékű, 1 szórású normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Felhasználva, hogy h' monoton csökkenő függvény, vagyis $h'' \leq 0$:

$$[h'(\Phi[z])G_t(z)]_{-\infty}^{\sigma\sqrt{t}} - \int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{t}} h''(\Phi[z])\phi(z)G_t(z)\mathrm{d}z \geq$$

$$\geq [h'(\Phi[z])G_t(z)]_{-\infty}^{\sigma\sqrt{t}} \geq \frac{1}{2}h'(\Phi[\sigma\sqrt{t}]) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}h'(1) > 0.$$

Vagyis:

$$e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z$$

megfelelően nagy $t-$re nagyobb lesz 1-nél, ennélfogva $\rho(h(Y(t)))$ negatív lesz megfelelően nagy $t-$re. ■

3.5. Megjegyzés. *3.1 és 3.4 ekvivalens. Mivel h' monoton csökkenő, így ha $h'(1) > 0$, abból következik, hogy $h'(\cdot)$ alulról korlátos egy $C > 0$ számmal, illetve ha $h'(\cdot)$ korlátos egy $C > 0$ számmal, abból is nyilván következik, hogy $h'(1) > 0$.*

3.6. Tétel. *Ha*

$$\lim_{t\to\infty}(e^{(\mu-r)t}h'(\Phi[\sigma\sqrt{t}])) = \infty,$$

akkor a GBM részvényárfolyam modell esetén $\rho(h(Y(t)))$ negatív megfelelően nagy $t-$re a statisztikai mértékben.

Bizonyítás:

3.4 bizonyításához hasonlóan:

$$e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}e^{(\mu-r)t}h'(\Phi[\sigma\sqrt{t}]),$$

vagyis a feltétel miatt

$$e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z$$

megfelelően nagy $t-$re nagyobb lesz 1-nél, ennélfogva $\rho(h(Y(t)))$ negatív lesz megfelelően nagy $t-$re. ∎

A statisztikai mértékben, amikor $\mu > r$ tehát nem teljesül a Treussard sejtés, miszerint az idő növelésével a kockázatnak növekedni kell. Ennélfogva ez a mérték alkalmatlannak bizonyul spektrális kockázati mérték számítására.

A kockázatsemleges mértékben, amikor $\mu = r$ a következő képlet adódik a spektrális kockázati mértékre:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0e^{rt}[1-\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z].$$

Egy segédtételre lesz szükségünk a probléma vizsgálatához.

3.7. Tétel. *$\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z$ monoton csökkenő t függvényében.*

Bizonyítás: Az integrandus egy szorzat, aminek a második tényezője egy $\sigma\sqrt{t}$ várható értékű, 1 szórású normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének értéke a z helyen.

Ha $t-$t növeljük, akkor az új sűrűségfüggvény ugyanazokat az értékeket fogja felvenni, csak más helyen. Jelölje a $\sigma\sqrt{t}$ várható értékű, 1 szórású normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényét f_t, a $\sigma\sqrt{t'}$ várható értékű, 1 szórású normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényét $f_{t'}$, ahol $t < t'$. Ekkor tetszőleges $z-$hez létezik olyan z', hogy $f_t(z) = f_{t'}(z')$, hiszen mindkét függvény ugyannnyi szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

Mivel $t < t'$, ezért $f_t(z) = f_{t'}(z')$ esetén $z < z'$, hiszen úgymond eltoltuk

jobbra a sűrűségfüggvényt a két várható érték különbségének megfelelő értékkel.
Az integrandust a második tényezők szerint csoportosítjuk, vagyis két adott időponthoz $t-$hez, és $t'-$hez, minden $z-$re megkeressük azt a $z'-$t, melyre $f_t(z) = f_{t'}(z')$.
Ekkor a két integrandusban $h'(\Phi[z']) \cdot f_{t'}(z')$ illetve $h'(\Phi[z]) \cdot f_t(z)$ alakú tagok fognak szerepelni. Mivel h' monoton csökkenő függvény, ezért
$h'(\Phi[z']) \cdot f_{t'}(z') \leq h'(\Phi[z]) \cdot f_t(z)$ teljesülni fog. Az egyenlőtlenség minden z, z' párosra igaz, így az integrálra is igaz lesz. Vagyis

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z$$

monoton csökkenő t függvényében. ∎

Térjünk vissza a kiinduló problémánkhoz. Nguyen, Pham és Tran [9] cikkükben vizsgálták a spektrális kockázati mértéket a GBM részvényárfolyam modell kockázatsemleges mértékében is. Egy tételt is felírtak, amelynek bizonyítása jelen dolgozat szerzője szerint pontatlan és elnagyolt.
A 2.4 részben említett tételek és 3.7 segítségével azonban egy pontos bizonyítást próbálunk adni erre a tételre.

3.8. Tétel. *A GBM részvényárfolyam modell esetén a spektrális kockázati mérték értéke monoton nő $t-$ben a kockázatsemleges mértékben.*

Bizonyítás: A pozíciónk: $Y(t) = S_0 e^{rt} - S(t)$.

Ennek várható értéke pontosan 0 a kockázatsemleges $\mu = r$ mértékben. Tehát a nemtriviális $\gamma \equiv 1$ függvényt leszámítva a spektrális kockázati mérték értéke biztosan nagyobb lesz 0-nál $\forall \quad t-$re.

Ugyanakkor a spektrális kockázati mérték értékét ebben az esetben a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z].$$

Az első tag pozitív, monoton nő. A második tagnak is pozitívnak kell lennie (ha nem a triviális esetről beszélünk), hiszen a mérték értéke biztosan pozitív, és a 3.7 tétel következményeként monoton növekvő, így elmondható, hogy a szorzatuk is monoton növekszik. ■

Ezzel Treussard feltétele teljesül a kockázatsemleges mértékben. Elmondható tehát, hogy a spektrális kockázati mérték kiszámítása a kockázatsemleges mértékben kell, hogy megtörténjen a GBM részvényárfolyam modellben. A GBM részvényárfolyam modell mellett azonban sok másik részvényárfolyam modellt is alkalmaznak a pénzügyi matematikában, melyek a Lévy folyamatokkal hozhatók összefüggésbe. Nézzük át ennélfogva a Lévy folyamatokról az alapvető tudnivalókat!

4. A Lévy folyamatokról nagyon röviden

A Lévy folyamatokat a pénzügyi matematikában alkalmazzák előszeretettel az utóbbi időkben. A Lévy folyamatok speciális sztochasztikus folyamatok, többek között a Wiener folyamat, illetve a Poisson folyamat is speciális Lévy folyamat. A Lévy folyamatokról Cont és Tankov 2004-es [20] könyvében találunk részletes leírást, az alábbi tulajdonságai is ott találhatók meg gondosan kifejtve.

3. Definíció (Lévy folyamat). *Egy $\mathbb{R}^d$ értékű cadlag $\{X(t) : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatot Lévy folyamatnak nevezünk, amennyiben teljesíti a következő tulajdonságokat:*

- $X(0) = 0$,
- $X(t)$ *független növekményű,*
- $X(t)$ *stacionárius növekményű*
- $X(t)$ *sztochasztikusan folytonos:*

$$\forall \quad \epsilon > 0, \quad \lim_{h \to 0} \mathbb{P}(|X(t+h) - X(t)| \geq \epsilon) = 0.$$

4. Definíció (Végtelenül osztható eloszlás). *Egy F valószínűségi eloszlást végtelelenül oszthatónak nevezünk, ha minden n pozitív egészre létezik*

$X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változó, hogy $X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nn}$ F eloszlású.

A Lévy folyamatokon belül fontos részhalmazt alkotnak az Összetett Poisson folyamatok.

5. Definíció (Összetett Poisson folyamat). *Az Összetett Poisson folyamat $\lambda > 0$ intenzitással, és f ugráseloszlással egy $X(t)$ sztochasztikus folyamat:*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y(i),$$

ahol az $Y(i)$ ugrásnagyságok független azonos eloszlású valószínűségi változók f eloszlással, és $N(t)$ egy λ intenzitású Poisson folyamat, amely független $\forall \quad Y(i)-$től.

Két fontos mérték definiálására szintén szükség van a Lévy folyamatok megértéséhez.

6. Definíció (Ugrásmérték). *$J_X(\mathbb{B})$ az $X(t)$ folyamat ugrásmértéke, ha $\forall \quad \mathbb{B} \subset \Big([0, \infty] \times (\mathbb{R} \setminus 0)\Big)$ halmazra:*

$$J_X(\mathbb{B}) = \#\{t : (t, X(t) - X(t-)) \in \mathbb{B}\}.$$

7. Definíció (Lévy mérték). *Legyen $\{X(t) : t \geq 0\}$ egy $\mathbb{R}^d-$beli Lévy folyamat. Ekkor a ν $\mathbb{R}^d-$beli mértéket:*

$$\nu(A) = \mathbb{E}[\#\{t \in [0,1] : \Delta X(t) \neq 0, \quad \Delta X(t) \in A\}], \quad A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^d),$$

az $X(t)$ folyamat Lévy mértékének nevezzük. Ekkor $\nu(A)$ az egységnyi idő alatt beérkező azon ugrások várható száma, amely ugrásnagyság A-ba tartozik.

Ezen mértékek meghatározóak a Lévy folyamatok vizsgálata során.

4.1. Tétel (Lévy-Ito dekompozíció). *Legyen $\{X(t) : t \geq 0\}$ egy $\mathbb{R}^d-$beli Lévy folyamat, ν Lévy mértékkel. Ekkor:*

- *ν egy Radon mérték $\mathbb{R}^d \setminus 0$-n és teljesíti:*

$$\int_{|X|\leq 1} |x|^2\nu(dx) < \infty, \int_{|X|\geq 1} \nu(dx) < \infty.$$

- *$X(t)$ ugrásmértéke, melyet J_X-el jelölünk, egy Poisson véletlen mérték $[0,\infty] \times \mathbb{R}^d$-n, $\quad \nu(dx)dt$ intenzitásmértékkel.*

- *Létezik egy γ vektor, és egy d dimenziós $B(t)$ Brown mozgás A kovariancia mátrixxal, hogy:*

$$X(t) = \gamma t + B(t) + X(t)^l + \lim_{\epsilon\to 0} X(t)^\epsilon,$$

ahol:

$$X(t)^l = \int_{|x|\geq 1, s\in[0,t]} xJ_x(ds \times dx),$$

és:

$$X(t)^\epsilon = \int_{\epsilon\leq|x|\leq 1, s\in[0,t]} x\{J_x(ds\times dx) - \nu(dx)ds\}.$$

Egy másik nagyon fontos tétel a Lévy Hincsin reprezentációs tétel a Lévy folyamatokkal kapcsolatban.

4.2. Tétel (Lévy Hincsin reprezentációs tétel). *Legyen $\{X(t) : t \geq 0\}$ egy $\mathbb{R}^d-$beli Lévy folyamat (A, ν, γ) karakterisztikus hármassal. Ekkor:*

$$\mathbb{E}[e^{iz^tX(t)}] = e^{t\phi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d,$$

ahol a ϕ függvény a következő:

$$\phi(z) = -\frac{1}{2}z^tAz + i\gamma^tz + \int_{\mathbb{R}^d}(e^{iz^tx} - 1 - iz^tx1_{|x|\leq 1})\nu(dx).$$

A Lévy folyamatokat tehát a karakterisztikus hármasuk (A, ν, γ) egyértelműen meghatározza, és a karakterisztikus függvényre a fenti formula igaz.
A következő fejezetekben speciális Lévy folyamatokat felhasználva különböző modellekben vizsgáljuk a spektrális kockázati mérték értékét.

5. Spektrális kockázati mérték az FMLS(Finite moment log stable) részvényárfolyam modellben

Egy speciális részvényárfolyam modellben fogjuk vizsgálni Treussard sejtését a spektrális kockázati mértékek kiszámítására. Carr és Wu 2003-as [17] cikkét használjuk fel ehhez. Ők ebben úgynevezett véges momentumú Lévy-stabil(Finite moment log stable) folyamatokat vizsgáltak opcióárazás szempontjából.

A stabil eloszlások a valószínűségi eloszlásoknak egy osztálya, amelyek vastag farkúságot, és ferdeséget engedélyeznek. Széles körben alkalmazzák őket pénzügyi adatok modellezésére. A stabil eloszlásokról Nolan 2005-ös [13] könyvében ír nagy terjedelemben, a következő alapvető tudnivalók is ott találhatók meg részletesen.
A stabil eloszlások definíciója:

Ha X, X_1, X_2, ..., X_n független, azonos eloszlású stabil valószínűségi változók, akkor:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n,$$

valamely $c_n > 0$ és d_n konstansra. Itt az egyenlőséget eloszlásban kell értelmezni, vagyis a jobb és bal oldalon azonos eloszlású valószínűségi változók szerepelnek.

A stabil eloszlásokat négy paraméterrel lehet leírni: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Általánosságban nincs zárt formula a stabil eloszlások sűrűség és eloszlásfüggvényére, néhány ismert eloszlás azonban kivételnek tekinthető.

Az α paramétert indexnek, vagy a stabilitás indexének szokás nevezni, és $0 < \alpha \leq 2-$nek biztosan teljesülnie kell. A definícióban szereplő c_n konstansnak $n^{\frac{1}{\alpha}}$ alakúnak kell lennie.

A β paraméter a ferdeséget jelöli, és biztosan $-1 \leq \beta \leq 1$. Ha $\beta = 0$, akkor az eloszlás szimmetrikus, ha $\beta > 0$, akkor az eloszlás jobb oldali irányba ferdült, ha $\beta < 0$, akkor az eloszlás bal oldali irányba ferdült.

A γ paraméter az úgynevezett skála paraméter, minden pozitív számot felvehet.

A δ paraméter a lokációs paraméter, ez jobbra tolja az eloszlást, ha $\delta > 0$, és balra tolja az eloszlást, ha $\delta < 0$.

A stabil eloszlásoknak tehát a sűrűség- és eloszlásfüggvényük csak néhány esetben fejezhető ki zárt alakban, a karakterisztikus függvényüket azonban mindig ki tudjuk fejezni.

Ha X stabil eloszlású valószínűségi változó $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ paraméterekkel, akkor a karakterisztikus függvénye:

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{iuX}) = e^{-|\gamma u|^\alpha [1 - i\beta sign(u)\Delta] + i\delta u},$$

ahol $sign(u)$ az előjele az u értéknek, Δ pedig a következőképpen adható meg:

$$\Delta = tan(\pi\alpha/2), \quad \text{ha} \quad \alpha \neq 1; \quad \Delta = \frac{-2}{\phi} log|t|, \quad \text{ha} \quad \alpha = 1.$$

A sűrűségfüggvényt az ismert képlet alapján kaphatjuk a karakterisztikus függvényből:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-itx} \mathrm{d}t.$$

Három aleset van, amikor ez zárt alakban kifejezhető: a normális- a Cauchy- és a Lévy eloszlások. A következő megfeleltetések mellett igazak ezek:

- $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2) = S(2, 0, \sigma/\sqrt{2}, 0)$,
- $\mathrm{Cauchy}(\gamma, \delta) = S(1, 0, \gamma, \delta)$,
- $\mathrm{Lévy}(\gamma, \delta) = S(1/2, 1, \gamma, \delta)$.

A normális eloszlást kivéve az összes stabil eloszlás vastag farkú.
A következő tétel igaz a stabil eloszlásokra, melyet a későbbiekben fel fogunk használni.

Független, stabil eloszlású valószínűségi változók lineáris kombinációja is stabil eloszlású a következő összefüggésekkel: ha $X_j \sim S(\alpha, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$, $j = 1 \ldots n$, akkor:

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

a következő összefüggésekkel:

$$\beta = \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_j sign(a_j)|a_j\gamma_j|^\alpha}{\sum_{j=1}^{n} |a_j\gamma_j|^\alpha},$$

$$\gamma^\alpha = \sum_{j=1}^{n} |a_j\gamma_j|^\alpha,$$

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} \delta_j.$$

A stabil eloszlások tehát a fenti alapvető tulajdonságokkal bírnak, nézzük meg, hogy milyen sztochasztikus folyamatokkal hozhatók kapcsolatba [8]. Egy $\{X(t) : t \in T\}$ sztochasztikus folyamatot stabil folyamatnak nevezünk, ha minden $t-$re $X(t)$ stabil eloszlású. A stabil folyamatok egy részhalmaza a Lévy α stabil folyamatok.

Egy $\{X(t) : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatot Lévy α stabil folyamatnak nevezünk, ha:

- $X(0) = 0$,
- X független növekményű,
- $X(t) - X(s) \sim S(\alpha, \beta, (t-s)^{\frac{1}{\alpha}}, 0), \ \forall \quad 0 \leq s < t < \infty$, valamely $0 < \alpha \leq 2, \quad -1 \leq \beta \leq 1$ paraméterekkel.

$\alpha = 2$ esetre pont a Wiener folyamatot kapjuk. A Lévy α stabil folyamatok hasonló szerepet játszanak a stabil folyamatok között, mint a Wiener folyamatok a Gauss folyamatok között.

Carr és Wu [17] Lévy α stabil folyamatokat használt tehát a részvényárfolyam modellezésére, mindezt a következő közgazdasági okok miatt.

Az úgynevezett implicit volatilitás smirk-et vizsgálták különböző pénztelenségi mérték értékek, és a lejárati idő függvényében az $S\&P$ 500 indexben megfigyelt árakra.

A pénztelenségi mértéket a következő képlettel kapjuk:

$$\xi = \frac{ln(K/F_0)}{\sigma'\sqrt{t}},$$

ahol σ' az index valamilyen átlagos volatilitásértékét jelöli. Legtöbbször ennek a meghatározásához az úgynevezett VIX értéket használják. K a kötési árfolyama az opciónak, F_0 pedig az implicit forward ára az indexnek a t időpontban.

A volatilitás smirk definiálásához szükségünk lesz néhány fogalomra [23]:

Jelöljük $\sigma_1(\xi)$-vel az implicit volatilitás értéket a ξ helyen.

Az ATM implicit volatilitást a következő képlettel kapjuk:

$$\sigma_{10} = \sigma_1(\xi)|_{\xi=0}.$$

Az implicit volatilitás és az ATM implicit volatilitás hányadosát nevezzük normalizált implicit volatilitásnak: $\frac{\sigma_1(\xi)}{\sigma_{10}}$.

Az ATM implicit volatilitás ferdeségének nevezzük a normalizált implicit volatilitásnak a pénztelenségi mértékre vonatkozó elsőrendű érzékenységét:

$$\gamma_1 = \frac{d}{d\xi}\left[\frac{\sigma_1(\xi)}{\sigma_{10}}\right]|_{\xi=0}.$$

Az ATM implicit volatilitás görbületének nevezzük a normalizált implicit volatilitásnak a pénztelenségi mértékre vonatkozó másodrendű érzékenységének a felét:

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}\left[\frac{\sigma_1(\xi)}{\sigma_{10}}\right]|_{\xi=0}.$$

A volatilitás smirk értéket a fenti fogalmak segítségével a következő képlettel kaphatjuk:

$$\sigma_1(\xi) = \sigma_{10}(1 + \gamma_1\xi + \gamma_2\xi^2).$$

Carr és Wu a volatilitás smirk értékét vizsgálta S&P 500 historikus adatokra különböző kötési árfolyamok és lejárati idők esetén, és azt figyelték meg, hogy az érték nem simul ki, a meredeksége a smirknek nem fog $0-$vá válni, ahogy a lejárati értéket ($t-$t) növeljük.

Ez a megfigyelés meglepő, és figyelmen kívül hagyja a centrális határeloszlás tételt. A centrális határeloszlástétel alapján a hozam értékeknek a normális eloszláshoz kellene konvergálnia, ahogy a lejárati értéket növeljük, mely magában foglalná, hogy a volatilitás smirk kisimulna, konstanssá válna, ahogy a lejárati időt növelnénk. Carr és Wu emiatt olyan modellt épített melyben a hozamoknak nem létezik másod- és magasabbrendű véges momentumuk, a centrális határeloszlástétel feltételei sérülnek, vagyis a lejárati idő növelésével se tekinthető a loghozam normális eloszlásúnak. Ebből a célból megfelelő a stabil eloszlású hozam feltételezése.

A szerzők pontosan megvizsgálták a historikus volatilitás smirk alakját, és ez alapján olyan modellt építettek, melynek a volatilitás smirkje teljesíti a megfigyelt tulajdonságokat.

A volatilitás smirk negatív, lefelé irányuló meredeksége asszimetriát, negatív ferdeségét tükrözi vissza a loghozam eloszlásának, a smirk pozitív görbülete vastag farkú loghozam eloszlásra utal.

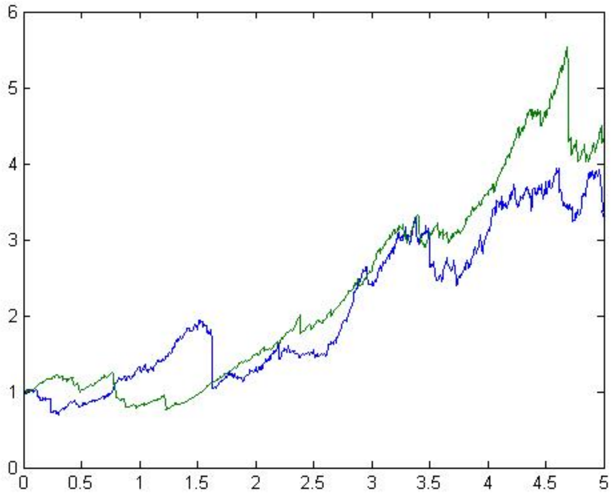
Az elmúlt évtizedekben már széles körben történt a modellezése a loghozamoknak Lévy folyamatokkal. Ezek közül néhány a Poisson ugró modell, a Variance-gamma modell, a Log-gamma modell, és a CGMY(Carr-Geman-Madan-Yor) modell. Ezekre a modellekre azonban a centrális határeloszlás tétel miatt a ferdeség abszolút értéke a lejárati idő négyzetgyökének reciprokával arányosan csökken, a görbület a lejárati idő reciprokával arányosan csökken. Ezeknek következtében a fenti modellekből kapott implicit volatilitás smirk nagyon gyorsan kisimul, ahogy a lejárati idő növekszik.
Sztochasztikus volatilitás modell használatával lelassíthatjuk a konvergencia sebességét, de nem állíthatjuk le, mindaddig, amíg a volatilitás modell stacionárius.

Carr és Wu tehát véges momentumú Lévy α stabil folyamatokat (FMLS) használt a részvényárfolyam modellezésére.
Ezeket a differenciálegyenleteket közvetlenül a martingál mértékben adták meg ($\mu = r$). A differenciálegyenlet, ami a részvényárfolyam mozgását leírja a következő alakba írható:

$$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dL_t^{\alpha,-1}, \quad \sigma > 0, \quad \alpha \in (1,2).$$

A geometriai Brown mozgással összehasonlítva a differenciálegyenletet, a Wiener folyamat helyett a fenti egyenletben Lévy α stabil folyamatokat használtunk. Vagyis $L_t^{\alpha,\beta}$ eloszlása egy sztenderdizált ($\delta = 0$) stabil eloszlású

valószínűségi változó minden $t-$re a következő paraméterekkel:
$L_t^{\alpha,\beta} \sim S(\alpha, \beta, t^{\frac{1}{\alpha}}, 0)$.



2. ábra. Az FMLS folyamat két darab 5 éves szimulációja. A zöld trajektórián $\mu = 0,12$ és $\sigma = 0,21$, $\alpha = 1,3$ paraméterekkel történt a szimuláció, a kék trajektórián $\mu = 0,12$ és $\sigma = 0,21$, $\alpha = 1,7$ paraméterekkel.

Az α paramétert az $(1,2)$ intervallumra szűkítették le, ezzel azt biztosítva, hogy a hozam kétfarkú lehessen, vagyis az egész valós számegyenesen értelmezve legyen.

A $\beta = -1$ feltételt a részvényárfolyam momentumainak végessége miatt tettük fel.

A cikkben a volatilitás smirk grafikont a fenti FMLS modell mellett a Variance gamma(VG) modellre, a Poisson ugró modellre (MJD), és a Poisson ugró modellnek egy sztochaszikus volatilitással kibővített modelljére (MJD-SV) vizsgálták.

A 4 folyamat közül a legjobban az FMLS modell illeszkedett a valódi, historikus volatilitás smirk grafikonokra. Az általuk használt modell tehát igencsak alkalmas részvényárfolyamok realisztikus modellezésére a fenti okok miatt.

A Lévy α stabil folyamatok $\alpha \in (1,2)-$re, melyeket az FMLS modellben felhasználunk, úgynevezett tiszta ugró folyamatok, bármilyen időintervallumon belül végtelen számú ugrással bír a folyamat.
$\alpha-$t szabad paraméternek választjuk, és a pontos értékének meghatározásához megfigyelt piaci árakat használhatunk.

Lévy α stabil folyamatokkal Carr és Wu cikke előtt is végeztek néhányan pénzügyi modellezést. Ennek a cikknek a fő újítása azonban a β paraméternek a $-1-$re való rögzítése volt. Ezzel a maximális negatív ferdeséggel megtartották a vastag farkú hozamokat, azonban ellentétben a szimmetrikus modellel, a részvény/index árfolyamok véges feltételes momentumokkal rendelkeznek, ami előnyös, többek között azért, mert így az opció árak is végesek ennek a modellnek a használatával.

A cikk alapján a sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása a következő alakban írható fel:

$$S_t = S_0 e^{rt+\kappa t+\sigma L_t^{\alpha,-1}}. \tag{2}$$

Mivel ők a kockázatsemleges mértékben írták fel a differenciálegyenletet, ezért ebben teljesülnie kell annak, hogy a diszkontált részvényárfolyam martingál. Emiatt:

$$\mathbb{E}e^{\kappa t+\sigma L_t^{\alpha,-1}} = 1.$$

Másrészről $0 < \alpha < 2$-re:

$$X \sim S(\alpha,\beta,\gamma,0) \Leftrightarrow -X \sim S(\alpha,-\beta,\gamma,0),$$

illetve ha $\beta = 1$, akkor a stabil eloszlású valószínűségi változó Laplace transzformáltját a következő képlettel kapjuk:

$$L_X(\lambda) = \mathbb{E}e^{-\lambda X} = e^{(-\lambda\delta-\lambda^\alpha\gamma^\alpha sec\frac{\alpha\pi}{2})}, \text{ahol} \quad Re\lambda \geq 0.$$

Használjuk ezt a formulát a mi esetünkre ($\lambda = \sigma$, $\delta = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = t^{\frac{1}{\alpha}}$):

$$\mathbb{E}[e^{\sigma L_t^{\alpha,-1}}] = \mathbb{E}[e^{-\sigma L_t^{\alpha,1}}] = e^{-t\sigma^\alpha sec(\pi\alpha/2)}.$$

Így:

$$\kappa = \sigma^\alpha sec(\pi\alpha/2),$$

amely kifejezés a sec függvény tulajdonságai miatt $1 < \alpha < 2$ esetén negatív.

Vagyis a differenciálegyenlet megoldása a martingál mértékben:

$$S_t = S_0 e^{(r+\sigma^\alpha sec(\pi\alpha/2))t+\sigma L_t^{\sigma,-1}}.$$

A logaritmikus hozam:

$$Y_t = ln(S_t/S_0) = (r + \sigma^\alpha sec(\pi\alpha/2))t + \sigma L_t^{\alpha,-1},$$

vagyis a loghozamok valóban alfa stabil eloszlású valószínűségi változók.

Írjuk fel a differenciálegyenletet a statisztikai($\mu > r$) valószínűségi mértékben:

$$dS_t = S_t\mu dt + S_t\sigma dL_t^{\alpha,-1}, \quad \sigma > 0, \quad \alpha \in (1,2).$$

Melynek megoldása az $r \to \mu$ cserével adódik (2)-ből:

$$S_t = S_0 e^{\mu t+\sigma^\alpha sec(\pi\alpha/2))t+\sigma L_t^{\alpha,-1}}.$$

Vizsgáljuk meg a spektrális kockázati mértéket ebben a modellben!

Kezdjük először a statisztikai mérték vizsgálatával($\mu > r$)!
Ahogy az előzőekben láttuk, a részvényárfolyam megoldása $S_t = S_0 e^{Y_t}$ alakban írható fel, ahol $Y_t \sim S(\alpha, -1, \sigma t^{\frac{1}{\alpha}}, (\mu+\kappa)t)$.

A stabil eloszlásokra vonatkozó tételek miatt:

$$\frac{Y_t - (\mu+\kappa)t}{\sigma t^{\frac{1}{\alpha}}} \sim S(\alpha, -1, 1, 0).$$

Jelöljük innentől a $t-$től függetlenné tett $S(\alpha, -1, 1, 0)$ eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét Θ_α-val.

A spektrális kockázati mérték kiszámításához szükségünk van a következőre:

$$\mathbb{P}(S_0 e^{rt} - S_0 e^{Y_t} > x) = \mathbb{P}\left(e^{Y_t} < \frac{S_0 e^{rt} - x}{S_0}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(Y_t < ln\left(\frac{S_0 e^{rt} - x}{S_0}\right)\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_t - (\mu+\kappa)t}{\sigma t^{\frac{1}{\alpha}}} < \frac{ln(\frac{S_0 e^{rt}-x}{S_0}) - (\mu+\kappa)t}{\sigma t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) =$$

$$= \Theta_\alpha\left(\frac{ln(\frac{S_0 e^{rt}-x}{S_0}) - (\mu+\kappa)t}{\sigma t^{\frac{1}{\alpha}}}\right).$$

Éljünk a következő helyettesítéssel:

$$z = \frac{ln(\frac{S_0 e^{rt} - x}{S_0}) - (\mu + \kappa)t}{\sigma t^{\frac{1}{\alpha}}},$$

vagyis

$$x = S_0(e^{rt} - e^{z\sigma t^{1/\alpha} + (\mu+\kappa)t}).$$

$$dx = -S_0 \sigma t^{1/\alpha} e^{z\sigma t^{1/\alpha} + (\mu+\kappa)t} dz.$$

Így tehát az előbbi helyettesítéssel a spektrális kockázati mérték a következő alakú lesz:

$$\rho(h(Y(t))) = \int_0^\infty h(1 - F_{Y(t)}(x))dx + \int_{-\infty}^0 [h(1 - F_{Y(t)}(x)) - 1]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^\infty h\left(\Theta_\alpha\left(\frac{ln(e^{rt} - \frac{x}{S_0}) - (\mu+\kappa)t}{\sigma t^{1/\alpha}}\right)\right)\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{-\infty}^0 \left[h\left(\Theta_\alpha\left(\frac{ln(e^{rt} - \frac{x}{S_0}) - (\mu+\kappa)t}{\sigma t^{1/\alpha}}\right)\right) - 1\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^C h(\Theta_\alpha(z)) S_0 \sigma t^{1/\alpha} e^{z\sigma t^{1/\alpha} + (\mu+\kappa)t}\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_C^\infty [h(\Theta_\alpha(z)) - 1] S_0 \sigma t^{1/\alpha} e^{z\sigma t^{1/\alpha} + (\mu+\kappa)t}\mathrm{d}z,$$

ahol $C = \frac{(r-\mu-\kappa)\cdot t}{\sigma t^{1/\alpha}}$, és integráljunk parciálisan.

$$\rho(h(Y(t))) = [h(\Theta_\alpha(z)) S_0 e^{z\sigma t^{1/\alpha} + (\mu+\kappa)t}]_{-\infty}^C -$$

$$- \int_{-\infty}^C h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z) S_0 e^{z\sigma t^{1/\alpha} + (\mu+\kappa)t}\mathrm{d}z +$$

$$+ [(h(\Theta_\alpha(z)) - 1) S_0 e^{z\sigma t^{1/\alpha} + (\mu+\kappa)t}]_C^\infty -$$

$$- \int_C^\infty h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z) S_0 e^{z\sigma t^{1/\alpha} + (\mu+\kappa)t}\mathrm{d}z,$$

a határokon behelyettesítve, és felhasználva, hogy $h(0) = 0$, $h(1) = 1$:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt} - \int_{-\infty}^\infty S_0 e^{(\mu+\kappa)\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z =$$

$$= S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z],$$

ahol $\Theta'_\alpha(z)$ a $S(\alpha, -1, 1, 0)$ eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének értéke a z helyen.

Tehát erre a modellre is kaptunk egy formulát, csakúgy mint a geometriai Brown mozgás esetén.

Treussard sejtéséhez kapcsolódóan hasonló saját tételeket írtunk fel erre a modellre is.

5.1. Tétel. *Ha $h'(\cdot)$ alulról korlátos valamely $C \neq 0$ konstanssal, akkor az FMLS részvényárfolyam modell esetén $\rho(h(Y(t)))$ negatív megfelelően nagy $t-$re a statisztikai mértékben.*

Bizonyítás: Induljunk ki a következő egyenlőtlenségből:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z \geq$$

$$\geq C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} \Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z =$$

$$= C \cdot e^{\kappa t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z\sigma t^{1/\alpha}} \Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z =$$

$$= C \cdot e^{\kappa t}\mathbb{E}[e^{X\sigma t^{1/\alpha}}],$$

ahol $X \sim S(\alpha, -1, 1, 0)$.

Az előzőekben említett stabil eloszlásokra vonatkozó 2 tétel miatt:

$$C \cdot e^{\kappa t}\mathbb{E}[e^{X\sigma t^{1/\alpha}}] = C \cdot e^{t\sigma^\alpha sec\frac{\alpha\pi}{2} - t\sigma^\alpha sec\frac{\alpha\pi}{2}} = C > 0.$$

Vagyis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z > 0$$

bármely $1 < \alpha < 2$ esetén.

Ennélfogva:

$$e^{(\mu-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta_\alpha(z)'\mathrm{d}z$$

tart végtelenbe ha t-vel tartunk végtelenbe.

$\rho(h(Y(t)))$ tehát egy mínusz végtelenbe, és egy végtelenbe tartó tényező szorzata, vagyis a kockázati mérték negatív, és mínusz végtelenbe tart, ahogy $t-$vel tartunk végtelenbe. ■

5.2. Tétel. *Ha h' folytonos minden pontban és $\mu - r + \kappa > 0$, akkor az FMLS részvényárfolyam modell esetén $\rho(h(Y(t)))$ negatív kellően nagy $t-$re a statisztikai mértékben.*

Bizonyítás: Mivel h' nemnegatív, monoton csökkenő, folytonos,és integrálja $[0,1]-$en 1, emiatt biztosan létezik egy olyan zárt A intervallum $[0,1]-$en, amire igaz:

$$h'(x) \geq c \quad \forall \quad x \in A,$$

ahol $c > 0$. Emiatt a következőt kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{\Theta_\alpha^{-1}(A)} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{R\setminus\Theta_\alpha^{-1}(A)} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z \geq$$

$$\geq c \int_{\Theta_\alpha^{-1}(A)} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} \Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{R\setminus\Theta_\alpha^{-1}(A)} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z.$$

Mivel h' monoton csökkenő, ezért feltehető, hogy az A intervallum $[0,a]$ alakú, ahol $0 < a < 1$. Ekkor $\Theta_\alpha^{-1}(A) = (-\infty, b]$, ahol $b = \Theta_\alpha^{-1}(a)$. A $(-\infty, b]$ intervallum $\forall \quad x$ elemére tehát $h'(x) \geq c$. Vegyük ennek az intervallumnak a $[a', b]$ részintervallumát. Mivel $h' \geq 0$ mindenhol, ezért:

$$e^{(\mu - r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z \geq$$

$$\geq c \cdot e^{(\mu - r)t} \int_{a'}^{b} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} \Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{a'}^{b} c \cdot e^{(\mu - r + \kappa)t + z\sigma t^{1/\alpha}} \Theta'_\alpha(z) \mathrm{d}z.$$

Mivel $\Theta'_\alpha(z)$ az $(\alpha, -1, 1, 0)$ stabil eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, így egy megfelelő $[a', b]$ intervallumon mindenhol pozitív.

Ez az alábbiak miatt igaz. Ezen intervallumon az eloszlásfüggvény nem konstans, így a sűrűségfüggvény biztosan pozitív valamely pontokban. [20] 102.oldalán található tétel miatt, amennyiben a folyamat végtelen aktivitású, akkor a folyamat sűrűségfüggvénye folytonos minden $t-$re. Carr és Wu [17] cikke alapján $\alpha < 2$ esetén a stabil folyamat végtelen aktivitású. $S(\alpha, -1, 1, 0)$ a megfelelő paraméterű α stabil folyamat $t = 1$ helyen vett eloszlása. Így sűrűségfüggvénye folytonos, az adott intervallumon pedig valamely pontokban pozitív. Így biztos van olyan intervallum is, ahol pozitív ez a sűrűségfüggvény.

Vegyük ezen az intervallumon a minimumát, és ez legyen $c' > 0$. Így:

$$e^{(\mu - r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z)) \Theta'_\alpha(z) \mathrm{d}z \geq$$

$$\geq c \cdot c' \int_{a'}^{b} e^{(\mu - r + \kappa)t + z\sigma t^{1/\alpha}} \mathrm{d}z.$$

Továbbá:

$$\int_{a'}^{b} e^{(\mu - r + \kappa)t + z\sigma t^{1/\alpha}} \mathrm{d}z = \Big[\frac{e^{(\mu - r + \kappa)t + z\sigma t^{1/\alpha}}}{\sigma t^{1/\alpha}} \Big]_{a'}^{b} =$$

$$= \frac{e^{(\mu - r + \kappa)t}}{\sigma t^{1/\alpha}} [e^{b\sigma t^{1/\alpha} - a'\sigma t^{1/\alpha}}] =$$

$$= \frac{e^{(\mu - r + \kappa)t}}{\sigma t^{1/\alpha}} [e^{(b - a')\sigma t^{1/\alpha}}].$$

Mely tart a végtelenbe, ha $t-$vel tartunk végtelenbe, hiszen a [ ] részben egy végtelenbe tartó tagot találunk, $e^{(\mu - r + \kappa)t}$ pedig sokkal gyorsabban tart végtelenbe, mint $\sigma t^{1/\alpha}$.

Tehát $\rho(h(Y(t)))$ tart mínusz végtelenbe, ha t tart végtelenbe, vagyis a tétel helyes. ■

5.3. Tétel. *5.2 tetszőleges h' függvény esetén igaz.*

Bizonyítás: A bizonyítás 3.3 bizonyításához hasonlóan elvégezhető. ■

5.4. Tétel. *Ha $h'(1) > 0$, akkor az FMLS részvényárfolyam modell esetén $\rho(h(Y(t)))$ negatív megfelelően nagy $t-$re a statisztikai mértékben.*

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy $g_t(z) = e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}}\Theta'_\alpha(z)$ integrálja 1, mindenhol pozitív, így szintén egy valószínűségi változó sűrűségfüggvényének tekinthető.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_t(z)h'(\Theta'_\alpha(z))\mathrm{d}z.$$

Jelöljük a $g_t(z)$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $G_t(z)$-vel. Ez biztosan felveszi valamely z' pontban az $1/2$ értéket. Tehát legyen $G_t(z') = 1/2$.

A következőt kapjuk parciálisan integrálva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_t(z)h'(\Theta_\alpha(z))\mathrm{d}z \geq$$

$$\geq \int_{-\infty}^{z'} g_t(z)h'(\Theta_\alpha(z))\mathrm{d}z =$$

$$= [G_t(z)h'(\Theta_\alpha(z))]_{-\infty}^{z'} - \int_{-\infty}^{z'} G_t(z)h''(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z.$$

Az integrandus rendre pozitív, negatív, és pozitív függvény szorzata, tehát egy negatív függvény. $h''(\Theta_\alpha(z))$ azért negatív, mert h' monoton csökkenő függvény.

Vagyis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_t(z)h'(\Theta_\alpha(z))\mathrm{d}z \geq$$

$$\geq [G_t(z)h'(\Theta_\alpha(z))]_{-\infty}^{z'} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}h'(\Theta_\alpha(z')) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}h'(1) > 0.$$

Vagyis a már korábbi bizonyításokban is említett részletek miatt $\rho(h(Y(t)))$ negatív, ha $t-$vel végtelenbe tartunk. ■

5.5. Megjegyzés. *3.5-ban említett okok miatt 5.1 és 5.4 ekvivalens egymással.*

Az előzőekben említett tételekkel tehát beláttuk, hogy a h' kockázatelutasítási függvényekre a statisztikai mértékben a spektrális kockázati mérték értéke sérti a Treussard feltételt, mely szerint a kockázatnak az idővel arányosan nőnie kell.

A statisztikai mértékben tehát hasonló tételeket sikerült bizonyítanunk az FMLS modellt használva a részvényárfolyam dinamikájának leírására, mint a geometriai Brown-mozgás esetében.

Tekintsük a kockázatsemleges $\mu = r$ mértéket!

Ekkor a spektrális kockázati mérték értéke a következőképpen adható meg:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z].$$

5.6. Tétel. *Ha t tart végtelenbe, akkor az FMLS részvényárfolyam modell esetén a spektrális kockázati mérték értéke tart a végtelenbe a kockázatsemleges $\mu = r$ mértékben, amennyiben nem a $h' \equiv 1$ triviális esetet tekintjük.*

Bizonyítás:

Ha belátjuk, hogy:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z < 1,$$

akkor egyben beláttuk azt is, hogy $\rho(h(Y(t)))$ tart a végtelenbe, ha $t-$vel tartunk a végtelenbe.

Az előzőekben bebizonyítottuk, hogy a spektrális kockázati mérték értéke minimális, ha h' az azonosan 1 függvény. Ebben az esetben minden $t-$re a spektrális kockázati mérték értéke 0 lesz, hiszen a pozíció várható értéke 0.

Ebben az esetben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} \Theta'_\alpha(z) \mathrm{d}z = 1.$$

Mivel bebizonyítottuk, hogy ha h' azonosan 1 minden pontban, akkor minimális a spektrális kockázati mérték értéke, így megkaptuk, hogy a spektrális kockázati mérték értéke biztosan nemnegatív.

A nem triviális esetet tekintsük tehát. Egy megfelelően nagy érték után ekkor a h' függvény értéke kisebb lesz 1-nél. Válasszuk meg z_0-t úgy, hogy $h'(\Theta_\alpha(z)) < 1$, ha $z \geq z_0$.

Vegyük először azt az esetet, amikor $z_0 > 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z)) \Theta'_\alpha(z) \mathrm{d}z =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z)) \Theta'_\alpha(z) \mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{0}^{z_0} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z)) \Theta'_\alpha(z) \mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{z_0}^{\infty} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z)) \Theta'_\alpha(z) \mathrm{d}z.$$

Szétbontottuk az integrált 3 részre.

Vizsgáljuk először az első tagot.

$$\int_{-\infty}^{0} h'(\Theta_\alpha(z)) \Theta'_\alpha(z) \mathrm{d}z \leq 1$$

biztosan igaz, mivel az integrandusnak a $[-\infty, \infty]$ intervallumon vett integrálja 1, egy kisebb intervallumon ennél biztosan nem nagyobb az integrál értéke, mivel az integrandus nemnegatív függvény. Mivel $t = 0-$ra a spektrális kockázati mérték értéke 0, így a képletünkből adódik, hogy az integrandusnak a $[-\infty, \infty]$ intervallumon vett integrálja valóban 1.

Másrészről:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z)) \Theta'_\alpha(z) \mathrm{d}z \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} e^{\kappa \cdot t} h'(\Theta_\alpha(z)) \Theta'_\alpha(z) \mathrm{d}z =$$

$$= e^{\kappa \cdot t} \int_{-\infty}^{0} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z \leq$$
$$\leq e^{\kappa \cdot t}.$$

Utóbbi tart pedig tart a 0−ba, ha t tart végtelenbe.

Nézzük a második tagot.
$e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}}$ egyenletesen konvergál 0−hoz a $[0, z_0]$ intervallumon. A függvény minden t−re a maximumát z_0−ban veszi fel, így adott ϵ−hoz tartozó z_0−beli küszöbérték univerzális küszöbérték is lesz az egyenletes konvergenciához.
Tudjuk, hogy:

$$\int_{0}^{z_0} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z \leq 1.$$

Így minden $\epsilon > 0$−hoz tudunk olyan t'−t mondani, amitől kezdve a második tag értéke ϵ−nál nem nagyobb, hiszen:

$$\int_{0}^{z_0} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z \leq$$
$$\leq \int_{0}^{z_0} \epsilon h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z \leq$$
$$\leq \epsilon \int_{0}^{z_0} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z \leq \epsilon,$$

ha $t > t'$.
Így a határérték 0 lesz.

Maradt a harmadik tag.

$$\lim_{t\to\infty} \int_{z_0}^{\infty} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z <$$
$$< \lim_{t\to\infty} \int_{z_0}^{\infty} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} \Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z \leq$$
$$\leq \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} \Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z = \lim_{t\to\infty} 1 = 1.$$

Vagyis t−től függetlenül beláttuk a harmadik tagról, hogy 1−nél kisebb.

Tehát megkaptuk, hogy:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa \cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z \leq 1 - \delta,$$

ahol $\delta > 0$, így

$$\lim_{t\to\infty} \rho(h(Y(t))) = \lim_{t\to\infty} S_0 e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z] \geq$$
$$\geq \delta \lim_{t\to\infty} S_0 e^{rt} = \infty.$$

Vegyük azt az esetet, amikor $z_0 < 0$.
Ebben az esetben az integrált három helyett két részre bontjuk szét, és a gondolatmenet ugyanúgy végrehajtható.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z =$$
$$= \int_{-\infty}^{z_0} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z +$$
$$+ \int_{z_0}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z.$$

Az első tagról belátható, hogy $0-$hoz tart, hasonlóan, mint ahogy az előző eset első tagjáról. A második tagra pedig belátható, hogy a határértéke $1-$nél kisebb, hasonlóan az előző eset harmadik tagjához. A spektrális kockázati mérték határértéke tehát ebben az esetben is végtelen lesz. ∎

Vagyis a monotonitást ugyan nem sikerült belátnunk, de azt beláttuk, hogy ha $t-$t megfelelően nagyra növeljük, akkor a kockázat is tetszőleges nagyra növekszik.
Az FMLS részvényárfolyam modell bonyolultabb a GBM részvényárfolyam modellnél, így a spektrális kockázati mérték számítása is jóval bonyolultabbá válik. A nehézséget elsősorban az okozza, hogy az $S(\alpha, -1, \gamma, \delta)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye nem fejezhető ki zárt alakban.
A spektrális kockázati mértékre azonban kaptunk egy olyan formulát, amit $S(\alpha, -1, 1, 0)$ sűrűségfüggvénye, és eloszlásfüggvénye ismeretében számítógép segítségével numerikus integrállal meghatározhatunk. A megfelelő sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény szintén numerikus integrálással meghatározható.
A következő fejezetekben még ennél is bonyolultabbak a modellek, így a spektrális kockázati mértékre kapott formulákban a sűrűségfüggvény illetve az eloszlásfüggvény is $t-$nek függvényében adható csak meg.

6. Spektrális kockázati mérték a Variance gamma részvényárfolyam modellben

A Variance gamma modell speciális részvényárfolyam modell, melyet Madan és Seneta ismertetett először 1990-es [2] cikkükben. Az asszimetrikus verziót Madan, Charr és Chang vezette be 1998-as [3] cikkében, amelyben árazási formulát is adtak az európai opcióra. Hirsa és Madan 2003-ban [1] írt az amerikai opció árazásáról a Variance gamma modellben.
A Variance gamma részvényárfolyam modell praktikus és empirikusan igazolt alternatívája a GBM részvényárfolyam modellnek. A Variance gamma folyamattal a megfigyelt adatokon felfedezhető csúcsosság és ferdeség megfelelően kezelhető, mely a folyamat pénzügyi modellezésre való alkalmasságát erősíti. A Variance gamma folyamatot sikeresen alkalmazták hitelezési kockázatok modellezésekor is. A folyamat tiszta ugró jellege miatt megfelelően lehet vele a csődbejutás kockázatának kérdéskörét kezelni. Fiorani, Luciano és Semerano 2007-es [6] cikkükben CDS modellezése során alkalmazták a Variance gamma folyamatot. Egy kiterjedt empirikus elemzésben más alternatív modellekkel szemben a Variance gamma modell felsőbbrendűségét mutatták be. A Variance gamma modell használata spektrális kockázati mérték számításához tehát empirikusan is igazolt.
Lássuk a modell fő jellemzőit. Szükségünk lesz néhány definícióra.

8. Definíció (Gamma folyamat). *Legyen $a, b > 0$. Az (a, b) paraméterű gamma folyamat egy olyan $\{X(t) : t \geq 0\}$ folyamat, melyre a következő tulajdonságok teljesülnek:*

- $X(0) = 0$*;*
- $\{X(t) : t \geq 0\}$ *független növekményű;*
- $0 \leq s \leq t$*−re* $X(t) - X(s)$ *gamma eloszlású lesz* $(a(t-s), b)$ *paraméterekkel.*

Az (a, b) paraméterű gamma eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényét a következőképpen kapjuk:

$$f(x; a, b) = \frac{b^{-a}}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{\frac{-x}{b}}, \quad \text{ahol} \quad x > 0 \quad \text{és} \quad a, b > 0,$$

ahol $\Gamma(x)$ a gamma függvény, melyet a következőképpen definiálunk:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

A Variance gamma folyamatra úgy gondolhatunk mint egy driftes Brown mozgásra, melyet véletlen időpontokban értékelünk ki, ahol a véletlen időpontok gamma folyamatot követnek.

Formálisan:

$$X(t; \sigma, \nu, \theta) = \theta G(t; 1, \nu) + \sigma W(G(t; 1, \nu)).$$

Ahol $G(t; 1, \nu)$ egy gamma folyamat.

Ezen paraméterű gamma folyamat sűrűségfüggvényét a t időpontban a következőképpen kapjuk:

$$f(g) = \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} e^{\frac{-g}{\nu}}}{\nu^{\frac{t}{\nu}} \Gamma(\frac{t}{\nu})}, \quad g > 0.$$

Ekvivalens definíció szerint a Variance gamma folyamatot két független gamma folyamat különbségeként lehet felírni:

$$X(t; \sigma, \nu, \theta) \stackrel{d}{=} \Gamma_p(t; \mu_p, \nu_p) - \Gamma_n(t; \mu_n, \nu_n).$$

A Variance gamma folyamat karakterisztikus függvényét a következőképpen kapjuk:

$$\Phi_{VG}(u, t) = \Big(\frac{1}{1 - i\theta\nu u + (\sigma^2\nu/2)u^2} \Big)^{\frac{t}{\nu}}.$$

A Variance gamma folyamat egy speciális Lévy folyamat, a Lévy mértékének sűrűségfüggvényét a következő képlet adja:

$$k_{VG}(x)dx = \begin{cases} \frac{\mu_n^2}{\nu_n} \frac{e^{-\frac{\mu_n}{\nu_n}|x|}}{|x|} dx & \text{ha} \quad x < 0 \\ \\ \frac{\mu_p^2}{\nu_p} \frac{e^{-\frac{\mu_p}{\nu_p}|x|}}{|x|} dx & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

A Variance gamma részvényárfolyam modellezést megkapjuk, ha az eredeti geometriai Brown mozgásban a Wiener folyamat szerepét kicseréljük a Variance gammáéra.
A statisztikai mértékben a részvényárfolyam folyamatot a következőképpen adhatjuk meg:

$$S(t) = S_0 e^{mt + X(t;\sigma,\nu,\theta) + \omega t},$$

ahol $\omega = \frac{1}{\nu} ln(1 - \theta\nu - \sigma^2\nu/2)$ a konvexitás korrekció tag, és m a részvényhozam piacon megfigyelt várható értéke.
Hasonlóan ehhez, a kockázatsemleges($m = r$) mértékben a részvényárfolyam folyamatot a következőképpen adhatjuk meg:

$$S(t) = S_0 e^{rt + X(t;\sigma,\nu,\theta) + \omega t},$$

ahol $\omega = \frac{1}{\nu} ln(1 - \theta\nu - \sigma^2\nu/2)$ a konvexitás korrekció tag, és r a kockázatmentes kamatláb.

Nézzük meg hogyan kapjuk meg a spektrális kockázati mérték értékét ebben a modellben!

Kezdjük a statisztikai mértékkel!
Szükségünk lesz a következő valószínűségre:

$$\mathbb{P}(S(t) < S_0 e^{rt} - x) = \mathbb{P}\Big(ln\Big(\frac{S(t)}{S_0}\Big) - (m + \omega)t < ln\Big(\frac{S_0 e^{rt} - x}{S_0}\Big) - (m + \omega)t\Big).$$

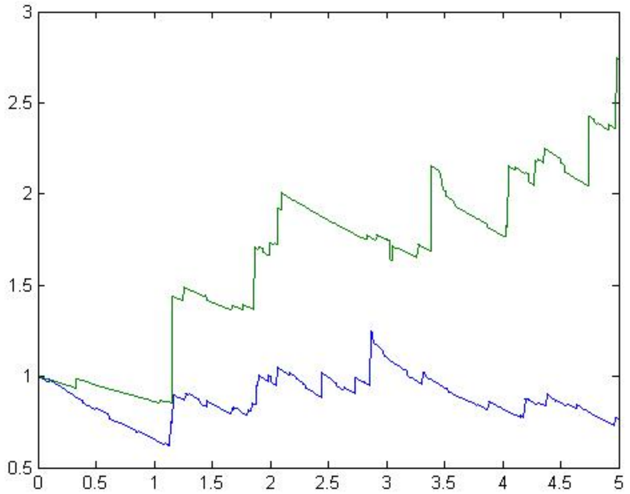
Végezzük el a következő helyettesítést:

$$z = ln(e^{rt} - \frac{x}{S_0}) - (m + \omega)t, \quad \text{vagyis,}$$

- $x = S_0 e^{rt} - S_0 e^{z + (m+\omega)t}$,
- $dx = -S_0 e^{z + (m+\omega)t} dz$.

Ismét az $Y(t) = S_0 e^{rt} - S(t)$ véletlen változóra számoljuk a spektrális kockázati mértéket egy adott t időpontra.
A spektrális kockázati mértékre:

$$\rho(h(Y(t))) = \int_0^\infty h(1 - F_{Y(t)}(x))dx + \int_{-\infty}^0 [h(1 - F_{Y(t)}(x)) - 1]\mathrm{d}x =$$



3. ábra. A Variance gamma folyamat két darab 5 éves szimulációja. A zöld trajektórián $\mu = 0,12$, $\sigma = 0,21$, $\theta = 0,3$ és $\nu = 0,5$ paraméterekkel történt a szimuláció, a kék trajektórián $\mu = 0,12$, $\sigma = 0,21$, $\theta = 0,5$ és $\nu = 0,3$ paraméterekkel.

$$= \int_{-\infty}^{C} h(F_t(z)) S_0 e^{z+(m+\omega)t} \mathrm{d}z +$$
$$+ \int_{C}^{\infty} [h(F_t(z)) - 1] S_0 e^{z+(m+\omega)t} \mathrm{d}z,$$

ahol $C = (r - m - \omega)t$, illetve jelöljük F_t-vel a Variance gamma folyamat t időpontban vett eloszlásfüggvényét, és f_t-vel a Variance gamma folyamat t időpontban vett sűrűségfüggvényét. Ezek nyilván függnek a σ, ν, θ paraméterektől, de ezek jelölésétől most eltekintünk, rögzítettnek vesszük őket. Parciálisan integrálva:

$$\rho(h(Y(t))) = [h(F_t(z)) S_0 e^{z+(m+\omega)t}]_{-\infty}^{C} -$$
$$- \int_{-\infty}^{C} h'(F_t(z)) f_t(z) S_0 e^{z+(m+\omega)t} \mathrm{d}z +$$
$$+ [h(F_t(z) - 1] S_0 e^{z+(m+\omega)t}]_{C}^{\infty} -$$

$$-\int_C^\infty h'(F_t(z))f_t(z)S_0e^{z+(m+\omega)t}\mathrm{d}z,$$

a határokon behelyettesítve, és felhasználva, hogy $h(0)=0$, $h(1)=1$:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0e^{rt} - \int_{-\infty}^\infty S_0e^{z+(m+\omega)t}h'(F_t(z))f_t(z)\mathrm{d}z =$$

$$= S_0e^{rt}[1-e^{(m-r)t}\int_{-\infty}^\infty e^{z+\omega t}h'(F_t(z))f_t(z)\mathrm{d}z].$$

Tehát erre a modellre is kaptunk egy formulát, mely számítógép segítségével numerikusan kiszámolható, a megfelelő sűrűség- és eloszlásfüggvények segítségével.

Vizsgáljuk meg Treussard sejtését ebben a modellben is!

6.1. Tétel. *Ha $h'(\cdot)$ alulról korlátos valamely $C \neq 0$ konstanssal, akkor a Variance gamma részvényárfolyam modell esetén $\rho(h(Y(t)))$ negatív megfelelően nagy $t-$re a statisztikai mértékben.*

Bizonyítás: Induljunk ki a következő egyenlőtlenségből:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{z+\omega t}h'(F_t(z))f_t(z)\mathrm{d}z \geq$$

$$\geq C\cdot\int_{-\infty}^\infty e^{z+\omega t}f_t(z)\mathrm{d}z =$$

$$= C\cdot e^{\omega t}\mathbb{E}[e^{X_t}],$$

ahol $X_t \sim X(t;\sigma,\nu,\theta)$.

A kockázatsemleges/martingál mértékben a részvényárfolyam a következő alakban írható fel:

$$S(t) = S(0)e^{rt+X(t;\sigma,\nu,\theta)+\omega t}.$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy a kockázatsemleges mértékben a diszkontált részvényárfolyam martingál.

Vagyis:

$$\mathbb{E}e^{\omega t+X_t} = 1.$$

Ezt felhasználva megkaptuk, hogy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z \geq C.$$

Ennélfogva:

$$e^{(m-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z$$

tart végtelenbe ha $t-$vel tartunk végtelenbe.

$\rho(h(Y(t)))$ tehát egy mínusz végtelenbe, és egy végtelenbe tartó tényező szorzata, vagyis a kockázati mérték negatív, és mínusz végtelenbe tart, ahogy $t-$vel tartunk végtelenbe. ∎

Tekintsük a kockázatsemleges $m = r$ mértéket!

Ekkor a spektrális kockázati mérték értéke a következőképpen adható meg:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt} [1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z].$$

6.2. Megjegyzés (Feltételek a két mértékben). *A statisztikai mértékben, amennyiben:*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z > 0$$

feltétel fennáll, akkor a Variance gamma részvényárfolyam modell esetén a spektrális kockázati mérték értéke tart a mínusz végtelenbe, vagyis negatív megfelelően nagy $t-$re.
A kockázatsemleges mértékben, amennyiben:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z < 1$$

akkor a Variance gamma részvényárfolyam modell esetén a spektrális kockázati mérték értéke tart a végtelenbe, ha t tart a végtelenbe.
Ezen feltételek helyessége a formulákból könnyen levezethetőek. Adott h elutasítási függvényre pedig a határérték számítógép segítségével numerikusan számolható.

Végül nézzünk egy ezektől eltérő mértéket:

$$S(t) = S_0 e^{qt+X(t;\sigma,\nu,\theta)+\omega t},$$

ahol $q < r$. Tehát dolgozzunk egy olyan mértékben, ahol a részvényárfolyam adott t időpontbeli várható értéke a fix betét értéknél, vagyis $S_0 e^{rt}$ értéknél is kisebb. A spektrális kockázati mérték értékét a következő képlettel kapjuk:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - e^{(q-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z].$$

6.3. Tétel. *Ha t tart végtelenbe, akkor a Variance gamma részvényárfolyam modell esetén a spektrális kockázati mérték értéke tart végtelenbe a $q < r$ mértékben.*

Bizonyítás:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z \leq 1,$$

hiszen minden fix t értékre legfeljebb 1, így ugyanez igaz a határértékre is.

Mindez azért igaz, mivel az előzőekben bebizonyítottuk, hogy a spektrális kockázati mérték értéke minimális, ha h' az azonosan 1 függvény, és ebben az esetben ez az integrál egy, mivel a spektrális kockázati mérték értéke a pozíció várható értéke.

Tehát a $h' \equiv 1$ esetben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} f_t(z) \mathrm{d}z = 1.$$

$e^{(q-r)t}$ a $q < r$ esetre pedig nyilvánvalóan nullához tart így:

$$e^{(q-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z$$

is tart a 0-hoz.
A fentiekből következik, hogy ebben a modellben a spektrális kockázati mérték értéke tart a végtelenbe. ■

7. Spektrális kockázati mérték a CGMY(Carr-Geman-Madan-Yor) részvényárfolyam modellben

A CGMY folyamatot-más néven a temperált stabil folyamatot-Carr, Geman, Madan és Yor vezették be 2002-es [18] cikkükben. A CGMY folyamatok a Variance gamma folyamatok egyfajta általánosításának tekinthetők, speciális karakterválasztással a Variance gamma folyamatot kapjuk vissza.
A CGMY részvényárfolyam modell is folytonos idejű modell, megfelelő paraméterválasztással azonban előfordul, hogy véges aktivitású lesz a modellünk, vagyis nem rendelkezik végtelen számú ugrással a folyamat minden időintervallumon belül. A CGMY modell véges, illetve végtelen aktivitású megfigyelt árugrások esetén is alkalmazható.
Véges aktivitású modellek használata számos előnnyel jár. Végtelen aktivitású modellek esetén, mint például a GBM részvényárfolyam modell, a statisztikairól a kockázatsemleges mértékre való áttéréssel a volatilitás σ változatlan marad. A valóságban megfigyelt árfolyamadatokból, és opcióárakból azonban azt kapjuk, hogy a kockázatsemleges volatilitásértékek lényegesen nagyobbak a statiszikai mértékbeli értékeknél. Véges aktivitású modell esetén a paraméterek kevésbé rögzítettek, így használatuk indokolt lehet, különösen abban az esetben, amikor a piacon nem kereskednek túl nagy intenzitással.

A CGMY folyamatokat közvetlenül a Lévy mértékükön keresztül adjuk meg. A Lévy mérték sűrűségfüggvénye a következő lesz:

$$k_{CGMY}(x)dx = \begin{cases} C\frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}}dx & \text{ha} \quad x < 0 \\ \\ C\frac{e^{-M|x|}}{|x|^{1+Y}}dx & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

, ahol $C > 0$, $G \geq 0$, $M \geq 0$ és $Y < 2$.
$X_{CGMY}(t; C, G, M, Y)$-vel jelöljük azt a sztochasztikus folyamatot, mely végtelenül osztható, független növekményekkel rendelkezik, és Lévy mértékét a

fenti képlet adja meg. Speciális paraméterválasztással pontosan a Variance gamma folyamatot kapjuk vissza.

Az $Y = 0$ esetén a Variance gamma folyamatot kaphatjuk a C, G, M paraméterek megfelelő megválasztásával.
A 4 paraméter nagyvonalakban a következőképpen jellemzi a folyamatot:

- C-re úgy tekinthetünk, mint a teljes aktivitás mértékére. A definícióból adódik, hogy a többi paraméter rögzítése esetén C növelésével egységesen növekszik az összes különböző nagyságú ugrás valószínűsége.

- A G és M paraméterek határozzák meg a rátáját a Lévy mérték sűrűségfüggvényének a jobb és bal oldali exponenciális csökkenésének. Például $G < M$ esetén $X(t)$ eloszlásának bal oldala vastagabb farkú lesz, mint a jobb oldala.

- Az Y paraméter szerepéről a következőkben írunk.

9. Definíció. *Egy olyan $f(x)$ függvényt, amelyre:*

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0,$$

$n = 0, 1, \ldots$ *esetén teljesen monoton függvénynek nevezünk.*

Ha a Lévy mérték sűrűségfüggvénye teljesen monoton, akkor a folyamat számos kedvező tulajdonsággal bír. Teljesen monoton Lévy sűrűség esetén sokkal ritkábban következnek be nagy ugrások, mint kicsi ugrások, amely a valós adatsorokon megfigyelhető tulajdonságokkal egybevág.

Különböző Y értékekre különböző tulajdonságok teljesülnek a CGMY modellre.

- $Y < -1$ esetén a Lévy sűrűség nem teljesen monoton, a modell véges aktivitású,

- $-1 < Y < 0$ esetén a Lévy sűrűség teljesen monoton, a modell véges aktivitású,

- $0 < Y$ esetén a Lévy sűrűség teljesen monoton, a modell végtelen aktivitású.

CGMY folyamatot használva a részvényárfolyam modellezése a következőképpen történhet a statisztikai mértékben:

$$S(t) = S_0 e^{(\mu+\omega)t + X_{CGMY}(t;C,G,M,Y)},$$

ahol μ a piacon megfigyelt részvénytől elvárt hozam, ω pedig az úgynevezet konvexitás korrekció, melyet a következő képlettel tudunk definiálni:

$$e^{-\omega t} = \phi_{CGMY}(-i, t; C, G, M, Y),$$

ahol $\phi_{CGMY}(\cdot)$ a karakterisztikus függvénye a folyamatnak, melyet a következő képlettel kapunk:

$$\phi_{CGMY}(u, t; C, G, M, Y) = e^{t \cdot C \cdot \Gamma(-Y)[(M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y]},$$

ahol $\Gamma(\cdot)$ a gamma függvény.
CGMY folyamatot használva a részvényárfolyam modellezése a következőképpen történhet a kockázatsemleges mértékben:

$$S(t) = S_0 e^{(r+\omega)t + X_{CGMY}(t;C,G,M,Y)}.$$

Ennek a modellnek egy kibővített változatát is gyakran használják. Ez az úgynevezett kibővített CGMY modell, melyet a következőképpen definiálunk:

$$X_{CGMYe}(t; C, G, M, Y, \gamma) = X_{CGMY}(t; C, G, M, Y) + \gamma \cdot W(t),$$

ahol $W(t)$ sztenderd Wiener folyamat, mely független az $X_{CGMY}(t; C, G, M, Y)$ folyamattól.
Kibővített CGMY folyamatot használva a részvényárfolyam modellezése a következőképpen történhet a statisztikai mértékben:

$$S(t) = S_0 e^{(\mu+\omega-\frac{\gamma^2}{2})t + X_{CGMYe}(t;C,G,M,Y,\gamma)}.$$

Kibővített CGMY folyamatot használva a részvényárfolyam modellezése a következőképpen történhet a kockázatsemleges mértékben:

$$S(t) = S_0 e^{(r+\omega-\frac{\gamma^2}{2})t + X_{CGMYe}(t;C,G,M,Y,\gamma)}.$$

Kérdés, hogy ezekben a modellekben mikor teljesül Treussard sejtése.
Nézzük meg tehát, hogyan számolható a spektrális kockázati mérték értéke a kibővített statisztikai mértékes modellben!
Szükségünk lesz a következő valószínűségre:

$$\mathbb{P}(S(t) < S_0 e^{rt} - x) =$$
$$= \mathbb{P}\Big(ln\frac{S(t)}{S_0} - (\mu + \omega - \frac{\gamma^2}{2})t < ln\Big(\frac{S_0 e^{rt} - x}{S_0}\Big) - (\mu + \omega - \frac{\gamma^2}{2})t\Big).$$

Végezzük el a következő helyettesítést:

$$z = ln(e^{rt} - \frac{x}{S_0}) - (\mu + \omega - \frac{\gamma^2}{2})t, \quad \text{vagyis :}$$

- $x = S_0 e^{rt} - S_0 e^{z + (\mu + \omega - \frac{\gamma^2}{2})t}$,
- $dx = -S_0 e^{z + (\mu + \omega - \frac{\gamma^2}{2})t} dz$.

A spektrális kockázati mértékre a következőt kapjuk:

$$\rho(h(Y(t))) = \int_0^\infty h(1 - F_{Y(t)}(x))dx + \int_{-\infty}^0 [h(1 - F_{Y(t)}(x)) - 1]\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\infty}^C h(F_t(z)) S_0 e^{z + (\mu + \omega - \frac{\gamma^2}{2})t} \mathrm{d}z +$$
$$+ \int_C^\infty [h(F_t(z)) - 1] S_0 e^{z + (\mu + \omega - \frac{\gamma^2}{2})t} \mathrm{d}z,$$

ahol $C = r - (\mu + \omega - \frac{\gamma^2}{2})t$, és F_t a kibővített CGMY folyamat t időpontban vett eloszlásfüggvénye, és legyen f_t a kibővített CGMY folyamat t időpontban vett sűrűségfüggvénye. Ezek nyilván függnek a paraméterektől, de ezek jelölésétől most eltekintünk, rögzítettnek vesszük őket.
Integráljunk parciálisan:

$$\rho(h(Y(t))) = [h(F_t(z)) S_0 e^{z + (\mu + \omega - \frac{\gamma^2}{2})t}]_{-\infty}^C -$$
$$- \int_{-\infty}^C h'(F_t(z)) f_t(z) S_0 e^{z + (\mu + \omega - \frac{\gamma^2}{2})t} \mathrm{d}z +$$

$$+[h(F_t(z)-1)S_0 e^{z+(\mu+\omega-\frac{\gamma^2}{2})t}]_C^{\infty}-$$
$$-\int_C^{\infty} h'(F_t(z))f_t(z)S_0 e^{z+(\mu+\omega-\frac{\gamma^2}{2})t}\mathrm{d}z.$$

A határokon behelyettesítve, és felhasználva, hogy $h(0)=0$, $h(1)=1$:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt} - \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{z+(\mu+\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} h'(F_t(z))f_t(z)\mathrm{d}z =$$
$$= S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} h'(F_t(z))f_t(z)\mathrm{d}z].$$

Tehát erre a modellre is kaptunk egy formulát, mely azonban bonyolultabb az előző fejezetkben kapott formuláknál. A sűrűségfüggvényünk és az eloszlásfüggvényünk időfüggő maradt a formulában, ezt mind a GBM, mind az FMLS részvényárfolyam modell esetén ki tudtuk küszöbölni.
Számítógéppel, numerikus integrálás segítségével azonban erre a modellre is ki tudjuk számolni a spektrális kockázati mérték értékét.

7.1. Tétel. *Ha $h'(\cdot)$ alulról korlátos valamely $C \neq 0$ konstanssal, akkor a kibővített CGMY részvényárfolyam modell esetén $\rho(h(Y(t)))$ negatív megfelelően nagy $t-$re a statisztikai mértékben.*

Bizonyítás: Induljunk ki a következő egyenlőtlenségből:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} h'(F_t(z))f_t(z)\mathrm{d}z \geq$$
$$\geq C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} f_t(z)\mathrm{d}z =$$
$$= C \cdot e^{(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t}\mathbb{E}[e^{X_t}],$$

ahol $X_t \sim X_{CGMYe}(t;\cdot)$.

A martingál mértékben a részvényárfolyam a következő alakba írható fel:

$$S(t) = S_0 e^{(r+\omega-\frac{\gamma^2}{2})t + X_{CGMYe}(t;C,G,M,Y,\gamma)}$$

ugyanakkor tudjuk, hogy a kockázatsemleges mértékben a diszkontált részvényárfolyam martingál.
Vagyis:

$$\mathbb{E}e^{(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t+X_t} = 1.$$

Ezt felhasználva megkaptuk, hogy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z \geq C.$$

Ennélfogva:

$$e^{(\mu-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z$$

tart végtelenbe ha $t-$vel tartunk végtelenbe.

$\rho(h(Y(t)))$ tehát egy mínusz végtelenbe, és egy végtelenbe tartó tényező szorzata, vagyis a kockázati mérték negatív, és mínusz végtelenbe tart, ahogy $t-$vel tartunk végtelenbe. ■

Tekintsük a kockázatsemleges $\mu = r$ mértéket.

Ekkor a spektrális kockázati mérték értéke a következőképpen adható meg:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z].$$

Hasonló megjegyzések mondhatók el erről az esetről, mint a Variance gamma részvényárfolyam modell hasonló esetéről.

7.2. Megjegyzés (Feltételek a két mértékben). *A statisztikai mértékben, amennyiben:*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z > 0$$

feltétel fennáll, akkor a kibővített CGMY részvényárfolyam modell esetén a spektrális kockázati mérték értéke tart a mínusz végtelenbe, vagyis negatív megfelelően nagy $t-$re.

A kockázatsemleges mértékben, amennyiben:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z < 1$$

feltétel teljesül, akkor a kibővített CGMY részvényárfolyam modell esetén a spektrális kockázati mérték értéke tart a végtelenbe, ha t tart a végtelenbe.

Ezen feltételek helyessége a formulákból könnyen levezethetőek. Adott h elutasítási függvényre pedig a határérték számítógép segítségével kiszámolható.

Nézzük újra azt a mértéket, amikor a részvényárfolyam növekedési üteme q kisebb lesz a kockázatmentes kamatlábnál.

$$S(t) = S_0 e^{(q+\omega-\frac{\gamma^2}{2})t+X_{CGMYe}(t;C,G,M,Y,\gamma)}$$

ahol $q < r$. Tehát dolgozzunk egy olyan mértékben, ahol a részvényárfolyam adott t időpontbeli várható értéke a fix betét értéknél, vagyis $S_0 e^{rt}$ értéknél is kisebb. A spektrális kockázati mérték értékét a következő képlettel kapjuk:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - e^{(q-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z].$$

7.3. Tétel. *Ha t tart végtelenbe, akkor a CGMY részvényárfolyam modell esetén a spektrális kockázati mérték értéke tart a végtelenbe a $q < r$ mértékben.*

Bizonyítás:

6.3 bizonyításához teljesen hasonlóan elvégezhető ez is.

■

7.1. A monoton növekedés feltétel egy enyhítése

Sok modellben nem sikerült monoton növekedést bebizonyítani, csak végtelenbe tartást megfelelő mértékekben. Ismert azonban, hogy végtelenbe tartó sorozatnak van monoton növekvő részsorozata. Tehát ha a részsorozat időpontjait vizsgáljuk, illetve azokat vesszük kereskedési időpontoknak, akkor teljesül Treussard sejtése.
Másrészt ha kiválasztunk egy fix jövőbeli t időpontot, akkor biztosan van egy olyan $t' > t$ időpont, amitől kezdve nagyobb a mérték értéke a t-ben felvett értéknél, szintén a végtelenbe tartó sorozat tulajdonságai miatt. Így ha elég nagy időkülönbségeket nézünk, akkor szintén teljesül Treussard sejtése.
Azt mindegyik vizsgált modellben magkaptuk, hogy a statisztikai mértékben számolt spektrális kockázati mérték sérti Treussard sejtését, hiszen monoton növekedés helyett a mérték értéke mínusz végtelenbe tart.

A kockázatsemleges mértékben a vizsgált modellek egy részében a spektrális kockázati mérték kielégíti az eredeti sejtésnek egy gyengébb változatát, amikor monoton növekedés helyett végtelenbe tartást követelünk meg a kockázattól.
Összességében tehát elmondható, hogy Treussard sejtését alapul véve biztosan nem a statisztikai mértékben kell számolni a spektrális kockázati mérték értékét. A kockázatsemleges mérték megfelelő lehet, ha az eredeti sejtésnek egy gyengített változatát vesszük.

8. Hasznosságfüggvény és spektrális kockázati mérték kapcsolata

Vizsgáljuk meg ebben a fejezetben, hogy hogyan létesíthető kapcsolat a hasznosságfüggvények, és a spektrális kockázati mértékek között. Mind a hasznosságfüggvény, mind a spektrális kockázati mérték kifejezi az egyén preferenciáját.
A haszonsságfüggvényekről részletes áttekintés található Norstad 2011-es [12] cikkében, ebből ismertetünk néhány információt az alábbiakban.
A hasznosságfüggvény egy adott x vagyon értékhez hozzárendeli az egyénnek az ehhez tartozó hasznosság értékét.
Formálisan:

10. Definíció (Hasznosságfüggvény). *Egy kétszer deriválható $U(x) : (x \geq 0)$ függvényt, melyekre $U'(x) > 0$, és $U''(x) < 0$ teljesül, hasznosságfüggvénynek nevezünk.*

A hasznosságfüggvény tehát egy befektető relatív preferenciáját mutatja különböző vagyon értékek esetén, nézzük meg, hogy a két deriváltra vonatkozó feltétel milyen közgazdasági okokra vezethető vissza.
Az első derivált pozitivitása azt mutatja, hogy nagyobb vagyon értékhez bármely egyén esetén nagyobb hasznosságfüggvény érték tartozik. Ez teljesen természetes feltételezés, mindenki jobbnak találja azt, ha nagyobb vagyonnal

rendelkezik.
A második derivált negativitása, vagyis a hasznosságfüggvény konkavitása a csökkenő határhasznosságra vezethető vissza. Gondoljunk bele, hogy egy embernek mindössze tíz dollárja van, egy másiknak pedig egymillió. Ha mindkettőnek adunk még egy dollárt, akkor sokkal jobb helyzetbe kerül az, akinek csak egy volt, mint akinek egymillió, így a hasznosságfüggvény is sokkal jobban nő az első esetben, mint a másodikban. Ennélfogva a hasznosságfüggvény növekedése a vagyon növelésével lelassul, így a hasznosságfüggvény megalapozottan konkáv.
A hasznosságfüggvény konkavitása egyben az egyén kockázatelutasítási hajlamát is mutatja.
Ennek megértéséhez vegyük segítségül a várható hasznosság maximalizásának alapelvét, amely azt állítja, hogy ha egy befektető különböző lehetséges befektetési alternativák halmaza előtt áll, akkor azt fogja választani, amelyik maximalizálja a várható hasznosságát. Formálisan I_{opt}-tal jelölve az optimális befektetési alternativát, és F-fel az összes befektetési alternatíva halmazát, akkor igaz:

$$\mathbb{E}(U(X(I_{opt}))) = max_{I \in F} \mathbb{E}(U(X(I))).$$

Vegyük a következő két lehetőséget:

- A befektető biztosan kap 10 dollárt,
- A befektető 0,5 valószínűséggel kap 5 dollárt, és 0,5 valószínűséggel 15 dollárt.

Látjuk, hogy mindkettő esetben a várható jövőbeli bejövő pénzmennyiség 10 dollár. A hasznosságfüggvény konkavitása miatt azonban bármelyik befektető az első lehetőséget fogja választani.
Az előző példa általánosításaként vegyük a következő két lehetőséget:

- A befektető biztosan kap $5p + 15(1 - p)$ dollárt,
- A befektető p valószínűséggel kap 5 dollárt, és $1 - p$ valószínűséggel kap 15 dollárt.

Mindkét esetben a várható jövőbeli pénzmennyiség $15 - 10p$ dollár. A Jensen egyenlőtlenség következményeként azonban konkáv U függvényekre: $pU(x_1) + (1-p)U(x_2) \leq U(px_1 + (1-p)x_2)$. A mi példánkban $x_1 = 5$, és $x_2 = 15$, tehát a befektető biztosan előnyben fogja részesíteni azt a lehetőséget, amikor biztosan kap $5p + 15(1-p)$ dollárt.
A Jensen egyenlőtlenség egy másik alakja:

$$\mathbb{E}(\phi(X)) \leq \phi(\mathbb{E}(X)),$$

ahol ϕ konkáv függvény, és X tetszőleges valószínűségi változó.
A mi esetünkben a lehetséges alternatívákra, mint valószínűségi változóra gondolhatunk.
Az $U(\mathbb{E}(X))$ adja a hasznosságát annak az esetnek, amikor a biztos $\mathbb{E}(X)$ pénzösszeget kapjuk kézhez.
$\mathbb{E}(U(X))$ fogja a hasznosságát adni annak az esetnek, amikor az X valószínűségi változó írja le a bejövő pénzáramlást, ez fejezi ki a lehetséges alternatívákat.
A Jensen egyenlőtlenség következményeként, a hasznosságfüggvény konkavitása miatt bármely befektető azt az alternatívát választja, amikor 1 valószínűséggel megkapja a várható értékét annak a pénzáramlásnak, mely a kockázatos lehetőséget jellemzi, ahelyett, hogy a kockázatos lehetőséget választaná.

Jól látható tehát, hogy a hasznosságfüggvények is az egyén kockázatelutasítási hajlamát fejezik ki. Ismeretlen azonban, hogy pontosan milyen kapcsolat van az U hasznosságfüggvény, és a spektrális kockázati mértékek γ függvényei között.

Dowd, Cotter és Sorwar [14] keresték a választ a problémára. Ahogy említettük, ők a veszteség alapú megközelítést válaszották, tehát a γ függvénnyel dolgoztak
Exponenciális, és hatvány hasznosságfüggvényeket vizsgáltak.

Az exponenciális hasznosságfüggvény:

$$U(x) = -e^{-ax},$$

ahol $a > 0$.

A hatvány hasznosságfüggvény:

$$U(x) = \frac{x^{1-c}}{1-c},$$

ahol $0 < c < 1$.

Az exponenciális hasznosságfüggvény esetén az abszolút kockázatelutasítás-függvény:

$$R_A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = a,$$

a relatív kockázatelutasítás-függvény:

$$R_R(x) = -\frac{xU''(x)}{U'(x)} = xa.$$

Dowd, Cotter és Sorwar intuícióra alapozva bevezette az exponenciális spektrális kockázati mértéket, amely súlyfüggvényét az exponenciális hasznosságfüggvényhez hasonló alakúnak választotta:

$$\gamma(p) = \lambda e^{-a(1-p)},$$

ahol λ pozitív konstans, melyet úgy választunk, hogy a súlyfüggvény integrálja 1 legyen.
$\lambda = \frac{a}{1-e^{-a}}$ választással ez pont teljesülni is fog. Ezt visszahelyettesítve a következő alakú lesz a súlyfüggvény:

$$\gamma(p) = \frac{ae^{-a(1-p)}}{1-e^{-a}}.$$

A hatvány hasznosságfüggvény esetén az abszolút kockázatelutasítás-függvény:

$$R_A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{c}{x},$$

a relatív kockázatelutasítás-függvény:

$$R_R(x) = -\frac{xU''(x)}{U'(x)} = c.$$

Dowd, Cotter és Sorwar intuícióra alapozva bevezette a hatvány spektrális kockázati mértéket is, melynek súlyfüggvényét a hatvány hasznosságfüggvényhez hasonló alakúnak választotta:

$$\gamma(p) = \lambda \frac{(1-p)^{c-1}}{1-c},$$

ahol λ pozitív konstans, melyet úgy választunk, hogy a súlyfüggvény integrálja 1 legyen.
$\lambda = c(1-c)$ választással ez pont teljesülni is fog. Ezt visszahelyettesítve a következő alakú lesz a súlyfüggvény:

$$\gamma(p) = c(1-p)^{c-1}.$$

Ezek a választások azonban pusztán heurisztikusak, közelítőek, és elméletileg igazolatlanok. Az említett cikk is megemlít egy példát, ahol a hatvány spektrális kockázati mértékből származó döntések drasztikusan eltérnek a hatvány hasznosságfüggvényekből származó döntésektől.

Sriboonchitta, Nguyen és Kreinovich [22] is vizsgálta a spektrális kockázati mértékek, és a hasznosságfüggvények kapcsolatát.
A γ, és U függvények közötti kapcsolatot vizsgálták, és egy robosztus statisztikai problémával hozták összefüggésbe a kapcsolatot. Ezen robosztus statisztikai probléma során úgynevezett M és L becslések jelentkeznek. Az M becslések szoros összefüggésbe hozhatóak a hasznosságfüggvények becslésével, az L becslések szoros összefüggésbe hozhatóak a spektrális kockázati mérték becslésével. Ezen robosztus statisztikai problémák megoldását használták fel a szerzők a spektrális kockázati mérték és a hasznosságfüggvény kapcsolatának meghatározására. A pontos részletek a cikkben találhatók, mi csak a végeredményt említjük.
Adott $U(x)$ hasznosságfüggvény esetén, melyre $U(0) = 0$, a következő lépésekkel kaphatjuk meg a spektrális kockázati mérték súlyfüggvényét:

- határozzunk meg először egy segédfüggvényt: $f_0(x) = e^{-\int_0^x U(t)dt}$,
- határozzuk meg ennek az integrálfüggvényét: $F_0(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)dt$,

- az $M(F_0(x)) = U'(x)$ összefüggés segítségével határozzuk meg $M(p)$ értékét: $M(p) = U'(F_0^{-1}(p))$, ahol $F_0^{-1}(p)$ az integrálfüggvény inverze,
- $I = \int_0^1 M(q)dq$ segítségével: $\gamma(p) = \frac{M(p)}{I}$.

Ezekkel a lépésekkel tehát kaptunk egy kiszámítási módot a hasznosságfüggvény ismeretében a spektrális kockázati mérték γ függvényére. A γ függvény ismeretében a $h(s)$ elutasítási függvény az ismert összefüggések fényében számolható.

A két feladat matematikailag analóg, a szerzők némi közgazdasági interpretációt is megemlítettek azzal kapcsolatban, hogy miért érdemes így számolni a hasznosságfüggvényből a spektrális kockázati mérték súlyfüggvényét:

- Ha a hasznosságfüggvény egyenesen arányos a vagyon értékével, vagyis $U(x) = cx$ alakú, akkor $U'(x) = c$, amiből következik, hogy $M(p)$, és $\gamma(p)$ is konstans. Az egyén tehát ebben az esetben minden kimenethez egyforma súlyt rendel, vagyis teljesen kockázatsemleges.
  Másrészről ebben az esetben: $\mathbb{E}U(X) = \mathbb{E}cX = c\mathbb{E}X = U(\mathbb{E}X)$. Ebből szintén az látszódik, hogy az egyén teljesen kockázatsemleges, egyformán jónak fogja tartani a biztos pénzáramlást, mint az ugyanakkora várható értékű kockázatos pénzáramlást.

- Ha a hasznosságfüggvény alulról és felülről is korlátos, vagyis a különböző nagyon nagy nyereségek, és a különböző nagyon komoly veszteségek között nem tesz különbséget, akkor a derivált konstansnak tekinthető a nagyon komoly veszteségek, és a nagyon nagy nyereségek tartományában. Ezzel a γ függvény is konstansnak tekinthető a nagyon kicsi percentiliseknél $p < \alpha_0$, és a nagyon nagy percentiliseknél $p > 1 - \alpha_1$.
  Vagyis a spektrális kockázati mértékeknél, és a hasznosságfüggvényeknél is hasonló közgazdasági értelmezését kapjuk ebben az esetben is a fennálló összefüggéseknek.

Ezen módszerrel való meghatározása a spektrális kockázati mérték súlyfüggvényének a hasznosságfüggvényből tehát közgazdasági magyarázatokra is épül, és pontos lépéseken keresztül kiszámítható.

Érdemes megnézni, hogy ez a módszer ugyanarra az eredményre vezet-e, mint amit Dowd, Cotter és Sorwar javasolt. A válasz az, hogy nem.

Mind az $U(x) = 1 - e^{-kx}$, mind az $U(x) = x^{1-\gamma}$ esetén $F_0(x)$ csak egy analitikusan nem kiszámolható integrál segítségével fejezhető ki, melynek az inverzét kéne kiszámolnunk a γ függvény meghatározásához. Ez szintén nem fejezhető ki explicit alakban, nem kapjuk vissza tehát az eljárás segítségével az egyszerű súlyfüggvényeket, melyet Dowd, Cotter és Sorwar javasolt.

8.1. Exponenciális és hatvány spektrális kockázati mérték a GBM részvényárfolyam modellben

Vizsgáljuk meg milyen formulákra jutunk, ha alkalmazzuk Dowd, Cotter és Sorwar által javasolt súlyfüggvényeket.

Az exponenciális spektrális kockázati mértékre javasolt súlyfüggvény:
$\gamma(p) = \frac{ae^{-a(1-p)}}{1-e^{-a}}$. Mivel tudjuk, hogy $h'(p) = \gamma(1-p)$, így a GBM részvényárfolyam modell esetén kapott képletünk a következő alakúra módosul a statisztikai mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z] =$$

$$= S_0e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^{-a\Phi(z)}}{1-e^{-a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z].$$

Illetve a kockázatsemleges mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^{-a\Phi(z)}}{1-e^{-a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}z].$$

Megkaptuk tehát a formuláinkat a különböző mértékek esetén.

Nézzük meg, hogy a h' függvényre kapott tételek közül melyeket tudjuk alkalmazni.

$h'(1) = \frac{ae^{-a}}{1-e^{-a}} > 0$, tehát $\rho(h(Y(t)))$ negatív megfelelően nagy $t-$re a statisztikai mértékben. Treussard sejtését alkalmazva tehát azt kapjuk, hogy ne a statisztikai mértékben számoljuk ki a spektrális kockázati mérték értékét.

Mivel a kockázatsemleges mértékben minden h' függvény esetén monoton nő $t-$ben a spektrális kockázati mérték értéke, így Treussard sejtését alkalmazva elmondható, hogy a kockázatsemleges mértékben érdemes kiszámolni a spektrális kockázati mérték értékét.

A hatvány spektrális kockázati mértékre javasolt súlyfüggvény:
$\gamma(p) = c(1-p)^{c-1}$. Mivel tudjuk, hogy $h'(p) = \gamma(1-p)$, így a GBM részvényárfolyam modell esetén kapott képletünk a következő alakúra módosul:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} h'(\Phi[z]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z] =$$

$$= S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} c\Phi(z)^{c-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z].$$

Illetve kockázatsemleges mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} c\Phi(z)^{c-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z-\sigma\sqrt{t})^2} \mathrm{d}z].$$

Nézzük meg ebben az esetben is, hogy a h' függvényre kapott tételek közül melyeket lehet alkalmazni.

$h'(1) = c1^{c-1} = c > 0$, tehát $\rho(h(Y(t)))$ negatív megfelelően nagy $t-$re a statisztikai mértékben. Treussard sejtését alkalmazva tehát azt kapjuk, hogy ne a statisztikai mértékben számoljuk ki a spektrális kockázati mérték értékét. Mivel a kockázatsemleges mértékben minden h' függvény esetén monoton nő $t-$ben a spektrális kockázati mérték értéke, így Treussard sejtését alkalmazva elmondható, hogy a kockázatsemleges mértékben érdemes kiszámolni a spektrális kockázati mérték értékét.

8.2. Exponenciális és hatvány spektrális kockázati mérték az FMLS részvényárfolyam modellben

Nézzük meg, hogy az FMLS részvényárfolyam modellben hogyan fognak alakulni a két javasolt típus esetén a spektrális kockázati mérték értékek, illetve a Treussard sejtésére vonatkozó tételek közül miket tudunk alkalmazni.

Az exponenciális spektrális kockázati mérték a következő alakot fogja ölteni a statisztikai mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z] =$$

$$= S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} \frac{ae^{-a(\Theta_\alpha(z))}}{1-e^{-a}}\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z].$$

Illetve a kockázatsemleges mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} \frac{ae^{-a(\Theta_\alpha(z))}}{1-e^{-a}}\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z].$$

A hatvány spektrális kockázati mérték a következő alakot fogja ölteni a statisztikai mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} h'(\Theta_\alpha(z))\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z] =$$

$$= S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} c\Theta_\alpha(z)^{c-1}\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z].$$

Illetve a kockázatsemleges mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\kappa\cdot t + z\sigma t^{1/\alpha}} c\Theta_\alpha(z)^{c-1}\Theta'_\alpha(z)\mathrm{d}z].$$

Mivel erre a modellre is igaz az a tétel a statisztikai mértékben, hogy amennyiben $h'(1) > 0$, akkor $\rho(h(Y(t)))$ negatív, ahogy $t-$vel tartunk végtelenbe, így Treussard sejtését alkalmazva a spektrális kockázati mérték értékét nem a statisztikai mértékben kell számolni erre a két spektrális kockázati mérték típusra.

A kockázatsemleges mérték esetén a triviális $h' \equiv 1$ esetet leszámítva a spektrális kockázati mérték tart végtelenbe, ahogy $t-$vel tartunk végtelenbe. Ez a tulajdonság szoros kapcsolatban van a monoton növekedéssel, így tanácsosnak tűnik ebben a mértékben számolni a spektrális kockázati mérték értékét ebben a két típusban is.

8.3. Exponenciális és hatvány spektrális kockázati mérték a Variance gamma részvényárfolyam modellben

Nézzük meg a Variance gamma részvényárfolyam modellre is, hogy a két speciális kockázati mértékről mit tudunk mondani.

Az exponenciális spektrális kockázati mérték a következőképp alakul a statisztikai mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - e^{(m-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z] =$$

$$= S_0 e^{rt}[1 - e^{(m-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} \frac{a e^{-a(F_t(z))}}{1 - e^{-a}} f_t(z) \mathrm{d}z].$$

Illetve a kockázatsemleges mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} \frac{a e^{-a(F_t(z))}}{1 - e^{-a}} f_t(z) \mathrm{d}z].$$

A hatvány spektrális kockázati mérték a következő alakot fogja ölteni a statisztikai mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - e^{(m-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z] =$$

$$= S_0 e^{rt}[1 - e^{(m-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} c F_t(z)^{c-1} f_t(z) \mathrm{d}z].$$

Illetve a kockázatsemleges mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} c F_t(z)^{c-1} f_t(z) \mathrm{d}z].$$

Erre a modellre beláttuk, hogy amennyiben $h'(\cdot)$ alulról korlátos valamely $C \neq 0$ konstanssal, akkor a spektrális kockázati mérték értéke negatív, ha $t-$vel tartunk végtelenbe. Ez mind az exponenciális, mind a hatvány spektrális kockázati mérték h' függvényére igaz, vagyis a spektrális kockázati mérték értékét Variance gamma részvényárfolyam modellt feltételezve biztosan nem a statisztikai mértékben kell számolni Treussard sejtése alapján.

A kockázatsemleges mértékben csak annyit tudunk mondani, hogy biztosan nemnegatív a spektrális kockázati mérték értéke, illetve a megjegyzésben található feltétel leellenőrzésével a végtelenbe tartás biztosítható.

Egy olyan speciális mértékben, amikor $m < r$ elmondható, hogy a spektrális kockázati mérték értéke tart a végtelenbe, ha t tart végtelenbe, így erre a két speciális esetre is érdemes lehet Treussard sejtését figyelembe véve ezekben a mértékekben számolni a spektrális kockázati mértéket.

8.4. Exponenciális és hatvány spektrális kockázati mérték a kibővített CGMY részvényárfolyam modellben

Vizsgáljuk meg, hogyan tudjuk alkalmazni a kapott eredményeket a részvényárfolyam mozgására kibővített CGMY folyamatot feltételezve a két speciális spektrális kockázati mértékre.

Az exponenciális spektrális kockázati mérték a következőképp alakul a statisztikai mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z] =$$

$$= S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} \frac{a e^{-a(F_t(z))}}{1-e^{-a}} f_t(z) \mathrm{d}z].$$

Illetve a kockázatsemleges mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} \frac{a e^{-a(F_t(z))}}{1-e^{-a}} f_t(z) \mathrm{d}z].$$

A hatvány spektrális kockázati mérték a következő alakot fogja ölteni a statisztikai mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} h'(F_t(z)) f_t(z) \mathrm{d}z] =$$

$$= S_0 e^{rt}[1 - e^{(\mu-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} c F_t(z)^{c-1} f_t(z) \mathrm{d}z].$$

Illetve a kockázatsemleges mértékben:

$$\rho(h(Y(t))) = S_0 e^{rt}[1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+(\omega-\frac{\gamma^2}{2})t} c F_t(z)^{c-1} f_t(z) \mathrm{d}z].$$

A kibővített CGMY részvényárfolyam modellre teljesen hasonló tételeket sikerült bizonyítanunk, mint a Variance gamma részvényárfolyam modellre, tehát elmondható, hogy a két speciális spektrális kockázati mértékre nem a statisztikai mértékben kell számolni a spektrális kockázati mérték értékét Treussard sejtése alapján.

A kockázatsemleges mértékben szintén csak annyit tudunk mondani, hogy biztosan nemnegatív a spektrális kockázati mérték értéke, illetve a megjegyzésben található feltétel leellenőrzésével a végtelenbe tartás biztosítható.

Egy olyan speciális mértékben, ahol $\mu < r$ azonban a spektrális kockázati mérték értéke tart a végtelenbe, ha t tart végtelenbe, így Treussard sejtését szem előtt tartva érdemes lehet ezekben a modellekben számolni a spektrális kockázati mérték értékét.

8.5. Expected Shortfall a különböző modellekben

Az Expected Shortfall az egyik leggyakrabban használt és legközismertebb spektrális kockázati mérték.
Az α Expected Shortfallra:

$$h_\alpha(u) = min\{1, \frac{u}{\alpha}\},$$

$$h'_\alpha(u) = \frac{1}{\alpha} 1_{0 \leq u \leq \alpha}.$$

A kapott képletekbe behelyettesítve a h' függvényt megkapjuk a különböző modellekben az Expected Shorfall értékét.
A 3.3 és az 5.3 tétel miatt az Expected Shortfall értéke a GBM részvényárfolyam modellben és az FMLS részvényárfolyam modellben a statisztikai mértékben tart a mínusz végtelenbe.
A Variance gamma részvényárfolyam modellben és a CGMY részvényárfolyam modellben a megjegyzésben található feltétel leellenőrzésével eldönthető, hogy végtelenbe tart-e az Expected Shotrfall a statisztikai mértékben.
A kockázatsemleges mértékben való viselkedésről teljesen ugyanaz mondható el, mint az összes spektrális kockázati mértékről, vagyis a GBM részvényár-

folyam modellben monoton nő az Expected Shortfall, az FMLS részvényárfolyam modellben végtelenbe tart.
A Variance gamma részvényárfolyam modellben, és a CGMY részvényárfolyam modellben a megfelelő feltétel leellenőrzésével biztosítható, hogy végtelenbe tart az Expected Shortfall értéke.
A Variance gamma részvényárfolyam modellben például a következőképpen számolható az Expected Shortfall:

$$ES = S_0 e^{rt}[1 - e^{(m-r)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+\omega t} \frac{1}{\alpha} 1_{0 \le F_t(z) \le \alpha} f_t(z) \mathrm{d}z].$$

9. Összefoglalás, kitekintés

A szakdolgozatban spektrális kockázati mértékeket vizsgáltunk, különös tekintettel figyelembe véve Bodie elméletét, illetve Treussard sejtését, mely szerint a részvénytartás kockázatának növekednie kell, ha hosszabb ideig szándékozzuk tartani az eszközt. Ebből a szempontból használtuk fel Nguyen, Pham és Tran cikkét. Ők a GBM részvényárfolyam modellben vizsgálták a spektrális kockázati mérték értékét abból a szempontból, hogy ezt a statisztikai, vagy a kockázatsemleges mértékben kell-e számolni.
Ezeket az eredményeket általánosítottuk az FMLS, a Variance gamma és a kibővített CGMY részvényárfolyam modellre. Ezek gyakorlati szempontból is megalapozott részvényárfolyam modellek, melyekről bőséges irodalom található a hivatkozásokban.
A fent említett részvényárfolyam modellek mindegyikére egy számítógép segítségével numerikusan számolható formulát kaptunk a spektrális kockázati mérték értékére.
Néhány cikket felhasználva megvizsgáltuk, hogy a hasznosságfüggvények és a spektrális kockázati mértékek milyen kapcsolatban vannak.
Pár speciális spektrális kockázati mértékre megnéztük, hogy milyen formulával számolható ki az értékük.
A munka folytatható egyéb modellekre való vizsgálattal, illetve részvény helyett más pénzügyi termékek kockázatának vizsgálatával.

Hivatkozások

[1] A.Hirsa and B.Madan. Pricing american options under variance gamma. *Journal of Computational Finance*, 7:63–80, 2003-2004.

[2] B.Madan and E.Seneta. The variance gamma (v.g.) model for share market returns. *Journal of Business*, 63:511–526, 1990.

[3] P.Carr B.Madan and C.Chang. The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*, 2:79–105, 1998.

[4] C.Acebi and D.Tasche. Expected shortfall: A natural coherent alternative to value at risk. *Economic Notes*, 31:379–388, 2002.

[5] C.Acerbi. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking and Finance*, 26:1505–1518, 2002.

[6] E.Luciano F.Fiorani and P.Semeraro. Single and joint default in a structural model with purely discontinuous assets. *Quantitative Finance*, 10:249–264, 2010.

[7] G.Choquet. Theorie des capacites. *Annales de l'institut Fourier*, V:131–295, 1953.

[8] G.Samorodnitsky. *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman and Hall/CRC, 1994.

[9] Uyen H.Pham Hung T.Nguyen and Hien D.Tran. On some claims related to choquet integral risk measures. *Annals of Operations Research*, 195:5–31, 2012.

[10] I.Gilboa and D.Schmeidler. Additive representations of non-additive measures and the choquet integral. *Annals of Operations Research*, 52:43–65, 1994.

[11] Treussard J. The non-monotonicity of value-at-risk and the validity of risk measures over different horizons. *available at http://ssrn.com/abstract=776651*, 2006.

[12] J.Norstad. An introduction to utility theory. *available at http://seshadri.us/docs/norstad_utility.pdf*, 2011.

[13] J.P.Nolan. Modeling financial data with stable distributions, 2005.

[14] J.Cotter K.Dowd and G.Sorwar. Spectral risk measures: Properties and limitations. *Journal of Financial Services Research*, 34:61–75, 2008.

[15] K.Littler M.Dempsey, R.Hudson and K.Keasey. On the risk of stocks in the long run: A resolution to the debate. *Financial Analysts Journal*, 52:57–62, 1996.

[16] J.M.Eber P.Artzner, F.Delbaen and D.Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228, 1999.

[17] P.Carr and L.Wu. The finite moment log stable process and option pricing. *The Journal of Finance*, LVIII, NO.2:753–778, 2003.

[18] B.Madan P.Carr, H.Geman and M.Yor. The fine structure of asset returns: An empirical investigation. *Journal of Business*, 75:305–332, 2002.

[19] P.J.J.Herings P.Csoka and L.A.Koczy. Coherent measures of risk from a general equilibrium perspective. *Journal of Banking and Finance*, 31:2517–2534, 2007.

[20] R.Cont and P.Tankov. *Financial modelling with jump processes*. Chapman and Hall/CRC, 2004.

[21] R.Taylor and D.J.Brown. On the risk of stocks in the long run: A note. *Financial Analysts Journal*, 52:69–71, 1996.

[22] Hung T.Nguyen S.Sriboonchitta and V.Kreinovich. How to relate spectral risk measures and utilities. *International Journal of Intelligent Technologies and Applied Statistics*, 3:141–158, 2010.

[23] Zhang Ye and Xiang Y. Implied volatility smirk. *Quantitative Finance*, 8:263–284, 2008.

[24] Z.Bodie. On the risk of stocks in the long run. *Financial Analysts Journal*, 51:18–22, 1995.