MSc szakdolgozat

Kockázati mértékek osztályozásának áttekintése különféle kockázatkezelői preferenciák szerint

Szerző:
Bebes András

Témavezető:
Dr. Csóka Péter

Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc
Kvantitatív pénzügyek szakirány

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapesti Corvinus Egyetem

2014. május 29.

Nyilatkozat

Név: Bebes András

ELTE Természettudományi Kar, szak: Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc

NEPTUN azonosító: FOWBBO

Szakdolgozat címe: Kockázati mértékek osztályozásának áttekintése különféle kockázatkezelői preferenciák szerint

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Aláírás: ________________________________

Dátum: ________________________________

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Csóka Péternek, aki észrevételeivel és tanácsaival segítette munkámat.

Köszönettel tartozom továbbá munkatársaimnak Mohai Ádámnak és Fegyveres Györgynek hasznos észrevételeikért, valamint Fegyverneki Tamásnak és Biszak Elődnek, akik felhívták a figyelmem több apróbb hibára is.

Szeretnék emellett még köszönetet mondani feleségemnek Tamásovics Ritának, valamint családomnak, különösképp édesapámnak, aki tanulmányaimat lehetővé tette.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

1. fejezet

Bevezetés

Az elmúlt évtizedek nagyobb válságai (LTCM bukása, Dotcom lufi, globális pénzügyi válság) rámutattak arra, hogy a kockázatok mérése a pénzügyi szektorban még mindig gyerekcipőben jár. A tudományos világ több mint egy évtizeddel a 2007 – 2008-as válság bekövetkezte előtt figyelmeztetett az akkoriban használt kockázati mutatók hibáira, illetve felhasználhatóságuk korlátaira, sőt javaslatokat is megfogalmazott a továbbfejlesztésük irányára vonatkozóan. A pénzügyi intézmények és a felügyeleti szervezetek azonban az utolsó utáni pillanatig figyelmen kívül hagyták ezeket a figyelmeztetéseket, és csak a válság bekövetkezte után, az utóbbi években kezdtek el komolyabban foglalkozni a kockázatok leírásának hatékonyabb módszereivel.

A pénzügyi termékekben rejlő kockázatok mérése a különféle instrumentumok elterjedésével párhuzamosan terjedt el. Kezdetben a pénzügyi kockázat az elvárt hozamra vonatkozó egyfajta korrekciós faktor volt, amelynek előnye, hogy pillanatok alatt ki lehetett alakítani a preferenciánknak megfelelő sorrendet a befektetések között. Ezt a fajta megközelítést változtatta meg alapjaiban Harry Markowitz [1] a Modern Portfólió Elmélet (MPE) megalkotásával. Markowitz olyan kockázati mértéket javasolt, amely az egyes eszközök várható értékétől vett átlagos ingadozást méri (szórás, variancia). Legfőbb gondolata azonban, hogy a portfólió kockázatát a benne szereplő eszközök hozamának együttes eloszlásából határozzuk meg. Az ezt követő évtizedekben a szabályozó környezet szigorúbbá válása, illetve a mind bonyolultabb pénzügyi termékek megjelenése egy teljes tudományág kialakulásához vezetett, melynek feladata, hogy az egyes piaci pozíciókban rejlő kockázat leírhatóvá váljon. A 1987-es ún. "fekete hétfő", a derivatív termékek megjelenése, illetve az ezeket követő válságok a ’90-es években (LTCM) hatására a kockázatkezelés mindinkább a felügyeleti szervezetek fókuszába került. A Bázeli szabályozás [2] létrejötte pedig a felelősebb gazdálkodás felé terelte a piaci szereplőket.

A szórás - mint hatékony kockázati mutatószám - alkalmazása már nagyon korán vitathatóvá vált, hiszen a kockázatkezelést a negatív irányú megváltozás (költségnövekedés, értékcsökkenés) érdekli. Ennek bemutatására önmagában a szórás alkalmatlannak bizonyult. A derivatív termékek létrejötte hívta életre az ún. "görögök"[1]-et, amelyek hátránya azonban, hogy az adott pozíciót a háttérben befolyásoló tényezők (idő, részvényérték... stb.) mindössze egyikének megváltozásakor jelentkező kockázatot képes mérni. Ezáltal pedig alkalmatlan arra, hogy egy komplex portfólióban rejlő kockázatról általános képet adjon.

A kockáztatott értéket (Value-at-Risk, VaR) a J.P. Morgan-ben fejlesztették ki 1994-ben, majd a számolási módszertant rövidesen mindenki számára ingyenesen hozzáférhetővé tették. Ezt követően rendkívül gyorsan terjedt el, s rövidesen már a legtöbb helyen ezt használták, mint kockázati mértéket. Sikere főként könnyű interpretálhatóságának, illetve közérthetőségének volt köszönhető. Rövidesen olyan sikeres lett, hogy 1999-ben a Bázel II-be is belefoglalták.

A VaR megjelenését követően a tudományos világ rögtön megjelentette kritikáit az új mértékkel kapcsolatban. Beder [3] három eltérően komplex portfólión mutatja be, hogy a különféle VaR kalkulációs metódusok mennyire különböző eredményeket adnak, s hogy ezen eltérések nagysága nem arányos a portfóliók közti komplexitással. Wirch [4] a VaR számításához használt módszerek alapfeltevéseit kérdőjelezi meg, Duffie és Pan [5] óvatosságra int, hiszen a kockáztatott érték további szempontokból is kritizálható, miszerint az időhorizont, a konfidencia-szint, de akár az adott portfólió likviditása is lényeges kockázatot rejt magában, amelyekkel a VaR egyáltalán nem számol. Az egyik legjellemzőbb kritika azonban mégis az, hogy a VaR nem szubadditív, vagyis szembemegy az MPE legfőbb eredményével, miszerint diverzifikációval csökkenthető a kockázat. Emellett még a leggyakrabban hangoztatott hátránya a kockáztatott értéknek, hogy nem írja le, hogy ha bekövetkezik a váratlan esemény, akkor annak milyen következményei lehetnek, ugyanis nem foglalkozik a veszteségeloszlás farokrészével.

A hatékony kockázati mérték keresésének problémáját alapvetően helyezték új alapokra Artzner és szerzőtársai [6] 1999-ben megjelent tanulmányukban. Egy axiomatikus rendszert definiáltak, amelynek korlátain belül próbálták megtalálni az ideális kockázati mutatószámot. Elgondolásuk szerint az ideális kockázati mérték az elvárásainknak (axiómáknak) leginkább megfelelő leképezés a világ lehetséges állapotaiból a valós számok halmazára. A módszer újdonsága, hogy először szorítja axiomatikus keretek közé a problémát. Az általuk legfontosabbnak tartott négy tulajdonságot teljesítő kockázati

[1] A görögök a közgazdaságtanban olyan mértékeket jelentenek, amelyek a derivatívok értékének érzékenységét reprezentálják a rájuk ható paraméterek megváltozásakor.

mértékeket elnevezték koherens kockázati mértékeknek (coherent measures of risk). Kusuoka [7] egy ötödik axiómát is javasolt, amely tulajdonságot teljesítő kockázati mértékek empirikus adatok alapján becsülhetőek, ez pedig gyakorlati szempontból elengedhetetlenül fontos.

Acerbi [8] definiálta a spektrális kockázati mértékek osztályát (spectral measures of risk), és javasolta a várható súlyos veszteséget (Expected Shortfall, ES) [9], mint alkalmas kockázati mértéket. Továbbá Tasche-vel közösen belátták, hogy az ES koherens, illetve összehasonlították a kockáztatott értékkel [10, 11], valamint belátták, hogy az ES a spektrális kockázati mértékek osztályába tartozik. Tasche a várható súlyos veszteség további tulajdonságait is bemutatta [12]. Velük párhuzamosan Rockafellar és szerzőtársai [13], valamint Pflug [14] is javasolták a feltételes kockáztatott értéket (Conditional Value-at-Risk, CVaR). A spektrális kockázati mértékek osztályával foglalkoztak még Adam és szerzőtársai [15], melyet tanulmányukban a portfólió kiválasztási probléma szempontjából vizsgáltak. Csóka és szerzőtársai [16] a spektrális és koherens kockázati mértékek osztályait meghatározó axiómákat vizsgálták az általános egyensúlyelmélet (general equilibrium theory) kapcsán.

Föllmer és Schied [17, 18] a konvex kockázati mértékek (convex measures of risk) osztályát a koherencia axiómáinak gyengítésével definiálták. Laeven és Stadje [19] tanulmányukban a konvex kockázati mértékek két alosztályát határozták meg és vizsgálták. A standard entrópia mérték (entropic measure of risk) tipikus példa a konvex, de nem koherens kockázati mértékre. Az entrópia VaR-t (Entropic Value-at-Risk) pedig Ahmadi [20, 21] definiálta, mint koherens kockázati mértéket, amely egy felső korlátot is ad a VaR, illetve CVaR értékekre.

Rockafellar és szerzőtársai [22, 23] foglalkoztak az általuk deviáció kockázati mérték (deviation measures), illetve várhatóérték-korlátozott (expectation-bounded measures of risk) kockázati mértékek tulajdonságaival, valamint a köztük lévő kapcsolattal. A szakirodalomban sokszor nincs megkülönböztetve a kettő, sőt, sokszor tévesen csak az utóbbi osztályt sorolják kockázati mértékek közé.

Az áresés mértékeket (drawdown measures) Chekhlov és szerzőtársai [24, 25] vetették fel, és vizsgálták.

A torzított kockáztatott mértékek (distortion measures of risk) osztálya felé csak az utóbbi évtizedben fordult a pénzpiaci kockázatkezelési szakma figyelme, ugyanis az osztályt először a biztosítási szektorban definiálták, s főként aktuáriusok foglalkoztak vele. Wang és szerzőtársai [26] a biztosítási díjak kialakítását Artzner és szerzőtársai koherens kockázati mértékekkel foglalkozó tanulmányát megelőzően terelik axiomatikus keretek közé. Wang [27] tanulmányában felvetette a torzított kockázati mértékek osztályát, miután a koherens kockázati mértékek osztályát nem találta elégségesnek kockázatkezelési szempontból. A veszteségeloszlás jobb oldali farkára vonatkozó deviációt és indexet is Wang javasolta [28]. Darkiewitcz és szerzőtársai [29] tanulmányukban kritizálták, hogy a koherens torzított kockázati mértékek sok esetben nem őrzik meg a konvex rendezést. Sereda és szerzőtársai [30] a torzított kockázati mértékek osztályának tulajdonságait írta le, míg Wirch [31] ugyanezen osztály koherenciájával, valamint sztochasztikus dominanciájával foglalkozott. Balbás és szerzőtársai [32] új axiómákat vezettek be a torzított kockázati mértékek osztályához.

A Bázeli bankfelügyelet [33] 2012-ben engedélyezte, hogy alaposabban megvizsgálják, hogy milyen hatásokkal járhat, ha az addig előírt VaR-t a sokak által ajánlott várható súlyos veszteség váltaná fel. Gneiting [34] a kockázati mértékek előrejelzési hatékonyságát vizsgálta, bevezetve az általa kiválthatóságnak (elicitable) hívott új axiómát. Cikkében Gneiting belátta, hogy az ES nem kiváltható. Ziegel [35], valamint Emmer és szerzőtársai [36] a kockázati mértékek kiválthatóságát vizsgálták tanulmányaikban. Gneiting [34] mellett Bellini és szerzőtársai [37] is az expectilist (expectile) ajánlották, mint lehetséges alternatívát.

Szakdolgozatom célja, hogy megvizsgálja a leggyakrabban alkalmazott kockázati mértékeket, összefoglalja a kockázati mértékek osztályait, valamint összeszedje és bemutassa az osztályok építőköveit, a téma megismeréséhez elengedhetetlenül szükséges axiómákat. Célom továbbá, hogy szakdolgozatom hasznos útmutatóként szolgáljon az egyre szélesebbé váló szakirodalomban.

Dolgozatom felépítése a következő: a bevezető első fejezet után a második fejezetben lefektetem a téma alapjait, definiálom a kockázati mértéket, részletesen bemutatom a kockázati mértékek osztályainak alapvető építőköveit, az axiómákat vagy tulajdonságokat. A harmadik fejezetben megvizsgálom a kockázati mértékek osztályait, valamint feltérképezem a köztük lévő kapcsolatrendszert. A negyeddik fejezetben a szakirodalomban, illetve a gyakorlatban is elterjedt kockázati mértékeket mutatom be, megvizsgálva azok előnyeit, hátrányait és alkalmazhatóságukat, emellett bemutatok több, a gyakorlatban még nem elterjedt kockázati mértéket is. Végül az ötödik fejezetben összegzem a téma jelentőségét.

Szakdolgozatomban nem foglalkozom külön a dinamikus kockázati mértékekkel. Dolgozatom alapjául Szegő [38], Albrecht [39], Frittelli és Rosazza G. [40], Krokhmal és szerzőtársai [41], valamint Rachev és szerzőtársai [42] tanulmányai szolgáltak.

2. fejezet

Alapfogalmak, axiómák

A helyes kockázati mérték definiálása rendkívül összetett feladat, hiszen bizonyos szempontból nézve a kockázat önmaga is egy szubjektív fogalom. A kockázat és a bizonytalanság fogalmak bevezetése, illetve a kettő közti különbség pontos definiálása máig vita tárgyát képezi. Emellett egy kockázatkezelő vagy befektető csak a rendelkezésre álló, észlelhető információ alapján képes modellezni a kockázatot. A pénzügyi szakirodalom emiatt a kockázatnak csak egy operatív definícióját tudja használni, vagyis a kockázat csak a befektető kockázatról alkotott saját felfogását képes tükrözni.

Az ideális kockázati mérték kialakításához megfigyelhető pénzügyi jelenségek egész sorára van szükség (pl. az összevont kockázat hatása, időbeli horizont, az elterjedés hatása, tranzakciós költségek, kockázatkerülés). Sőt, bizonyos tulajdonságokat pedig minden kockázati mértéknek figyelembe kellene vennie, például a diverzifikációt, a programozhatósági komplexitást, az asszimetriát vagy a linearitást (Rachev és szerzőtársai [42]). Ezek alapján nehéz elképzelni, hogy létezik olyan mérték, amely minden pénzpiaci sajátosságot és jelenséget figyelembe vesz.

Legyen az állapottér Ω, amelynek ω elemei jelentik a lehetséges jövőbeli állapotokat, legyen továbbá $\mathcal{P}$ a rajta értelmezett valószínűségi mérték, valamint $\mathcal{F}$ a lehetséges eseményeket tartalmazó σ-algebra.

A kockázati mérték egy eloszlásokon értelmezett valós értékű leképezés (függvény), jelölésemben: $\rho : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Az X vagy Y minden esetben egy valószínűségi változót fog jelenteni, az ezeket tartalmazó halmazt $\mathbb{X}$-szel fogom jelölni. Az e definíción túlmenő megkötések már mind speciális kockázati mértékeket határoznak meg. A tetszőleges megkötéseknek eleget tevő kockázati mértékeket az adott megkötések által meghatározott *osztály*ba tartozónak hívom, a megkötéseket pedig *axiómák*nak vagy *tulajdonságok*nak.

Egy kockázatmentes pénzügyi portfólió kialakításakor[1], de akár biztosításoknál is a cél az, hogy egy kockázatos pozíciót egy vele ekvivalens kockázatmentes pozícióvá transzformáljunk. Emiatt egy kockázati mérték célja, hogy az átmenet közötti "távolságot" mérje. Fontos különbséget tenni egyoldali és kétoldali távolság között.

Dhaene és szerzőtársai [43] definícióját követve kétoldali kockázati mértéknek nevezem azokat a kockázati mértékeket, amelyek a kockázatos, illetve kockázatmentes helyzet közötti távolságot mérik, abban az esetben, amikor a kívánatos, illetve a nem kívánatos kiugrásokat is egyaránt figyelembe veszik. Egyoldali kockázati mértékeknek pedig azokat a kockázati mértékeket nevezem, amelyek esetén csak a nem kívánatos esetek járulnak hozzá a kockázathoz.

Egy - mára egyre inkább elterjedt - módszer a kockázati mutatókat egy axiomatikus rendszerben definiálni, amelyben ezen axiómák jelentik a mutatók kockázatkezelő által elvárt tulajdonságait. Egy ilyen rendszerben kiválaszthatók, vagy akár konstruálhatók is különféle mutatók, amelyek az adott problémákra jó választ adhatnak. Az axiómák segítségével pedig a mutatók több fontos és hasznos tulajdonsága is levezethető. A kockázatkezelő feladata, hogy kialakítsa azt az axiómarendszert, és kiválassza az ezeknek megfelelő mutató(ka)t, amelyekkel a leghatékonyabban képes felmérni a vállalt kockázatot. Ez minden esetben eltérő lehet, mert nincs egy egyetemes axiómarendszer, amely minden szempontból jobb lenne a többinél, hiszen a kockázat maga is egy nehezen meghatározható és eltérően definiált fogalom. A döntéshozók általában különféle elvárásokkal rendelkeznek. Az elvárásoknak megfelelően lehet kiválasztani, hogy az adott probléma milyen tulajdonságok segítségével írható le a legjobban. Ezen axiómák több csoportba oszthatóak egyszerű racionalitás, additivitási és technikai tulajdonságok alapján (Denuit és szerzőtársai [44]). A racionalitási axiómák főként olyan tulajdonságokat határoznak meg, amelyek a legtöbb kockázati mértékre teljesülnek (pl. monotonitás). Az additivitási axiómák kockázatok aggregálásával foglalkoznak, és azt írják le, hogy a különféle összevonások hogyan hatnak a kockázati mértékre. Végül a technikai axiómák, amelyek főként folytonossági tulajdonságokkal foglalkoznak, jelentősége leginkább a matematikai bizonyítások szempontjából érdekes, s a legtöbb esetben nagyon nehéz szemléletesen megmagyarázni őket.

Az axiómák következőkben felsorolt listája[2] nem teljes, sőt mindegyik axióma jelenleg is vita tárgyát képezi.

[1] Kockázatmentes portfólión azokat a portfóliókat értem, amelyek hozamának szórása zérus, vagy bizonyos konfidenciaszint mellett nem keletkezhet veszteségünk a pozíción.

[2] Az axiómák összegyűjtésében nagy segítséget nyújtott Sereda és szerzőtársai [30] a témával foglalkozó tanulmánya.

2.1. Racionalitási axiómák

2.1.1. Eloszlás-invariancia (objektivitás)

Gyakorlati szempontból talán ez az axióma nevezhető a legfontosabbnak. A gyakorlatban a különféle eloszlásokat empirikus adatokból becsülik. Az eloszlás-invariancia azt állítja, hogy a kockázati mérték nem önmagában X-től, hanem annak mögöttes eloszlásától F_X-től függ, vagyis $\rho(X) = \rho(F_X)$. Például 2 portfólió, amelyek piaci portfólióval vett kovarianciája eltérő, más és más kockázattal rendelkezhetnek még olyankor is, ha a veszteségeloszlásaik megegyeznek. Ez a tulajdonság biztosítja, hogy F_X tartalmazzon minden információt X kockázatának méréséhez. Máshogy leírva:

$$F_X = F_Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y).$$

Tehát amennyiben X és Y pozíciók valószínűségi eloszlása megegyezik, akkor a kockázatuk is azonos. Például, ha X a pozíció mögötti tényleges véletlenszerűséget jelenti, Y pedig a rendelkezésre álló információt, vagyis múltbéli vagy szimulált adatok által meghatározott eloszlás, akkor a eloszlás-invariancia azt mondja meg, hogy amennyiben a rendelkezésre álló adatok eloszlása "azonos"[3] a valós eloszlással, akkor az adatok által jelzett kockázati mérték is "azonos" lesz a valóssal. Más szóval szimulációval vagy empirikus adatokkal kiszámolható a kockázati mérték.

2.1.2. Pozitív homogenitás

A pozitív homogenitás pénzügyi szempontból azt állítja, hogy a pozíció méretének egy pozitív konstanssal történő megváltoztatása, a kockázat megváltozásához vezet ugyanezen konstanssal, matematikailag:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X),$$

minden $\lambda > 0$ konstansra és $X \in \mathbb{X}$ valószínűségi változóra. Például, amennyiben duplázódik a pozíció mérete ($\lambda = 2$), akkor a vállalt kockázat is duplázódik. Sokan vitatják ezen axióma létjogosultságát, hiszen sok esetben a kockázat nem lineáris mértékben változik a pozíció méretéhez képest (pl. likviditási kockázat).

[3] Bizonyos hibahatáron belül.

2.1.3. Monotonitás

Minden X és Y eloszlásra, ahol $X \geq Y$,

$$\rho(X) \geq \rho(Y)$$

A monotonitás következménye, hogy ha az első eszköz X vesztesége kimenetelenként nem kisebb, mint a másik eszköz Y vesztesége, akkor X kockázata sem lehet kisebb, mint Y-é. Tehát, ha X az egyes kimeneteleken nagyobb veszteséget (kisebb nyereséget) generál, akkor a vállalt kockázat is nagyobb. A monotonitás axióma egy másik reprezentációja a kockázatmentes eszközzel[4] a következőképp néz ki:

$$X \leq 0 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(0) = 0,$$

ahol $X \in \mathbb{X}$. Szemléletes jelentése: amennyiben az X eszköz kimenetelei csak kedvezőek (negatívak) lehetnek, akkor a vállalt kockázat negatív. Amennyiben a kockázati mérték tőke-megfelelési szempontból lett definiálva, akkor a negatív kockázat azt jelenti, hogy pénz vehető ki a portfólióból.

2.1.4. Nem-negativitás

1. $\rho(X) \geq 0$, valamint $\rho(X) > 0$ minden nem konstans X-re. A nem-negativitás ezen formája a kétoldali kockázati mértékeknél jellemző elvárás.

2. Ha $X \geq 0 \Rightarrow \rho(X) \geq 0$, illetve ha $X \leq 0 \Rightarrow \rho(X) \leq 0$. A tulajdonság jelentése magától értetődő, hiszen ha X minden kimenetele a döntéshozó számára pozitív, akkor a hozzá tartozó kockázat nem lehet 0-nál nagyobb, és fordítva ugyanez. Ez az axióma az egyoldali kockázati mértékeknél szokott elvárás lenni.

2.1.5. Szimmetria

1. $\rho(-X) = \rho(X)$, összhangban 2.1.4. 1. ponttal.

2. $\rho(-X) = -\rho(X)$, ez a tulajdonság csak olyan mértékek esetén értelmes, amelyek felvehetnek negatív értékeket is (2.1.4. 2. pont).

[4] Kockázatmentes eszközön a matematikai értelemben vett kockázatmentes eszközt értem, amelynél

$$\rho(0) = 0.$$

2.1.6. Transzláció invariancia

1. $\alpha > 0$ és $C \in \mathbb{R}$ konstansokkal a transzláció invariancia a következőképpen definiált:

$$\rho(X + C) = \rho(X) + \alpha C.$$

Az axióma jelentése, hogy ha a pozíció lehetséges vesztesége nő (csökken, ha C negatív) egy ismert konstanssal (pl. készpénzt veszünk el, vagy helyezünk mögé), akkor az így képzett portfólió kockázata nő (csökken). Gyakorlatban az $\alpha = 0$ vagy $\alpha = 1$ esetek használatosak, s ezek markánsan el is térnek egymástól. Tulajdonképp ez a két külön eset különbözteti meg egymástól az egy-, illetve kétoldali kockázati mértéket.

2. Ha $\alpha = 0$, akkor adott mennyiségű vagyon hozzáadása (elvétele) nem változtatja meg a kockázatot.[5]

3. Abban az esetben, ha $\alpha = 1$ akkor a veszteség konstanssal való csökkentésekor a kockázat ugyanennyivel csökken:

$$\rho(X - C) = \rho(X) - C.$$

Ebből következik, hogy ha $C \geq 0$, akkor $\rho(X - C) \leq \rho(X)$. Ez pedig összhangban van a monotonitás tulajdonsággal; $X - C \leq X$.

4. A transzláció invariancia magába foglalja az alábbi esetet is:

$$\rho(X - \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0,$$

így kapható kockázatmentes pozíció (megfelelő konfidencia-szint mellett), ha $\rho(X)$-val csökken az eredeti pozíció vesztesége. Ez adja voltaképpen az egyoldali kockázati mértékek értelmét, ezáltal ugyanis bizonyos konfidencia-szint mellett "semlegesíthető" a kockázat.

2.1.7. A konstans kifizetés kockázata

1. A $\rho(C) = C$ összefüggés a 2.1.6. 3. pontból következik. Amennyiben $C < 0$, akkor a pozíció stabil, a kockázat negatív. Az ellentéte teljesül, ha $C > 0$.

2. $\rho(C) = 0$, a kockázat nem változik a konstans hatására.

[5] Az axióma úgy is ismert, mint a Gaivoronsky-Pflug (G-P) transzláció invariancia [45].

2.1.8. Várhatóérték-korlátozottság

Az axióma annyit mond, hogy a portfólió, vagy eszköz kockázata mindig nagyobb, mint a veszteségeloszlás várható értéke.

$$\rho(X) \geq E(X),$$

valamint szigorú egyenlőtlenség teljesül minden nem konstans X esetén. Az axiómát Rockafeller és szerzőtársai [22] vezették be az egyoldali kockázati mértékre.

2.1.9. Felső tartománybeli dominancia

A kétoldali kockázati mértékek felső tartománybeli dominanciával rendelkeznek [22], amely a következő formában írható le:

$$\rho(X) = \mathcal{D}(X) \leq -E(X) + \sup X,$$

az első egyenlőség csak egy új jelölést vezet be a kétoldali kockázati mértékekre. Rockafellar és szerzőtársai az osztályt deviáció mértéknek hívják és $\mathcal{D}$-vel jelölik.

2.1.10. Allokáció

Nem feltétlen szükséges, hogy egy kockázati mérték a valószínűségi változó teljes értéktartományán definiálva legyen. Adott egy halmaz U, az $F_X(x) = F_Y(x)$ minden $x \in U$ mellett. Ekkor azt mondjuk, hogy a ρ kockázati mérték rendelkezik az allokáció tulajdonsággal, amennyiben az eloszlások ezen szűkebb halmazon értelmezett megegyezőségéből következik, hogy $\rho(X) = \rho(Y)$. Érdekes módon ez a tulajdonság csak eloszlás-invariáns mértékek esetében teljesül. Legtöbbször egy T küszöbérték van hozzárendelve úgy, hogy az U halmaz a $U = (-\infty, T]$ vagy $U = [T, \infty)$-n értelmezett.

2.2. Additivitási axiómák

Vegyünk két valószínűségi változót: $X, Y \in \mathbb{X}$, és legyen az általuk alkotott portfólió az $X + Y \in \mathbb{X}$.

2.2.1. Szub-additivitás

A szub-additivitás azt állítja, hogy egy portfólió kockázata nem nagyobb, mint a benne szereplő komponensek kockázatának összege. Más szóval "egy fúzió nem teremt extra kockázatot" (Artzner és szerzőtársai [6]).

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Ezen tulajdonság teljesítése a diverzifikációs hatás teljesülését jelenti. Artzner és szerzőtársai úgy vélik, hogy ahhoz, hogy egy kockázati mérték hatékony legyen, elengedhetetlen a szub-additivitás. Az empirikus vizsgálatok azonban azt sugallják, hogy a szub-additivitás nem mindig teljesül a valóságban. Heyde és szerzőtársai [46] cikkükben rámutattak, hogy a szub-additivitás sokszor problémákhoz vezet. Esetenként ugyanis jobban megéri a kockázatos befektetéssel foglalkozó divíziókat különálló alcégekbe szervezni, hiszen így egy kockázatos ügymenet csődje nem feltétlen rántja magával a teljes céget - mint ahogy az a brit *Barings Bank* esetében is történt. A bankot 1995-ben a szingapúri divízió vitte csődbe, mégpedig úgy, hogy egy tőzsdei kereskedő határidős ügyletein $1,4$ milliárd dollárt veszített. Ebből látszik, hogy a fúzió néha extra kockázatot jelent.

2.2.2. Komonoton additivitás

A komonoton additivitás a következőképp definiált:

$$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y).$$

Ez a tulajdonság komonoton[6] valószínűségi változókra teljesül. Mint ismeretes, amennyiben a portfólió egyes elemei függetlenek egymástól, a diverzifikáció által csökkenthető a kockázat. A legtöbb esetben azonban az egyes instrumentumok között fennáll valamiféle korreláció. Ennek szélsőséges esete, ha a valószínűségi változók komonotonok. Az ilyen instrumentumok portfólióba rendezése nem jár semmilyen kockázatcsökkentő hatással ([47, 48, 49]).

[6] Egy véletlen vektorváltozó ($\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$) komonoton, ha $\forall \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$-ra $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)\}$ teljesül.

2.2.3. Szuper-additivitás

A szuper-additivitás azt állítja, hogy a portfólió kockázata *lehet* nagyobb, mint a benne szereplő komponensek kockázatának összege:

$$\rho(X+Y) \geq \rho(X) + \rho(Y).$$

Többek között a VaR is lehet szuper-additív [50, 4, 51]. Például földrengés elleni biztosítások esetében, ha a biztosított épületek egy területen vannak a vállalt kockázat egyértelműen nő több biztosítás kötésekor.

2.2.4. Konvexitás

Minden $X, Y \in \mathbb{X}$ és $0 \leq \lambda \leq 1$-re a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).$$

A konvexitás biztosítja a diverzifikációs hatást, sőt a konvexitás valójában a szubadditivitás (2.2.1) és a pozitív homogenitás (2.1.2) axiómák gyengített formája. Értelmezése: ha X eszköz λ súllyal szerepel a portfólióban, míg az Y eszköz $1-\lambda$ súllyal, akkor az így konstruált $X+Y$ portfólió kockázata nem lehet nagyobb, mint az eszközök kockázatának azonos súlyozású összege.

2.3. Technikai axiómák

2.3.1. Folytonosság

A folytonossági axiómák leginkább a kockázati mértékek matematikai tulajdonságainak leírásához szükségesek.

1. Sztochasztikus konvergencia: ha $X_n \xrightarrow{P} X$, akkor $\rho(X_n)$ konvergál és határértéke $\rho(X)$.

2. Eloszlásbeli konvergencia: ha $F_{X_n} \xrightarrow{d} F_X$, akkor $\rho(F_{X_n})$ konvergál és határértéke $\rho(F_X)$.

3. Eltolásbeli folytonosság: $\lim\limits_{\delta \to 0} \rho(X+\delta) = \rho(X)$.

4. Alsó részleges folytonosság: minden $C \in \mathbb{R}$, a $\{X \in \mathbb{X} : \rho(X) \leq C\}$ halmaz $\sigma\left(L^\infty, L^1\right)$-zárt.

5. Fatou tulajdonság: minden korlátos folyamatra (X_n), amire $X_n \xrightarrow{P} X$, a következő teljesül:
$$\rho(X) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \rho(X_n).$$

2.3.2. Robosztusság

A kockázati mértékek robosztussága rendkívül fontos tulajdonság, hiszen enélkül az eredmények értelmetlenek. Ekkor akár a kis mérési hibák is hatalmas becslési hibákhoz vezethetnek, ezért a robosztusságot különféle folytonossági tulajdonságokkal vizsgálják. A robosztusság mérésére leggyakrabban használt mérőszám a Wasserstein távolság

$$d_W(P,Q) = \inf\left\{E\left[|X-Y|\right] : X \sim P, Y \sim Q\right\}.$$

Legyen P_n, $n \geq 1$ és P valószínűségi mértékek, valamint $X_n \sim P_n$, $n \geq 1$ és $X \sim P$. Ekkor egy ρ kockázati mérték folytonos X-ben a Wasserstein távolság szerint, ha

$$\lim_{n\to\infty} d_W(P_n, P) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |\rho(X_n - X)| = 0.$$

2.4. Sztochasztikus dominancia

A valószínűségelméletben a sztochasztikus rendezés számszerűsíti azt a fogalmat, hogy az egyik valószínűségi változó "nagyobb", mint a másik. A sztochasztikus rendezést a $\preceq$, $\succeq$ operátorokkal fogom jelölni. A *"szokásos" sztochasztikus rendezés* azt mondja, hogy egy valós valószínűségi változó X nagyobb, mint egy másik valós valószínűségi változó Y a szokásos sztochasztikus rendezés szerint, ha $P(X > x) \geq P(Y > x)$ minden $x \in (-\infty, \infty)$-re. Amennyiben szigorú egyenlőtlenség is fennáll néhány x-re, akkor beszélünk szigorú sztochasztikus rendezésről. A továbbiakban tehát a sztochasztikus rendezés jelölése: $X \succeq Y$, vagy szigorú esetben: $X \succ Y$.

A *sztochasztikus dominancia* a sztochasztikus rendezés egy formája. Sztochasztikus dominanciáról döntéselméleti kontextusban szokás beszélni, amikor például két fogadásról eldönthető, hogy az egyik "dominálja" a másikat. A sztochasztikus dominancia a kimenetelekkel kapcsolatos preferenciákon alapszik. Ennek sok formája lehet, akár egy sima rendezés a leginkább várttól a legkevésbé vártig, de akár *érték-mérték* is lehetséges (pl. 2 körben nyerni 1 forintot, vagy 1 körben 2-t). *Determinisztikus dominanciá*ról akkor beszélünk, ha az egyik fogadás legrosszabb kimenetele jobb, mint a másik fogadás legjobb kimenetele. Az *állapot szerinti dominancia* két fogadást úgy hasonlít össze, hogy megnézi az egyes kimeneteleket, és azokat páronként veti össze, pl. dobókockával való dobás: az X esetén 1 forintot nyerek, ha a dobás $1-3$, 2-t, ha $4-6$, míg Y fogadás esetén $1-3$ esetén 0 forintot nyerek, $4-6$ esetén 1-t. Ha a lottót nézem, és azt mondom, hogy a tegnapi lottónyeremények mindegyikéhez (5-ös találat, 4-es találat,...) hozzáadok 1 forintot, akkor az új lottó állapot szerint dominálja a régit.

A konzisztencia tulajdonság biztosítja, hogy karakterizálni tudjuk az optimális portfóliók halmazát (Ortobelli és szerzőtársai [52], valamint Rachev és szerzőtársai [42]).

2.4.1. N-edrendű sztochasztikus dominancia

Legyen U_n azon u hasznossági függvények halmaza, amelyekre teljesülnek a

$$(-1)^{k+1} u^{(k)}(x) \geq 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

egyenlőtlenségek, ahol $u^{(k)}(x)$ jelöli az $u(x)$ k-adik deriváltját. Ezen felül tegyük fel, hogy X és Y valószínűségi változóknak létezik a k-adik abszolút momentuma minden $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ekkor azt mondjuk, hogy az X portfólió dominálja az Y portfóliót az n-edrendű sztochasztikus dominancia szerint ($X \succeq_n Y$), ha nem létezik olyan befektető (U_n-beli hasznossági függvénnyel), aki Y-t választaná X helyett,

$$X \succeq_n Y, \quad \text{ha} \quad E(u(X)) \geq E(u(Y)), \quad \forall u(x) \in U_n.$$

Az n-edrendű sztochasztikus dominanciának létezik egy ekvivalens megfogalmazása az eloszlásfüggvények segítségével:

$$X \succeq_n Y \Longleftrightarrow F_X^{(n-1)}(x) \leq F_Y^{(n-1)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ahol $F_X^{(n)}(x)$ az X eloszlásfüggvényének n-edik integrálját jelöli:

$$F_X^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F_X^{(n-1)}(t)\, dt.$$

Azt mondjuk tehát, hogy a ρ kockázati mérték rendelkezik az n-edrendű sztochasztikus dominanciával, ha teljesül, hogy

$$X \succeq_n Y \Longleftrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y).$$

Leggyakrabban az n maximális értéke 2. A különböző rendű sztochasztikus dominanciák tulajdonképp egy rendezést adnak meg $\mathbb{X}$ elemei között. Erre azért van szükség, hogy különbséget tudjunk tenni az egyes kifizetések között, vagyis el tudjuk dönteni melyik a kockázatosabb, illetve melyik a kevésbé kockázatos pozíció.

2.4.2. Elsőrendű sztochasztikus dominancia (FSD)

$$X \succeq_1 Y \Longleftrightarrow F_X(x) \leq F_Y(x)$$

Ha egy befektető X-et preferálja Y-hoz képest, akkor az *FSD* azt fogja jelezni, hogy X kevésbé kockázatos, mint Y. Ha u hasznossági függvény, akkor az elsőrendű sztochasztikus dominancia a következőképp is felírható:

$$X \succeq_1 Y \Longleftrightarrow E[u(X)] \geq E[u(Y)],$$

minden növekvő hasznossági függvényre (U_1 a fentiek szerint). Az FSD karakterizálja a kockázat-kedvelő befektetők preferenciáit. Ortobelli és szerzőtársai [52] tanulmányukban az elsőrendű sztochasztikus dominanciával rendelkező kockázati mértékeket *biztonsági-kockázati* mértékekként definiálták (az osztályról a következő fejezetben lesz szó). Az elsőrendű sztochasztikus dominancia éppen a monotonitás tulajdonságot jelenti (2.1.3)

2.4.3. Rothschild-Stiglitz sztochasztikus dominancia (RSD)

Az RSD-t Rothschild és Stiglitz [53] mutatták be, és a következőképp néz ki:

$$X \succeq_{RS} Y \Longleftrightarrow E[u(X)] \geq E[u(Y)],$$

minden konkáv u hasznossági függvényre. Az RSD a kockázatkerülő befektetők preferenciáit mutatja meg. Ortobelli és szerzőtársai [52] az RSD-vel rendelkező kockázati mértékeket *diszperziós (szórás) kockázati* mértékeknek hívják. Az RS sztochasztikus dominancia eloszlásfüggvényekkel a következőképp definiált:

$$X \succeq_{RS} Y \Longleftrightarrow \begin{cases} E(X) = E(Y), \\ \int_{-\infty}^{x} F_X(t)\,dt \leq \int_{-\infty}^{x} F_Y(t)\,dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2.4.4. Másodrendű sztochasztikus dominancia (SSD)

Az SSD-t először Hadar és Russell [54] mutatta be. Az SSD a következőképp írható le:

$$X \succeq_2 Y \Longleftrightarrow E[u(X)] \geq E[u(Y)],$$

minden növekvő, konkáv u hasznossági függvényre $u \in U_2$. SSD a nem kielégíthető kockázatkerülő befektetőket karakterizálja. A másodrendű sztochasztikus dominancia eloszlásfüggvényekkel a következőképp definiált:

$$X \succeq_2 Y \Longleftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{x} F_X(t)\, dt \leq \int\limits_{-\infty}^{x} F_Y(t)\, dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.4.5. Stop-Loss sztochasztikus rendezés

X dominálja Y-t ($X \succeq_{SL} Y$) stop-loss rendezés szerint, ha bármilyen $-\infty < \alpha < +\infty$-ra az alábbi egyenlőtlenség teljesül:

$$E\left[(X-\alpha)^+\right] \geq E\left[(Y-\alpha)^+\right].$$

Itt $\alpha^+ = \max\{0, \alpha\}$. A stop-loss dominancia jelentése, hogy X-nek egyenletesen kisebb felső farokeloszlása van, mint Y-nak. Az ilyen rendezés alapvető jelentőségű a biztosítási szakmában.

2.4.6. Konvex rendezés

X dominálja Y-t a konvex rendezés szerint:

$$X \succeq_{CX} Y \Longleftrightarrow \begin{cases} E[X] = E[Y], \\ X \succeq_{SL} Y. \end{cases}$$

A konvex rendezés kapcsolódik a kockázatkerüléshez.

2.5. Kiválthatóság

A Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság (Basel Committe on Banking Supervision) [33] nemrégiben ajánlotta, hogy a kockáztatott értéket (4.2), mint irányadó kockázati mutatószámot, váltsa fel a sokak által ajánlott várható súlyos veszteség (4.4). Ugyanakkor érdeklődött az iránt is, hogy a szabályozási környezet megváltozása milyen hatásokkal járhat - különös tekintettel az előrejelzési, valamint utántesztelési hatékonyságra.

Egy kockázati mérték kiválthatósága az optimális előrejelzés meghatározására vonatkozó kritérium [34]. A definíció bevezetéséhez azonban először be kell vezetni az értékelési függvényt. Az értékelési függvény

$$s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty),$$

ahol az $s(x,y)$ jelenti a veszteséget (büntetést), ha az $x \in \mathbb{R}$ előrejelzés kiadása után az $y \in \mathbb{R}$ esemény következik be. Népszerű értékelési függvény többek között a négyzetes hiba

$$s(x,y) = (x-y)^2,$$

vagy a súlyozott négyzetes hiba

$$s(x,y) = \begin{cases} \tau (x-y)^2, & \text{ha } x < y, \\ (1-\tau)(x-y)^2, & \text{ha } x \geq y, \end{cases}$$

rögzített $0 < \tau < 1$-re, valamint az abszolút hiba

$$s(x,y) = |x-y|.$$

Legyen $\upsilon : \mathcal{P} \to 2^{\mathbb{R}}$. Ekkor azt mondjuk, hogy az s értékelési függvény konzisztens a υ függvényre a $\mathcal{P}$ mértékosztály mellett, akkor és csak akkor, ha minden $P \in \mathcal{P}$, $t \in \upsilon(P)$, valamint $x \in \mathbb{R}$-re

$$E_P[s(t,X)] \leq E_P[s(x,X)].$$

Az s függvény szigorúan konzisztens, amennyiben konzisztens és

$$E_P[s(t,X)] = E_P[s(x,X)] \quad \Rightarrow \quad x \in \upsilon(P).$$

Egy υ leképezés (kockázati mérték) a $\mathcal{P}$ mértékosztályra kiváltható nézve akkor és csak akkor, ha létezik olyan s értékelési függvény, amely szigorúan konzisztens a υ függvényre a $\mathcal{P}$ mértékosztály mellett. A kiválthatóság axióma csak eloszlás-invariáns kockázati mértékekre értelmezhető, mert ebben az esetben teljesül, hogy $\rho(X) = \rho(F_X)$, amire pedig ismert, hogy $F_X \subseteq \mathcal{P}$. Így értelmes a $\rho : F_X \subseteq \mathcal{P} \to \mathbb{R} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ leképezés.

Amennyiben találunk ilyen szigorúan konzisztens értékelési függvényt, akkor meghatározható az optimális előrejelzés $\hat{x} \in \upsilon(P)$, méghozzá az

$$\hat{x} = \arg\min_x E_P[s(x,X)]$$

függvénnyel [35, 36]. Gneiting belátta továbbá, hogy a várható súlyos veszteség nem kiváltható kockázati mérték. Gneiting [34], valamint Bellini és szerzőtársai [55] az expectiliseket (4.8) ajánlották alternatívaként, mint eloszlás-invariáns, koherens és kiváltható kockázati mértékeket. Bellini és Bignozzi [55] belátták, hogy az expectilisek az egyetlen eloszlás-invariáns, koherens és kiváltható mértékek, ha a kiválthatóságot egy kicsit szigorúbban definiáljuk. Ziegel [35], megvizsgálva a spektrális (3.4) kockázati mértékek osztályát arra jutott, hogy az osztály egyetlen kiváltható mértéke a sima várható érték.

2.5.1. Feltételes kiválthatóság

A feltételes kiválthatóságot, amely a kiválthatóság egy gyengített formája, Emmer és szerzőtársai [36] definiálták. A ρ kockázati mérték feltételesen kiváltható, ha léteznek $\hat{\gamma}$ és γ függvények, hogy

$$\rho(P) = \gamma(P, \hat{\gamma}(P)),$$

ahol $\hat{\gamma}$ kiváltható $\mathcal{P}$-re nézve, illetve γ olyan, hogy $\gamma_c : \mathcal{P} \to 2^{\mathbb{R}}, \quad P \to \gamma(P, c) \subset \mathbb{R}$ kiváltható $\mathcal{P}$-re nézve minden $c \in \mathbb{R}$-re. A várható súlyos veszteség és a variancia feltételesen kiváltható kockázati mértékek.

2.6. Torzított kockázati mértékekre definiált axiómák

A torzított kockázati mértékek koncepciója a biztosítási szakma eredménye, amely egy, az addigiaknál lényegesen általánosabb osztályt jelent. Az alábbi három axióma a torzított kockázati mértékek osztályára lett kimondva (Balbás és szerzőtársai [32]). A cikkben a szerzők kifogásokat fogalmaztak meg a szokásos kockáztatott érték és feltételes kockáztatott értékkel szemben, kiemelve, hogy némely esetben inkonzisztens döntésekhez vezet használatuk, ezekre a kritikákra válaszul definiálják az alábbiakban felsorolt axiómákat. Az osztályt bővebben a következő fejezetben fogom bemutatni. Az axiómák bemutatásához használni fogom a túlélési függvényt, amely azt mondja meg, hogy mi a valószínűsége annak, hogy az X úgymond "túléli" x-et. Jelölése: $S_X(x) = 1 - F_X(x) = P(X \geq x)$.

2.6.1. Teljesség

Legyen ρ_g egy torzított kockázati mérték, amelyet a

$$\rho_g(X) = E_{P^*}(X) = \int_0^\infty g[S_X(x)]\, dx - \int_{-\infty}^0 1 - g[S_X(x)]\, dx$$

generál, ahol P^* a torzított valószínűség, $S_X(x)$ a túlélési függvénye X-nek. ρ_g *teljes* torzított kockázati mérték, ha:

$$S_X(x_1) = S_X(x_2) \Longleftrightarrow S_X^*(x_1) = S_X^*(x_2),$$

$\forall x_1, x_2 \in [0, \infty)$, ahol S^* a torzított eloszlás túlélési függvénye.

2.6.2. Teljeskörűség

Egy kockázati mérték számára sokszor nem csak az fontos, hogy szub-additív legyen, hanem az is, hogy minden rendelkezésre álló információt felhasználjon. ρ_g egy torzított kockázati mérték, amelyet $\rho_g(X) = E_{P^*}(X)$ generál, mint fent (2.6.1). Azt mondjuk, hogy ρ_g *teljeskörű* torzított kockázati mérték, ha koherens (2.1.2, 2.1.3, 2.1.6, 2.2.1) és teljes.

2.6.3. Adaptáltság

Egy torzított kockázati mérték *adaptált*, ha a g torzító függvényére teljesül, hogy

1. g szigorúan konkáv, vagyis g' szigorúan csökken, illetve
2. $\lim_{u \to 0^+} g'(u) = \infty$ és $\lim_{u \to 1^-} g'(u) = 0$.

3. fejezet

Kockázati mértékek osztályozása

A kockázati mértékek osztályozása tulajdonképpen az előző fejezetben összegyűjtött axiómák egy tetszőleges részhalmazának vétele. Egy kockázati mérték viselkedésének leírására a különféle axiómák egy részét válogatjuk ki, preferenciáinknak megfelelően. Ezután olyan leképezéseket keresünk, amelyek teljesítik a számunkra fontos tulajdonságokat. Az ilyen leképezések egyik alapvető karakterisztikája, hogy a magasabb bizonytalanságú hozam magasabb kockázatot jelentsen.

3.1. Koherens kockázati mértékek

A koherens kockázati mértékek ötletét Artzner és szerzőtársai [6] vetették fel. Koherens kockázati mértékeknek azokat kockázati mértékeket hívják, amelyek teljesítik a transzláció invariancia, szub-additivitás, monotonitás és pozitív homogenitás (2.1.6, 2.1.3, 2.1.2, 2.2.1) tulajdonságokat. Általánosságban a következőképp írhatóak fel:

$$\rho\left(X\right)=\sup_{Q\in\mathbb{Q}}E_{Q}\left[X\right],$$

ahol $\mathbb{Q}$ valószínűségi mértékek egy családja Ω-n, X pedig veszteségeloszlás.

Az említett négy kritérium alapozza meg ezen kockázati mértékek kiválasztásának és kiértékelésének szabályait. Azonban nem minden szabály alkalmazható minden szituációban, bizonyos helyzetekben némely axióma felülvizsgálatra szorulhat. Wang [56] úgy véli, hogy egy kockázati mértéknek tovább kellene lépnie e tulajdonságokon, hogy még több információ kerüljön hasznosításra. Dhaene és szerzőtársai [43] cikkükben a biztosítási szektorban megfigyelhető legjobb gyakorlati szabályokat elemezve arra a következtetésre jutottak, hogy a koherens kockázati mértékek problémákhoz vezetnek.

Artzner és szerzőtársai [6] a *feltételes várható extrém érték* (TCE, tail conditional expectation), illetve a *legrosszabb feltételes várakozás* (WCE, worst conditional expectation) mértékeket ajánlják. A feltételes várható extrém értéket a következőképp definiálják:

$$TCE_\alpha(X) = E\left[X|X \geq VaR_\alpha(X)\right],$$

míg a legrosszabb feltételes várakozást a következőképpen:

$$WCE_\alpha(X) = \sup\left\{E(X|A)\,|A \in \mathcal{F}, P(A) > \alpha\right\},$$

ahol X továbbra is a veszteségeloszlást jelenti, $\alpha \in (0,1)$ pedig a bizonyossági szintet (ez legtöbbször 95%, vagy 99%).

3.2. Konvex kockázati mértékek

A konvex kockázati mértékeket (más néven gyengén koherens kockázati mértékek) Föllmer és Schied [17, 18], valamint Frittelli és Rosazza Gianin [57] tanulmányozta. A konvex kockázati mértékek a koherens kockázati mértékek általánosításaként kaphatóak, mégpedig a pozitív homogenitás (2.1.2) és szub-additivitás (2.2.1) axiómák együttesénél gyengébb konvexitás (2.2.4) axiómára cserélésével. Sok esetben a pozíció méretének növekedése és a kockázata között nem lineáris a kapcsolat (például nagymértékű növekedés esetén további likviditási kockázat jelentkezhet), emiatt lehet értelme a pozitív homogenitás, valamint szub-additivitás helyett a konvexitást feltételezni. A konvex kockázati mértékek a következőképpen karakterizálhatóak [17]:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathbb{Q}}\left(E_Q[X] - \alpha(Q)\right),$$

ahol α egy büntető függvény: $\alpha : \mathbb{Q} \to (-\infty, \infty]$, valamint teljesül rá, hogy $\alpha(Q) \geq -\rho(0)$ bármely $Q \in \mathbb{Q}$, X pedig veszteségeloszlás. A konvex kockázati mértékekre még az alsó részleges-folytonosság (2.3.1 4.) és normalizáció ($\rho(0) = 0$) tulajdonságok teljesülnek. Amennyiben a büntetőfüggvény a következőképp definiált:

$$\alpha(Q) = \begin{cases} 0, & \text{ha } Q \in \mathbb{Q}; \\ \infty, & \text{különben}, \end{cases}$$

akkor visszakapjuk a koherens kockázati mértékek osztályát.

Laeven és Stadje [19] cikkükben a konvex kockázati mértékek két alosztályát definiálják, az entrópia konvex, illetve entrópia koherens kockázati mérték osztályokat.

Egy leképezés $\rho : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ γ-entrópia koherens, $\gamma \in [0, \infty]$, ha létezik olyan $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{Q}$ halmaz, amelyre

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}} e_{\gamma,Q}(-X),$$

ahol $e_{\gamma,Q}(X)$ a 4.6 által definiált standard entrópia mérték.

A $\rho : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ γ-entrópia konvex, $\gamma \in [0, \infty]$, amennyiben létezik $\alpha : Q \to [0, \infty]$ büntető függvény, amire $\inf_{Q \in \mathbb{Q}} \alpha(Q) = 0$, hogy

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathbb{Q}} \{e_{\gamma,Q}(-X) - \alpha(Q)\}.$$

Egy kockázati mértéket tehát entrópia konvex (koherens) kockázati mértéknek hívnak, amennyiben létezik olyan $\gamma \in [0, \infty]$, hogy ρ γ-konvex (koherens) leképezés.

3.3. Eloszlás-invariáns kockázati mértékek

Kusuoka [7] jelöléseit követve az eloszlás-invariáns koherens kockázati mértékek a következő formában írhatóak le:

$$\rho_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 Z_X(x)\, dx,$$

ahol $Z : [0, 1) \to \mathbb{R}$ monoton növekvő, jobbról folytonos függvény. Ez az osztály teljesíti az alsó részleges-folytonosság (2.3.1 4.) tulajdonságot minden $X \in L^1$, $0 \leq \alpha \leq 1$-re, valamint a koherens kockázati mértékek tulajdonságait. Az osztályba tartozó mértékek legfontosabb tulajdonsága, hogy alkalmazhatóak a gyakorlatban is. Ide tartozik például a várható súlyos veszteség is. Wang és szerzőtársai [1997] tanulmányukban éppen egy eloszlás-invariáns kockázati mértéket írnak le. A biztosítási árakkal szembeni elvárásaik: az eloszlás-invariancia (2.1.1), monotonitás (2.1.3), komonoton additivitás (2.2.2).

3.4. Spektrális kockázati mértékek

Az osztályt Acerbi [8] definiálta nyereség-veszteség eloszlásokra. A spektrális kockázati mértékek úgy definiálhatóak, hogy a koherens kockázati mértékek axiómáihoz hozzávesszük még a eloszlás-invariancia (2.1.1) és komonoton additivitás (2.2.2) tulajdonságokat. A spektrális kockázati mértékek a nyereség-veszteség eloszlás kvantiliseinek súlyozott átlagaiból állnak, ahol a súlyozó függvény egy nem növekvő függvény, amelyet spektrumnak hívnak, és ϕ-vel jelölik. A következőképpen van definiálva:

$$M_{\phi}(X) = -\int_{0}^{1} \phi(x) F_X^{-1}(x)\, dx,$$

ahol ϕ egy nem-negatív, nem növekvő, jobbról folytonos integrálható függvény a $[0,1]$-n valamint olyan, hogy $\int_0^1 \phi(x)\, dx = 1$. A ϕ-re tett feltételezések döntik el, hogy koherens-e a spektrális kockázati mérték. Amennyiben bármely fenti feltételezés gyengítésre kerül, akkor a kockázati mérték már nem koherens. A spektrális kockázati mértékek a pozitív homogenitás (2.1.2), transzláció invariancia (2.1.6), monotonitás (2.1.3), szubadditivitás (2.2.1), eloszlás-invariancia (2.1.1), komonoton additivitás (2.2.2), másodrendű sztochasztikus dominancia (2.4.4) axiómákkal jellemezhetőek.

Az $L^1([0,1])$ normált tér $\left(\|\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|\, dx\right)$ egy ϕ eleméről azt mondjuk, hogy *elfogadható kockázati spektrum*, ha

1. ϕ pozitív,
2. ϕ csökkenő,
3. $\|\phi\| = 1$.

A $\phi(x)$ függvény különböző $\phi(x)$ súlyokat helyez különböző "x-konfidenciaszint darabokhoz" az eloszlás bal farkában. A normalizáció biztosítja, hogy a súlyok összege 1 legyen. Az, hogy egy elfogadható kockázati spektrum $\phi(x)$ monoton csökkenő függvény x-ben, intuitívan mutatja a koherencia lényegét. (Acerbi [8] szerint egy mérték koherens, ha nagyobb súlyt rendel a rosszabb kimenetelekhez.)

Bármely racionális befektető kifejezheti kockázatkerülő magatartását úgy, hogy különféle súlyokat ad a ϕ súlyfüggvénynek. A koherencia megtartásához csak egy dologra kell figyelnie, hogy ϕ pozitív, csökkenő, és $[0,1]$-n normalizált legyen.

3.4.1. Példák

1. Kockáztatott érték (VaR):

$$\phi_{\alpha}(x) = \delta(x - (1-\alpha)),$$

ahol δ jelöli az úgynevezett Dirac deltát: $\delta(x) : \int_a^b f(x)\,\delta(x-c)\, dx = f(c), \forall c \in (a,b)$.

2. Feltételes kockáztatott érték (CVaR):

$$\phi_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha}\mathbf{1}_{\{0\le x\le 1-\alpha\}}.$$

3.5. Deviáció mértékek

A szakirodalomban a kockázati mértékek osztályozásakor két egymástól elkülönülő csoportba sorolják a kockázati mértékeket. Szakdolgozatomban a kockázati mértéket lehető legáltalánosabban definiáltam, ám pont ez a megközelítés rendkívül nehézzé is teszi a feladatot. Ugyanis nem mindegy, hogy a veszteséget miként definiáljuk. Matematikailag elérhető, hogy egy portfólió teljesen kockázatmentessé váljon abból a szempontból, hogy pénzt nem veszíthetünk rajta, azonban ettől még a nyereségünk ingadozhat. Kérdés tehát, hogy a kockázatot miként definiáljuk, mire gondolunk, amikor egy portfólió kockázatáról beszélünk. Ezt a különbséget írják le tanulmányaikban Rockafeller és szerzőtársai [23], Ortobelli és szerzőtársai [52], valamint Albrecht [39], vagy éppen Dhaene és szerzőtársai [43]. A lényegi különbség a kétfajta elgondolás szerint, hogy az egyik a véletlen változóban szereplő bizonytalanságot méri, míg a másik a veszteség kizárásához szükséges tőkét. A legtöbb akadémikus csak az utóbbit tartja "rendes" kockázati mértéknek. Ortobelli és szerzőtársai a portfólió-kiválasztási probléma kapcsán a két osztályt diszperziós (szórás alapú) és biztonsági kockázati mértékeknek hívják, míg Rockafeller és szerzőtársai deviáció és várhatóérték-korlátozott kockázati mértékeknek nevezik. A szakdolgozatban a Dhaene és szerzőtársai által adott neveket (egy illetve kétoldali kockázati mérték) használom.

A deviáció mértékeket Rockafeller és szerzőtársai [23] a pozitív homogenitás (2.1.2), a nem-negativitás (2.1.4), a Gaivoronsky-Pflung transzláció invariancia (2.1.6 2.), valamint a szub-additivitás (2.2.1) axiómákkal jellemzik.

1. A szórás és a variancia is ebbe az osztályba tartozik.

2. Az osztály ismert példája még az átlagos abszolút eltérés (Mean Absolute Deviation, MAD)
$$MAD(X) = E(|X - E(X)|).$$

3. A standard szemideviáció szintén, ennek képlete:

$$\sigma_\pm(X) = \sqrt{E\left[\max\{\pm X \mp E(X), 0\}^2\right]}.$$

3.6. Várhatóérték-korlátozott kockázati mértékek

Az osztályt Rockafeller és szerzőtársai [23] definiálták, mégpedig a szub-additivitás, pozitív homogenitás, transzláció invariancia és a várhatóérték-korlátozottság tulajdonságokkal (2.1.2, 2.1.6 3., 2.1.8, 2.2.1). Tipikus példa a kockáztatott érték (VaR) és a feltételes kockáztatott érték (CVaR). Létezik egy egy-az-egyben kapcsolat a deviáció mértékek és a várhatóérték-korlátozott kockázati mértékek között. Levezethető a várhatóérték-korlátozott koherens kockázati mértékek osztálya is a monotonitás (2.1.3) hozzávételével [23].

Legyen $\mathcal{D}(X)$ egy deviáció mérték $\mathcal{R}(X)$ pedig egy várhatóérték-korlátozott kockázati mérték, ekkor:

$$\mathcal{D}(X) = \mathcal{R}(X - E(X)),$$

valamint:

$$\mathcal{R}(X) = \mathcal{D}(X) - E(X).$$

1. Ha $\mathcal{R}(X) = \lambda \left(E\left[(X - E[X])^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} - E[X] = \lambda\sigma(X) - \mu(X)$, akkor $\mathcal{D}(X) = \lambda\sigma(X)$ minden $\lambda > 0$.
2. Ha $\mathcal{R}(X) = VaR_\alpha(X)$, akkor $\mathcal{D}(X) = VaR_\alpha^{\triangle}(X) = VaR_\alpha(X - E[X])$.
3. Ha $\mathcal{R}(X) = CVaR_\alpha(X)$, akkor $\mathcal{D}(X) = CVaR_\alpha^{\triangle}(X) = CVaR_\alpha(X - E[X])$.

3.7. Áresés mértékek

Az áresés mértékek intuitív mértékek. Általában a jelenlegi helyzetet a legjobb múltbéli helyzettel hasonlítják össze. Az áresés mértékek lokális minimum és lokális maximum értékek különbségét mérik. Cheklov és szerzőtársai [24] úgy definiálták az áresés függvényt, mint a teljes portfólió értékének maximuma t-ig, illetve a t-beli értékének különbségét.

Az áresés mértékek nagyon hasonlítanak a deviáció mértékekhez. Bár előnyük, hogy egyszerűen programozhatóak, az áresés mértékek azonban nem képesek leírni a valós helyzetet a piacon, ennélfogva leginkább más kockázati mértékekkel együtt érdemes használni őket. Legyen $w(x,t)$ a teljes portfólió hozam t időben, ahol $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ jelöli a portfólióban szereplő m eszköz súlyát. Ekkor:

1. Áresés (D):

$$D(x,t) = \max_{0 \le \tau \le t} \{w(x,\tau)\} - w(x,t)$$

2. Abszolút áresés (AD):
$$AD(x,t) = |D(x,t)|$$

3. Maximum áresés (MDD): a $[0,T]$ intervallumon
$$MDD(x,T) = \max_{0 \le t \le T} D(x,t)$$

4. Átlagos áresés (AvDD):
$$AvDD(x,T) = \frac{1}{T} \int_0^T D(x,t)\, dt$$

5. Feltételes kockáztatott áresés (CDaR):
$$CDaR_\alpha(x,T) = \min_{a \in \mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{(1-\alpha)T} \int_0^T [D(x,t) - a]^+ \, dt \right\},$$
ahol $[z]^+ = \max(0,z)$. Ha $\alpha \to 1$, akkor a CDaR tart a maximális áreséshez, vagyis $CDaR_1(x,T) = MDD(x,T)$, valamint, ha $\alpha \to 0$, akkor a CDaR egyenlő lesz az átlagos áreséssel, vagyis $CDaR_0(x,T) = AvDD(x,T)$.

3.8. Torzított kockázati mértékek

A torzított kockázati mértékek arról kapták elnevezésüket, hogy a veszteség-eloszlásban szereplő valószínűségi mértéket eltorzítják, más szóval átsúlyozzák az eloszlásban szereplő információt úgy, hogy a számunkra fontosabb része nagyobb hangsúlyt kapjon. Legegyszerűbb példa a VaR, ahol az átsúlyozás következményeként 1 (vagyis minden) súlyt az α-kvantilis kapja, az eloszlás többi részére (sem az α-kvantilis alatti, sem pedig az afeletti részre) pedig nem helyezünk súlyt. Azáltal, hogy bármilyen súlyozást meghatározhatunk, ez az osztály általános értelemben definiálja a kockázati mértékeket. A következőkben az osztály matematikai definícióját, valamint tulajdonságait mutatom be.

Egy torzított kockázati mérték, amely veszteségeloszlásokra van meghatározva, és bármely valós értéket felvehet, a következőképpen van definiálva:
$$\rho_g(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(x)\, d\tilde{g}(x) = -\int_{-\infty}^0 \tilde{g}(F_X(x))\, dx + \int_0^\infty [1 - \tilde{g}(F_X(x))]\, dx,$$

ahol $\tilde{g}(x) = 1 - g(1-x)$ és $g : [0,1] \to [0,1]$ egy folytonos, nem csökkenő függvény, amelyre $g(0) = 0$ és $g(1) = 1$; F_X jelöli X eloszlásfüggvényét, míg $g(F_X(x))$-t torzított eloszlásfüggvénynek hívják. Nagyon hasonló képletet kapunk, ha X túlélési függvényét használjuk $S_X(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ az eloszlásfüggvény helyett,

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(S_X(x))\, dx - \int_{-\infty}^0 [1 - g(S_X(x))]\, dx,$$

g-t torzító függvénynek hívják, míg $\tilde{g}$ a g duálisa. $P^*(A) := \mu(A) = g[P(X \in A)]$, ahol P egy valószínűségi mérték, X valószínűségi változó, P^* a torzított valószínűség. Hasonlóan $\tilde{P}^*(A) := \tilde{\mu}(A) = \tilde{g}[P(X \in A)]$. A fenti definíciók a Choquet integrálreprezentáción alapszanak:

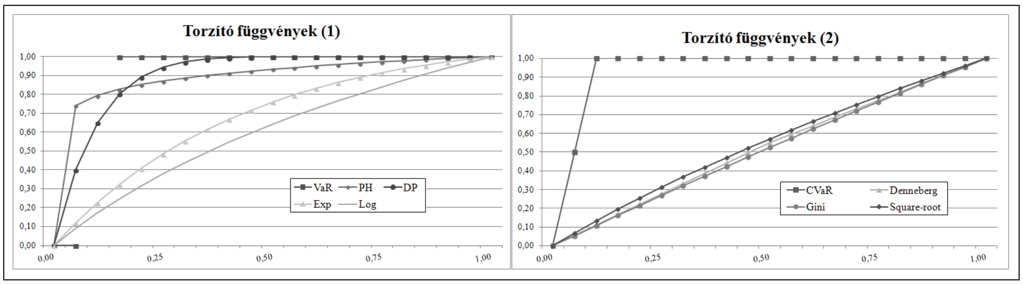
$$\rho_g(X) = \int X\, dP = \int X^+\, dP^* - \int X^-\, d\tilde{P}^*,$$

ha ezek az integrálok végesek.

3.8.1. Tulajdonságai

1. Ha $X \geq 0$, akkor $\rho_g(X) \geq 0$ (monotonitás 2.1.3).
2. $\rho_g(\lambda X) = \lambda \rho_g(X)$, minden $\lambda \geq 0$ (pozitív homogenitás 2.1.2).
3. $\rho_g(X + c) = \rho_g(X) + c$, minden $c \in \mathbb{R}$ (transzláció invariancia 2.1.6 3.).
4. $\rho_g(-X) = -\rho_{\tilde{g}}(X)$, ahol $\tilde{g}(x) = 1 - g(1-x)$.
5. Ha $X_n \xrightarrow{w} X$ és $\rho_g(X)$ létezik, akkor $\rho_g(X_n) \to \rho_g(X)$.
6. Ha X és Y olyan komonoton valószínűségi változók, amelyek pozitív és negatív értékeket is felvesznek, akkor: $\rho_g(X + Y) = \rho_g(X) + \rho_g(Y)$ (komonoton additivitás 2.2.2).
7. Torzított kockázati mértékek akkor és csak akkor szub-additívak, ha a torzító függvény $g(x)$ konkáv: $\rho_g(X + Y) \leq \rho_g(X) + \rho_g(Y)$ (szub-additivitás 2.2.1). Ezáltal a konkáv torzító függvényekre definiált torzított kockázati mértékek koherensek.
8. Ha a g torzító függvény nem csökkenő, akkor a hozzá tartozó kockázati mérték ρ_g konzisztens az elsőrendű sztochasztikus dominanciával:

$$X \succeq_1 Y \Longrightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y), (FSD\, 2.4.2).$$



3.1. ÁBRA. Ismertebb torzító függvények

9. Ha a g torzító függvény nem csökkenő és konkáv, akkor a hozzá tartozó kockázati mérték ρ_g konzisztens a másodrendű sztochasztikus dominanciával:

$$X \succeq_2 Y \Longrightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y), (SSD\, 2.4.4).$$

Ennek eredményeként minden koherens torzított kockázati mérték konzisztens a másodrendű sztochasztikus dominanciával.

10. Amennyiben pedig a g torzító függvény szigorúan konkáv, akkor a hozzá tartozó kockázati mérték ρ_g szigorúan konzisztens a másodrendű sztochasztikus dominanciával:

$$X \succ_2 Y \Longrightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y).$$

3.8.2. Ismert torzító függvények

1. A $g(x) = x$ függvénnyel a $\rho_g(X) = E[X]$-t kapjuk (amennyiben $E[X]$ létezik).

2. Kockáztatott érték (VaR):

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1-\alpha; \\ 1, & \text{ha } 1-\alpha \geq x \geq 1. \end{cases}$$

3. Feltételes kockáztatott érték (CVaR):

$$g_\alpha(x) = \min\left(\frac{x}{1-\alpha}, 1\right), \quad x \in [0,1].$$

4. Arányos hazárd transzformált:

$$g_\alpha(x) = x^{1-\alpha}.$$

5. Duál-erő transzformált:

$$g_\alpha(x) = 1 - (1-x)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

6. Dennensberg abszolút deviáció szabálya:

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} (2-\alpha)\,x, & \text{ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \alpha + \alpha x, & \text{ha } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

7. Gini szabálya:

$$g_\alpha(x) = (2-\alpha)\,x - (1-\alpha)\,x^2.$$

8. Négyzetgyök transzformált:

$$g_\alpha(x) = \frac{\sqrt{1 - ln\,(1-\alpha)\,x} - 1}{\sqrt{1 - ln\,(1-\alpha)} - 1}.$$

9. Exponenciális transzformált:

$$g_\alpha(x) = \frac{1 - (1-\alpha)^x}{\alpha}.$$

10. Logaritmikus transzformált:

$$g_\alpha(x) = \frac{ln\,(1 - ln\,(1-\alpha)\,x)}{ln\,(1 - ln\,(1-\alpha))}.$$

Az ún. torzító függvény egy súlyozó függvény, amely segítségével X eloszlása átsúlyozható úgy, hogy az a nekünk szükséges kimenetelekre helyezzen nagyobb figyelmet, ezáltal jobban odafigyelve a nagyobb veszteségekre is.

4. fejezet

Ismert kockázati mértékek

A fejezetben a széleskörben ismert kockázati mértékek jellemzőit vizsgálom meg, a korábban felvázolt szempontok szerint. A két legismertebb kockázati mutatószám (szórás, kockáztatott érték) mellett definiálom és bemutatom a feltételes kockáztatott értéket, a várható súlyos veszteséget, illetve az ezen mértékek közötti kapcsolatot. Az exponenciális hasznossági függvénnyel kapcsolatban álló standard entrópia mértéket is definiálom, amely tipikus példája a konvex, de nem koherens kockázati mértékeknek, valamint az ehhez a fogalomhoz kapcsolódó entrópia VaR-t is bemutatom. Emellett az utóbbi években a VaR és CVaR hiányosságainak kiküszöbölésére ajánlott ragasztott VaR és expectilis kockázati mértékek is szóba kerülnek.

4.1. Szórás, variancia

A variancia a valószínűség-elmélet leggyakrabban használt mérőszáma, amely a várható értéktől vett átlagos négyzetes eltérés:

$$D^2(X) := E\left([X - E(X)]^2\right)$$

Közgazdaságtanban azonban elterjedtebb a variancia négyzetgyöke a szórás:

$$D(X) = \sqrt{E\left([X - E(X)]^2\right)}$$

A szórás, mint kockázati mérték leginkább az eloszlás stabilitásáról ad képet. Mind a variancia mind a szórásnégyzet hasonlóan osztályozza a kockázatos helyzeteket, habár teljesen eltérő additivitási tulajdonsággal rendelkeznek, hiszen míg a variancia lehet szuperadditív, amennyiben a kockázatok pozitívan korreláltak, addig a szórás szigorúan szubadditív.

Markowitz [1] a Modern Portfólió Elmélet megalkotásakor a szórást alkalmazta, mint kockázati mértéket, ez azonban csak a legfontosabb feltevések egyike (hogy a különféle eszközök együttes eloszlása többdimenziós normális eloszlást követ), ez a valóságban viszont csak igen ritkán teljesül.

A VaR megjelenése előtt a szórás volt a legelfogadottabb kockázati mutatószám, ám egyik komoly hátránya, hogy a pozitív kilengéseket is ugyanúgy "bünteti", mint a negatívakat. Legtöbb esetben azonban a befektető számára csak a negatív kilengések az érdekesek, emiatt sokszor a szórást nem is sorolják a kockázati mértékek közé.

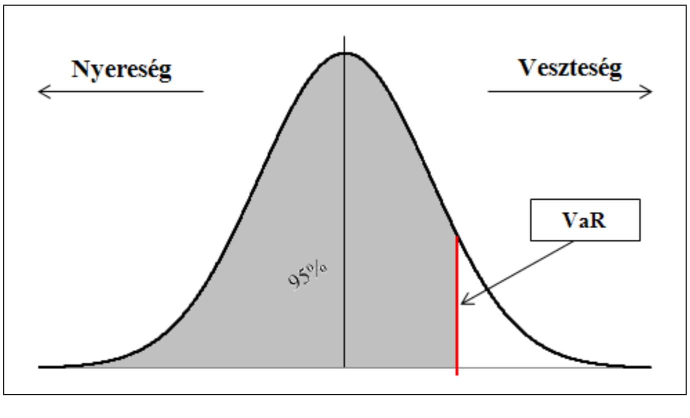
4.2. Kockáztatott érték

A kockáztatott érték (Value-at-Risk - VaR) az egy adott időhorizonton az esetek $1 - \alpha = A\%$-ban elszenvedhető minimális veszteség (vagy ami ezzel egyenértékű, az esetek $\alpha * 100\%$-ában elszenvedhető maximális veszteség):

$$VaR_{\alpha}(X) := q_{\alpha}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(X \leq x) \geq \alpha\},$$

ahol $\alpha \in (0, 1]$, X pedig egy *veszteségeloszlás* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$-n és $q_{\alpha}(X)$ az X eloszlás α-kvantilise.

Konkrét példában: egy portfólió egyhetes, 95%-os VaR-ja azt mutatja meg, hogy egyhetes időtávon 95%-os valószínűséggel a portfólió piaci értéke legfeljebb mennyivel változik meg. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye esetén ez a következőképp ábrázolható:



4.1. ábra. Egy veszteségeloszlás 5%-os kockáztatott értéke

4.2.1. Előnyök

Legfőbb előnye, hogy egy közös mértéket biztosít a különféle pozíciókhoz és kockázati faktorokhoz. Bármilyen típusú portfólióra alkalmazható, valamint lehetővé teszi, hogy összehasonlítsunk különböző portfóliókat.

A VaR lehetővé teszi a pozíciók aggregálását úgy, hogy figyelembe veszi a különféle kockázati faktorok egymás közti korrelációját. A VaR egy átfogó mérték, hiszen egyszerre vesz figyelembe minden kockázati faktort, míg más mértékek csak egy faktort néznek egyszerre. Sőt átfogó olyan értelemben is, hogy a teljes portfólióra ad meg egy mértéket, nem pedig csak a benne szereplő különféle elemekre.

A VaR valószínűség típusú és hasznos információt nyújt a kockázatkezelő számára a különféle veszteségméretek valószínűségéről (ezzel szemben más mértékek sokszor csak a "mi történik, ha?" típusú kérdésre adnak választ; pl. a derivatív termékek esetében gyakran használt ún. "görögök", amely mutatószámok valamely tényező - pl. idő, kamatláb - változásának hatását mutatják ki).

A VaR könnyen érthető mértékegységben, "elvesztett pénz"-ben van kifejezve.

4.2.2. Hátrányok

Még a pontos kockáztatott értéket sem szabad úgy kezelni, mint azt a tőkét, ami ahhoz szükséges, hogy fizetőképesek maradjunk. A VaR pusztán egy mutatószám ahhoz, hogy különféle összehasonlításokat végezhessünk, mint például két portfólió összehasonlítása, egy üzlet megkötésének relatív hatása a kockázatra, vagy a modellezett kockázat összevetése a historikus kockázattal.

Az, hogy egy portfólió kockáztatott értéke releváns mérték-e pénzügyi krízishelyzetben, egy rövid időintervallumon, függ a portfólió likviditásától, vagy a piaci likviditásban bekövetkező súlyos zavaroktól. Ilyen esetekben olyan költségek is módosíthatják a kockázatot, mint például a nem várt rövid távú finanszírozási kényszer, elszalasztott jövedelmező üzletek lehetőségköltségei, vagy kényszerített mérlegbeli változtatások. Ebből a szempontból a VaR a piaci kockázatnak csak egy aspektusával kalkulál[1] ezáltal pedig túlságosan szűken definiált ahhoz, hogy önmagában egy elégséges mérték lehessen tőke-megfelelési szempontból.

Ezenfelül a VaR csak annyit mond meg nekünk, hogy maximum mennyit veszíthetünk a "jó" esetekben, a "rossz" esetekről, amikor egy az eloszlás szélénél lévő (farokbeli)

[1] Itt arra gondolok, hogy csak a portfólió értékében a kimenetelek függvényében bekövetkező változásokra koncentrál, az ezzel járó plusz költségek, felmerülő likviditási problémák, különféle pszichológiai hatások mind kívül esnek a VaR "látókörén".

esemény következik be, nem ad semmilyen információt. Ebből kifolyólag a VaR képes furcsa eredményeket is generálni: egy VaR-alapú számítás például olyat is ajánlhat, hogy a befektető menjen bele olyan befektetésekbe is, ahol a farokeloszlás megváltozását nem követi a VaR megváltozása (pl. mert 95%-os VaR-t tekintve az 5%-os kieső intervallumban bekövetkező változások nem érintik a 95%-os VaR értéket), így figyelmen kívül hagyva a pozíció értékének változását, vagy a lehetséges nagyobb veszteségeket. Ez pedig rendkívül nagy kockázatokba viheti bele a csak a VaR-ra figyelő befektetőt.

A kockáztatott érték teremthet úgynevezett "moral hazard" helyzeteket is. Az a befektető, aki befektetéseihez kockáztatott érték limitekkel dolgozik, szembekerülhet olyan helyzettel, amikor az esetek többségében nyereséget érhet el, de a kisebb valószínűséggel bekövetkező "rossz" események hatásai viszont sokkalta nagyobbakká válnak. Ilyenkor létrehozható olyan veszteség-eloszlású portfólió, ahol a VaR nem változik, ezáltal a befektető a "jó" esetekben keres, a "rossz" esetekben viszont rendkívül nagy veszteségeket okozhat a cégének. Ez a helyzet sok befektetőt felbátoríthat, hogy "játsszon" a veszteségeloszlással.

Komplex portfóliók esetében, amelyek több kockázati változónak is ki vannak téve (pl. a pénzügyi intézményeknél), a VaR kiszámolása igen nehéz feladat is lehet. Az egyik kihívás, hogy a számolást nem lehet részekre bontani, ami abból következik, hogy a VaR nem additív a következő két értelemben:

1. Pozíció szerint: ha egy portfólió két alportfólióból áll, a portfólió teljes VaR-ja nem egyenlő a két részportfólió VaR-jainak összegével, aminek az a következménye, hogy amennyiben a portfóliónkhoz új eszközt teszünk hozzá, akkor újra kell számolnunk a VaR-t a teljes portfólióra.
2. Kockázati faktor szerint: egy olyan portfólió VaR-ja, amely több kockázati tényezőtől függ, nem egyenlő a különböző kockázati változók szerint számolt VaR-ok összegével (például egy átváltható kötvény VaR-ja nem egyenlő az értékét befolyásoló hozamgörbe és a kapcsolódó részvényárfolyam VaR-jainak összegével).

"A VaR mindig későn érkezik, amikor már a legrosszabb bekövetkezett": ez az ismert mondás abból következik, hogy a piaci kockázat méréséhez a lehetséges szcenáriókat historikus adatokból becsüljük. Például, egy nappal egy piaci felbolydulás előtt a becsült értékek nem fognak tudni semmit előrejelezni, ezáltal a VaR elkerülhetetlenül alul fogja becsülni a valós kockázatot, és csak napokkal az esemény megtörténte után észleli csak a változást, amikor a kialakult új helyzet adatai is bekerülnek a felhasznált historikus adatsorba.

"A VaR-nak semmi értelme": a VaR becslése, különösen komplexebb portfóliók esetében, olyan komoly feladat lehet, hogy sokszor a végső eredménynek nem lesz releváns statisztikai értéke. A faktorok, amelyek mellett a becslések különösen nehézzé válhatnak, többek között: a *pénzügyi eszközök bonyolultsága*, a *portfólió dimenziója*, a *becslési eljárási módszerek* (pl. varianciacsökkentő módszerek implementálása a becslésbe) illetve a *becslések statisztikai hibája*.

4.2.3. Tulajdonságok

1. Ha $X, Y \in \mathbb{X}: \ F_X(t) = F_Y(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$, akkor $VaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(Y)$ (2.1.1).
2. Ha $X \in \mathbb{X}$, $h > 0$, $hX \in \mathbb{X}$, akkor $VaR_\alpha(hX) = hVaR_\alpha(X)$ (2.1.2).
3. Ha $X, Y \in \mathbb{X}: \ X \geq Y$, akkor $VaR_\alpha(X) \geq VaR_\alpha(Y)$ (2.1.3).
4. Ha $X \in \mathbb{X}$, $a \in \mathbb{R}$, $X + a \in \mathbb{X}$, akkor $VaR_\alpha(X + a) = VaR_\alpha(X) + a$ (2.1.6).
5. Ha X, Y komonoton (2.2.2) valószínűségi változók, akkor
$$VaR_\alpha(X + Y) = VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y).$$
6. $VaR_\alpha(X) = -VaR_{1-\alpha}(-X)$.

A VaR nem szub-additív. A szub-additivitás (2.2.1) azt a várakozást jelenti, amely szerint több különböző kockázat összevonása nem növeli a teljes kockázatot. Egy olyan portfólió kockázata, amely több kisebb portfólióból áll, ne legyen magasabb, mint a benne szereplő portfóliók kockázatának összege. Egy egyszerű példán könnyedén be lehet mutatni, hogy milyen problémákhoz vezethet a szub-additivitás hiánya. Legyen A és B két különböző cég kötvénye, egymástól különböző csődkockázattal (amennyiben az egyik becsődöl, a másik nem). Egy olyan portfólió, amely ebből a két kötvényből áll könnyen meglehet, hogy magasabb VaR-ral rendelkezik, mint a két kötvény különálló VaR-jának összege.

Kimenetel	A	B	A+B	Valószínűség
1	70	100	170	3%
2	90	100	190	2%
3	100	70	170	3%
4	100	90	190	2%
5	100	100	200	90%

4.1. TÁBLÁZAT. A és B cégek csődvalószínűségei, valamint az együttes csődvalószínűség

Tegyük fel, hogy a kötvények jelenlegi értéke megegyezik a a kötvények kifizetéseinek várható értékével a fenti valószínűségi mérték szerint $(98, 9)$. Ekkor az 5%-os VaR:

	A	B	A+B
Jelenlegi érték	98,9	98,9	197,8
VaR 5%	8,9	8,9	27,8

4.2. TÁBLÁZAT. A és B cégek, valamint ezek együttes értéke, illetve 5%-os VaRja

Ezek után képzeljük el, hogy ezt a portfóliót a VaR értéke szerint minimalizáljuk. Az eredmény egy olyan portfólió lenne, amely tisztán csak az A vagy tisztán csak a B cég részvényét tartalmazná, ami így viszont ellentmondana a diverzifikációs elvnek.

4.3. Feltételes kockáztatott érték

Legyen $\alpha \in (0,1)$ fix és X egy valós értékű valószónűségi változó (veszteségeloszlás) az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ valószónűségi mezőn úgy, hogy $E[X] < \infty$. Ekkor a

$$CVaR_\alpha(X) := \inf_{b \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} E\left([X-b]^+\right) + b \right\}$$

optimalizációs probléma megoldását feltételes kockáztatott értéknek (Conditional Value-at-Risk - CVaR) hívjuk [14], ahol $[z]^+ = \max(z, 0)$. Uryasev és Rockafellar [58] belátták, hogy amennyiben F_X folytonos, akkor

$$CVaR_\alpha(X) = E\left(X | X > VaR_\alpha(X)\right),$$

sőt gyakran ez a feltételes kockáztatott érték definíciója (innen ered a név is).

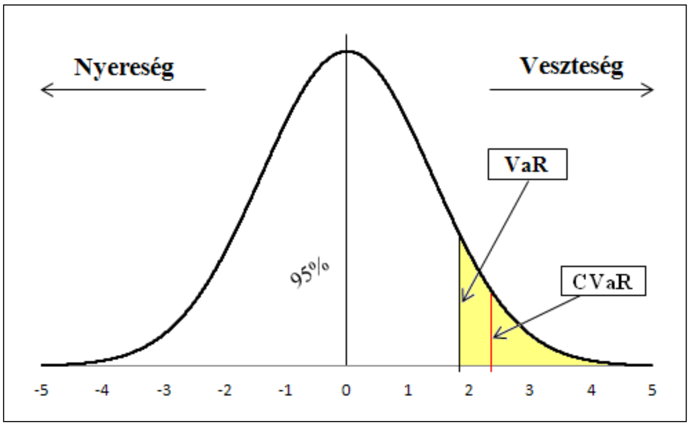
Pflug [14] levezeti a CVaR egy alternatív reprezentációját is, méghozzá amennyiben $F_X(b) = \alpha$, akkor $P(X > b) = 1 - \alpha$ és

$$E(X|X>b) = \frac{E\left(X\mathbf{1}_{\{X>b\}}\right)}{P(X>b)} = \frac{E\left(b\mathbf{1}_{\{X>b\}} + [X-b]^+\right)}{P(X>b)} = b + \frac{1}{1-\alpha} E\left([X-b]^+\right).$$

Ekkor amennyiben $F\left(F^{-1}(\alpha)\right) = \alpha$ teljesül, hogy

$$CVaR_\alpha(X) = E\left(X|X > F^{-1}(\alpha)\right) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 F^{-1}(x)\, dx = \frac{1}{1-\alpha} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{\infty} u\, dF(u).$$

A feltételes kockázatott értéket, mint a VaR természetes alternatíváját mutatták be. A CVaR arra a kérdésre keresi a választ, hogy mekkora lesz a várható veszteségünk az esetek legrosszabb $(1-\alpha) * 100\%$-ában, egy előre adott időintervallumon. A VaR-hoz képest itt a „várható veszteség" a lényeges különbség, mert míg a VaR azt mondja meg, hogy mi lesz az esetek $\alpha * 100\%$-ában, az $(1-\alpha) * 100\%$-os intervallumról nem mond semmit, a CVaR viszont pont a kimaradó $(1-\alpha)*100\%$-os eseményekről ad információt, azt, hogy mi a várható értéke az itt bekövetkező eseményeknek. A feltételes kockáztatott értékkel rengeteg tanulmány foglalkozik, s sokszor teljesen különálló módon definiálják, emiatt több ekvivalens definíció is létezik rá, sőt elnevezése is sokszor különbözik.



4.2. ÁBRA. Egy veszteségeloszlás 5%-os feltételes kockáztatott értéke

A CVaR kiszámításához tulajdonképpen átlagoljuk az α-nál nagyobb VaR-okat. Ebből jön a feltételes kockáztatott érték elnevezés is, hiszen a mutató nem más, mint az X veszteségeloszlás várható értéke feltéve, ha az nagyobb, mint a $VaR_{\alpha}(X)$. A feltételes kockáztatott érték kiküszöböli a VaR talán legvitatottabb két hibáját. A CVaR szubadditív, valamint a küszöbérték utáni veszteségeket is méri, hiszen tulajdonképp azok átlagát veszi.

4.3.1. Tulajdonságok

A feltételes kockáztatott érték "jobb" mutató, mint a kockáztatott érték, mert kisebb eséllyel generál szokatlan eredményeket, valamint a portfólió optimalizáció könnyebb, mert míg a CVaR-nál érvényesül a diverzifikációs hatás, addig a VaR-nál nem feltétlenül, amint a fenti példában is bemutattuk (sőt, a VaR sokszor nem ad egyértelmű megoldást optimalizációs problémákra). Azonban a CVaR gyakorlati alkalmazása csak kellő körültekintés mellett javasolt, mert a hatékonysága erősen függ az alkalmazott becslési, illetve utántesztelési módszerektől. A farokeloszlás pontos becslése különösen fontos, s a legtöbb esetben pont ezekről az eseményekről áll rendelkezésre a legkevesebb adat a kockázatkezelő számára.

1. Amennyiben $F_X = F_Y$, akkor $CVaR_{\alpha}(X) + CVaR_{\alpha}(X)$ (2.1.1).

2. A CVaR pozitív homogenitású (2.1.2), ha $a > 0$, vagyis

$$CVaR_{\alpha}(aX) = aCVaR_{\alpha}(X).$$

3. A CVaR monoton (2.1.3), vagyis ha $X \geq Y$ akkor
$$CVaR_\alpha(X) \geq CVaR_\alpha(Y).$$

4. A feltételes kockáztatott érték transzláció invariáns (2.1.6 3.)
$$CVaR_\alpha(X+a) = CVaR_\alpha(X) + a.$$

5. A CVaR konvex (2.2.4), vagyis, ha $0 \leq \lambda \leq 1$, akkor
$$CVaR_\alpha(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda CVaR_\alpha(X) + (1-\lambda) CVaR_\alpha(Y).$$
Ezzel és az előző három tulajdonsággal együtt pedig a CVaR koherens kockázati mérték.

6. A feltételes kockázatott érték mind első (2.4.2) mind másodrendben (2.4.4) sztochasztikus dominanciával rendelkezik.

7. Amennyiben X abszolút folytonos, akkor
$$E(X) = (1-\alpha) CVaR_\alpha(X) + \alpha CVaR_{1-\alpha}(-X).$$

Egy hátránya az CVaR-nak (csakúgy, mint a VaR-nak), hogy 0 súlyt helyez az α szignifikanciaszint alatti kvantilisekre, ezáltal konzekvensen potenciális információt dob el. Az alábbi egyszerű példa jól mutatja ezt a hátrányt:

Kimenetel	A	B	Valószínűség
1	100	100	90%
2	70	100	5%
3	70	70	5%

4.3. TÁBLÁZAT. Számszerű példa a feltételes kockáztatott érték kritikájára

Látható, hogy az 5%-os szignifikanciaszint mellett a CVaR - a VaR-hoz hasonlóan - ugyanazt az eredményt adja mindkét portfólió esetében. Azonban az is látható, hogy az A portfólió kockázatosabb B-nél, hiszen az értékvesztésének kockázata (bekövetkezési valószínűsége) nagyobb, 10%.

4.4. Várható súlyos veszteség

Legyen $\alpha \in (0,1)$ fix és X egy valós értékű valószónűségi változó (veszteségeloszlás) az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ valószónűségi mezőn úgy, hogy $E[X] < \infty$, $q_\alpha(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{P(X \leq x) \geq \alpha\}$

mint 4.2. Ekkor az

$$ES_\alpha(X) := \frac{1}{1-\alpha}\left(E\left[X\mathbf{1}_{\{X\geq q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(X)\{\alpha - P[X < q_\alpha(X)]\}\right),$$

értéket az X eloszlás α szintű várható súlyos veszteségének (Expected Shortfall - ES) hívjuk. A mértéket Acerbi és Tasche definiálták, és részletesen foglalkoztak tulajdonságaival [9, 10, 11].

Hogy jobban érthető legyen a definíció, a $q_\alpha(X)\{\alpha - P[X < q_\alpha(X)]\}$ részt úgy kell értelmezni, mint azt a részt, amelyet hozzá kell adni az $E\left[X\mathbf{1}_{\{X\geq q_\alpha(X)\}}\right]$ értékhez, amennyiben az $\{X < q_\alpha(X)\}$ esemény α-nál nagyobb valószínűségű. Amennyiben azonban $P[X < q_\alpha(X)] = \alpha$, ami minden esetben így van, ha X eloszlása folytonos, akkor ez a rész eltűnik és látható, hogy $ES_\alpha(X) = E[X|X \geq q_\alpha(X)]$.

Acerbi és Tasche [10] a 3.2-es javaslatukban Pflugtól különállóan a várható súlyos veszteségre is levezetik, hogy

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u(X)\,du.$$

Ugyanezen tanulmány 4.2-es javaslatában, valamint a 4.3-as kiegészítésben belátják, hogy a fentiekben definiált várható súlyos veszteség, valamint a feltételes kockáztatott érték egymással ekvivalens definíciók, vagyis

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\left(E\left[X\mathbf{1}_{\{X\geq q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(X)\{\alpha - P[X < q_\alpha(X)]\}\right) =$$
$$= \inf_{b\in\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{1-\alpha}E\left([X-b]^+\right) + b\right\} = CVaR_\alpha(X).$$

4.4.1. Kapcsolat a kockáztatott értékkel

Legyen $(X)^c = \min(X, c)$, ekkor amennyiben $c = VaR_\alpha(X)$, akkor $ES_\alpha((X)^c) = VaR_\alpha(X)$. Továbbá, ha $\alpha = 1$, akkor a várható súlyos veszteség megegyezik a kockáztatott értékkel. További kapcsolat [14]

1. $ES_\alpha(X) \geq VaR_\alpha(X)$.

2. $VaR_\alpha(X) = \sup_c ES_\alpha((X)^c) = c$.

3. Ha X nemnegatív, akkor $n \to \infty$,

$$\left[\frac{E[X^n] - (1-\alpha)ES_\alpha(X^n)}{\alpha}\right]^{\frac{1}{n}} \to VaR_\alpha(X).$$

4. Rockafellar és Uryasev [13] látták be, hogy ha $F_X\left(VaR_\alpha\left(X\right)\right) < 1$, vagyis előfordulhat nagyobb veszteség, mint $VaR_\alpha\left(X\right)$, akkor

$$CVaR_\alpha\left(X\right) = \lambda_\alpha\left(X\right)VaR_\alpha\left(X\right) + \left(1 - \lambda_\alpha\left(X\right)\right)TCE_\alpha\left(X\right),$$

ahol $TCE_\alpha\left(X\right) = E\left[X|X > VaR_\alpha\left(X\right)\right]$ a feltételes várható extrém érték (3.1), valamint

$$\lambda_\alpha\left(X\right) = \frac{F_X\left(VaR_\alpha\left(X\right)\right) - \alpha}{1 - \alpha}.$$

4.5. Ragasztott VaR

A kockáztatott érték természetes alternatívájaként bemutatott feltételes kockáztatott érték sok szempontból "jobbnak" bizonyult, mint a VaR. Érdekes kérdés, hogy annak ellenére, hogy látszólag jobb, a CVaR mégsem terjedt el széles körben. Ennek magyarázata egyszerű a befektetési szemléletű kockázatkezelés esetében: a feltételes kockáztatott érték alapján való kockázatkezelés lényegesen magasabb tőkét igényel.

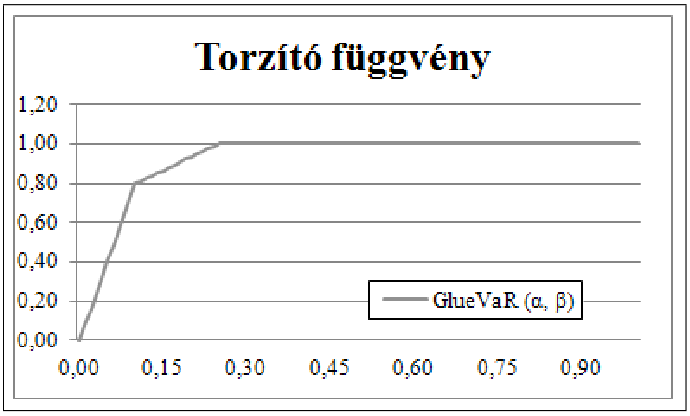
Vizsgáljuk meg a problémát egy egyszerűbb példán: a portfóliónk mai értéke legyen 150 milliárd Ft, a portfólió értéke egységnyi idő (pl. 1 év) elteltével normális eloszlást követ 170 milliárd Ft várható értékkel és 17 milliárd Ft szórással. Ebben az esetben 95%-os konfidencia intervallum mellett a portfólió kockáztatott értéke $7,96$ milliárd Ft, miközben az ugyanehhez a konfidencia intervallumhoz tartozó feltételes kockáztatott érték $15,02$ milliárd Ft, vagyis majdnem kétszer annyi. Érthető tehát, hogy amennyiben a bázeli szabályozás a tőkemegfelelést a pénzügyi intézmény 95%-os feltételes kockáztatott értékén írná elő, akkor a jelenlegihez képest a tőketöbblet-igény rendkívül magas volna. (A példában szereplő nyereség-veszteség eloszlás ráadásul normális eloszlású volt, a valóságban ennél sokkal vastagabb farkú eloszlásokkal találkozunk, ami még tovább növeli a tőkeigényt.)

Ennek a problémának az áthidalására J. Belles-Sampera és szerzőtársai [59] az általuk ún. ragasztott VaR-ként (Glue VaR) hívott kockázati mértéket definiálták. A ragasztott kockáztatott érték típusú kockázati mértékek jellemzője, hogy több VaR típusú kockázati mérték kombinációjaként áll össze. Az így kapott kockázati mérték magában hordozza mindkét kockázati mérték előnyeit, hiszen az egyes alkotóelemek súlyának alkalmas megválasztásával a CVaR bizonyos előnyeit megtartva kaphatunk olyan kockázati mértéket, amely nem ír elő irracionálisan magas tőke-megfelelési igényt.

Adott α és β konfidenciaszintek mellett J. Belles-Sampera és szerzőtársai [59] a következő torzított kockázati mértéket (3.8) definiálták:

$$\kappa_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(x) = \begin{cases} \frac{h_1}{1-\beta}x, & \text{ha } 0 \leq x < 1-\beta, \\ h_1 + \frac{h_2-h_1}{\beta-\alpha}\left[x-(1-\beta)\right], & \text{ha } 1-\beta \leq x < 1-\alpha, \\ 1, & \text{ha } 1-\alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

ahol $\kappa_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(x)$ a mértékhez tartozó torzító függvény, $\alpha, \beta \in [0,1]$ úgy, hogy $\alpha \leq \beta$, $h_1 \in [0,1]$ és $h_2 \in [h_1, 1]$. A β paraméter egy plusz konfidenciaszintet ad meg α mellett. A torzító függvény formáját a torzított valószínűségek h_1 és h_2 valamint az $1-\beta$ és $1-\alpha$ határozzák meg. J. Belles-Sampera és szerzőtársai a h_1 és h_2 paramétereket a torzító függvény magasságainak hívják.



4.3. ÁBRA. A ragasztott VaR torzító függvénye α és β konfidencia intervallumok mellett

Az alábbi táblázatban összehasonlításként megadtuk az előző példa még néhány jellemzőjét, köztük a ragasztott VaR-t is azzal a feltétellel, hogy 80%-ban a 95%-os VaR, 15%-ban a 95%-os CVaR-t és 5%-ban a 99%-os CVaR-t vesszük figyelembe.

$VaR_{0,95}$	$VaR_{0,99}$	$CVaR_{0,95}$	$CVaR_{0,99}$	$GlueVaR_{0,95;0,99}$
$7,96$	$19,55$	$15,02$	$25,15$	$9,88$

4.4. TÁBLÁZAT. Normális eloszlás különböző kockázati mutatói

A ragasztott VaR különleges eseteiként megkapható a kockáztatott érték illetve a feltételes kockáztatott érték is:

1. Az α konfidenciaszintű kockáztatott értéket a $\kappa_{\alpha,\alpha}^{0,0}(x)$ torzító függvény generálja.
2. Míg az α konfidanciaszintű feltételes kockáztatott értéket a $\kappa_{\alpha,\alpha}^{1,1}(x)$ torzító függvény.

4.5.1. Lineáris kombináció

J. Belles-Sampera és szerzőtársai belátták, hogy adott X valószínűségi változó és rögzített α és β ($\alpha < \beta$) toleranciaszintek mellett a $GlueVaR_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(X)$ kifejezhető, mint a $CVaR_\beta(X)$, $CVaR_\alpha(X)$ és $VaR_\alpha(X)$ mértékek lineáris kombinációja. Az általuk használt jelölések szerint a

$$\begin{cases} \omega_1 = h_1 - \frac{(h_2-h_1)(1-\beta)}{\beta-\alpha}, \\ \omega_2 = \frac{(h_2-h_1)(1-\alpha)}{\beta-\alpha}, \\ \omega_3 = 1 - \omega_1 - \omega_2 = 1 - h_2, \end{cases}$$

súlyok mellett a torzító függvény $\kappa_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(x)$ átírható a következő alakra

$$\kappa_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(x) = \omega_1\gamma_\beta(x) + \omega_2\gamma_\alpha(x) + \omega_3\psi_\alpha(x),$$

ahol γ_β, γ_α, ψ_α a CVaR β és α, valamint a VaR α konfidenciaszintekhez tartozó torzító függvények. Ebben az esetben pedig

$$GlueVaR_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(X) = \omega_1 CVaR_\beta(X) + \omega_2 CVaR_\alpha(X) + \omega_3 VaR_\alpha(X).$$

Egy nagyon hangsúlyos tulajdonsága a ragasztott VaR-nak, hogy a döntéshozó két külön konfidenciaszintet határoz meg, egyet a "rossz" esetekhez, egyet pedig a "nagyon rossz" esetekhez. Ezáltal egy kockázatkerülő döntéshozó lényegesen magasabb súlyt adhat a "nagyon rossz" eseteknek, míg egy magasabb kockázatétvággyal rendelkező döntéshozó inkább a "rossz" esetekhez rendel magasabb súlyt.

4.6. Standard entrópia mérték

A pénzügyi matematikában a standard entrópia kockázati mérték egy olyan mutató, amelynél a kockázatkerülés az exponenciális hasznossági függvénytől függ. Az exponenciális hasznossági függvény egy speciális formája a hasznossági függvényeknek, leginkább olyan esetekben használják, amikor valamiféle véletlenszerűség jelen van:

$$u(x) = 1 - \frac{e^{-ax}}{a},$$

ahol x jelöli a döntéshozó által maximalizálni kívánt változót, míg a kockázatkerülés fokát a. A standard entrópia mértéket Föllmer és Knispel [60], illetve Laeven és Stadje [19] a következőképp definiálták veszteségeloszlásokra:

$$e_{\gamma,Q}(X) := \frac{1}{\gamma} ln \left(E_Q \left[exp \left\{ \frac{X}{\gamma} \right\} \right] \right),$$

ahol $\gamma \in [0, \infty]$ rögzített, valamint $e_0(X) = \lim_{\gamma \downarrow 0} e_\gamma(X) = ess\sup X$ illetve $e_\infty = \lim_{\gamma \uparrow \infty} e_\gamma(X) = E[X]$. Egy ezzel ekvivalens definíciója is létezik:

$$e_\gamma(X) = \sup_{Q \ll P} \{E_Q[X] - \gamma H(Q|P)\},$$

ahol a $H(Q|P)$ jelöli a relatív entrópiát, vagy más nevén Kullback-Leibler divergenciát,

$$H(Q|P) = \begin{cases} E_Q\left[ln\left(\frac{dQ}{dP}\right)\right], & \text{ha } Q \ll P; \\ \infty, & \text{különben.} \end{cases}$$

A relatív entrópia méri a távolságot Q és P között. Ezáltal könnyen értelmezhető a kockázat mérése a relatív entrópia segítségével; a kockázatkezelőnek, vagy befektetőnek adva van egy referenciaeloszlása P, azonban ez a mérték csak egy közelítés, mintsem a valódi mérték. Emiatt a kockázatkezelő több valószínűségi mértéket is megfontol, kevésbé megbízva a referencia mértéktől egyre távolabb eső mértékekben. A γ paraméterre tekinthetünk úgy is, mint egy megbízhatósági indexre, amellyel a kockázatkezelő rendelkezik a referencia mértékkel szemben. A standard entrópia mérték a konvex kockázati mértékek osztályába tartozik, azonban nem koherens. A mérték különösen népszerű a biztosítási és pénzügyi matematikai területein túl makroökonómiai és döntéselméleti területeken is, azáltal, hogy közvetlen kapcsolatban áll a hasznosság elmélettel.

4.7. Entrópia VaR

Az entrópia VaR-t Ahmadi [20, 21] definiálta. Az X valószínűségi változó momentum generáló függvényének az

$$M_X(t) := E\left[e^{tX}\right]$$

nevezzük, ahol $t \in \mathbb{R}$, valamint a várható érték létezik. Ekkor Ahmadi az α entrópia VaR-t a következőképp definiálta:

$$EVaR_\alpha(X) := \inf_{t>0} \left\{ t^{-1} ln \left(\frac{M_X(t)}{1-\alpha} \right) \right\},$$

amennyiben az $M_X(t)$ létezik minden $t \geq 0$-ra. A $t^{-1} ln\left(\frac{M_X(t)}{1-\alpha}\right)$ az $\alpha = 0$ speciális eseteként éppen a standard entrópia mérték (4.6). Az entrópia VaR duális reprezentációja az

$$EVaR_{\alpha}(X) = \sup_{Q \in \mathbb{Q}} (E_Q(X)),$$

ahol a $\mathbb{Q}$ valószínűségi mértékosztály ($\mathbb{Q} = \{Q \ll P : H(Q||P) \leq -ln(\alpha)\}$).

4.7.1. Tulajdonságok

1. Az EVaR koherens kockázati mérték (2.1.2, 2.1.3, 2.1.6, 2.2.1).

2. Ha $X, Y \in \mathbb{X}$, valamint $F_X(x) = F_Y(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$, akkor $EVaR_{\alpha}(X) = EVaR_{\alpha}(Y)$ bármely $\alpha \in [0,1]$-ra (2.1.1).

3. Az EVaR legszűkebb lehetséges felső határa a kockáztatott illetve feltételes kockáztatott értékeknek $VaR(X) \leq CVaR(X) \leq EVaR(X)$, valamint az $E(X) \leq EVaR(X) \leq esssup(X)$ egyenlőtlenség is teljesül rá.

4.8. Expectilis

Az α-expectilis fogalmát Newey és Powell [61] vezette be, mint a

$$\alpha \int_{x}^{\infty} (y - x)\, dF_X(y) = (1 - \alpha) \int_{-\infty}^{x} (x - y)\, dF_X(y)$$

egyenlet egyértelmű megoldását ($x = e_{\alpha}$), ahol $0 < \alpha < 1$, valamint X-nek létezik várható értéke. Az expectilisnek sokféle ekvivalens reprezentációja létezik:

$$e_{\alpha}(X) - E[X] = \frac{2\alpha - 1}{1 - \alpha} E\left[(X - e_{\alpha}(X))^{+}\right]$$

Az expectiliseket, mint a várható súlyos veszteség kiválthatóság (2.5) tulajdonsággal rendelkező alternatívájaként ajánlották Ziegel, valamint Bellini és szerzőtársai is [37, 35, 55].

4.8.1. Tulajdonságok

Bellini és szerzőtársai [55] az általánosított kvantilisekkel foglalkozó tanulmányukban az alábbi axiómákat látták be az expectilisekre vonatkozóan:

1. A tanulmány 5. felvetésében belátják, hogy az expectilis rendelkezik a monotonitás (2.1.3), a transzláció invariancia (2.1.6) tulajdonságokkal.

2. A 6. felvetésben a pozitív homogenitást (2.1.2), valamint a szubadditivitást (2.2.1), amennyiben $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

3. A 7. felvetés szerint, ha $\alpha \leq \frac{1}{2}$, akkor e_α szuperadditív (2.2.3), valamint az expectilis rendelkezik még az erős monotonitás tulajdonsággal, miszerint, ha $X \geq Y$ és $P(X > Y) > 0$, akkor $e_\alpha(X) > e_\alpha(Y)$, illetve, hogy $e_\alpha(X) = -e_{1-\alpha}(-X)$.

4. Az expectilis duális reprezentációját is Bellini és szerzőtársai mutatják be, miszerint

$$e_\alpha(X) = \begin{cases} \max\limits_{\varphi \in \mathcal{M}_\alpha} E[\varphi X], & \text{ha } \alpha \geq \frac{1}{2}, \\ \min\limits_{\varphi \in \mathcal{M}_\alpha} E[\varphi X], & \text{ha } \alpha \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

   ahol a lehetséges kimenetelek halmazát az

$$\mathcal{M}_\alpha = \left\{ \varphi \in L^\infty, \varphi > 0\, m.m., E_P[\varphi] = 1, \frac{ess \sup \varphi}{ess \inf \varphi} \leq \beta \right\},$$

   jelöli, ahol $\beta = \max\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right\}$-vel.

5. Legyen $\alpha \geq \frac{1}{2}$ és $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, ekkor

$$e_\alpha(X) = \max_{\gamma \in \left[\frac{1}{\beta}, 1\right]} \left\{ (1-\gamma)\, CVaR_{\frac{\beta - \frac{1}{\gamma}}{\beta - 1}} + \gamma E[X] \right\}.$$

6. $e_{\frac{1}{2}}(X) = E[X]$, valamint $e_\alpha(X) \geq \frac{E[X]}{2\alpha} + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) CVaR_\alpha(X)$.

Bellini és Bignozzi [55] a kiválthatóság egy kicsit módosított definíciójára belátták, hogy az expectilis az egyetlen eloszlás-invariáns (2.1.1), koherens és kiváltható kockázati mérték. Ziegel [35] pedig megmutatta, hogy a várható érték az egyetlen olyan spektrális (3.4) kockázati mérték, amely expectilis. Az expectilis *nem* komonoton additív (2.2.2), ezáltal pedig a nemlineáris függési kapcsolatokban rejlő kockázatokat nem biztos, hogy detektálni tudja.

5. fejezet

Összegzés

A szakdolgozatban a (pénzügyi) kockázat mérésének egyre terebélyesedő témakörét mutattam be. A kockázati mérték fogalmát igyekeztem általánosan megfogalmazni. Bemutattam, hogy a kockázatkezelő vagy szabályozó munkája során milyen nehézségekkel szembesül azáltal, hogy igyekszik a vállalt kockázatról a lehető legtisztább képet kapni/adni.

A kockázati mértékek axiómáinak hívott tulajdonságok a kockázatkezelő preferenciáinak megfelelő jellemzőket hivatottak reprezentálni. A monotonitás, pozitív homogenitás, transzláció invariancia és szub-additivitás, együttes nevén a koherencia tulajdonságok az axiómák csak egy szűkebb rétegét alkotják, hiszen gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából ezeknél fontosabb, hogy a kockázati mérték eloszlás-invariáns legyen. A komonoton additivitás a tökéletesen együtt mozgó eszközök kockázatcsökkentő hatásáról szól, míg sok esetben elégséges a konvexitás is a pozitív homogenitás és szub-additivitás tulajdonságok helyett. A sztochasztikus dominancia tulajdonságok egy rendezést adnak meg a valószínűségi változók halmazán, amely segítségével a téma összekapcsolható a hasznosság elmélettel. A folytonossági axiómák a kockázati mértékek robosztusságáról adnak képet, míg a kiválthatóság az adott kockázati mérték előrejelzési és utántesztelési hatékonyságáról nyújt információt.

Jól látható, hogy olyan mértéket, amely minden axiómát maradéktalanul kielégít, rendkívül nehéz találni. A probléma gyökere már a kockázat fogalmának leírásakor jelentkezik, hiszen egyáltalán nem mindegy, hogy mit tekintünk kockázatnak. Az egyoldali és kétoldali kockázati mértékek élesen elkülönülnek egymástól. A kétoldali kockázati mértékek a veszteségeloszlásban rejlő bizonytalansággal foglalkoznak, míg az egyoldali kockázati mértékek tőke-megfelelési szempontból vizsgálják a veszteségeloszlást. A kockázati mértékek osztályozása abban nyújt segítséget, hogy azonosítható legyen az adott osztályon belül definiált mutatószám, hogy a mutatószám milyen problémákra ad választ, melyek az előnyei, illetve mik a korlátai.

Az osztályok bemutatása mellett számos ismert, és kevésbé ismert kockázati mértéket is bemutattam. A különféle kockázati mértékek általában egy adott problémára adott válaszként jönnek létre. A feltételes kockáztatott érték a kockáztatott érték két leginkább kifogásolt hiányára ad választ, azonban mivel a veszteségeloszlás jobb szélén van definiálva, így felvet újabb előrejelezhetőségi problémákat. Az expectilis, amely ezeket a hibákat is áthidalja, viszont nehezen értelmezhető, ezáltal elveszti azt az egyszerűséget, ami miatt a kockáztatott érték olyan népszerű lett.

A dolgozatban megvizsgált osztályok és kockázati mértékek iránymutatóként szolgálnak azok számára, akik a témában komolyabban kívánnak elmélyedni. Az egyes mértékek felsorolt hiányosságai pedig további tanulmányok alapjai lehetnek.

Irodalomjegyzék

[1] H. Markowitz. Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1):77–91, 1952.

[2] Basel Committee on Banking Supervision. Amendment to the capital accord to incorporate market risks, 1996.

[3] T. S. Beder. Var: Seductive but dangerous. *Financial Analysts Journal*, pages 12–24, 1995.

[4] J. L. Wirch. Value-at-risk for risk portfolios. *Unpublished Working Paper*, 1997.

[5] D. Duffie and J. Pan. An overview of value at risk. *The Journal of derivatives*, 4 (3):7–49, 1997.

[6] P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3):203–228, 1999.

[7] S. Kusuoka. On law invariant coherent risk measures. In *Advances in mathematical economics*, pages 83–95. Springer, 2001.

[8] C. Acerbi. Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1505–1518, 2002.

[9] C. Acerbi, C. Nordio, and C. Sirtori. Expected shortfall as a tool for financial risk management. *arXiv preprint cond-mat/0102304*, 2001.

[10] C. Acerbi and D. Tasche. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1487–1503, 2002.

[11] C. Acerbi and D. Tasche. Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *Economic notes*, 31(2):379–388, 2002.

[12] D. Tasche. Expected shortfall and beyond. *Journal of Banking & Finance*, 26(7): 1519–1533, 2002.

[13] R. T. Rockafellar and S. Uryasev. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1443–1471, 2002.

[14] G. Ch. Pflug. Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In *Probabilistic constrained optimization*, pages 272–281. Springer, 2000.

[15] A. Adam, M. Houkari, and J.-P. Laurent. Spectral risk measures and portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*, 32(9):1870–1882, 2008.

[16] P. Csóka, P. Herings, and L. Kóczy. Coherent measures of risk from a general equilibrium perspective. *Journal of banking & finance*, 31(8):2517–2534, 2007.

[17] H. Föllmer and A. Schied. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and stochastics*, 6(4):429–447, 2002.

[18] H. Föllmer and A. Schied. Robust preferences and convex measures of risk. In *Advances in finance and stochastics*, pages 39–56. Springer, 2002.

[19] R. J. A. Laeven and M. Stadje. Entropy coherent and entropy convex measures of risk. *Mathematics of Operations Research*, 38(2):265–293, 2013.

[20] A. Ahmadi-Javid. An information-theoretic approach to constructing coherent risk measures. In *Information Theory Proceedings (ISIT), 2011 IEEE International Symposium on*, pages 2125–2127. IEEE, 2011.

[21] A. Ahmadi-Javid. Entropic value-at-risk: A new coherent risk measure. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 155(3):1105–1123, 2012.

[22] R. T. Rockafellar, S. P. Uryasev, and M. Zabarankin. Deviation measures in risk analysis and optimization. *University of Florida, Department of Industrial & Systems Engineering Working Paper*, 2002.

[23] R. T. Rockafellar, S. Uryasev, and M. Zabarankin. Generalized deviations in risk analysis. *Finance and Stochastics*, 10(1):51–74, 2006.

[24] A. V. Chekhlov, S. Uryasev, and M. Zabarankin. *Portfolio optimization with drawdown constraints.* Department of Industrial & Systems Engineering, University of Florida, 2000.

[25] A. Chekhlov, S. Uryasev, and M. Zabarankin. Drawdown measure in portfolio optimization. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(01):13–58, 2005.

[26] S. S. Wang, V. R. Young, and H. H. Panjer. Axiomatic characterization of insurance prices. *Insurance: Mathematics and Economics*, 21(2):173–183, 1997.

[27] S. S. Wang. A risk measure that goes beyond coherence, 2001.

[28] S. Wang. An actuarial index of the right-tail risk. *North American Actuarial Journal*, 2(2):88–101, 1998.

[29] G. Darkiewicz, J. Dhaene, and M. Goovaerts. Coherent distortion risk measures: A pitfall. In *proceedings of the Seventh International Congress on Insurance: Mathematics and Economics*, 2003.

[30] E. N. Sereda, E. M. Bronshtein, S. T. Rachev, F. J. Fabozzi, W. Sun, and S. V. Stoyanov. Distortion risk measures in portfolio optimization. In *Handbook of Portfolio Construction*, pages 649–673. Springer, 2010.

[31] J. L. Wirch and M. R. Hardy. Distortion risk measures. coherence and stochastic dominance. In *International Congress on Insurance: Mathematics and Economics*, pages 15–17, 2001.

[32] A. Balbás, J. Garrido, and S. Mayoral. Properties of distortion risk measures. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 11(3):385–399, 2009.

[33] Basel Committee on Banking Supervision. Fundamental review of the trading book - consultative document, 2012.

[34] T. Gneiting. Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 106(494):746–762, 2011.

[35] J. F. Ziegel. Coherence and elicitability. *arXiv preprint arXiv:1303.1690*, 2013.

[36] S. Emmer, M. Kratz, and D. Tasche. What is the best risk measure in practice? a comparison of standard measures. *arXiv preprint arXiv:1312.1645*, 2013.

[37] F. Bellini and V. Bignozzi. Elicitable risk measures. *Available at SSRN 2334746*, 2013.

[38] G. Szegö. Measures of risk. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1253–1272, 2002.

[39] P. Albrecht. *Risk measures.* Wiley Online Library, 2004.

[40] M. Frittelli and E. Rosazza G. Putting order in risk measures. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1473–1486, 2002.

[41] P. Krokhmal, M. Zabarankin, and S. Uryasev. Modeling and optimization of risk. *Surveys in Operations Research and Management Science*, 16(2):49–66, 2011.

[42] S. Rachev, S. Ortobelli, S. Stoyanov, F. J. Fabozzi, and A. Biglova. Desirable properties of an ideal risk measure in portfolio theory. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 11(01):19–54, 2008.

[43] J. Dhaene, M. J. Goovaerts, and R. Kaas. Economic capital allocation derived from risk measures. *North American Actuarial Journal*, 7(2):44–56, 2003.

[44] M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas, and R. Laeven. Risk measurement with equivalent utility principles. *Statistics & Decisions*, 24(1/2006):1–25, 2006.

[45] A. A. Gaivoronski and G. Pflug. Value-at-risk in portfolio optimization: properties and computational approach. *Journal of Risk*, 7(2):1–31, 2005.

[46] C. C. Heyde, S. G. Kou, and X. H. Peng. What is a good risk measure: bridging the gaps between data, coherent risk measures, and insurance risk measures. *Preprint, Columbia University*, 2006.

[47] J. Dhaene, M. Denuit, M. J. Goovaerts, R. Kaas, and D. Vyncke. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Applications. In *Mathematics & Economics*, 2002.

[48] J. Dhaene, M. Denuit, M. J. Goovaerts, R. Kaas, and D. Vyncke. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(1):3–33, 2002.

[49] S. Wang and J. Dhaene. Comonotonicity, correlation order and premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 22(3):235–242, 1998.

[50] J. Dhaene, R. J. A. Laeven, S. Vanduffel, G. Darkiewicz, and M. J. Goovaerts. Can a coherent risk measure be too subadditive? *Journal of Risk and Insurance*, 75(2): 365–386, 2008.

[51] P. Embrechts, J. Nešlehová, and M. V. Wüthrich. Additivity properties for value-at-risk under archimedean dependence and heavy-tailedness. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2):164–169, 2009.

[52] S. Ortobelli, S. T. Rachev, S. Stoyanov, F. J. Fabozzi, and A. Biglova. The proper use of risk measures in portfolio theory. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(08):1107–1133, 2005.

[53] M. Rothschild and J. Stiglitz. Increasing risk. *Journal of Economic Theory*, pages 225–243, 1970.

[54] J. Hadar and W. R. Russell. Rules for ordering uncertain prospects. *American economic review*, 59(1):25–34, 1969.

[55] F. Bellini, B. Klar, A. Müller, and E. Rosazza Gianin. Generalized quantiles as risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, 54:41–48, 2014.

[56] T. Wang. A class of dynamic risk measures. Master's thesis, University of British Columbia, 1999.

[57] M. Frittelli and E. R. Gianin. Law invariant convex risk measures. In *Advances in Mathematical Economics*, pages 33–46. Springer, 2005.

[58] R. T. Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, 2:21–42, 2000.

[59] J. Belles-Sampera, M. Guillén, and M. Santolino. Beyond value-at-risk: Gluevar distortion risk measures. *Risk Analysis*, 34(1):121–134, 2014.

[60] H. Föllmer and T. Knispel. Entropic risk measures: Coherence vs. convexity, model ambiguity and robust large deviations. *Stochastics and Dynamics*, 11(02n03):333–351, 2011.

[61] W. K. Newey and J. L. Powell. Asymmetric least squares estimation and testing. *Econometrica*, 55(4):819–847, 1987.