Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

A csődvalószínűség becslése Cramér-Lundberg approximációkkal

MSc szakdolgozat

Fábián Anikó

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc,
Aktuárius szakirány

Témavezető: Michaletzky György
Valószínűségelméleti és Statisztikai Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek a szakdolgozat elkészítésében, valamint végig támogattak az egyetemi évek alatt. Külön köszönet illeti Michaletzky György Tanár Urat, aki mindig szakított időt sűrű elfoglaltságai közepette a konzultációkra, észrevételeivel segített érhetővé és átláthatóvá tenni a szakdolgozat fejezeteit.

Köszönöm családomnak és Vőlegényemnek, hogy a nyugodt és szeretetteljes környezet biztosításával hozzájárultak tanulmányaim sikerességéhez. Továbbá köszönöm csoporttársaimnak, akikkel egymást támogatva, vidáman éltük meg a mesterképzés minden percét. Ez a szakdolgozat nélkül nem jöhetett volna létre.

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatomban a biztosító intézet tönkremenésének valószínűségét vizsgálom különféle eloszlások és módszerek esetén. Azért tartom ezt fontosnak, mert manapság egyre többféle biztosítási portfólióból válogathatnak az emberek, és akinek lehetőségük van rá meg is teszik. Épp ezért nem mindegy, hogy egy olyan társaságot tisztelünk meg bizalmunkkal, melynél a tönkremenés valószínűsége magas, így amikor szolgáltatást igénybe szeretnénk venni, lehet, hogy már nem is létezik a társaság, vagy egy olyat, melynél a csőd bekövetkezésének lehetősége nagyon pici, tehát biztosak lehetünk benne, hogy ha bekövetkezne a káresemény helyt fog állni a biztosító. Azonban a tönkremenés valószínűségére csak néhány esetben, mint például ha a kárkifizetések nagysága exponenciális eloszlású, kaphatunk explicit kifejezést. Viszont jó becsléseket adódnak a Cramér-Lundberg approximációk segítségével. Éppen ezért szakdolgozatomban az ehhez a témakörhöz tartozó szakirodalom egy szeletének feldolgozásával vezetem le több ízben is a Cramér-Lundberg approximációt.

Az első fejezetben először bemutatjuk, hogy a klasszikus rizikófolyamat esetén a milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a kockázati modell elemei, azaz a biztosító kezdeti tőkéje, a biztosító által a károkra kifizetett összeg, valamint a befolyt biztosítási díjak összege. Majd ebben a modellben először a nem tönkremenés valószínűségére mutatjuk meg, hogy egy nem teljes felújítási egyenlet, majd ebből a csődvalószínűségre is. Kis módosítás után a felújítási elmélet alaptételének segítségével levezetjük a Lundberg-kitevőt, melynek alkalmazásával megkapjuk a Cramér-Lundberg approximációt. Ebben a fejezetben exponenciális eloszlású kárkifizetési összegek esetén a csődvalószínűségre egy explicit megoldást is találhatunk.

A második fejezetben a kárkifizetések nagyságának eloszlása függ a kárkifizetések között eltelt időtől. Itt először általánosan mutatjuk meg differenciálegyenletek segítségével, hogy hogyan kapjuk meg a Lundberg-kitevőt és a Lundberg-egyenlőtlenséget, két különböző eloszlásba sorolva a kárkifizetések nagyságát a köztük eltelt időtartam hossza szerint. Majd a második alfejezetben mindkét eloszlást különböző paraméterű exponenciálisnak választva, explicit megoldást vezetünk le a csődvalószínűségre.

A következő fejezetben azt az esetet vizsgáljuk, amikor a kárkifizetések száma módosított geometriai eloszlást követ. Ekkor az első alfejezetében az élettartam adatok elemzése során használt fogalmak segítségével korlátokat adunk meg az összetett geometriai eloszlás farok eloszlására, mely korlátok a kárkifizetések nagyságának eloszlásától függnek. Az itt kapott eredményeket felhasználva a második alfejezetben a csődvalószínűségre megkapjuk a Cramér-Lundberg approximációt és a Lundberg-egyenlőtlenséget is.

A negyedik fejezetben a kárkifizetések nagysága diszkrét eloszlású, míg a kárkifizetések között eltelt időtartamok folytonos idejű binomiális eloszlást követnek. Ebben a modellben megmutatjuk, hogy szakaszonként determinisztikus Markov- folyamatok segítségével, hogyan kaphatunk exponenciális martingált és ez az eredmény miként kapcsolódik a csődvalószínűségekhez. A fejezet végén itt is megkapjuk a Cramér-Lundberg approximációt.

Végül, hogy lássuk nem csak a szakdolgozatban eddig tárgyalt approximáció áll rendelkezésünkre a csődvalószínűség meghatározására röviden ismertetünk két másik, jól ismert módszert is.

2. fejezet

A Cramér-Lundberg approximáció levezetése klasszikus rizikófolyamat esetén

Ebben a fejezetben a Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak aktuárius szakirányán a 4. félévben Michaletzky György által tartott *Kockázati folyamatok* című tantárgy előadásai, valamint az [5] számú jegyzet alapján vezetjük le a Cramér-Lundberg approximációt klasszikus rizikófolyamat esetén.

2.1. Klasszikus rizikófolyamat

A klasszikus kockázati modellekben, más néven rizikó modellekben az egyes biztosítók működése során fellépő pénzforgalommal foglalkozunk, különös tekintettel 3 fontos elemre, melyek a biztosító által az egyes károk kapcsán kifizetett összeg, a biztosítottak által fizetett biztosítási díj és a biztosító kezdeti tőkéje.

Mivel a károk bekövetkezésének időpontjait és nagyságát nem tudjuk előre, ezért viselkedésüket sztochasztikus elemeket tartalmazó modellek segítségével vizsgáljuk. Tehát legyenek U_t, P_t, S_t sztochasztikus folyamatok. Az U_t jelöli a biztosító intézet pillanatnyi tőkéjét (tőkefolyamat), P_t a $[0, t]$ intervallumban összesen befolyt díjat, míg S_t az összes kiadást (kárkifizetést) az $[0, t]$-n, $t \geq 0$ esetén. Ezen jelölések mellett

$$\{\exists t \geq 0 : U_t < 0\} \text{ a csőd esemény },$$

$$\{\forall t \geq 0 : U_t \geq 0\} \text{ a nem csőd esemény.}$$

Ekkor u kezdőtőke esetén a biztosító pillanatnyi tőkéjét leíró folyamat

$$U_t = u + P_t - S_t.$$

Klasszikus esetben:

- $P_t = c \cdot t$, az idővel arányos díjbevétel;
- $S_t = \sum_{j=1}^{N_t} Z_j$ az összes kárkifizetés a $[0,t]$ időintervallumon (összetett Poisson folyamat), ahol
  - $Z_1, Z_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $Z_j \geq 0$ a j. kárkifizetés nagysága;
  - N_t a $[0,t]$-n kifizetett károk darabszáma, $N_t \geq 0$ egész, λ intenzitású Poisson folyamat.

Tehát a tőkefolyamat klasszikus esetben

$$U_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Z_j.$$

Jelölje τ_j a j. kárkifizetés időpontját, valamint ζ_n az n. és $(n-1)$. kárkifizetés között eltelt időt. Így $\zeta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$, $n \geq 2$, $\tau = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j$ és $\zeta_1 = \tau_1$. Poisson-folyamat esetén a folyamat trajektóriái tiszta ugró függvények, ahol az ugrások nagysága 1, azaz egyszerre csak egy kárt fizetünk ki, az időközök, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ pedig függetlenek λ-exponenciális eloszlással.

Mielőtt tovább mennénk, először megmutatjuk, hogy N_t valóban Poisson-folyamat. Legyen a $[0,t]$ intervallum egy felosztása $0 = t_1 \leq s_2 < t_2 \leq s_3 < t_3 \leq \ldots \leq s_l < < t_l = t$. Ekkor $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{s_2}, \ldots, N_{t_l} - N_{s_l}$ együttes eloszlására vagyunk kíváncsiak. Nézzük $\{N_t = k\} = \{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}\}$-t. Mivel $\tau_{k+1} = \tau_k + \zeta_{k+1}$, így

$$\begin{aligned} P(N_t = k) = P(\tau_k \leq t < \tau_k + \zeta_{k+1}) &= \int_0^t \int_{t-z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y \frac{\lambda^k z^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda z} \, \mathrm{d}z = \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(t-z)} \frac{\lambda^k z^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda z} \, \mathrm{d}z = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^k}{k-1} \int_0^t z^{k-1} \, \mathrm{d}z = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

azaz $N_t \sim (\lambda t)$-Poisson, ebből pedig kapjuk, hogy $N_t - N_s \sim \lambda(t-s)$-Poisson, $(s < t)$. Hasonlóan megkapható az is, hogy a növekmények egymástól független valószínűségi változók, azaz N_t független növekményű. Tehát N_t Poisson-folyamat λ intenzitással.

Most belátjuk, hogy $S_t = \sum_{j=1}^{N_t} Z_j$ összetett Poisson-folyamat. Ehhez elevenítsük fel a véletlen tagszámú összeg tulajdonságairól tanultakat.

A véletlen tagszámú összeg tulajdonságai

Legyen $S = \sum_{j=1}^{N} Z_j$ véletlen tagszámú összeg. Feltesszük, hogy az $N \geq 0$ egész, független a $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sorozattól, ahol $Z_1, Z_2, \ldots$ független, azonos eloszlásúak.

Ekkor nézzük mit kapunk S várható értékére, szórásnégyzetére és karakterisztikus függvényére.

$$\begin{aligned}
E(S) &= E(N)E(Z_1) \\
D^2(S) &= E(N)D^2(Z_1) + E(Z_1^2)D^2(N) \\
\varphi_S(t) &= E(e^{its}) = \sum_k E\left(e^{it\sum_{j=1}^{N} Z_j}|N=k\right) P(N=k) \\
&= \sum_k E\left(e^{it\sum_{j=1}^{k} Z_j}|N=k\right) P(N=k) = \sum_k \prod_{j=1}^{k} E(e^{itZ_j})P(N=k) \\
&= \sum_k [\varphi_{Z_1}]^k P(N=k) = g_N(\varphi_{Z_1}(t))
\end{aligned}$$

ahol $g_N(x)$ az N generátorfüggvénye. Most nézzük azt a speciális esetet amikor, $N \sim \lambda-$Poisson. Ekkor

$$g_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{z\lambda} e^{-\lambda} = e^{\lambda(z-1)}.$$

Tehát $\varphi_S(t) = e^{\lambda(\varphi_{Z_1}(t)-1)}$.

Az előzőek alapján azt kapjuk, hogy klasszikus rizikófolyamat esetén, S_t karakterisztikus függvénye u kezdőtőke mellett, $\varphi_{S_t}(u) = e^{\lambda t(\varphi_{Z_1}(u)-1)}$. Tehát S_t összetett Poisson-folyamat.

Most térjünk vissza az $U_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Z_j$ tőkefolyamathoz. Jelölje

$\Psi(u) = P(\exists t \geq 0 : U_t < 0 | U_0 = u)$ a tönkremenés valószínűségét,

$\Phi(u) = P(\forall t \geq 0 : U_t \geq 0 | U_0 = u)$ a nem-tönkremenés valószínűségét.

$\Psi(u)$[1] általában explicit nem meghatározható, kivéve a triviális esteket. Nézzük meg, mik ezek a triviális esetek. Először is világos, hogy negatív kezdőtőke esetén, azaz ha $u < 0$, akkor 1 valószínűséggel csődbe megy a biztosító. Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy $u \geq 0$. A következő paraméter, amit vizsgálunk a biztosítási díj c. Ha $c < 0$, akkor szintén triviális, hogy $\Psi(u) = 1, \forall u$-ra. Nézzük, mi történik abban az esetben, ha $u \geq 0$ és $c \geq 0$. Ekkor ha $u = 0$, a csődbemenés valószínűsége csak Z_i-k várható értékétől és nem pedig az eloszlásától függ. Ha $P(Z_1 = 0) = 1$, akkor $\Psi(u) = 0$. Tegyük fel, hogy $u \geq 0, c = 0$ és $P(Z_1 = 0) < 1$. Ekkor mivel $U_t = u - \sum_{j=1}^{N_t} Z_j$, így 1 valószínűséggel csődbe megy a biztosító.

[1] A továbbiakban $\Phi(u)$-ra a csődvalószínűség és $\Psi(u)$-ra pedig a nem csőd valószínűsége kifejezést is használjuk.

2.1.1. Megjegyzés. *Ha $u \geq 0$ és $c \geq 0$, ekkor a csődeseményt felírhatjuk a következő módon*

$$\{\exists t \geq 0 : U_t < 0\} = \{\exists n \geq 1 : U_{\tau_n} < 0\} = \{\exists n \geq 1 : \sum_{j=1}^{n} Y_j > u\}$$
$$= \{\sup_n \sum_{j=1}^{n} Y_j > u\}.$$

Ugyanis

$$U_{\tau_n} = u + c\tau_n - \sum_{j=1}^{n} Z_j = u + c\sum_{j=1}^{n} \zeta_j - \sum_{j=1}^{n} Z_j = u - \sum_{j=1}^{n}(Z_j - c\zeta_j),$$

ahol $(Z_j - c\zeta_j) = Y_j$ független, azonos eloszlásúak. Ekkor a Kolmogorov-féle nagy számok törvényét alkalmazva $\frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j}{n} \to E(Y_1)$ 1-valószínűséggel. Ha $0 < E(Y_1) < \infty$, akkor $P(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} Y_j = \infty) = 1$. Tehát $\Psi(u) = 1$.

Mivel a tönkremenés valószínűsége függ Z_j-k várható értékétől, vizsgáljuk meg $E(Y_1)$-t.

$$E(Y_1) = E(Z_1 - c\zeta_1) = E(Z_1) - \frac{c}{\lambda}.$$

Ha $E(Z_1) = \infty$, akkor $\Psi(u) = 1$. Tegyük fel most, hogy $0 < E(Z_1) < \infty$. A $\mu = E(Z_1)$ jelöléssel $E(Y_1) = \mu - \frac{c}{\lambda}$. Így $\mu > \frac{c}{\lambda}$ esetén a 1 valószínűséggel csődbe megy a biztosító $\forall u$-ra. Tehát innen a nem triviális esetek vizsgálatához a $c \geq \lambda\mu$ feltételt kapjuk.
Ha $E(Y_1) < 0$, akkor $\sum_{j=1}^{n} Y_j \to -\infty$ 1 valószínűséggel. Nagyon nagy u-ra nem megyünk tönkre, de az elején még tönkre mehetünk, azaz ha $P(\sup_n \sum_{j=1}^{n} Y_j < \infty) = 1$, akkor $\Psi(u) = P(\sup_n \sum_{j=1}^{n} Y_j > u) \to 0$, $u \to \infty$ esetén.

Ha $E(Y_1) = 0$, akkor $\frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j}{n} \to 0$ 1 valószínűséggel. Mivel a Kolmogorov-féle nagy számok erős törvénye nem ad információt a számlálóról, így helyette a Chung-Fuchs tételt alkalmazzuk.

2.1.1. Állítás. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók,* $E(\xi_j) = 0, P(\xi_j = 0) < 1$. *Ekkor*

$$P(\limsup_n \sum_{j=1}^{n} \xi_j = \infty) = P(\liminf_n \sum_{j=1}^{n} \xi = -\infty) = 1.$$

Tehát $E(Y_1) = 0$ esetén, $\Psi(u) = 1$. Ezzel befejeztük a triviális esetek vizsgálatát.

Foglaljuk össze, milyen feltételeink vannak a nem triviális esetben:

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &= P(\exists \geq 0 : U_t < 0 | U_0 = u), \\
\Phi(u) &= 1 - \Psi(u), \\
U_t &= u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Z_j, \\
c &\geq \lambda\mu,
\end{aligned}$$

ahol $u \geq 0{,}0 < E(Z_j) = \mu < \infty$. Ezen feltételekből szeretnénk meghatározni $\Psi(u)$-t. Ehhez azonban $\Phi(u)$-t kell meghatároznunk.

Legyenek $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ $\lambda-$exponenciális eloszlásúak, függetlenek a $Z_1, Z_2, \ldots$ azonos eloszlású valószínűségi változóktól. Ekkor ζ_1 és Z_1 szerint a teljes valószínűség tételt alkalmazva

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} P(\text{nincs csőd} | \zeta_1 = t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{[0,u+ct]} \Phi(u + ct - z)\, \mathrm{d}Q_Z(z)\, \mathrm{d}t. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Az $u + ct = s$ helyettesítés után

$$\Phi(u) = \int_u^\infty \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{s-u}{c}\lambda} \int_{[0,s]} \Phi(s - z)\, \mathrm{d}Q_Z(z)\, \mathrm{d}s.$$

Φ folytonos függvény, sőt abszolút folytonos (valamely mérhető függvény integrálfüggvénye), tehát létezik Radon-Nikodym deriváltja. Jelölje ezt Φ'. Vegyük mindkét oldal u szerinti integrálját 0-tól $v \geq 0$-ig. Így

$$\begin{aligned}
\int_0^v \Phi(u)\, \mathrm{d}u &= \int_0^v \int_u^\infty \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{s-u}{c}\lambda} \left[\int_{[0,s]} \Phi(s - z)\, \mathrm{d}Q_Z(z) \right] ds\, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty \int_u^{\min(s,v)} \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}(s-u)} \left[\int_{[0,s]} \Phi(s - z) dQ_Z(z) \right] \mathrm{d}u\, \mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty \left[\int_{[0,s]} \Phi(s - z)\, \mathrm{d}Q_Z(z) \right] e^{-\frac{\lambda}{c}s} \left[e^{\frac{\lambda}{c}u} \right]_0^{\min(s,v)} \mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty \left[\int_{[0,s]} \Phi(s - z)\, \mathrm{d}Q_Z(z) \right] \left(e^{-\frac{\lambda}{c}s + \frac{\lambda}{c}min(s,v)} - e^{-\frac{\lambda}{c}s} \right) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Felbontva a második zárójelet

$$\begin{aligned}
\int_0^v \Phi(u)\, \mathrm{d}u = &- \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}s} \left[\int_{[0,s]} \Phi(s - z)\, \mathrm{d}Q_Z(z) \right] \mathrm{d}s \\
&+ \int_v^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}(s-v)} \left[\int_{[0,s]} \Phi(s - z)\, \mathrm{d}Q_Z(z) \right] \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^v \left[\int_{[0,s]} \Phi(s - z)\, \mathrm{d}Q_Z(z) \right] \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(u)\,\mathrm{d}u = -\Phi(0) + \Phi(v) + \frac{\lambda}{c}\int_0^v \left[\int_{[0,s]} \Phi(s-z)\,\mathrm{d}Q_Z(z)\right]\mathrm{d}s$$

átrendezve

$$\Phi(v) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(u)\,\mathrm{d}u - \frac{\lambda}{c}\int_0^v \left[\int_{[0,s]} \Phi(s-z)\,\mathrm{d}Q_Z(z)\right]\mathrm{d}s.$$

Az utolsó tagban az eloszlás szerinti integrált eloszlásfüggvény szerintire átírva, majd parciálisan integrálva,

$$\begin{aligned}\int_{[0,s]} \Phi(s-z)\,\mathrm{d}Q_Z(z) &= -\int_{[0,s]} \Phi(s-z)\,\mathrm{d}(1-F_Z(z))\\ &= -\left\{[\Phi(s-z)(1-F_Z(z))]_0^s - \int_{[0,s]}(1-F_Z(z))\,\mathrm{d}z\Phi'(s-z)\right\}.\end{aligned}$$

Ezt visszaírva $\Phi(v)$-be egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Phi(v) &= \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(0)(1-F_Z(s))\,\mathrm{d}s + \frac{\lambda}{c}\int_0^v\int_z^v (1-F_Z(z))\Phi'(s-z)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z\\ &= \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(0)(1-F_Z(s))\,\mathrm{d}s + \frac{\lambda}{c}\int_0^v (1-F_Z(z))\left[\Phi(v-z)-\Phi(0)\right]\mathrm{d}z\\ &= \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(0)(1-F_Z(s))\,\mathrm{d}s + \frac{\lambda}{c}\int_0^v (1-F_Z(z))\Phi(v-z)\,\mathrm{d}z\\ &\qquad - \frac{\lambda}{c}\int_0^v (1-F_Z(z))\Phi(0)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Ebből a nem-tönkremenés valószínűségére a *nem teljes felújítási egyenlet*

$$\Phi(v) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(v-z)(1-F_Z(z))\,\mathrm{d}z,$$

valamint a csődbemenés valószínűsége

$$\begin{aligned}\Psi(v) = 1-\Phi(v) &= 1-\Phi(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(v-z)(1-F_Z(z))\,\mathrm{d}z\\ &= \Psi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^v \Psi(v-z)(1-F_Z(z))\,\mathrm{d}z - \frac{\lambda}{c}\int_0^v (1-F_Z(z))\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Tehát szükségünk van $\Phi(0)$ és $\Psi(0)$ értékére.
$v\to\infty$ esetén jelölje $\Phi(\infty) = \lim_{v\to\infty}\Phi(v)$, mivel Φ monoton és valószínűség, így korlátos, tehát létezik a limesz.

$$\Phi(\infty) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \Phi(\infty)(1-F_Z(z))\,\mathrm{d}z, v\to\infty,$$

Beppo-Levi tétel miatt a konvergencia és a limesz felcserélhető, és mivel $\int_0^\infty (1 - F_Z(z))dz = \mu$, így

$$\begin{aligned}
\Phi(\infty) &= \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \Phi(\infty)(1 - F_Z(z))\,\mathrm{d}z, v \to \infty \\
\Phi(\infty) &= \Phi(0) + \frac{\lambda\mu}{c}\Phi(\infty) \\
\Phi(\infty)\left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) &= \Phi(0) \\
\Phi(\infty) &\geq \Phi(0).
\end{aligned}$$

Mivel $c \geq \lambda\mu$:

$$\begin{aligned}
&c = \lambda\mu \Rightarrow \Phi(0) = 0, \Psi(0) = 1, \\
&c > \lambda\mu \Rightarrow \Psi(\infty) = 0 \Rightarrow \Phi(\infty) = 1 \Rightarrow \Phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}, \Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}.
\end{aligned}$$

Azonban, ha $c = \lambda\mu$, akkor $\Phi(v) = 0, \forall v$. Tehát a későbbiekben feltesszük, hogy $c > \lambda\mu$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\Phi(v) &= 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(v - z)(1 - F_Z(z))\,\mathrm{d}z \\
\Psi(v) &= \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda}{c}\int_0^v (1 - F_Z(z))\,\mathrm{d}z + \frac{\lambda}{c}\int_0^v \Psi(v - z)(1 - F_Z(z))\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_v^\infty (1 - F_Z(z))\,\mathrm{d}z + \frac{\lambda}{c}\int_0^v \Psi(v - z)(1 - F_Z(z))\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Jelölje $\alpha = \frac{\lambda\mu}{c}$, ekkor $0 < \alpha < 1$. Így

$$\Phi(v) = 1 - \alpha + \alpha\int_0^v \Phi(v - z)\frac{1 - F_Z(z)}{\mu}\,\mathrm{d}z.$$

Legyen $Q_0 << \lambda$

$$\frac{dQ_0}{d\lambda} = \begin{cases} 0 & , z < 0 \\ \frac{1 - F_Z(z)}{\mu} & , z \geq 0, \end{cases}$$

eloszlásfüggvénye F_0. Ekkor

$$\Phi(v) = 1 - \alpha + \alpha\int_{-\infty}^\infty \Phi(v - z)\,\mathrm{d}F_0(z) = 1 - \alpha + \alpha\Phi * F_0.$$

Tehát

$$\begin{aligned}
\Phi &= (1 - \alpha) + \alpha[1 - \alpha + \alpha\Phi * F_0] * F_0 = (1 - \alpha) + (1 - \alpha)\alpha F_0 + \alpha^2\Phi * F_0^{(*2)} \\
&= (1 - \alpha) + (1 - \alpha)\alpha F_0 + (1 - \alpha)\alpha^2 F_0^{(*2)} + \alpha^3\Phi * F_0^{(*3)} \\
&= \ldots = (1 - \alpha)\sum_{j=0}^n \alpha^j F_0^{(*j)} + \alpha^{n+1}\Phi * F_0^{(*(n+1))},
\end{aligned}$$

ahol $n \to \infty$ esetén az utolsó tag tart 0-hoz, azaz kapjuk, hogy

$$\Phi(u) = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j F_0^{(*j)}(u), \quad 0 < \alpha = \frac{\lambda\mu}{c} < 1$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1-\alpha)\alpha^j = 1,$$

valószínűség eloszlás szerinti súlyozott konvolúció hatványok.

Tegyük fel, hogy $Z_1, Z_2, \ldots$ exponenciális eloszlású $\frac{1}{\mu}$ paraméterrel. Ekkor szeretnénk $F_0^{(*j)}$-t meghatározni, ehhez azonban először F_0-ra van szükségünk.

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \int_0^x \frac{1-F_Z(z)}{\mu} dz & , x \geq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^x \frac{1-F_Z(z)}{\mu} dz = \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{\mu}z}}{\mu}\, \mathrm{d}z = \int_0^x \frac{1}{\mu} e^{-\frac{1}{\mu}z}\, \mathrm{d}z = 1 - e^{-\frac{1}{\mu}x},$$

tehát F_0 is exponenciális eloszlás $\frac{1}{\mu}$ paraméterrel. A konvolúció hatványok, $F_0^{(*j)}$-k eloszlása $\Gamma_j(\frac{1}{\mu})$ lesz, $\frac{(\frac{1}{\mu})^j u^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\frac{1}{\mu}u}$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= (1-\alpha)\sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j \frac{(\frac{1}{\mu})^j u^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\frac{1}{\mu}u} = (1-\alpha)\alpha\frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}u}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{\mu}u\right)^{j-1}}{(j-1)!} \\ &= \alpha\frac{1-\alpha}{\mu}e^{-(\frac{1-\alpha}{\mu})u},\end{aligned}$$

ami $\frac{1-\alpha}{\mu}$ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye. Tehát a tönkremenés valószínűsége

$$\Psi(u) = 1 - \Phi(u) = \alpha e^{-\frac{1-\alpha}{\mu}u}.$$

Felújítási egyenlet

Mivel

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty}(1-F_Z(z))\,\mathrm{d}z + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-z)(1-F_Z(z))\,\mathrm{d}z$$

felírható a következő alakban

$$f(u) = g(u) + \int_0^u f(u-z)\,\mathrm{d}\nu(z),$$

ahol g és ν adott, f pedig ismeretlen, nem teljes felújítási egyenlet. Nézzük, mit tudunk a felújítási egyenletről.

Legyen X_0 a most működő alkatrész hátralévő időtartama, $X_1, X_2, \dots$ pedig az új alkatrészek teljes élettartamai, ahol $X_1, X_2, \dots$ függetlenek, azonos eloszlásúak és $X_j \geq 0$. Jelölje N_t a felújítások számát a $[0, t]$ intervallumban, valamint $S_n = \sum_{j=0}^{n} X_j$ az $(n+1)$. felújítási pontot. Ekkor $\{N(t) = k\} = \{S_{k-1} \leq t < S_k\}$ azt fejezi ki, hogy hány darab felújításra van szükség a $[0, t]$-n. Legyen $M(t) = E(N(t))$.

1. Tétel. *Legyen*

$$N(t), t \geq 0 \text{ felújítási folyamat,}$$
$$M(t), t \geq 0 \text{ felújítási függvény.}$$

Ekkor $0 < E(X_1) < \infty$ *esetén*

$$\frac{M(t)}{t} \to \frac{1}{E(X_1)}, t \to \infty.$$

2. Tétel. *A felújítási elmélet alaptétele Legyen $Q_{X_1}(z)$ egy olyan valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, melynek pozitív a várható értéke. Legyen továbbá $g(u)$ közvetlenül Rieman-integrálható, és $f(u)$ megoldása az*

$$f(u) = g(u) + \int_{[0,u]} f(u-z)\, \mathrm{d}Q_{X_1}(z)$$

felújítási egyenletnek. Ha Q_{X_1} nem rácsos eloszlás akkor

$$\lim_{u \to \infty} f(u) = \frac{\int_0^\infty g(u)\, \mathrm{d}u}{EX_1}.$$

2.2. Cramér-Lundberg approximáció levezetése

Az általános felújítási tételt alkalmazva tudnánk valamit mondani $\Psi(u)$ határértékéről. Azonban a csődvalószínűség esetén az integrálás nem valószínűségi mérték szerint történik. Megoldás: úgy módosítjuk $\Psi(u)$-t, hogy valószínűségi mértéket kapjunk.

$$e^{ru}\Psi(u) = e^{ru}\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (1 - F_Z(z))\, \mathrm{d}z + \int_0^u e^{r(u-z)}\Psi(u-z)e^{rz}\frac{\lambda}{c}(1 - F_Z(z))\, \mathrm{d}z,$$

ekkor a kérdés, hogy hogyan válasszuk meg r-et. Kell,

$$\int_0^\infty e^{rz}(1 - F_Z(z))\frac{\lambda}{c}\, \mathrm{d}z = 1, \text{ azaz}$$
$$\int_0^\infty e^{rz}(1 - F_Z(z))\, \mathrm{d}z = \frac{c}{\lambda}.$$

Mivel növelni szeretnénk, ezért $r > 0$.

2.2.1. Lemma. *$Z \geq 0$ valószínűségi változó, $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Legyen $\Phi(z) = \int_0^z \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Ekkor*

$$E(\Phi \circ Z) = \int_0^\infty \varphi(z)(1 - F_Z(z))\,\mathrm{d}z.$$

2.2.1. Megjegyzés. *Legyen $\varphi \equiv 1$. Ekkor $\Phi(z) = Z$, így az előző lemma egy speciális esete, melyet eddig is alkalmaztunk: $E(Z) = \int_0^\infty (1 - F_Z(z))\,\mathrm{d}z$.*

Tehát:

$$\varphi(z) = e^{rz} \Rightarrow \Phi(z) = \int_0^z e^{rt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r}(e^{rz} - 1),$$

így

$$\int_0^\infty e^{rz}(1 - F_Z(z))\,\mathrm{d}z = E\left(\frac{1}{r}(e^{rZ-1})\right) = \frac{1}{r}\left[E(e^{rZ}) - 1\right].$$

Előfordulhat, hogy semmilyen pozitív r-re sem véges a várható érték, tehát függ az eloszlástól, hogy van-e az egyenletnek megoldása.

Legyen $h(r) = E(e^{rZ}) - 1$. Tegyük fel, hogy $h(r)$ a 0 környezetében véges, tehát akárhányszor deriválható. ($h^{(k)}(0) = E(Z^k)$ momentumgeneráló függvény.) Csak olyan Z-ből lehet kiindulni, amelynek momentumai végesek, így csak vékonyfarkú eloszlások jöhetnek szóba. Ekkor az egyenletünk a következő:

$$\frac{h(r)}{r} = \frac{c}{\lambda}, r > 0$$
$$h(r) - r\frac{c}{\lambda} = 0, r > 0.$$

Nézzük, lehet-e több megoldása!

$$h'(0) - \frac{c}{\lambda} = \mu - \frac{c}{\lambda} < 0, \Rightarrow \text{ 0-nál lefelé indulunk}$$
$$h''(r) = E(Z^2 e^{rZ}) > 0, \Rightarrow \text{ konvex.}$$

Ha $r \to \infty \Rightarrow \infty$-be tart. Tehát legfeljebb 1 pozitív gyök van. Ezt a pozitív gyököt *Lundberg-kitevőnek* vagy *illeszkedési együtthatónak* nevezzük és R-rel jelöljük.

2.2.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\exists R$ és h véges R kicsiny környezetében (azaz $\exists \varepsilon > 0$, $h(R + \varepsilon) < \infty$). Ekkor*

$$e^{Ru}\Psi(u) \to \frac{c - \lambda\mu}{\lambda h'(R) - c}, u \to \infty.$$

Máshogy felírva

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = K$$

a *Cramér-Lundberg approximáció*, ahol K véges pozitív állandó.

3. fejezet

Speciális kárkifizetés eloszlások

A további fejezetekben különféle eloszlások és technikák segítségével vezetjük le a Cramér-Lundberg approximációt. Elsőként egy olyan modellt vizsgálunk, melyben a kárkifizetések között eltelt időtartamok két különböző paraméterű exponenciális eloszlásba sorolják a kárkifizetések nagyságát, aszerint besorolva, hogy a tartam hossza meghalad-e egy adott küszöbszámot. Ebben a fejezetben a [3] cikket követjük.

3.1. Kárkifizetés gyakorisága szerinti besorolás

Ahogy ezt fentebb említettük, ebben a modellben a kárkifizetés nagysága függ a kifizetések között eltelt idő hosszától. Amint az előző fejezetben, most is jelölje Z_i az i-edik kifizetés nagyságát és ζ_i az $(i-1)$-edik és i-edik kárkifizetés között eltelt időt. Tegyük fel, hogy a Z_i eloszlása F_1, ha $\zeta_i < a$ és F_2 különben, ahol $a > 0$ rögzített küszöbszám. Feltesszük továbbá, hogy ζ_i-k függetlenek, azonos eloszlásúak exponenciális eloszlással. Korábbiakhoz hasonlóan U_t jelöli a t időpontban a biztosító össztőkéjének nagyságát leíró folyamatot. Ekkor U_t fejlődése a következő:

$$U_t = u + ct - S_t,$$

ahol $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i$ a kárfolyamatot és a c konstans pedig az időegységre eső biztosítási díjat jelöli. Ebben az esetben is a $[0, t]$-ben kifizetett károk száma, N_t λ intenzitású Poisson eloszlású.
Feltehetjük, hogy a következő *nettó profit feltétel* teljesül;

$$ct = (1 + \theta)E(S_t), \text{ ahol } \theta > 0 \text{ a biztonsági pótdíj.}$$

3.1.1. Megjegyzés. *Alkalmazhatjuk a Wald-azonosságot* [1], *így*

$$\begin{aligned} ct &= (1+\theta)E(S_t) = (1+\theta)E\left(\sum_{i=1}^{N_t} Z_i\right) = (1+\theta)E(N_t)E(Z_i) \\ &= (1+\theta)\lambda(P(\zeta < a)\mu_1 + P(\zeta \geq a)\mu_2), \end{aligned}$$

ahol μ_1 *az* F_1 *eloszlású kifizetések várható értéke,* μ_2 *pedig az* F_2 *eloszlásúaké. Ebből*

$$c = (1+\theta)\lambda((1-e^{-\lambda a})\mu_1 + e^{-\lambda a}\mu_2).$$

Legyen $T = \inf_{t\geq 0}\{t : U_t(u) < 0\}$, azaz T jelöli azt az időpontot, amikor a csőd esemény bekövetkezik. Ekkor

$$\Phi(u) = P\{T = \infty | U_0 = u\}, \text{a nem-csőd bekövetkezésének valószínűsége;}$$

$$\Psi(u) = 1 - \Phi(u), \text{a csődesemény bekövetkezésének valószínűsége.}$$

Az előző fejezetben leírtak alapján $\Phi(u)$ a következő:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f_Z(z)\Phi(u+ct-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f_1(z)\Phi(u+ct-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_a^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f_2(z)\Phi(u+ct-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

ahol jelölje f_1 az F_1 eloszlású, valamint f_2 az F_2 eloszlású kárkifizetések sűrűségfüggvényét. Tehát $\Phi(u)$-nak létezik Radon-Nikodym deriváltja. Ekkor a következő tétel igaz a nem-csőd valószínűségére.

3. Tétel. *A nem-csőd valószínűsége,* $\Phi(u)$ *kielégíti a következő integrál-differenciálegyenletet:*

$$\begin{aligned} c\frac{d\Phi(u)}{du} - \lambda\Phi(u) = \lambda e^{-\lambda a} &\int_0^{u+ca} [f_1(x) - f_2(x)]\Phi(u+ca-x)\,\mathrm{d}x \\ &- \lambda \int_0^u f_1(x)\Phi(u-x)\,\mathrm{d}x. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \Phi(u) = &\int_0^a \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f_1(x)\Phi(u+ct-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_a^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f_2(x)\Phi(u+ct-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

[1] A Wald azonosság: Legyen $Z_1, Z_2, \ldots$ azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, valamint legyen N nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy N és Z_1 várható értéke véges, valamint azt, hogy az $N, Z_1, Z_2, \ldots$ változók függetlenek. Ekkor a Wald-azonosság szerint: $E(Z_1 + \ldots + Z_N) = E(N)E(Z)$.

Legyen $s = u + ct$

$$c\Phi(u) = \int_u^{u+ca} \lambda e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)} \int_0^s f_1(x)\Phi(s-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_{u+ca}^{\infty} \lambda e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)} \int_0^s f_2(x)\Phi(s-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s. \tag{3.2}$$

Vegyük mind két oldal u szerinti deriváltját, ekkor kapjuk

$$\begin{aligned}c\frac{d\Phi(u)}{du} = \lambda e^{-\lambda a} &\int_0^{u+ac} f_1(x)\Phi(u+ca-x)\,\mathrm{d}x - \lambda \int_0^u f_1(x)\Phi(u-x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{\lambda}{c}\int_u^{u+ca} \lambda e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)} \int_0^s f_1(x)\Phi(s-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ &- \lambda e^{-\lambda a}\int_0^{u+ca} f_2(x)\Phi(u+ca-x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{\lambda}{c}\int_{u+ca}^{\infty} \lambda e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)} \int_0^s f_2(x)\Phi(s-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Behelyettesítve (3.2)-t a fenti egyenletbe

$$\begin{aligned}c\frac{d\Phi(u)}{du} &= \lambda e^{-\lambda a}\int_0^{u+ca} [f_1(x) - f_2(x)]\Phi(u+ca-x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \lambda \int_0^u f_1(x)\Phi(u-x)\,\mathrm{d}x + \lambda\Phi(u).\end{aligned}$$

Átrendezve megkapjuk a tétel állítását. □

A csődvalószínűségre, azaz $\Psi(u)$-ra igaz a következő tétel:

4. Tétel. *A csődvalószínűség kielégíti a következő integrálegyenletet:*

$$\begin{aligned}c\Psi(u) = \lambda &\left(\int_u^{\infty} \overline{F}_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^u \Psi(u-x)\overline{F}_1(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &+ \lambda e^{-\lambda a}\Big(\int_{u+ca}^{\infty} [\overline{F}_2(x) - \overline{F}_1(x)]\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^{u+ca} \Psi(u+ca-x)[\overline{F}_2(x) - \overline{F}_1(x)]\,\mathrm{d}x\Big),\end{aligned} \tag{3.3}$$

ahol $\overline{F}_1$ *és* $\overline{F}_2$ *az* F_1 *és az* F_2 *farok eloszlását jelöli.*

Bizonyítás. A (3.1) mindkét oldalát 0-tól u-ig integrálva

$$\begin{aligned}
c[\Phi(u) - \Phi(0)] - \lambda \int_0^u \Phi(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \lambda e^{-\lambda a} \int_0^u \int_0^{y+ca} [f_1(x) - f_2(x)]\Phi(y + ca - x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\quad - \lambda \int_0^u \int_0^y f_1(x)\Phi(u - x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda e^{-\lambda a} \Bigg\{ \int_0^{u+ca} \int_{ca}^{u+ca} [f_1(y - x) - f_2(y - x)]\Phi(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{ca}^{u+ca} \int_{ca}^{x} [f_1(x) - f_2(x)]\Phi(y - x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \Bigg\} \\
&\quad - \lambda \int_0^u \int_x^u f_1(x)\Phi(y - x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda e^{-\lambda a} \int_0^{u+ca} \Phi(x) \Bigg\{ [F_1(u + ca - x) - F_1(ca - x)] \\
&\quad - [F_2(u + ca - x) - F_2(ca - x)] \Bigg\}\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \lambda \int_0^u \int_0^{u-y} f_1(x)\Phi(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Ezért,

$$\begin{aligned}
c[\Phi(u) - \Phi(0)] = \lambda \int_0^u \Phi(x)\overline{F_1}(u - x)\,\mathrm{d}x \\
+ \lambda e^{-\lambda a} \int_0^{u+ac} \Phi(u + ca - x)[F_1(x) - F_2(x)]\,\mathrm{d}x \\
- \lambda e^{-\lambda a} \int_0^{ca} [F_1(x) - F_2(x)]\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$u \to \infty$ esetén,

$$c[1 - \Phi(0)] = \lambda\mu_1 + \lambda e^{-\lambda a}(\mu_2 - \mu_1) - \lambda e^{-\lambda a} \int_0^{ca} \Phi(ca - x)[F_1(x) - F_2(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\Phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c} - \frac{\lambda e^{-\lambda a}}{c}(\mu_2 - \mu_1) \\
- \frac{\lambda e^{-\lambda a}}{c} \int_0^{ca} \Phi(ca - x)[F_1(x) - F_2(x)]\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Behelyettesítve ezt az egyenletet a (3.4)-be és a $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ használva kész a bizonyítás. □

Általában nem kapható explicit megoldás a csődvalószínűségre, azonban számos úton kaphatunk becslést. A következőkben belátunk egy felső korlátot és bemutatunk egy szimulációs módszert. Mivel az illeszkedési együtthatónak fontos szerepe van így először ennél a modellnél is azt vezetjük be.

A klasszikus módszerhez hasonlóan a következőt kapjuk:

5. Tétel (Illeszkedési együttható)**.** *Tegyük fel, hogy mind* $M_1(r) = \int_0^\infty e^{rx} f_1(x)\,\mathrm{d}x$ *és* $M_2(r) = \int_0^\infty e^{rx} f_2(x)\,\mathrm{d}x$ *létezik, továbbá léteznek* $r_\infty^1, r_\infty^2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *úgy, hogy* $M_i(r) < \infty$*, ha* $r < r_\infty^i$ *és* $\lim_{r \to r_\infty^i} M_i(r) = \infty$*,* $i = 1{,}2$*. Ekkor létezik egy egyedi pozitív szám* $R > 0$ *úgy, hogy* $E\left[e^{R(X-cT)}\right] = 1$*. Ezt az* R*-et illeszkedési együtthatónak nevezzük.*

Hasonlóan a klasszikus modellhez az illeszkedési együttható segítségével itt is megkaphatjuk a Lundberg-egyenlőtlenséget.

6. Tétel (Lundberg-egyenlőtlenség)**.**

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}, \tag{3.5}$$

ahol $u > 0$ *a kezdőtőke és* R *a* (5) *tételben definiált illeszkedési együttható.*

Bizonyítás. Legyen S egy véletlen bolyongás független, azonos eloszlású növekménnyel $Y = X - cT$-vel, ahol T a csőd bekövetkezésének ideje. Ekkor mértékcserét hajtunk végre, és definiáljuk az új valószínűségi mértéket, $P_L(A) = E[e^{RS_n}; A]$, $A \in \in \mathcal{F}_n$. Ekkor kapjuk, hogy $\Psi(u) = E_L[e^{-RS_{\tilde{T}}}]$, ahol $\tilde{T}$ a csőd ideje. Így

$$\Psi(u) = E_L[e^{-RS_{\tilde{T}}}] = e^{-Ru} E_L[e^{-R\xi(u)}] \leq e^{-Ru},$$

ahol $\xi(u)$ az első küszöböt meghaladó összeg. □

Sőt a fenti bizonyításból, hasonlóan a klasszikus modellhez láthatjuk, hogy $\Psi(u) = = E_L\left[e^{-RS_{\tilde{T}}}\right]$-t használva egy szimulációs algoritmust kapunk a csődvalószínűség előállítására.

3.2. A kárkifizetés nagyságának exponenciális eloszlása

Tegyük fel, hogy F_1 és F_2 exponenciális eloszlások, azaz $F_1(x) = 1 - e^{-\beta_1 x}$ és $F_2(x) = 1 - e^{-\beta_2 x}$. Ekkor megmutatjuk, hogy a csődvalószínűség az $(u + ca)$ helyen kielégíti a másodrendű lineáris differenciálegyenletet. Ezt a harmadrendű differenciálegyenlet következményeként fogjuk megkapni, így először arra vonatkozón bizonyítunk egy tételt.

7. Tétel. *$\Psi(u)$ az $(u+ca)$ helyen kielégíti a következő harmadrendű differenciál-egyenletet:*

$$c\frac{d^3\Psi(u)}{du^3} + (c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda)\frac{d^2\Psi(u)}{du^2} + \beta_2(c\beta_1 - \lambda)\frac{d\Psi(u)}{du} - \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)\frac{d\Psi(u+ca)}{du} = 0. \quad (3.6)$$

Bizonyítás. A (3.1) egyenlet alapján

$$c\frac{d\Phi(u)}{du} - \lambda\Phi(u) = \lambda e^{-\lambda a}\int_0^{u+ca}[\beta_1 e^{-\beta_1 x} - \beta_2 e^{-\beta_2 x}]\Phi(u+ca-x)\,\mathrm{d}x - \lambda\int_0^u \beta_1 e^{-\beta_1 x}\Phi(u-x)\,\mathrm{d}x.$$

Mindkét oldalt u szerint deriválva majd behelyettesítve a (3.1)-t,

$$c\frac{d^2\Phi(u)}{du^2} - \lambda\frac{d\Phi(u)}{du} = \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)\Phi(u+ac) - \lambda\beta_1\Phi(u) - \beta_1\left(c\frac{d\Phi(u)}{du} - \lambda\Phi(u)\right) + \lambda e^{-\lambda a}(\beta_2 - \beta_1)\int_0^{u+ca}\beta_2 e^{-\beta_2(u+ca-x)}\Phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Átrendezés után

$$c\frac{d^2\Phi(u)}{du^2} + (c\beta_1 - \lambda)\frac{d\Phi(u)}{du} - \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)\Phi(u+ac) = \lambda e^{-\lambda a}(\beta_2 - \beta_1)\int_0^{u+ca}\beta_2 e^{-\beta_2(u+ca-x)}\Phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Legyen

$$h(u) = \lambda e^{-\lambda a}(\beta_2 - \beta_1)\int_0^{u+ca}\beta_2 e^{-\beta_2(u+ca-x)}\Phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ekkor

$$\frac{dh(u)}{du} = \lambda e^{-\lambda a}(\beta_2 - \beta_1)\beta_2\left[\Phi(u+ca) - \int_0^{u+ca}\beta_2 e^{-\beta_2(u+ca-x)}\Phi(x)\,\mathrm{d}x\right],$$

$$\frac{dh(u)}{du} = \lambda e^{-\lambda a}(\beta_2 - \beta_1)\beta_2\Phi(u+ca) - \beta_2 h(u)$$

$$\frac{dh(u)}{du} + \beta_2 h(u) = \lambda e^{-\lambda a}(\beta_2 - \beta_1)\beta_2\Phi(u+ca)\ (*).$$

Behelyettesítve a következő formulát a fenti $(*)$ egyenletbe

$$h(u) = c\frac{d^2\Phi(u)}{du^2} + (c\beta_1 - \lambda)\frac{d\Phi(u)}{du} - \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)\Phi(u+ca),$$

átrendezés után kapjuk, hogy

$$c\frac{d^3\Phi(u)}{du^3} + (c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda)\frac{d^2\Phi(u)}{du^2} + \beta_2(c\beta_1 - \lambda)\frac{d\Phi(u)}{du} - \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)\frac{d\Phi(u+ca)}{du} = 0.$$

Az utóbbi egyenletbe felhasználva $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ megkapjuk a tétel állítását. $\square$

3.2.1. Következmény. *A csődvalószínűség $\Psi(u)$ az $(u + ca)$ helyen kielégíti a következő másodrendű differenciálegyenletet:*

$$c\frac{d^2\Psi(u)}{du^2} + (c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda)\frac{d\Psi(u)}{du} + \beta_2(c\beta_1 - \lambda)\Psi(u) - \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)\Psi(u + ac) = 0. \quad (3.7)$$

Bizonyítás. Mivel $\Psi(\infty) = 0, \Psi'(\infty) = 0$ és $\Psi"(\infty) = 0$, a (3.6)-ot u-tól ∞-ig integrálva megkapjuk az állítást. □

8. Tétel. *Az előző* (3.7) *differenciálegyenlet megoldása:*

$$\Psi(u) = \sum_{i=1}^{n} p_i(u)e^{R_i u}, n \geq 1,$$

ahol $R_i \in \mathbb{C}$ a következő karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$cR^2 + (c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda)R + \beta_2(c\beta_1 - \lambda) - \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{Rca} = 0 \quad (3.8)$$

és $p_i(u)$ $(l - 1)$-ed fokú polinom u-ban, ha az R_i gyök multiplicitása l. Sőt n véges, ha a lehetséges gyökök a komplex tér valamely függőleges sávjára korlátozódnak.

Bizonyítás. A $\Psi(u + ca)$ Taylor-sora,

$$\Psi(u + ca) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ca)^k \Psi^{(k)}(u)}{k!}.$$

Behelyettesítve ezt a (3.7)-be

$$c\frac{d^2\Psi(u)}{du^2} + (c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda)\frac{d\Psi(u)}{du} + \beta_2(c\beta_1 - \lambda)\Psi(u) - \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ca)^k \Psi^{(k)}(u)}{k!} = 0.$$

Ekkor a vizsgált karakterisztikus egyenlet:

$$cR^2 + (c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda)R + \beta_2(c\beta_1 - \lambda) - \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ca)^k R^k}{k!} = 0$$

vagy ezzel ekvivalensen

$$cR^2 + (c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda)R + \beta_2(c\beta_1 - \lambda) - \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{Rca} = 0.$$

Mivel a 3.2.1-es következményből

$$h(R) = cR^2 + (c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda)R + \beta_2(c\beta_1 - \lambda) - \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{Rca},$$

így csak véges számú nullhelye van egy kompakt halmazban. Ez azt jelenti, hogy csak véges sok megoldás van a komplex tér egy függőleges sávjában. Továbbá a (3.7)-es egyenlet linearitása azt jelenti, hogy bármely véges összegű $u^k e^{R_i u}, k = 0,1,2,\ldots$ függvény esetén, ahol R_i a (3.8) egyenlet l-szeres gyöke, a (3.7) megoldása a (3.8)-nak. □

A fő probléma a másodrendű differenciálegyenlet $(u + ac)$ helyen vett megoldásának megtalálásával az, hogy a karakterisztikus egyenlet nem lineáris. Ez nagyon nehézzé, csaknem lehetetlenné teszi az összes gyök explicit meghatározását. De jelen esetben a karakterisztikus egyenlet megoldható, ezért ennek segítségével megpróbálunk a $\Psi(u)$ csődvalószínűségre analitikus kifejezést adni.

3.2.1. Explicit megoldás

Először is fontos megjegyezni, hogy mivel $u \to \infty$, $\Psi(u) \to 0$, így nem szükséges azzal az esettel foglalkozni amikor R_i gyökök a nem negatív valós részbe esnek. Most megmutatjuk, hogy a (3.8) karakterisztikus egyenletnek mindig létezik negatív valós gyöke.

3.2.1. Lemma. *A karakterisztikus egyenletnek mindig létezik* 2 *negatív valós gyöke.*

Bizonyítás. Legyen

$$\begin{aligned} g(x) &= cx^2 + (c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda)x + \beta_2(c\beta_1 - \lambda) \\ h(x) &= \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{cax}. \end{aligned}$$

Így (3.8) megoldása ekvivalens $g(x)$ és $h(x)$ zérus helyeinek megtalálásával. Ezt eset szétbontással tesszük meg.

1. eset: $\beta_1 > \beta_2$.

Ebben az esetben $\mu_1 < \mu_2$, ezért a nettó profit feltételből, $c > \lambda\mu_1$-ből következik, hogy mivel $\mu_1 = \frac{1}{\beta_1}$, így $c\beta_1 - \lambda > 0$. Ez azt jelenti, hogy $g(x) = (cx + c\beta_1 - \lambda)(x + \beta_2)$-nek 2 negatív valós gyöke van, ξ_1 és ξ_2. Mivel $h(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért $h(x) > g(x)$, ha $x \in [\xi_1, \xi_2]$. Továbbá szintén a nettó profit feltételből kapjuk, hogy

$$g(0) - h(0) = \beta_2(c\beta_1 - \lambda) - \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2) = \beta_1\beta_2(c - \lambda((1 - e^{-\lambda a})\mu_1 + e^{-\lambda a}\mu_2)) > 0.$$

Vegyük figyelembe, hogy $g(x) > h(x)$, ha $x \to -\infty$, akkor $g(x) - h(x)$ szigorúan monoton csökkenő a $x \in (-\infty, \xi_1]$-on és szigorúan monoton növekvő a $x \in (\xi_2, 0]$-on. Megmutattuk, hogy $g(x) - h(x) < 0$ amikor $x \in [\xi_1, \xi_2]$. Tehát világos, hogy a karakterisztikus egyenletnek 2 negatív valós gyöke van.

2. eset: $\beta_1 < \beta_2$

Most $h(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ha $g(x)$ a minimumában kisebb, mint $h(x)$, akkor kell lennie a $g(x) = h(x)$ egyenletnek 2 negatív valós gyökének. Ezt a következőből láthatjuk: a nettó profit feltételből $g(0) > h(0)$; mivel $x \to -\infty, g(x) > h(x)$; továbbá $g(x) - h(x)$ szigorúan monoton csökkenő, ha $x < \gamma$ és szigorúan monoton növekvő, ha

$x > \gamma$, ahol γ az egyetlen olyan pont, melyre $g'(x) = h'(x)$, azaz $g(x) - h(x)$ eléri a minimumát γ-ban. $g(x)$ minimum helye $\frac{\lambda - c\beta_1 - c\beta_2}{2c}$ és értéke:

$$g\left(\frac{\lambda - c\beta_1 - c\beta_2}{2c}\right) = \frac{-(\lambda - c\beta_1 - c\beta_2)^2}{4c}.$$

$h(x)$ értéke $\frac{\lambda - c\beta_1 - c\beta_2}{2c}$-ben:

$$h\left(\frac{\lambda - c\beta_1 - c\beta_2}{2c}\right) = \lambda(\beta_1 - \beta_2)e^{-\frac{a}{c}(\lambda + c\beta_1 + c\beta_2)}.$$

Legyen $r(a) = \frac{-(\lambda - c\beta_1 - c\beta_2)^2}{4c} - \lambda(\beta_1 - \beta_2)e^{-\frac{a}{c}(\lambda + c\beta_1 + c\beta_2)}$, ekkor

$$\begin{aligned} r(0) &= \frac{-(\lambda - c\beta_1 - c\beta_2)^2}{4c} - \lambda(\beta_1 - \beta_2) = \frac{-(\lambda - c\beta_1 - c\beta_2)^2}{4c} \leq 0, \\ r'(a) &= \frac{\lambda(\beta_1 - \beta_2)(\lambda + c\beta_1 + c\beta_2)}{c} e^{-\frac{a}{c}(\lambda + c\beta_1 + c\beta_2)} < 0, \end{aligned}$$

minden $a \in \mathbb{R}^+$ esetén. Mivel $a \to \infty$, ezért $r(a) \to \frac{-(\lambda + c\beta_1 + c\beta_2)^2}{4c} < 0$. Ez azt jelenti, hogy $r(a) < 0, \forall a \in \mathbb{R}^+$. Tehát megmutattuk, hogy $g(x)$ a minimumhelyén mindig kisebb, mint $h(x)$. Mivel $g(x) - h(x) < 0$ a minimumhelyén γ, így a $g(x) = h(x)$ egyenletnek 2 negatív valós gyöke va.

□

Most belátjuk, hogy ha a (3.8)-as karakterisztikus egyenletnek léteznek többszörös gyökei, akkor azok valósak.

3.2.2. Lemma. *Ha van többszörös gyöke a* (3.8)*-as karakterisztikus egyenletnek, akkor az teljesíti a következő feltételeket:*

$$\begin{cases} 2A + \sqrt{(B^2 - 4AC)k^2 + 4A^2} - Dk^2 e^{\frac{2A - Bk + \sqrt{(B^2 - 4AC)k^2 + 4A^2}}{2A}} = 0, & ha\ \beta_1 > \beta_2 \\ 2A - \sqrt{(B^2 - 4AC)k^2 + 4A^2} - Dk^2 e^{\frac{2A - Bk - \sqrt{(B^2 - 4AC)k^2 + 4A^2}}{2A}} = 0, & ha\ \beta_2 > \beta_1 \end{cases} \tag{3.9}$$

ahol $A = c$, $B = c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda$, $C = \beta_2(c\beta_1 - \lambda)$, $D = \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)$ *és* $k = ca$. *Sőt, ha a fenti feltétel teljesül, a 2 valós gyök ugyanaz és csak egyszeres.*

Bizonyítás. Legyen $f(x) = Ax^2 + Bx + C - De^{kx}$ és $g(x) = Ax^2 + Bx + C$, ahol A, B, C, k fent definiáltak. Mivel $g(x)$-et felbonthatjuk a következőképp $g(x) = (cx + c\beta_1 - \lambda)(x + \beta_2)$, így minden gyöke valós. Ez azt jelenti, hogy $B^2 - 4AC \geq 0$. Ha r többszörös gyök, teljesítenie kell a következő szimultán egyenletrendszert:

$$\begin{matrix} f(r)=0 \\ f'(r)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} Ar^2+Br+C-De^{kr}=0 \\ 2Ar+B-Dke^{kr}=0 \end{matrix}$$

Ezért,

$$Akr^2+(Bk-2A)r+(Ck-B)=0. \tag{3.10}$$

Az előző másodfokú egyenlet determinánsa

$$(Bk-2A)^2-4(Ak)(Ck-B)=(B^2-4AC)k^2+4A^2>0.$$

Tehát r-nek valósnak kell lennie. A (3.10) megoldása

$$r=\frac{2A-Bk\pm\sqrt{(B^2-4AC)k^2+4A^2}}{2Ak}.$$

Az előző lemma bizonyításából, ha $\beta_1>\beta_2$, akkor a karakterisztikus egyenlet gyökei kívül esnek a

$$\left[\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A},\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right] \text{ halmazon.}$$

Így

$$r=\frac{2A-Bk+\sqrt{(B^2-4AC)k^2+4A^2}}{2Ak}$$

az egyetlen lehetséges kétszeres gyök. Behelyettesítve ezt a $2Ar+B-Dke^{kr}=0$ egyenletbe kapjuk, hogy

$$2A\left(\frac{2A-Bk+\sqrt{(B^2-4AC)k^2+4A^2}}{2Ak}\right)+B \\ -Dke^{k\left(\frac{2A-Bk+\sqrt{(B^2-4AC)k^2+4A^2}}{2Ak}\right)}=0,$$

vagy

$$2A+\sqrt{(B^2-4AC)k^2+4A^2}-Dk^2e^{k\left(\frac{2A-Bk+\sqrt{(B^2-4AC)k^2+4A^2}}{2Ak}\right)}=0.$$

Ez lesz a kétszeres gyök létezésének feltétele a $\beta_1>\beta_2$ mellett. A bizonyítás hasonló a másik, $\beta_2<\beta_1$ esetben. □

Tehát azt kaptuk, hogy nem lehetséges, hogy egy gyök multiplicitása nagyobb legyen, mint 2, mert az előző bizonyításban lévő (3.10) másodfokú egyenletnek nincs kétszeres gyöke. Azonban a valós gyökök mellett a karakterisztikus egyenletnek lehet néhány komplex gyöke is. Ezért nézzük meg, hogyan tudjuk leszűkíteni a lehetséges komplex gyökök tartományát.

3.2.3. Lemma. *Ha R_i a karakterisztikus egyenlet komplex gyöke, akkor R_i eleme a következő halmaznak:*

1. *eset:* $\beta_1 > \beta_2$

$$\left\{ r = p + qi : p \in (\gamma_1, \delta_1) \cup (\delta_2, \gamma_2), q = \pm\sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}} \right\}.$$

Különben

$$\left\{ r = p + qi : p \in (\gamma_1, \gamma_2), q = \pm\sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}} \right\}$$

2. *eset:* $\beta_2 > \beta_1$

$$\left\{ r = p + qi : p \in (\delta_1, \gamma_1) \cup (\gamma_2, \min(\delta_2, 0)), q = \pm\sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}} \right\}$$

ahol,

$$B = (p + \beta_2)^2 + \left(p + \left(\beta_1 - \frac{\lambda}{c}\right)\right)^2,$$
$$C = (p + \beta_2)^2 \left(p + \left(\beta_1 - \frac{\lambda}{c}\right)\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 e^{-2\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)^2 e^{2cap},$$

γ_1 és γ_2 két negatív valós gyöke a $g(x) - h(x) = 0$ egyenletnek, δ_1 és δ_2 pedig a $g(x) + h(x) = 0$ egyenlet két negatív valós gyöke, ahol

$$g(x) = (x + \beta_2)\left(x + \left(\beta_1 - \frac{\lambda}{c}\right)\right)$$
$$h(x) = \left(\frac{\lambda}{c}\right) e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{cax}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $R = p + qi \in \mathbb{C} : p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a (3.8) egy komplex gyöke. Mivel a karakterisztikus egyenlet egy valós analitikus függvény, ezért a komplex gyökök konjugáltja is megoldása a karakterisztikus egyenletnek. Legyen R a komplex gyök és $\overline{R}$ a konjugáltja. Behelyettesítve R-et és $\overline{R}$-t a (3.8)-ba, a következő egyenletrendszert kapjuk

$$\begin{cases} cR^2 + (c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda)R + \beta_2(c\beta_1 - \lambda) = \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{Rca} \\ c\overline{R}^2 + (c\beta_1 + c\beta_2 - \lambda)\overline{R} + \beta_2(c\beta_1 - \lambda) = \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{\overline{R}ca}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Szorzattá alakítva a bal oldalt

$$\begin{cases}(cR + c\beta_1 - \lambda)(R + \beta_2) = \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{Rca}\\(c\overline{R} + c\beta_1 - \lambda)(\overline{R} + \beta_2) = \lambda e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{\overline{R}ca}.\end{cases}$$

Összeszorozva az első egyenletet a (3.11) második egyenletével

$$\begin{aligned}(|R|^2 + \beta_2(R + \overline{R}) + \beta_2^2) \times (c^2|R|^2 + c(c\beta_1 - \lambda)(R + \overline{R}) + (c\beta_1 - \lambda)^2)\\= \lambda^2 e^{-2\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)^2 e^{ca(R+\overline{R})}.\end{aligned}$$

$R = p + qi$-t használva

$$\begin{aligned}(p^2 + q^2 + \beta_2 p + \beta_2^2) \times (c^2(p^2 + q^2) + c(c\beta_1 - \lambda)p + (c\beta_1 - \lambda)^2) =\\= \lambda^2 e^{-2\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)^2 e^{2cap}.\end{aligned}$$

Ekkor

$$q^4 + Bq^2 + C = 0 \tag{3.12}$$

ahol

$$\begin{aligned}B &= (p + \beta_2)^2 + \left(p + \left(\beta_1 - \frac{\lambda}{c}\right)\right)^2,\\C &= (p + \beta_2)^2 \left(p + \left(\beta_1 - \frac{\lambda}{c}\right)\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 e^{-2\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)^2 e^{2cap}.\end{aligned}$$

Így a (3.12) másodfokú egyenlet a q^2-re nézve. A másodfokú egyenletek megoldására vonatkozó ismeretek alapján, mivel $B > 0$, ezért lehetetlen, hogy minden gyök nagyobb legyen, mint 0. Tehát kell, hogy $C < 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$(p + \beta_2)^2 \left(p + \left(\beta_1 - \frac{\lambda}{c}\right)\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 e^{-2\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)^2 e^{2cap} < 0.$$

Innen

$$\begin{cases}(p + \beta_2)\left(p + \left(\beta_1 - \frac{\lambda}{c}\right)\right) + \left(\frac{\lambda}{c}\right) e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{cap} > 0\\(p + \beta_2)\left(p + \left(\beta_1 - \frac{\lambda}{c}\right)\right) - \left(\frac{\lambda}{c}\right) e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{cap} < 0\end{cases} \tag{3.13}$$

vagy

$$\begin{cases}(p + \beta_2)\left(p + \left(\beta_1 - \frac{\lambda}{c}\right)\right) + \left(\frac{\lambda}{c}\right) e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{cap} < 0\\(p + \beta_2)\left(p + \left(\beta_1 - \frac{\lambda}{c}\right)\right) - \left(\frac{\lambda}{c}\right) e^{-\lambda a}(\beta_1 - \beta_2)e^{cap} > 0.\end{cases} \tag{3.14}$$

Most oldjuk meg a problémát két esetre szétbontva:
1. eset: $\beta_1 > \beta_2$
Legyen

$$g(p) = (p+\beta_2)\left(p+\left(\beta_1-\frac{\lambda}{c}\right)\right),$$
$$h(p) = \left(\frac{\lambda}{c}\right)e^{-\lambda a}(\beta_1-\beta_2)e^{cap}$$

és γ_1 valamint γ_2 jelölje a $g(p) = h(p)$ egyenlet 2 negatív valós gyökét úgy, hogy $\gamma_1 <$ $< \gamma_2$. A 3.1.1-es lemma bizonyításából láttuk, hogy $g(p) > h(p) > 0, \forall p \in (-\infty, \gamma_1) \cup$ $\cup (\gamma_2, 0)$. Így a (3.14)-et elutasítottuk, tehát a (3.13) az egyetlen lehetséges megoldás, azaz $p \in (\gamma_1, \gamma_2)$. Mivel $g(p)$ szigorúan monoton csökken pozitívból negatívba a minimumáig, majd szigorúan növekszik pozitívba ismét mialatt p γ_1-ből γ_2-höz tart és $h(p)$ mindig pozitív, így a $g(p) + h(p) = 0$ egyenletnek, vagy a $g(p) > h(p)$ egyenlőtlenségnek,$\forall p \leq 0$ van két gyöke. Legyen δ_1 és δ_2 ez a két gyök, ha léteznek akkor $\delta_1 \leq \delta_2$. Ekkor $R = p + qi$ a komplex gyökök lehetséges tartománya, ahol $p \in (\gamma_1, \delta_1) \cup (\delta_2, \gamma_2)$, ha a $g(p) + h(p) = 0$ gyökei léteznek és $p \in (\gamma_1, \gamma_2)$ különben, valamint $q = \pm\sqrt{\frac{-B+\sqrt{B^2-4C}}{2}}$, ahol B és C fent definiált.
A bizonyítás hasonló a másik esetben, amikor $\beta_1 < \beta_2$. □

Az utolsó lépésként annak bizonyításához, hogy a (3.8)-nak két különböző negatív valós gyöke van és nincs komplex gyöke, a Rouché tételt használjuk.

9. Tétel. *A csődvalószínűség azon feltételei mellett, hogy $\Psi \in \mathcal{C}([0,\infty],[0,1])$ és $\Psi'(u) < 0, \forall u \geq 0$ a (3.7) másodfokú differenciálegyenlet megoldásának az $(u + ac)$ helyen nincs oszcilláló feltétele, azaz a karakterisztikus egyenletnek nincs komplex gyöke. Továbbá a két különböző negatív gyök egyszeres, azaz a (3.9)-es feltétel nem teljesül.*

Bizonyítás. Mivel $g(x)$ másodfokú függvény és $h(x)$ exponenciális, mindig tudunk találni egy zárt körvonalat a bal fél térben úgy, hogy $|g(x)| > |h(x)|$. Mivel $g(x)$-nek csak két gyöke van a bal fél térben, Rouché-tétele szerint, $g(x) - h(x)$-nek szintén csak 2 gyöke van a bal fél térben. És a (3.2.1) lemma azt mutatja meg, hogy mindig van 2 különböző negatív valós gyök. □

Tehát a (3.7)-es másodfokú egyenlet megoldása:

$$\Psi(u) = \overline{A}e^{R_1 u} + \overline{B}e^{R_2 u}, \tag{3.15}$$

ahol $\overline{A}$ és $\overline{B}$ valamilyen valós konstansok, R_1 és R_2 a (3.8) karakterisztikus egyenlet 2 negatív valós gyöke.

Annak érdekében, hogy meghatározzuk az $\overline{A}$ és $\overline{B}$ konstansokat, helyettesítsük be (3.15)-t az (3.1)-be és a (3.3)-ba, legyen $u = 0$, ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\left\{\lambda - cR_1 + \lambda e^{-\lambda a} e^{R_1 ca}\left[\frac{\beta_1\left(1 - e^{-(R_1+\beta_1)ca}\right)}{R_1+\beta_1} - \frac{\beta_2\left(1 - e^{-(R_1+\beta_2)ca}\right)}{R_1+\beta_2}\right]\right\}\overline{A} + \\
&+\left\{\lambda - cR_2 + \lambda e^{-\lambda a} e^{R_2 ca}\left[\frac{\beta_1\left(1 - e^{-(R_2+\beta_1)ca}\right)}{R_2+\beta_1} - \frac{\beta_2\left(1 - e^{-(R_2+\beta_2)ca}\right)}{R_2+\beta_2}\right]\right\}\overline{B} = \\
&= \lambda + \lambda e^{-\lambda a}\left(e^{-\beta_2 ca} - e^{-\beta_1 ca}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[c - \lambda e^{-\lambda a} e^{R_1 ca}\left(\frac{1 - e^{-(R_1+\beta_2)ca}}{R_1+\beta_2} - \frac{1 - e^{-(R_1+\beta_1)ca}}{R_1+\beta_1}\right)\right]\overline{A} + \\
&+\left[c - \lambda e^{-\lambda a} e^{R_2 ca}\left(\frac{1 - e^{-(R_2+\beta_2)ca}}{R_2+\beta_2} - \frac{1 - e^{-(R_2+\beta_1)ca}}{R_2+\beta_1}\right)\right]\overline{B} = \\
&= \lambda\mu_1 + \lambda e^{-\lambda a}\left(\frac{e^{-\beta_2 ca}}{\beta_2} - \frac{e^{-\beta_1 ca}}{\beta_1}\right). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Megoldva ezt a két ismeretlenes egyenletrendszert, megkapjuk az $\overline{A}$ és a $\overline{B}$ konstansokat. Így kaptunk egy explicit formulát a csődvalószínűség meghatározására.

4. fejezet

Összetett geometria eloszlás alkalmazása csődvalószínűség becslésére

Ebben a fejezetben azt az esetet vizsgáljuk a [1] könyv alapján, amikor a kárkifizetések számának eloszlása geometriai eloszlást követ.

4.1. Összetett geometriai eloszlás

Most a következő jelöléseket használjuk: N továbbra is a kárkifizetések számát jelölő valószínűségi változó, eloszlása $\{p_n = P(N = n); n = 0,1,2,\ldots\}$, farok eloszlása $a_n = P(N > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k$, $n = 0,1,2,\ldots$, generátorfüggvénye $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$, $|z| < z_0$, általános generátorfüggvénye $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1-P(z)}{1-z}, |z| < z_0$, ahol $z_0 \geq 1$ a $P(z)$ konvergencia sugara. Továbbá most $\{X_1, X_2, \ldots\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók jelölik a kárkifizetések nagyságát, melyek N-től is függetlenek. X_i-k közös eloszlásfüggvénye $F(x) = P(X \leq x), x \geq 0$, valamint $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ a farok eloszlása. Legyen $F^{*n}(x) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq x)$ $n = 1,2,\ldots$ az n-edik konvolúció hatvány, így $\overline{F}^{*n}(x) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n > x)$. $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ ($S = 0$, ha $N = 0$) egy véletlen tagszámú összeg, az összkár kifizetés. Ennek eloszlásfüggvénye $G(x) = P(S_N \leq x)$ egy összetett eloszlás.

Ezen jelölések bevezetése után, először tekintsük az összetett kockázati modellt. Legyen

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x), x \geq 0, \tag{4.1}$$

ahol $F^{*0}(x) = 1$, így

$$\overline{G}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \overline{F}^{*n}(x), x \geq 0. \tag{4.2}$$

Általában az összkár kifizetés farok eloszlásának, azaz $\overline{G}(x)$-nek becslése a konvolúció miatt nehéz. Egyik megközelítés a farok eloszlás azonosítására S_N Laplace transzformáltjának, azaz

$$E(e^{-sS_N}) = P\left\{E(e^{-sX})\right\} \tag{4.3}$$

segítségével történik, ahol $P\{z\}$ az S_N generátorfüggvénye.

Tekintsük az (a, b) osztályba tartozó[1] geometriai eloszlás egy olyan speciális esetét, ahol $0 \leqslant p_0 < 1$ és

$$p_0 = (1 - p_0)(1 - q)q^{n-1}; n = 1{,}2{,}3, \ldots, \tag{4.4}$$

$0 < q < 1$. Ekkor $\{p_n; n = 0{,}1{,}2, \ldots\}$, azaz a kárkifizetések számának eloszlása egy módosított geometriai eloszlás. Ebben az esetben N farok eloszlása

$$a_n = P(N > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = (1 - p_0)q^n; n = 0{,}1{,}2, \ldots, \tag{4.5}$$

melyből most azt kapjuk, hogy

$$a_{n+1} = qa_n; n = 0{,}1{,}2, \ldots. \tag{4.6}$$

Mivel igaz az, hogy $a_{n+1} \leq qa_n$ és az is, hogy $a_{n+1} \geq qa_n$, így az összkár kifizetés farok eloszlásának korlátait, $\overline{G}(x)$, egy olyan $B(x)$ eloszlás segítségével határozzuk meg (ennek farok eloszlását a szokásos módon $\overline{B}(x) = 1 - B(x)$ jelöli), amely kielégíti a következőt

$$\int_0^{\infty} \{\overline{B}(x)\}^{-1} \, \mathrm{d}F(x) = \frac{1}{q}. \tag{4.7}$$

A (4.4) eloszlás egy egyedülálló és hasznos tulajdonsága, hogy ha $B(x)$ exponenciális, akkor egyszerű alsó és felső korlátok kaphatók $\overline{G}(x)$-re. Tehát legyen $\overline{B}(x) = e^{Rx}$, ahol $R > 0$ az illeszkedési együttható, melyre a következő egyenlet teljesül:

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} \, \mathrm{d}F(x) = \frac{1}{q}. \tag{4.8}$$

[1] (a, b) osztályba, azok az eloszlások tartoznak, melyek esetén a $p_n = P(N = n)$-re igaz a következő: $p_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) p_n$, ahol N a kárkifizetések számát jelöli, a és b pedig konstansok. Geometriai eloszlás esetén: $p_n = (1 - q)q^n; n = 0{,}1{,}2, \ldots; 0 < q < 1; a = q, b = 0$.

Ekkor $\overline{G}(x)$ felső és alsó korlátait $\alpha_1(x)$ és $\alpha_2(x)$ segítségével fejezhetjük ki, ahol

$$\frac{1}{\alpha_1(x)} = \inf_{0\le z\le x, \overline{F}(z)>0} \frac{\int_z^\infty e^{Ry}\,\mathrm{d}F(y)}{e^{Rz}\overline{F}(z)}, x \ge 0 \tag{4.9}$$

és

$$\frac{1}{\alpha_2(x)} = \sup_{0\le z\le x, \overline{F}(z)>0} \frac{\int_z^\infty e^{Ry}\,\mathrm{d}F(y)}{e^{Rz}\overline{F}(z)}, x \ge 0. \tag{4.10}$$

A következő általános korlátot sok különböző módón megkaphatjuk.

4.1.1. Következmény. *Ha p_n-re igaz a* (4.4)*-es egyenlet* $n = 1,2,3,\ldots$ *és* $0 < q < 1$ *esetén és* $R > 0$ *teljesíti a* (4.8)*-et, akkor*

$$\frac{1-p_0}{q}\alpha_2(x)e^{-Rx} \le \overline{G}(x) \le \frac{1-p_0}{q}\alpha_1(x)e^{-Rx}, x \ge 0, \tag{4.11}$$

ahol $\alpha_1(x)$ *és* $\alpha_2(x)$ *a* (4.9) *és* (4.10) *szerint definiált.*

Nyilvánvaló, hogy (4.11) meglehetősen pontos közelítést ad az $e^{Rx}\overline{G}(x)$ értékére. Ha ezt kiegészítjük azzal a feltevéssel, hogy $F(y)$ nem aritmetikai, akkor

$$\lim_{x\to\infty} e^{Rx}\overline{G}(x) = \frac{(1-p_0)(1-q)}{Rq^2\int_0^\infty ye^{Ry}\,\mathrm{d}F(y)}. \tag{4.12}$$

Az alábbi következményben leírt korlátok viszont nem kívánnak semmilyen megkötést az $F(y)$ eloszlásfüggvényre.

4.1.2. Következmény. *Ha p_n-re igaz a* (4.4)*-es egyenletet minden* $n = 1,2,3,\ldots$, $0 < q < 1$ *esetén, valamint* $R > 0$*-ra teljesül a* (4.8)*-as, ekkor*

$$\frac{1-p_0}{q}\gamma(x)e^{-Rx} \le \overline{G}(x) \le \frac{1-p_0}{q}e^{-Rx}, x \ge 0, \tag{4.13}$$

ahol $\gamma(x) = \max\{q\overline{F}(x), e^{-Rm}\}, m = \inf\{x; F(x) = 1\}$.

Azokban az esetekben, ahol a hátralévő átlagos élettartam monoton, a következők bizonyíthatóak:

4.1.3. Következmény. *Tegyük fel, hogy p_n-re igaz a* (4.4)*-as egyenlet minden* $n = = 1,2,3,\ldots$, $0 < q < 1$ *esetén, valamint* $R > 0$*-ra teljesül a* (4.8)*-as. Ekkor ha* $F(y)$ *IMRL*[2]

$$\frac{(1-p_0)\overline{F}(x)}{q\int_x^\infty e^{Ry}\,\mathrm{d}F(y)} \le \overline{G}(x) \le (1-p_0)e^{-Rx}, x \ge 0. \tag{4.14}$$

[2] Increasing Mean Residual Lifetime (Növekvő átlagos hátralévő élettartam); $F(y)$ eloszlásfüggvény IMRL osztályba tartozik, ha $r(y) = \frac{\int_y^\infty \overline{F}(x)\,\mathrm{d}x}{\overline{F}(y)}$ nem csökkenő y-ban.

4.1.4. Következmény. *Tegyük fel, hogy p_n-re igaz a (4.4) egyenlet minden $n = 1,2,3,\ldots$, $0 < q < 1$ esetén, valamint $R > 0$-ra kielégíti a (4.8)-t. Ekkor ha $F(y)$ DMRL*[3] *$\overline{F}(x) > 0$-val*

$$(1-p_0)e^{Ry} \le \overline{G}(x) \le \frac{(1-p_0)\overline{F}(x)}{q\int_x^\infty e^{Ry}\,\mathrm{d}F(y)}, x \ge 0. \tag{4.15}$$

Abban az esetben, ha $F(y)$, azaz a kárkifizetések nagyságának közös eloszlásfüggvénye exponenciális eloszlásfüggvény, akkor az alsó és a felső korlátok a (4.1.3) és a (4.1.4) következmények esetén egybeesnek. Így ezek a korlátok egy pontos kifejezést adnak $\overline{G}(x)$-re.

Ha $F(y)$ átlagos hátralévő élettartama korlátos, akkor egyszerű korlátot kapunk.

4.1.5. Következmény. *Tegyük fel, hogy p_n-re teljesül a (4.4)-as egyenlet minden $n = 1,2,3,\ldots$, $0 < q < 1$ esetén, valamint $R > 0$-ra kielégíti a (4.8)-t. Ha az átlagos hátralévő élettartamra, azaz $r(y) = \frac{\int_y^\infty \overline{F}(x)\,\mathrm{d}x}{\overline{F}(y)}$-ra igaz, hogy $r_1 \le r(y) \le r_2$, $y \ge 0$ esetén, ahol $0 \le r_1 < \infty$ és $0 < r_2 < \infty$, akkor*

$$\frac{(1-p_0)(1-Rr_2)}{q}e^{-Rx} \le \overline{G}(x) \le \frac{(1-p_0)(1-Rr_1)}{q}e^{-Rx}, x \ge 0. \tag{4.16}$$

Továbbá $r_1 \le r(y) \le r_2$-re elégséges feltétel

$$\frac{1}{r_2} \le -\frac{d}{dy}ln\overline{F}(y) \le \frac{1}{r_1}. \tag{4.17}$$

Vegyük észre, hogy amikor $F(y) = 1 - e^{-\frac{y}{E(X)}}$, könnyen megkapható (4.8)-ből, hogy $R = \frac{1-q}{E(X)}$, és a (4.1.5) következményből $r_1 = r_2 = E(X)$-nal, hogy

$$\overline{G}(x) = (1-p_0)e^{-\frac{1-q}{E(X)}x}, x \ge 0. \tag{4.18}$$

Hasonlóan, abban az esetben ha $\frac{\overline{F}(x)}{q\int_x^\infty e^{Ry}\,\mathrm{d}F(y)} = e^{-Rx}$, és így a (4.1.3) és (4.1.4) következményekben az egyenlőtlenségek mindkét oldala (4.18)-re egyszerűsödik. Ez azt jelenti, hogy a (4.1.3),(4.1.4) és (4.1.5) következményekben a korlátok élesek.

A (4.1.1) következményben szereplő általános korlátot gyakran lehet finomítani. A (4.9) kifejezésből láthatjuk, hogy $\alpha_1(x)$ nem csökkenő függvény, amely kielégíti ($z = x$ esetén) az

$$\overline{F}(x) \le \alpha_1(x)e^{-Rx}\int_x^\infty e^{Ry}\,\mathrm{d}F(y), x \ge 0 \tag{4.19}$$

[3] Decreasing Mean Residual Lifetime (Csökkenő átlagos hátralévő élettartam);$F(y)$ eloszlásfüggvény DMRL osztályba tartozik, ha $r(y) = \frac{\int_y^\infty \overline{F}(x)\,\mathrm{d}x}{\overline{F}(y)}$ nem növekvő y-ban.

egyenlőtlenséget.

Hasonlóan, (4.10)-ből következik, hogy $\alpha_2(x)$ nem növekvő és teljesíti az

$$\overline{F}(x) \geq \alpha_2(x)e^{-Rx}\int_x^\infty e^{Ry}\,\mathrm{d}F(y), x \geq 0 \tag{4.20}$$

egyenlőtlenséget.

A következő tétel alapvetően Wu-tól (1996) származik.

10. Tétel. *Tegyük fel, hogy p_n-re igaz a* (4.4)*-es egyenlet minden $n = 1,2,3,\ldots$, és $0 < q < 1$ esetén, valamint $R > 0$-ra kielégíti a* (4.8)*-t, ekkor $x \geq 0$ esetén*

$$\overline{G}(x) \leq \frac{1-p_0}{q}\alpha_1(x)e^{-Rx} - (1-p_0)\left\{\alpha_1(x)e^{-Rx}\int_x^\infty e^{Ry}\,\mathrm{d}F(y) - \overline{F}(x)\right\}, \tag{4.21}$$

és

$$\overline{G}(x) \geq \frac{1-p_0}{q}\alpha_2(x)e^{-Rx} + (1-p_0)\left\{\overline{F}(x) - \alpha_2(x)e^{-Rx}\int_x^\infty e^{Ry}\,\mathrm{d}F(y)\right\}. \tag{4.22}$$

Finomítások a (4.1.2)-(4.1.5)-ös következményekre, valamint nem exponenciális korlátok hasonló módon megkaphatók.

4.1.6. Következmény. *Tegyük fel, hogy p_n-re igaz a* (4.4)*-es egyenlet $n = 1,2,3,\ldots$, valamint $0 < q < 1$ esetén. Ekkor ha $E(X) = \int_0^\infty y\,\mathrm{d}F(y) < \infty$,*

$$\overline{G}(x) \leq \frac{E(S_N)}{x + \frac{q}{1-p_0}E(S_N)}, x \geq 0, \tag{4.23}$$

ahol $E(S_N) = E(X)E(N) = E(X)(1-p_0)\frac{1}{1-q}$.

Világos, hogy (4.23) finomítása a $\overline{G}(x) \leq \frac{E(S_N)}{x}$-nek. Így, ha $p_0 \geq 1-q$, akkor (4.23) a következő finomítása

$$\overline{G}(x) \leq \frac{E(S_N)}{x + E(S_N)}, x \geq 0. \tag{4.24}$$

További finomításokat találunk Cai és Garrido (1998) munkájában. A következő eredmények alapvetően Lin(1996) valamint Cai és Wu (1997) nevéhez köthetők.

11. Tétel. *Feltéve, hogy $a_n \leq (\geq) Kq^n$ $n = 1,2,3,\ldots$, ahol $q \in (0,1)$. Ekkor*

$$\overline{G}(x) \leq (\geq)\frac{K}{q}H_q(x) - (K - a_0)\overline{F}(x) \tag{4.25}$$

ahol

$$H_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-q)q^n\overline{F}^{*n}(x) \tag{4.26}$$

egy összetett geometriai eloszlás farok eloszlása.

Ha $K = a_0$, következik, hogy

$$\overline{G}(x) \leq (\geq) \frac{1-p_0}{q} H_q(x), x \geq 0.$$

Most nézzünk egy egyszerű becslési eljárást arra az esetre, amikor $F(y)$ gamma eloszlások keverésének eloszlásfüggvénye.

Kevert Gamma-eloszlás

Legyen a kevert Gamma-eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} l_k \frac{\beta(\beta x)^{k-1} e^{-\beta x}}{(k-1)!}, \tag{4.27}$$

ahol $\{l_1, l_2, \ldots, l_r\}$ maga is eloszlás. Legyen $Q(z) = \sum_{k=1}^{r} l_k z^k$, ekkor (4.27)-ből $E(e^{-sX}) = Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)$. Ekkor (4.3)-ból következik, hogy

$$E(e^{-sS_N}) = P\left(E(e^{-sZ})\right) = P\left(Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\sum_{k=1}^{r} l_k \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^k\right)^n,$$

Ebből világos, hogy a S_N véletlen tagszámú összeg. Ekkor (4.2)-ban legyen most $\overline{F}(y)$ a Gamma eloszlás farok eloszlása, azaz

$$\overline{F}(x) = e^{-\beta x} \sum_{k=1}^{r} l_k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}, y \geq 0.$$

Tehát kapjuk, hogy

$$\overline{G}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{-\beta x} \sum_{k=1}^{r} l_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\beta x)^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sum_{k=1}^{r} l_k e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}.$$

Legyen $c_n(z) = p_n \sum_{k=1}^{r} l_k z$. Ekkor $\overline{G}(x)$ felírható a következő alakban

$$\overline{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}\right).$$

Legyen továbbá $\overline{C}_j(z) = \sum_{n=j+1}^{\infty} c_n(z)$ valamint $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = P(Q(z))$. Mivel $e^{-\beta x}$ kiemelhető, az összegzések felcserélése után kapjuk

$$\overline{G}(x) = e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{\infty} \overline{C}_j \frac{(\beta x)^j}{j!}, x \geq 0.$$

Geometriai eloszlás esetén $P(z) = p_0 + (1-p_0)\frac{(1-q)z}{1-qz}$ a (4.4)-ből (ez a q már nem eloszlás). Sőt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \overline{C}_j z^j = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} c_n z^j = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} c_n z^j = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{1-z^n}{1-z} \right),$$

és mivel $1 - z^0 = 0$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \overline{C}_j z^j = \frac{1 - C(z)}{1-z}.$$

Tehát

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \overline{C}_j z^j &= \frac{1 - p_0 - (1-p_0)\frac{(1-q)Q(z)}{1-qQ(z)}}{1-z} \\ &= (1-p_0)\frac{1 - qQ(z) - (1-q)Q(z)}{(1-z)\{1-qQ(z)\}} \\ &= (1-p_0)\frac{1-Q(z)}{1-z}\frac{1}{1-qQ(z)}.\end{aligned}$$

Az $\{\overline{C}_0, \overline{C}_1, \dots\}$ együtthatókat néha megkaphatjuk a fenti generátorfüggvény z-ben való kiterjesztéséből (például, $r \leq 2$ esetben).
Vagy

$$\sum_{j=0}^{\infty} \overline{C}_j z^j = qQ(z) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{C}_j z^j + (1-p_0)\frac{1-Q(z)}{1-z},$$

amiből következik, hogy $j = 1{,}2{,}3, \dots$ esetén

$$\overline{C}_j = q \sum_{i=1}^{j} l_i \overline{C}_{j-i} + (1-p_0) \sum_{i=j+1}^{\infty} l_i$$

ahol feltesszük, hogy $l_i = 0$ ha $i \notin \{1{,}2, \dots, r\}$. A $\overline{C}_j$ értékeket meghatározhatjuk rekurzívan, a $\overline{C}_0 = 1 - p_0$ kezdőértékkel.

4.2. Alkalmazás csődvalószínűségek esetén

Most tekintsük az előző alfejezetben kapott eredmények alkalmazását biztosítási csődesemények esetén. A klasszikus folytonos idejű kockázati modellben, egy biztosítási portfólió kárkifizetéseinek számáról, azaz N_t-ről feltesszük, hogy Poisson-folyamatot követnek λ intenzitással. Az egyedi kárkifizetések nagyságai $Z_1, Z_2, \dots$, pozitív, független és azonos eloszlású valószínűségi változók, függetlenek N_t-től, közös eloszlásfüggvényük: $F(z) = P(Z \leq z)$ és várható értékük: $E(Z) = \int_0^\infty z dF(z)$.

Az összkár kifizetést leíró folyamat $\{S_t; t \geq 0\}$, ahol $S_t = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{N_t}$ ($S_t = 0$, ha $N_t = 0$). Ahogy az 1. fejezetben láttuk, S_t összetett Poisson-folyamat. A biztosító össztőkéjének nagyságát megadó folyamat $\{U_t; t \geq 0\}$, azaz $U_t = u + ct - S_t$, ahol $u \geq 0$ a kezdeti tőke, $c = \lambda E(Z)(1+\theta)$ az időegységre eső díjbefizetés értéke és $\theta > 0$ a relatív biztonsági pótdíj.

Definiáljuk $T = \inf\{t; U_t < 0\}$ mint az első időpont, amikor a tőke értéke negatív lesz. Ezt a T-t nevezzük a csőd idejének, a $\Psi(u) = P\{T < \infty\}$ pedig a csőd valószínűségének. Ha valamelyik feltétele az első káresemény időpontjának és összegének, akkor a teljes valószínűség tétele[4] miatt

$$\Psi(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \Psi(u+ct-z)\,\mathrm{d}F(z)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\overline{F}(u+ct)\,\mathrm{d}t. \quad (4.28)$$

Parciális integrálás után

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \Psi(u-z)\,\mathrm{d}F_1(z) + \frac{1}{1+\theta}\overline{F_1}(u), \quad (4.29)$$

ahol

$$F_1(z) = \int_0^z \overline{F}(t)\,\mathrm{d}t \big/ E(Z), z \geq 0, \quad (4.30)$$

azaz $F_1(z)$ az $F(z)$-ből származtatott (egyensúlyi) eloszlás.

Könnyen belátható (például Laplace transzformált segítségével) a (4.29)-ből, hogy $\Psi(u)$ egy összetett geometriai eloszlás farok eloszlása, nevezetesen, $\Psi(u) = P\{L > u\}$, ahol L összetett geometriai eloszlású valószínűségi változó

$$p_n = \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n; n = 0{,}1{,}2, \ldots \quad (4.31)$$

és a kárkifizetés nagyságának eloszlása a (4.30)-as egyenlettel adott. Biztosítási nyelven $F_1(x)$ jelenti a tőke csökkenésének mértékének az eloszlásfüggvényét, vagy ekvivalensen a kezdeti tőke és azon tőke közti különbséget, amikor a tőke mértéke első alkalommal csökken a kezdeti tőke alá, más szóval $S_t - ct$ eloszlásfüggvénye. Továbbá tudjuk, hogy $S_t - ct > 0$ és $S_x - cx \leq 0$, $0 \leq x < t$. Az L valószínűségi változót értelmezhetjük úgy is, mint a maximális összesített veszteség, $max_{t\geq 0}\{S_t - ct\}$, mivel

$$P\{max_{t\geq 0}\{S_t - ct\} > u\} = P\{S_t - ct - u > 0, \text{ minden } t \geq 0\} = \Psi(u).$$

Az előző alfejezet eredménye alkalmazható a $q = 1/(1+\theta), p_0 = 1 - q$, valamint

[4] Teljes valószínűség tétel: Ha $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszert alkot, akkor tetszőleges A esemény valószínűségét a $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots$ összefüggés alapján lehet kiszámítani.

az eloszlásfüggvény $F_1(z)$ helyettesítésekkel, különösen, ha $F(z)$ Gamma-eloszlások keverésének eloszlásfüggvénye. Ekkor $F_1(z)$ és $\Psi(u)$ könnyen megkapható az előző alfejezet végén bemutatott módon. Szintén $\Psi(u)$ egy kiterjesztését adta meg Shiu a következő formulával,

$$\Psi(u) = 1 - \frac{\theta e^{\tau u}}{1+\theta}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\tau)^k}{k!}\eta_k(u)\right\}, \tag{4.32}$$

ahol $\tau = \frac{1}{(1+\theta)E(Z)}$ és

$$\eta_k(u) = \int_0^u (u-t)^k e^{-\tau t}\, \mathrm{d}F^{*k}(t), \tag{4.33}$$

ahol $F^{*k}(t)$ a $F(t)$ k-adik konvolúció hatványa. A (4.32)-s kifejezését Shiu abban az esetben használta, amikor $F(z)$ egy diszkrét eloszlás eloszlásfüggvénye.

Itt az R illeszkedési együtthatót a következő egyenlet egyértelmű pozitív megoldásaként kapjuk

$$1 + R(1+\theta)E(Z) = \int_0^\infty e^{Rt}\, \mathrm{d}F(t). \tag{4.34}$$

Mivel $F_1(z)$ a (4.30)-ben nem aritmetikai, felhasználva (4.34)-et és parciálisan integrálva (4.12)-re kapjuk, hogy

$$\Psi(u) \sim \frac{\theta E(Z)}{\int_0^\infty z e^{Rz}\, \mathrm{d}F(z) - (1+\theta)E(Z)} e^{-Ru}, u \to \infty. \tag{4.35}$$

Ez az aszimptotikus eredmény az ismert Cramér-Lundberg aszimptotikus csőd formula. A

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru} \tag{4.36}$$

egyenlőtlenség pedig a közismert Lunbderg-egyenlőtlenség.

Parciálisan integrálva (4.8)-t (4.34)-hez jutunk, amely gyakoribb (de kevésbé sokatmondó) formula, mint (4.8). A (4.13) egyenlet jobb oldala a Lundberg egyenlőtlenség újragondolása. Ezért az előző alfejezetben kapott eredmények sok esetben a Lundberg egyenlőtlenség javítását és finomítását adják.
Például, Gerber megmutatta, hogy ha $F(x)$ IFR[5], akkor

$$\Psi(u) \geq \left(1 + R\frac{c}{\lambda}\right)^{-1} e^{-Ru}, \tag{4.37}$$

[5] Increasing Failure Rate (Növekvő meghibásodási tényező): $F \in IFR$, ha $\forall s > 0$-ra $t \mapsto \frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(t)}$ monoton fogyó $0 \leq t < \omega_F$ esetén, ahol $\omega_F = \sup\{t : F(t) < 1\}$ az eloszlás felső végpontja, $F(t)$ eloszlásfüggvény továbbá $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$.

ha DFR[6], akkor

$$\Psi(u) \leq \left(1 + R\frac{c}{\lambda}\right)^{-1} e^{-Ru}. \tag{4.38}$$

Ugyanakkor, ha $F(z)$ DFR, így $F_1(z)$ IMRL és ha $F(z)$ IFR, akkor $F_1(z)$ DMRL, következik a (4.6) és (4.7)-ből. Így kapjuk, hogy

$$\Psi(u) \geq \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} \tag{4.39}$$

ha $F(z)$ IFR, és

$$\Psi(u) \leq \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} \tag{4.40}$$

ha $F(z)$ DFR. A (4.39) és (4.40) egyenlőtlenségek tömörebbek, mint a (4.37) és (4.38) egyenlőtlenségek, illetve, mivel $\Psi(0) = 1/(1+\theta)$, és a (4.37),((4.38)) $u = 0$ esetén $\Psi(0) = 1/(1+\theta) \geq (\leq) 1/(1 + R\frac{c}{\lambda})$.

A fenti eredmények fennállnak feltéve, hogy a (4.34)-nak van egyértelmű pozitív megoldása. Az exponenciális hatások egy másik típusát kaphatjuk a kárkifizetés nagyságának eloszlásának első három momentumából. A következő eredmény Kalashnikov nevéhez fűződik.

12. Tétel. *Ha* $\mu_k = \int_0^\infty z^k \, \mathrm{d}F(z) < \infty, k = 1, 2, 3$ *ekkor*

$$\frac{1}{1+\theta} e^{-R_1 u} - K \leq \Psi(u) \geq \frac{1}{1+\theta} e^{-R_1 u} + K, \tag{4.41}$$

ahol

$$R_1 = \frac{2\mu_1\theta}{\mu_2(1+\theta)}$$
$$K = \frac{4\mu_1\mu_3\theta}{3\mu_2^2(1+\theta)}.$$

A (4.41)-es egyenlet egy jó becslést adhat a csődvalószínűségekre kis θ esetén.

[6] Decreasing Failure Rate (Csökkenő meghibásodási tényező):$F \in DFR$, ha $\forall s > 0$-ra $t \mapsto \frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(t)}$ monoton növő $0 \leq t < \omega_F$ esetén.[7]

5. fejezet

Folytonos idejű összetett binomiális modell

Ebben a fejezetben a [2] cikket követve megmutatjuk, hogy szakaszonként determinisztikus Markov-folyamatok segítségével, hogyan kaphatunk exponenciális martingált és ez az eredmény miként kapcsolódik a csődvalószínűséghez.

A klasszikus kockázati elméletben az összetett binomiális modell az összetett Poisson modell diszkrét idejű változata. A fő különbség a két modell között a kárkifizetések között eltelt időtartamok eloszlásából adódik. Az egyiknél geometriai, míg a másiknál exponenciális ez az eloszlás. Továbbá a folytonos idejű összetett binomiális modell a folytonos idejű változata a diszkrét idejű összetett binomiális modellnek. Azonban míg a diszkrét idejű modellben hagyományos geometriai eloszlást követnek a kárkifizetések között eltelt időtartamok, addig a folytonos idejűben módosított geometriai eloszlásúak. Viszont diszkrét kezdőtőke esetén, a módosított geometriai eloszlás egybeesik a hagyományos geometriai eloszlással. Így a kifizetések között eltelt időtartamok eloszlásának módosítása azt eredményezi, hogy a tőke folyamatunk Markov folyamat lesz. Ezért a szakaszonként determinisztikus Markov folyamat (Piecewise deterministic Markov process: PDMP) módszerét alkalmazzuk arra, hogy a tőkefolyamattal kapcsolatosan exponenciális martingálokat kapjunk a folytonos idejű összetett binomiális modellben. Mivel a mértékváltási technika a PDMP módszerrel kombinálva hatékony eszköz a csődvalószínűségek vizsgálatában, bemutatjuk a megfelelő valószínűségi mértékváltás elméletét, megadjuk a csődvalószínűség egy általános kifejezését és véges intervallumban a csődvalószínűséget is. Ezekre alapozva a megfelelő Lundberg korlátokat és Cramér-Lundberg approximációt is bemutatjuk.

Először nézzük meg a folytonos idejű összetett binomiális modellt. Ehhez jelölje $\{U_t, t \geq 0\}$ a következő tőkefolyamatot

$$U_t(u) = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k,$$

ahol, mint eddig most is $U_0 = u$ a kezdőtőke, $c > 0$ a biztosítási díj, N_t a $(0, t]$ intervallumban kifizetett károk száma, valamint $\{Z_k\}$ a kárkifizetések sorozata, mely független, azonos eloszlású valószínűségi változókból áll. A kárkifizetések közös eloszlásfüggvénye F diszkrét típusú, azaz jelen esetben

$$P(Z = kc\delta) = p_k, k = 1{,}2, \ldots, \tag{5.1}$$

ahol $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, míg a várható értéket jelölje μ_Z. Díjfizetés δ időközönként történik. Ha adott x a tőkefolyamat ugrás utáni helyzete az utolsó kifizetés időpontjában, akkor a kárkifizetések között eltelt idő, $\{\zeta_n\}_1^{\infty}$ feltételes farok eloszlását kifejezhetjük a következő módon:

$$\begin{aligned} F(x,t) = P(\zeta_n > t | U_{\zeta_{n-1}} = x) = \frac{P(\zeta_n > t, U_{\zeta_{n-1}} = x)}{P(U_{\zeta_{n-1}} = x)} &= \frac{(1-p)^{\lfloor \frac{x+ct}{c\delta} \rfloor}}{(1-p)^{\lfloor \frac{x}{c\delta} \rfloor}} \\ = (1-p)^{\lfloor \frac{x+ct}{c\delta} \rfloor - \lfloor \frac{x}{c\delta} \rfloor}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

ahol $\lfloor x \rfloor$ jelöli x alsó egészrészét. A (5.2) kifejezésben a számlálóban szereplő valószínűség a következőképpen kapjuk meg: ha a ζ_{n-1} intervallumban a tőke nagysága x, és a következő időköz hossza, $\zeta_n > t$, akkor a ζ_n-ben lesz ct nagyságú bevétel a díjbefizetéséből, tehát itt a tőkefolyamat értéke $x + ct$. Mivel annak valószínűsége, hogy $c\delta$ nagyságú kár nem következik be ebben az intervallumban $1 - p$, és $x + ct$ nagyságú tőkéből $\lfloor \frac{x+ct}{c\delta} \rfloor$-szer tudnánk kifizetni, így megkapjuk a számlálóban szereplő kifejezést. A nevező hasonló indoklással megkapható.

(5.1)-ből következik, hogy az $\{N_t\}$ valójában egy (késleltetett) felújítási számláló folyamat geometriai eloszlású kárkifizetések között eltelt idővel, azaz

$$P(\zeta_n = k\delta) = p(1-p)^{k-1}, n = 2{,}3, \ldots k = 1{,}2, \ldots,$$

míg

$$P\left(\zeta_1 = \left[k - \left(\frac{u}{c\delta}\right)\right]\delta\right) = p(1-p)^{k-1}, k = 1{,}2, \ldots,$$

ahol $\left(\frac{u}{c\delta}\right)$ jelöli az $\frac{u}{c\delta}$ törtrészét. Ez az oka annak, hogy a modellt folytonos idejű összetett binomiális modellnek nevezzük. Továbbá ebben az esetben $\{N_t\}$ független $\{Z_k\}$-tól. Ekvivalensen ez azt jelenti, hogy egy kár csak akkor következik be p

valószínűséggel, ha a (5.2)-ban szereplő $x + ct$, azaz az utolsó és az utolsó előtti kárkifizetés közötti intervallumban a tőke nagysága $c\delta$ egész számú többszöröse. Ekkor a *nettó profit feltétel*: $p\mu_Z < c\delta$.

Általában $T = \inf\{t > 0 : U_t < 0\}$ jelöli a csőd bekövetkezésének idejét u kezdőtőke esetén, $\inf \emptyset = \infty$. Legyen $\Psi(u) = P(T < \infty)$ a csőd valószínűsége és $\Psi(u, \tau) = P(T \le \tau)$ a véges időben bekövetkező csődvalószínűség. Jelölje továbbá a túlélés valószínűségét $\overline{\Psi}(u) = 1 - \Psi(u)$. Legyen τ_n az n-edik kár kifizetésének ideje, azaz $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k$ és $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} I_{[\tau_k \le t]}$.

5.1. Exponenciális martingálok

Most megmutatjuk, hogy hogyan jutunk el a szakaszonként determinisztikus Markov folyamatból (röviden PDMP), az exponenciális martingálhoz. Ehhez először nézzük meg, mi is az a PDMP.

Először is vizsgáljuk meg egy kicsit közelebbről az U_t folyamatot! Legyen adott egy E állapottér, melyben a tőkefolyamatunk mozog. Jelen esetben, azaz folytonos idejű binomiális modellben azt kaptuk, hogy két kárkifizetés között U_t determinisztikusan viselkedik. Ezt a tuljadonságot egy olyan $\Phi(t, x)$ függvénnyel írhatjuk le, amely az első változójában folytonos és teljesíti a következő egyenletet:

$$\Phi(s + t, x_0) = \Phi(t, \Phi(s, x_0)), s, t \ge 0, s + t \le c(x),$$

ahol $c(x) = inf\{t > 0 : F(x, t) = 0\}$. Ez azt jelenti, hogy x értékből indulva $s + t$ idő elteltével ugyanott van a folyamat, mintha azt néznénk, hogy x állapotból s idő múlva hol volt a folyamat, majd innen t idő elteltével milyen értéket vesz fel a folyamat.

Most nézzük meg mit tudunk elmondani U_t ugrásainak viselkedéséről. Ha x állapotban vagyunk és $s + t$ idő után megszámoljuk, hogy mennyi ugrás volt, ugyanazt az értéket kapjuk, mintha először x-ből indulva s idő múlva megszámoltuk volna az ugrásokat, majd ehhez hozzáadjuk az új, x_s állapotból indulva a t idő alatt történt ugrásokat. Tehát az ugrásokat egy olyan $F(x, t)$ eloszlás határozza meg, melyre igaz az örökifjú tulajdonság. Jelen esetben ez így írható fel:

$$F(x, s + t) = F(x, s)F(\Phi(s, x), t), \forall x \in E, \text{ és } s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Már meg volt, hogy mi történik az ugrások között és, hogy az ugrások milyen eloszlás szerint következnek be, már csak azt kell megnéznünk, hogy egy ugrás után hova kerül a folyamat. Tehát azt szeretnénk leírni, hogy egy x állapotból, t idő múlva milyen állapotokba kerülhet a folyamatunk. Ezt egy olyan $\mathcal{Q}(x,t,B)$ függvénnyel adhatjuk meg, melyet a $q(z,B)$ Markov-átmenetvalószínűségek segítségével határozhatunk meg a következő módon:

$$\mathcal{Q}(x,t,B) = q(\Phi(t,x),B), s,t \geq 0, s+t \leq c(x).$$

Ezek alapján az U_t folyamat egy speciális folyamat az ún. *szakaszonként determinisztikus Markov-folyamat.* Minden ilyen Markov-folyamathoz rendelhető egy infinitezimális generátor, amely két komponensből áll ($A = (A_{ac}, A_d)$). Az egyik, jelöljük ezt A_{ac}-vel a folytonos változó determinisztikus részéből, míg a másik, A_d az ugrásokból származik. Ekkor az általános elméletből következik, hogy

$$M_t^f = f(U_t) - f(U_0) - \int_0^t A_{ac} f(U_s)\,\mathrm{d}s - \sum_{0<s\leq t} A_d f(U_s^-)$$

martingál.

Most az E állapottér a valós számok halmaza, azaz $E = \mathbb{R}$, továbbá $\Phi(t,x) = = x + ct$, $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$, F a (5.2)-ben definiált és $q(x,dy) = F(x - dy)$, ahol $x - B = \{x - y; y \in B\}(B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Az $\{U_t, t\}$ folyamat kiterjesztett generátora, $A = (A_{ac}, A_d)$ a következő formában áll elő:

$$\begin{aligned}
A_{ac} f(x,t) &= c\frac{df}{dx}(x,t) + \frac{df}{dx}(x,t),\\
A_d f(ic\delta,t) &= \Delta f(ic\delta,t) + p\left(\int_0^\infty f(ic\delta - y,t)G(\,\mathrm{d}y) - f(ic\delta,t)\right),\\
&\quad ic\delta \leq x < (i+1)c\delta\\
&\qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,
\end{aligned}$$

ahol $\Delta f(ic\delta,t) = f(ic\delta,t) - \lim_{h\downarrow 0} f(ic\delta - ch, t - h)$. Ekkor martingált az alábbi módon kapunk:

5.1.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely teljesíti a következőket:*

1. *Minden $x \in \mathbb{R}, f(x + ct, t)$ szakaszonként abszolút folytonos t-ben és ugrása csak abban a t-ben lehet, ahol az $x + ct$ a $c\delta$ egész számú többszöröse;*
2. *$Af(x,t) = (A_{ac} f(x,t), A_d f(x,t)) = 0$.*
3. *Minden $u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$,*

$$E\left(\sum_{\sigma_{n\leq t}} |f(U(\tau_n),\tau_n) - f(U(\tau_n-),\tau_n)|\right) < \infty. \tag{5.3}$$

Ekkor $\{f(U_t,t)\}$ *egy martingál.*

Ahhoz, hogy megkapjuk $\{f(U_t,t), t \geq 0\}$ martingál alakját, az $Af(x,t) = 0$ egyenlet egy speciális megoldásra van szükségünk. Ennek megtalálásához, nézzük $f(x,t) = e^{-s(\lfloor \frac{x}{c\delta} \rfloor - \lfloor \frac{u}{c\delta} \rfloor)c\delta - \theta(t - \left(\frac{x}{c\delta}\right)\delta)}$ függvényt. Tekintsük azt az esetet, amikor θ s-től függ, azaz $\theta = \theta(s)$. Ekkor az $Af = 0$ egyenletből

$$f(ic\delta,t) - f(ic\delta,t)e^{(sc+\delta(s))\delta} + pf(ic\delta,t)(\hat{m}_Z(s) - 1) = 0,$$

ahol feltesszük, hogy $\hat{m}_Z(s) = \int_0^\infty e^{sy} G(\, dy) < \infty$. Mivel $f(ic\delta,t) > 0$,

$$1 - e^{(sc+\theta(s))\delta} + p(\hat{m}_Z(s) - 1) = 0.$$

Ezért,

$$\theta(s) = -cs + \frac{1}{\delta}\ln[1 + p(\hat{m}_Z(s) - 1)]. \tag{5.4}$$

Továbbá, megmutatható, hogy

$$M(t) = e^{-s\left(\lfloor \frac{U_t}{c\delta} \rfloor - \lfloor \frac{u}{c\delta} \rfloor\right)c\delta - \theta(s)\left(t - \left(\frac{U_t}{c\delta}\right)\delta + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)}$$

egy martingál, csak azt kell igazolnunk, hogy (5.3) fennáll minden $u \in \mathbb{R}$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén. Valójában vegyük észre, hogy a τ_n kárkifizetési időpontokban, mind $U_{\tau_n -}$, mind pedig U_{τ_n} $c\delta$ egész számú többszöröse. Válasszuk s -et úgy, hogy $0 \leq s < s_+$, $s_+ = \sup\{s : \hat{m}_Z(s) < \infty\}$, ekkor kapjuk

$$\begin{aligned}
&E\left(\sum_{\tau_n \leq t} |f(U_{\tau_n}, \tau_n) - f(U_{\tau_n -}, \tau_n)|\right)\\
&= E\Bigg[\sum_{n=1}^{N_t}\Bigg(e^{-s\left(\lfloor \frac{U_{\tau_n}}{c\delta} \rfloor - \lfloor \frac{u}{c\delta} \rfloor\right)c\delta - \theta(s)\left(\tau_n - \left(\frac{U_{\tau_n}}{c\delta}\right)\delta + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)}\\
&\qquad\qquad - e^{-s\left(\lfloor \frac{U_{\tau_n -}}{c\delta} \rfloor - \lfloor \frac{u}{c\delta} \rfloor\right)c\delta - \theta(s)\left(\tau_n - \left(\frac{U_{\tau_n -}}{c\delta}\right)\delta + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)}\Bigg)\Bigg]\\
&\leq E\left[\sum_{n=1}^{N_t} e^{-s\left\lfloor \frac{U_{\tau_n}}{c\delta} \right\rfloor c\delta} e^{s\left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor c\delta - \theta(s)\left(\tau_n + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)}\right]\\
&\leq E\left[\sum_{n=1}^{N_t} e^{-s\left\lfloor \frac{U_{\tau_n}}{c\delta} \right\rfloor c\delta}\right] \max\{e^{su}, e^{su - \theta(s)\left(t + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\right)}\}.
\end{aligned}$$

Mivel $N_t \leq \left\lfloor \frac{t}{\delta} \right\rfloor + 1$, így

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{n=1}^{N_t} e^{-s\left\lfloor \frac{U_{\tau_n}}{c\delta} \right\rfloor c\delta}\right] &\leq E\left[\sum_{n=1}^{N_t} e^{s\sum_{i=1}^{n} Z_i}\right] \leq E\left[\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{t}{\delta} \right\rfloor + 1} e^{s\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{t}{\delta} \right\rfloor + 1} Z_i}\right]\\
&\leq \left(\left\lfloor \frac{t}{\delta} \right\rfloor + 1\right)(\hat{m}_Z(s))^{\left\lfloor \frac{t}{\delta} \right\rfloor + 1} < \infty.
\end{aligned}$$

Ez a $|\theta(s)| < \infty$ feltétellel együtt megkapjuk, hogy a (5.3)-es képlet igaz $M(t)$-re.

Az előbbi levezetésből adódik a következő tétel:

13. Tétel. *Ha $\hat{m}_Z(s) < \infty$ igaz néhány $s \geq 0$-ra, akkor*

$$M(t) = e^{-s\left(\left\lfloor \frac{U_t}{c\delta}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{u}{c\delta}\right\rfloor\right)c\delta - \theta(s)\left(t - \left(\frac{U_t}{c\delta}\right)\delta + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)} \tag{5.5}$$

martingál az $M(0) = 1$ kezdőértékkel, ahol $\lfloor x \rfloor$ jelöli és x egész részét, (u) pedig u törtrészét.

Most megvizsgáljuk a fent bemutatott modellben leírt $\{U_t, t \geq 0\}$ tőkefolyamat kanonikus valószínűségi terét $(\Omega, \mathcal{F}, P)$-t, ahol Ω az $\{U_t\}$ minden lehetséges trajektóriáját tartalmazó $D(\mathbb{R}_+)$ halmaz Borel halmaza és $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$. Legyen $\{\mathcal{F}_t\}$ az $\{U_t\}$ eddig ismert információit tartalmazó filtráció. Ekkor minden n esetén, a kárkifizetés időpontja τ_n az $\{\mathcal{F}_t\}$ megállási ideje.

Legyen $s \geq 0$ rögzített úgy, hogy $\hat{m}_Z(s) < \infty$, ekkor $M(t)$ a (5.5)-ban kapott nem negatív martingál. Tekintsük a $\{P_t^{(s)}, t \geq 0\}$ valószínűségi mértékek családját, ahol

$$P_t^{(s)}(A) = \int_A M(t)\,\mathrm{d}P^{(s)}, A \in \mathcal{F}_t. \tag{5.6}$$

A Kolmogorov-alaptételből[1] kapjuk, hogy ha létezik a $P^{(s)}$ valószínűségi mérték a $(\Omega, \mathcal{F})$-on úgy, hogy $P_t^{(s)} = P^{(s)}\big|_{\mathcal{F}_t}$, akkor elképzelhető, hogy $P^{(s)}$ szinguláris P-re. Jelölje $E^{(s)}$ a várható értéket $P^{(s)}$ mérték mellett és $P^{(0)} = P$. Ekkor a következő lemma igaz:

5.1.2. Lemma. *Minden $t \geq 0$ és $A \in \mathcal{F}_t$ esetén,*

$$P^{(s)}(A) = \int_A e^{-s\left(\left\lfloor \frac{U_t}{c\delta}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{u}{c\delta}\right\rfloor\right)c\delta - \theta(s)\left(t - \left(\frac{U_t}{c\delta}\right)\delta + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)}\,\mathrm{d}P^{(s)} \tag{5.7}$$

és

$$P(A) = \int_A^{(s)} e^{s\left(\left\lfloor \frac{U_t}{c\delta}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{u}{c\delta}\right\rfloor\right)c\delta + \theta(s)\left(t - \left(\frac{U_t}{c\delta}\right)\delta + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)}\,\mathrm{d}P. \tag{5.8}$$

[1] Kolmogorov-alaptétel:Legyen $(\mathcal{X}, \rho)$ teljes szeparábilis metrikus tér. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{G}$ σ-algebrát a tér Borel-halmazai alkotják. Ekkor tetszőleges T paramétertartomány esetén bármely összeegyeztethető mértékcsaládhoz található olyan - alkalmas alaptéren értelmezett - $X_t, t \in T$ sztochasztikus folyamat, melyre $P((X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \in B) = Q^n_{t_1,\ldots,t_n}(B)$, ahol $Q^n_{t_1,\ldots,t_n}(B)$ jelöli az összeegyeztethető mértékcsaládot.
Jelen esetben $\mathcal{G} = \mathcal{F}, Q^n_{t_1,\ldots,t_n}(B) = P_t^{(s)}, T = A$.

Sőt, ha ν az $\{\mathcal{F}_t\}$ egy megállási ideje és $A \subset \{\nu < \infty\}$ úgy, hogy $A \in \mathcal{F}_\nu$, akkor

$$P^{(s)}(A) = \int_A e^{-s\left(\left\lfloor \frac{U_\nu}{c\delta} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor\right)c\delta - \theta(s)\left(\nu - \left(\frac{U_\nu}{c\delta}\right)\delta + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)} \, \mathrm{d}P^{(s)} \tag{5.9}$$

és

$$P(A) = \int_A^{(s)} e^{s\left(\left\lfloor \frac{U_\nu}{c\delta} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor\right)c\delta + \theta(s)\left(\nu - \left(\frac{U_\nu}{c\delta}\right)\delta + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)} \, \mathrm{d}P. \tag{5.10}$$

14. Tétel. *Legyen $s \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\hat{m}_Z(s) < \infty$,*

$$\Psi(u) = e^{-s\left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor c\delta} \int_{\{T<\infty\}} e^{sU_T + \theta(s)\left(T + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)} \, \mathrm{d}P^{(s)}, \tag{5.11}$$

és

$$\Psi(u,\tau) = e^{-s\left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor c\delta} \int_{\{T\le\tau\}} e^{sU_T + \theta(s)\left(T + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)} \, \mathrm{d}P^{(s)}. \tag{5.12}$$

Bizonyítás. Emlékezzünk vissza, hogy a τ_n kárkifizetési időpontban a U_{τ_n} ugrás utáni helyzet a $c\delta$ egész számú többszöröse és így a T csőd időpontban U_T az ugrás utáni állapot. Ez azt jelenti, hogy a $\frac{U_T}{c\delta}$ tört része, azaz $\left(\frac{U_T}{c\delta}\right) = 0$. Ezért az előző lemma alapján, $P^{(s)}$ mérték esetén

$$\begin{aligned}
\Psi(u) = P(T<\infty) &= \int_{\{T<\infty\}} e^{s\left(\left\lfloor \frac{U_T}{c\delta} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor\right)c\delta + \theta(s)\left(T - \left(\frac{U_T}{c\delta}\right)\delta + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)} \, \mathrm{d}P^{(s)} \\
&= \int_{\{T<\infty\}} e^{s\left(\frac{U_T}{c\delta} - \left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor\right)c\delta + \theta(s)\left(T + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\right)} \, \mathrm{d}P^{(s)} \\
&= \int_{\{T<\infty\}} e^{sU_T - s\left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor c\delta + \theta(s)\left(T + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\right)} \, \mathrm{d}P^{(s)} \\
&= \int_{\{T<\infty\}} e^{sU_T + \theta(s)\left(T + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\right)} \cdot e^{-s\left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor c\delta} \, \mathrm{d}P^{(s)} \\
&= e^{-s\left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor c\delta} \int_{\{T<\infty\}} e^{sU_T + \theta(s)\left(T + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)} \, \mathrm{d}P^{(s)}.
\end{aligned}$$

Az előzővel analóg módon adódik adott véges τ esetén,

$$\begin{aligned}
\Psi(u,\tau) = P(T\le\tau) &= \int_{\{T\le\tau\}} e^{s\left(\left\lfloor \frac{U_T}{c\delta} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor\right)c\delta + \theta(s)\left(T - \left(\frac{U_T}{c\delta}\right)\delta + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)} \, \mathrm{d}P^{(s)} \\
&= e^{-s\left\lfloor \frac{u}{c\delta} \right\rfloor c\delta} \int_{\{T\le\tau\}} e^{sU_T + \theta(s)\left(T + \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)} \, \mathrm{d}P^{(s)}.
\end{aligned}$$

□

Megkérdezhetjük, hogy az eredeti U_t folyamatunk milyen sztochasztikus struktúrával rendelkezik $P^{(s)}$ szerint. Legyen ζ geometriai eloszlású p' paraméterrel, c továbbra is a biztosítási díj, Z_i eloszlása pedig adott, a folytonos idejű összetett binomiális modellben $U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i$. U_t $P^{(s)}$ szerint is klasszikus rizikófolyamat, amelyben a Z_i-k és ζ_i-k eloszlása a következő tételben megadott módon változik.

15. Tétel. *Legyen $s \geq 0$ olyan, hogy $\hat{m}_Z(s) < \infty$. Tekintsük a $(\Omega, \mathcal{F}, P^{(s)})$ valószínűségi mértékteret, ekkor a következő állítások igazak:*

1. *A $P^{(s)}$ mérték esetén, az $\{U_t\}$ folyamat tőkefolyamat a folytonos idejű összetett binomiális modellben, ahol c a biztosítási díj, a kárkifizetések közt eltelt időtartamok pedig geometriai eloszlásúak. Így*

$$P^{(s)}\left(\zeta_1 = k\delta - \left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right) = p'(1-p')^{k-1}, k = 1{,}2,\ldots,$$
$$P^{(s)}(\zeta_n = k\delta) = p'(1-p')^{k-1}, k = 1{,}2,\ldots; n = 2{,}3,\ldots,$$

ahol a $p' = \frac{p\hat{m}_Z(s)}{1+p(\hat{m}_Z(s)-1)}$ paraméter és a kárnagyság eloszlása

$$P^{(s)}(Z = kc\delta) = \frac{e^{skc\delta}p_k}{\hat{m}_Z(s)}, k = 1{,}2,\ldots.$$

Nevezetesen, $E^{(s)}(U_\delta - u) = -\theta'(s)\delta$.

2.
$$P^{(s)}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}(U_t - u) = -\theta'(s)\right) = 1. \tag{5.13}$$

Ha $s, s' \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $s \neq s', \hat{m}_Z(s) < \infty$ és $\hat{m}_Z(s') < \infty$, akkor $P^{(s)}$ és $P^{(s')}$ megegyeznek $\mathcal{F}$-en.

Bizonyítás. (1) Mivel az $\{U_t, t \geq 0\}$ rizikófolyamat trajektóriáinak halmaza megegyezik a P és a $P^{(s)}$ mértékek esetén, így $\{U_t, t \geq 0\}$ biztosítási díja c mindkét mérték alatt. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített, és $B_i, B_i' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 1 \leq i \leq n$. Ekkor τ_n $\{\mathcal{F}_t\}$ egy megállási ideje, amely véges a P mérték esetén, és $U_(\tau_n)$ a $c\delta$ egész számú többszöröse minden n-re. Így a (5.9)-ből kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&P^{(s)}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\zeta_i \in B_i, Z_i \in B_i'\}\right) = \\
&= \int_{\{\bigcap_{i=1}^{n}\{\zeta_i\in B_i, Z_i\in B_i'\}\}} e^{-s\left(\left\lfloor \frac{U_{\tau_n}}{c\delta}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{u}{c\delta}\right\rfloor\right)c\delta-\theta(s)\left(\tau_n-\left(\frac{U_{\tau_n}}{c\delta}\right)\delta+\left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)}\,\mathrm{d}P \\
&= \int_{\{\bigcap_{i=1}^{n}\{\zeta_i\in B_i, Z_i\in B_i'\}\}} e^{-s\left(U_{\tau_n} - \left\lfloor \frac{u}{c\delta}\right\rfloor\right)c\delta-\theta(s)\left(\tau_n+\left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)}\,\mathrm{d}P \\
&= \int_{\{\bigcap_{i=1}^{n}\{\zeta_i\in B_i, Z_i\in B_i'\}\}} e^{-s\left(u+c\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\right)-\sum_{i=1}^{n}Z_i - \left\lfloor \frac{u}{c\delta}\right\rfloor c\delta\right)-\theta(s)\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta_i+\left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta\right)}\,\mathrm{d}P \\
&= \int_{\{Z_1\in B_1'\}} e^{sZ_1}dP \int_{\{\zeta_1\in B_1\}} e^{-s\left(u-\left\lfloor \frac{u}{c\delta}\right\rfloor c\delta\right)-\theta(s)\left(\frac{u}{c\delta}\right)\delta-(cs+\theta(s))\zeta_1}\,\mathrm{d}P \\
&\qquad \cdot \prod_{i=2}^{n}\left(\int_{\{Z_i\in B_i'\}} e^{sZ_i}dP \int_{\{\zeta_i\in B_i\}} e^{-(sc+\theta(s))\zeta_i}\,\mathrm{d}P\right) \\
&= \left[\sum_{j\in B_1'} e^{sjc\delta}\frac{p_j}{\hat{m}_Z(s)}\right]\left[\sum_{j\in B_1}\left(\frac{p\hat{m}_Z(s)}{1+p(\hat{m}_Z(s)-1)}\right)\left(\frac{1-p}{1+p(\hat{m}_Z(s)-1)}\right)^{j-1}\right] \\
&\cdot \prod_{i=2}^{n}\left\{\left[\sum_{j\in B_1'} e^{sjc\delta}\frac{p_j}{\hat{m}_Z(s)}\right]\left[\sum_{j\in B_1}\left(\frac{p\hat{m}_Z(s)}{1+p(\hat{m}_Z(s)-1)}\right)\left(\frac{1-p}{1+p(\hat{m}_Z(s)-1)}\right)^{j-1}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Ebből következik az (1.) állítás első része. Ez azt jelenti, hogy

$$E^{(s)}(Z) = \sum_{j=1}^{\infty} jc\delta e^{sjc\delta}\frac{p_j}{\hat{m}_Z(s)} = \frac{\hat{m}_Z'(s)}{\hat{m}_Z(s)}.$$

Így kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
E^{(s)}(U_\delta - u) = E^{(s)}\left[c\delta - \sum_{i=1}^{N_\delta} Z_i\right] &= c\delta - E^{(s)}N_\delta E^{(s)}Z \\
&= c\delta - \frac{p\hat{m}_Z(s)}{1+p(\hat{m}_Z(s)-1)} \times \frac{\hat{m}_Z'(s)}{\hat{m}_Z(s)} \\
&= c\delta - \frac{p\hat{m}_Z'(s)}{1+p(\hat{m}_Z(s)-1)} = -\theta'(s)\delta.
\end{aligned}
$$

Ezzel kész az (1.) állítás második részének bizonyítása.
A (2.) rész bizonyításához, figyeljük meg, hogy a $P^{(s)}$ mérték esetén, $V_k = U(c\delta) - -U((k-1)\delta), k = 1,2,\dots,$ független, azonos eloszlású változók sorozata a $V = U_\delta - u$ változóval azonos eloszlású. A nagy számok törvényéből következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}(U_t - u) = \lim_{t\to\infty}\frac{\left\lfloor \frac{t}{\delta}\right\rfloor}{t}\left(\frac{1}{\left\lfloor \frac{t}{\delta}\right\rfloor}\right)\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{t}{\delta}\right\rfloor} V_k = -\theta'(s), P^{(s)}.$$

Ebből következik a (2.) állítás első része. Tehát a $P^{(s)}$ és a $P^{(s')}$ mértékek szinguláriasak kivéve, ha $\theta'(s) = \theta'(s')$. Ezért elég csak azt bizonyítani, hogy a $\theta'(s)$ első derivált szigorúan növekvő minden $s > 0$ esetén, ahol $\theta(s)$ véges.

Valójában $\theta(s)$ második deriváltja, azaz

$$\theta''(s) = \frac{1}{\delta}\frac{p\hat{m}''_Z(s)(1 + p(\hat{m}_Z(s) - 1)) - (p\hat{m}'_Z(s))^2}{(1 + p(\hat{m}_Z(s) - 1))^2},$$

és a fenti egyenlet jobb oldalának számlálója

$$\begin{aligned}&p(1-p)\hat{m}''_Z(s) + p^2(\hat{m}_Z(s)\hat{m}''_Z(s) - (\hat{m}'_Z(s))^2)\\ &\quad = p(1-p)E\left(Z^2e^{sZ}\right) + p^2\left[E(e^{sZ})E(Z^2e^{sU}) - (E(Ze^{sZ}))^2\right] > 0.\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből következik. Tehát $\theta''(s) > 0$. Ez azt jelent, hogy a $\theta'(s)$ első derivált szigorúan növekvő minden $s > 0$ esetén, ahol $\theta(s)$ véges. □

Tudjuk, hogy $\theta(s)$ függvény végtelen sokszor differenciálható a $(-\infty, s_+)$ intervallumon, ahol $\theta(s)$ és s_+ fentebb definiált. A (15) tétel bizonyításából tudjuk, hogy $\theta''(s) > 0$, azaz $\theta(s)$ konvex függvény. A nettó profit feltételből az első deriváltra, $\theta'(s)$-ra az $s = 0$ helyen kapjuk, hogy

$$\theta'(0) = \frac{pm_X - c\delta}{\delta} < 0.$$

Könnyen látható, hogy $\theta(0) = 0$. Sőt létezhet egy szigorúan pozitív gyöke a $\theta(s) = 0$ egyenletnek. Ha egy ilyen pozitív gyök létezik, akkor az egyértelmű. Ezt a megoldást hívjuk illeszkedési együtthatónak vagy Lundberg-kitevőnek. Mint eddig, most is R-rel jelöljük.

Mivel a $\theta(s)$ függvény konvex, $\theta'(R) > 0$. A (14) tételből tudjuk, hogy $E^R(U_\delta - -u) = -\theta'(R)\delta < 0$ és így $P^{(R)}(T < \infty) = 1$. Ebből kapjuk az alábbi következményt.

5.1.1. Következmény. *Tegyük fel, hogy az illeszkedési együttható, $R > 0$ létezik, ekkor*

$$\Psi(u) = E^{(R)}\left(e^{RU_T}\right)e^{-R\left\lfloor \frac{u}{c\delta}\right\rfloor c\delta}, \tag{5.14}$$

és

$$\Psi(u,\tau) = e^{-R\left\lfloor \frac{u}{c\delta}\right\rfloor c\delta}\int_{\{T\le\tau\}} e^{RU_T}\,\mathrm{d}P^{(R)}. \tag{5.15}$$

5.2. Cramér-Lundberg approximáció

Legyen $n_0 = \sup\{k : p_k > 0\}$.

16. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $R > 0$ illeszkedési együttható létezik. Ekkor*

$$a_- e^{-R\lfloor \frac{u}{c\delta}\rfloor c\delta} \leq \Psi(u) \leq a_+ e^{-R\lfloor \frac{u}{c\delta}\rfloor c\delta} \tag{5.16}$$

minden $u \geq 0$-ra, ahol

$$a_- = \inf_{0<k\leq n_0} \frac{e^{Rkc\delta}\sum_{j>k} p_j}{\sum_{j>k} e^{Rjc\delta} p_j},$$
$$a_+ = \sup_{0<k\leq n_0} \frac{e^{Rkc\delta}\sum_{j>k} p_j}{\sum_{j>k} e^{Rjc\delta} p_j}.$$

Bizonyítás. Ez a (5.14)-ból következik, hogy

$$\Psi(u) e^{R\lfloor \frac{u}{c\delta}\rfloor c\delta} = E^{(R)}\left(e^{RU_T}\right).$$

Vizsgáljuk a feltételes várható értéket, azzal a feltétellel, hogy $U_{T-} = kc\delta$:

$$\begin{aligned} E^{(R)}\left(e^{RU_T} | U_{T-} = kc\delta\right) &= E^{(R)}\left(e^{R(kc\delta - Z^+)} | Z^+ > kc\delta\right) \\ &= \frac{E^{(R)}\left(e^{R(kc\delta - Z^+)} I_{\{Z^+ > kc\delta\}}\right)}{P^{(R)}(Z^+ > kc\delta)} \\ &= \frac{e^{Rkc\delta}\sum_{j>k} e^{-Rjc\delta} e^{Rjc\delta}\frac{p_j}{\hat{m}_Z(R)}}{\sum_{j>k} e^{Rjc\delta}\frac{p_j}{\hat{m}_Z(R)}} \\ &= \frac{e^{Rkc\delta}\sum_{j>k} p_j}{\sum_{j>k} e^{Rjc\delta} p_j}, \end{aligned}$$

ahol Z^+ jelöli azt a kárkifizetést, amelyik a csődhöz vezetett. □

5.2.1. Következmény. *Ha az $\{Z_k\}$ kárkifizetés sorozat független, azonos eloszlású valószínűségi változó sorozat a következő közös geometriai eloszlással*

$$P(Z = jc\delta) = p_j = q(1-q)^{j-1}, 0 < q < 1, j = 1{,}2, \ldots,$$

és a nettó profit feltétel a $p < q$ esetben igaz, akkor a csődvalószínűség u kezdőtőke esetén

$$\Psi(u) = \frac{p}{q}\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{\lfloor \frac{u}{c\delta}\rfloor + 1}.$$

Bizonyítás. Megoldva

$$\theta(R) = -cR = \frac{1}{\delta}\ln[1 + p(\hat{m}_Z(R) - 1)] = 0$$

egyenletet, az illeszkedési együtthatóra a következőt kapjuk:

$$R = \frac{1}{c\delta}\ln\left(\frac{1-p}{1-q}\right).$$

Ebben az esetben

$$a_- = a_+ = \frac{p}{q}\frac{1-p}{1-q}.$$

Így a csődvalószínűségre pontos értéket kapunk:

$$\Psi(u) = \frac{p}{q}\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{\lfloor \frac{u}{c\delta} \rfloor + 1}.$$

□

5.2.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $\{Z_k\}$ kárkifizetés sorozat független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata a*

$$P(Z = jc\delta), j = 1{,}2, \dots$$

közös eloszlással. Ekkor, minden pozitív egész m és k esetén

$$P(U_{T-}(0) = mc\delta, -U_T(0) = kc\delta, T < \infty | U_0 = 0) = \frac{p}{1-p}p_{m+k}. \tag{5.17}$$

Továbbá

$$P(T < \infty | U_0 = 0) = \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{c\delta}\mu_Z - 1\right). \tag{5.18}$$

(Bizonyítása megtalálható a cikkben.)

17. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $R > 0$ illeszkedési együttható létezik. Ekkor*

$$\lim_{u\to\infty}\Psi(u)e^{R\lfloor \frac{u}{c\delta}\rfloor c\delta} = \frac{c\delta - p\mu_Z}{p\hat{m}'_Z(R) - c\delta e^{Rc\delta}}.$$

6. fejezet

Egyéb approximációk

Ebben a fejezetben a [4] cikkből szemezgetve, két további approximációt mutatunk be a csődvalószínűség becslésére. Ehhez először ismételjük át a klasszikus kockázati folyamokhoz szükséges fogalmakat, jelöléseket, melyeket ebben a fejezetben alkalmazni fogunk.

Ahogy eddig, a klasszikus kockázati folyamat a következő egymástól független tagokon alapul:

1. $N = \{N_t; t \geq 0\}$ egy Poisson-folyamat, λ intenzitással;
2. $\{X_j\}_1^\infty$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, F közös eloszlás függvénnyel.

Mint korábban, most is N jelenti a kárkifizetések számát, míg $\{X_j\}$ a kifizetések nagyságát. A társaság által a $(0, t]$ intervallumban kifizetett károk összegét a következő kárfolyamat írja le:

$$S_t = \sum_{j=1}^{N_t} X_j, \;\; N_t = 0 \text{ esetén } \sum_{j=1}^{0} X_j \stackrel{def}{=} 0.$$

A kockázati folyamat

$$U_t = ct - S_t,$$

ahol c a biztosítási díj egy pozitív valós konstans. Csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor pozitív kárkifizetés van, azaz feltesszük, hogy $F(0) = 0$.

Legyen

$$\mu_k \stackrel{def}{=} E[X_j^k], k = 1,2,3,\ldots,$$

és

$$\mu \stackrel{def}{=} E[X_j] = \mu_1 \text{ és } Var[X_j] = \mu_2 - \mu_1^2.$$

Megengedjük, hogy mind a μ és a μ_1, helyzettől függően, jelölje a kárkifizetés várható értékét.

A tőke várható értéke a $(0, t]$ intervallumon:

$$E[U_t] = ct - E[S_t] = (c - \lambda\mu)t.$$

A relatív biztonsági pótdíj, (θ) a következő:

$$\theta \stackrel{def}{=} \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu}.$$

Az U_t tőkefolyamatban a biztonsági pótdíj pozitív, azaz $\theta > 0$.

A társaság csődvalószínűségét $\Psi(u)$ az u kezdőtőke mellett a következő valószínűség adja meg,

$$\Psi(u) = P\{u + U_t < 0, \text{ minden } t > 0\}.$$

Jelölje F_I a farok eloszlás integrálját, melyet a következőképp definiálunk:

$$F_I(z) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\mu} \int_0^z \overline{F}(x)\,\mathrm{d}x, \quad z \geq 0,$$

ahol $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.
Ekkor a csődvalószínűségére kapjuk, hogy

$$\Psi(u) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \overline{F}_I^{n*}(u), \tag{6.1}$$

amely Beekman konvolúciós formulaként ismert.

Legyen T valószínűségi változó F_I eloszlásfüggvénnyel. Ekkor

$$\tau_k \stackrel{def}{=} E[T^k] = \frac{\mu_{k+1}}{(k+1)\mu_1},$$

speciálisan

$$\tau_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_1} \text{ és } \tau_2 = \frac{\mu_3}{3\mu_1}. \tag{6.2}$$

A következő eredmény Lundberg (1926) nevéhez köthető:

$$\Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\theta}, \theta > 0. \tag{6.3}$$

A jelölések átismétlése után térjünk át a két approximációra.

6.1. De Vylder approximáció

A De Vylder approximáció, mely De Vylder (1978) nevéhez fűződik, azon az egyszerű, de zseniális ötleten alapul, hogy az U_t kockázati folyamatot helyettesítsük az exponenciális eloszlásokat tartalmazó $\tilde{U}_t$ kockázati folyamattal úgy, hogy

$$E[U_t^k] = E[\tilde{U}_t^k], k = 1,2,3.$$

Az $\tilde{U}_t$ kockázati folyamatot a $(\tilde{\lambda}, \tilde{c}, \tilde{\mu})$ vagy a $(\tilde{\lambda}, \tilde{\theta}, \tilde{\mu})$ paraméterek segítségével határozhatjuk meg. Mivel

$$\begin{aligned}
\log E[e^{i\nu U_t}] &= t\{i\nu c + \lambda(E[e^{-i\nu X_j}] - 1)\} \\
&= t\left\{i\nu c + \lambda\left(1 - i\nu\mu_1 - \frac{\nu^2}{2}\mu_2 + i\frac{\nu^3}{6}\mu_3 + o(\nu^3) - 1\right)\right\} \\
&= t\left\{i\nu(c - \lambda\mu_1) - \frac{\nu^2}{2}\lambda\mu_2 + i\frac{\nu^3}{6}\lambda\mu_3 + o(\nu^3)\right\},
\end{aligned}$$

kapjuk, (Cramér, 1945);

$$\begin{aligned}
E[U_t] &= (c - \lambda\mu_1)t = \theta\lambda\mu_1 t, \\
E[U_t^2] &= \lambda\mu_2 t + (\theta\lambda\mu_1 t)^2, \\
E[U_t^3] &= \lambda\mu_3 t + 3(\theta\lambda\mu_1 t)(\lambda\mu_2 t) + (\theta\lambda\mu_1 t)^3.
\end{aligned}$$

Tehát a $(\tilde{\lambda}, \tilde{\theta}, \tilde{\mu})$ paramétereknek ki kell elégíteniük a következő egyenleteket

$$\begin{aligned}
\theta\lambda\mu_1 &= \tilde{\theta}\tilde{\lambda}\tilde{\mu} \\
\lambda\mu_2 &= 2\tilde{\lambda}\tilde{\mu}^2 \\
\lambda\mu_3 &= 6\tilde{\lambda}\tilde{\mu}^3
\end{aligned}$$

ebből

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} &= \frac{\mu_3}{3\mu_2}, \\
\theta &= \frac{2\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2}\rho, \\
\tilde{\lambda} &= \frac{9\mu_2^3}{2\mu_3^2}\lambda.
\end{aligned}$$

Így a De Vylder approximáció

$$\Psi(u) \approx \Psi_{DV}(u) \stackrel{def}{=} \frac{1}{1+\tilde{\theta}} e^{-\left(\frac{\tilde{\theta}u}{\tilde{\mu}(1+\tilde{\theta})}\right)}, \tag{6.4}$$

amit a következőképp is írhatunk

$$\Psi_{DV}(u) = \frac{3\mu_2^2}{3\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3\theta} e^{-\frac{6\mu_1\mu_2\theta u}{3\mu_2^2+2\mu_1\mu_3\theta}} \tag{6.5}$$

vagy $\Psi_{DV}(u) = C_{DV}e^{-R_{DV}u}$, ahol

$$C_{DV} = \frac{3\mu_2^2}{3\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3\theta}, \text{ és } R_{DV} = \frac{6\mu_1\mu_2\theta}{3\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3\theta}. \tag{6.6}$$

Ebből következik, hogy ha a károk exponenciális eloszlásúak, akkor $\Psi_{DV}(u) = \Psi(u)$.

6.2. Beekman-Browers approximáció

A Beekman-Bowers approximáció a Beekman (1969) approximáció egy olyan módosítása, melyet Browers javasolt.

Legyen $H(u) = P\{-\inf_{t\geq 0} U_t \leq u | -\inf_{t\geq 0} U_t > 0\}$. Ekkor a (6.3) -ból következik, hogy

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta}(1 - H(u)). \tag{6.7}$$

Jelölje μ_H és σ_H^2 a megfelelő várható értéket és a szórásnégyzet. Grandell (1991) megmutatta, hogy

$$\mu_H = \frac{\mu_2(1+\theta)}{2\mu_1\theta}$$
$$\sigma_H^2 = \frac{\mu_2(1+\theta)}{2\mu_1\theta}\left(\frac{2}{3}\frac{\mu_3}{\mu_2} + \frac{\mu_2(1-\theta)}{2\mu_1\theta}\right).$$

Az ötlet Beekman-Browers approximáció mögött az, hogy $H(u)$-t helyettesítjük Γ-eloszlás függvényével $G(u)$-val úgy, hogy H és G első két momentuma egybeessen. Ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Psi_{BB}(u) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{1+\theta}(1 - G(u)) = \frac{1}{1+\theta}\int_u^\infty \frac{\beta^\gamma x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-\beta x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1+\theta}\int_{\beta u}^\infty \frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-x}\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{6.8}$$

ahol

$$\beta = \frac{2\mu_1\theta}{\mu_2 + \left(\frac{4\mu_1\mu_3}{3\mu_2} - \mu_2\right)\theta} \text{ és } \gamma = \frac{1+\mu_1\theta}{1 + \left(\frac{4\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2} - 1\right)\theta}.$$

Elmondható, hogy ez az approximáció és a De Vylder approximáció ugyanazon az ötleten alapul. Habár a nem teljes Γ-függvényt viszonylag egyszerű számolni, a De Vylder approximációt sokkal könnyebb használni.

A levezetésből következik, hogy $\Psi_{BB}(0) = \Psi(0)$. Továbbá könnyen látható, hogy exponenciális eloszlású károk esetén $\Psi_{BB}(u) = \Psi(u)$.

7. fejezet

Összefoglalás

Szakdolgozatomban azt igyekeztem megmutatni, hogy milyen sok módszerrel kaphatunk becslését egy biztosító intézet tönkremenésének valószínűségére. Ennek illusztrálásaként négy fejezeten keresztül a Cramér-Lundberg approximációt vezettük le különféle technikák és speciális eloszlások esetén. Majd kitekintésként, hogy lássuk, nem csak ezen approximáció segítségével kaphatunk jó közelítést a csődvalószínűségre, két másik formulát is ismertettünk az utolsó fejezetben.

Tehát az első fejezetben azt láthatjuk, hogy a klasszikus rizikófolyamat esetén milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a kockázati modell elemei, azaz a biztosító kezdeti tőkéje, a biztosító által a károkra kifizetett összeg, valamint a befolyt biztosítási díjak összege. Majd ebben a modellben először a nem tönkremenés valószínűségére mutattuk meg, hogy egy nem teljes felújítási egyenlet, majd ebből a csődvalószínűségre is. Kis módosítás után a felújítási elmélet alaptételének segítségével levezettük a Lundberg-kitevőt, melynek segítségével megkaptuk a Cramér-Lundberg approximációt. Ebben a fejezetben exponenciális eloszlású kárkifizetési összegek esetén a csődvalószínűségre egy explicit megoldást is találhattunk.

A következő fejezetben a kárkifizetések nagyságának egy speciális eloszlása esetén kaptunk explicit képletet a csődvalószínűségre. Itt először általánosan mutattuk meg differenciálegyenletek segítségével, hogy hogyan kaphatjuk meg a Lundberg-kitevőt és a Lundberg-egyenlőtlenséget, két különböző eloszlásba sorolva a kárkifizetések nagyságát a köztük eltelt időtartam hossza szerint. Majd a második alfejezetben mindkét eloszlást különböző paraméterű exponenciálisnak választva vezettük le az explicit megoldást a biztosító intézet csődvalószínűségére.

A harmadik fejezetben azt az esetet ismertettük, amikor a kárkifizetések száma módosított geometriai eloszlást követ. Itt az élettartam adatok elemzése során használt fogalmak segítségével korlátokat adtunk meg az összetett geometriai eloszlás farok eloszlására, mely korlátok a kárkifizetések nagyságának eloszlásától függtek. Majd a kapott eredményeket felhasználva a fejezet második felében a csődvalószínűségre megkaptuk a Cramér-Lundberg approximációt és a Lundberg-egyenlőtlenséget is.

A negyedik fejezetben a kárkifizetések nagysága diszkrét eloszlású, míg a kárkifizetések között eltelt időtartamok folytonos idejű binomiális eloszlást követtek. Ebben a modellben megmutattuk, hogy szakaszonként determinisztikus Markov-folyamatok segítségével, hogyan kaphatunk exponenciális martingált és ez az eredmény miként hasznosítható a csődvalószínűségek becslésére. A fejezet végére itt is megkaptuk a Cramér-Lundberg approximációt.

Az utolsó fejezetben a De Vylder és a Beekman-Browers approximációkat ismertettük röviden.

Összefoglalva, ha kíváncsiak vagyunk egy biztosító intézet tönkremenésének valószínűségére ritkán kaphatunk pontos értéket, ám egy jó becslés kiszámítására számos módszer közül válogathatunk.

Irodalomjegyzék

[1] Gordon E. Willmot, X.Sheldon Lin, *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*, Lecture Notes in Stitistics. 2000.

[2] Guoxin Liu, Ying Wang, Bei Zhang, 2005.*Ruin probability in the continous-time compound binomial model*,Insurance: Mathematics and Economics, 36, 303-316.

[3] Isaac K.M. Kwan, Hailing Yang, 2007. *Ruin Probability in a Threshold Insurance Risk Model*. Belgian Acturial Bulltin,Vol.7, No.1, 41-49.

[4] Jan Grandell, 2000. *Simple approximations of ruin probabilities*, Insurance:Mathematics and Economics 26, 157-173.

[5] Michaletzky György, *Kockázati folyamatok*, Jegyzet, Eötvös Loránd Tudomány Egyetem, Valószínűségelméleti és Statisztikai Tanszék, Budapest

[6] Michaletzky György, *Sztochasztikus folyamatok kivonatos jegyzet*

[7] Móri Tamás, *Élettartam adatok elemzése jegyzet*