

# NAGY FREKVENCIÁS KERESKEDÉSI ADATOK MATEMATIKAI ÉS EMPIRIKUS VIZSGÁLATA

SZAKDOLGOZAT

Írta: Gombár Tamás

Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc  
Kvantitatív Pénzügyek szakirány

Témavezető:

Márkus László  
egyetemi docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
Természettudományi Kar



BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM  
Közgazdaságtudományi Kar

2014

# Tartalomjegyzék

<b>1. A nagy frekvenciás kereskedés infrastruktúrája</b>	<b>3</b>
1.1. A nagy frekvenciás kereskedés „ökológiája”	3
1.2. „Fegyverkezési verseny”	4
1.3. A nagy frekvenciás és algoritmikus kereskedés működése	4
1.4. Nagy frekvenciás kereskedési stratégiák	5
1.4.1. Latency arbitrázs	5
1.4.2. Momentum stratégia	6
1.4.3. Tranzakciós költségekre épülő stratégiák	6
1.4.4. Eszközök és piacok közötti és ETF arbitrázs	6
1.5. A nagy frekvenciás kereskedés védelme és kritikája	7
1.5.1. Érvek mellette	7
1.5.2. Ellenérvek	8
1.6. Szabályozási lehetőségek	9
1.6.1. Az európai és amerikai kereskedési rendszer összehasonlítása	9
1.6.2. A HFT kereskedés korlátozása	10
<b>2. A nagy frekvenciás kereskedés hatásainak vizsgálata a matematikai pénzügyek eszközeivel</b>	<b>11</b>
2.1. Bevezetés	11
2.2. A modell feltevései	12
2.3. Modell	12
2.4. Következtetések	17
<b>3. A nagy frekvenciás árfolyamok dinamikáját leíró folyamatokra vonatkozó próbák</b>	<b>18</b>
3.1. Feltevések és alapfogalmak	18
3.2. Lévy-Itô felbontás	19
3.3. A statisztikai eszköztár felépítése	22
3.4. Milyen folyamatok vannak jelen az árfolyamban?	23
3.4.1. Vannak-e ugrások az árfolyamban?	25
3.4.2. Véges vagy végtelen az ugrási aktivitás?	26

---

3.4.3. Wiener folyamat jelenlétének tesztelése . . . . .	28
3.5. Az ugrási aktivitás becslése . . . . .	30
<b>4. Nagy frekvenciás kereskedési adatok modellezése NIG és VG folyama- tokkal</b>	<b>32</b>
4.1. Motiváció . . . . .	32
4.2. Exponenciális Lévy-modellek . . . . .	33
4.3. Variance Gamma és Normal Inverse Gaussian modellek . . . . .	34
4.4. Paraméterek becslése . . . . .	36
4.4.1. Momentum módszer . . . . .	36
4.4.2. Maximum likelihood becslés . . . . .	39
<b>5. Empirikus vizsgálatok</b>	<b>40</b>
5.1. A devizaárfolyamok empirikus tulajdonságai . . . . .	40
5.2. A hipotézisvizsgálati módszerek bemutatása . . . . .	43
5.3. A devizaárfolyamok, mint Normal Inverse Gaussian és Variance Gamma folyamatok . . . . .	46
<b>6. Forráskódok</b>	<b>50</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>52</b>

## 1. fejezet

# A nagy frekvenciás kereskedés infrastruktúrája

### 1.1. A nagy frekvenciás kereskedés „ökológiája”

Az első tőzsde 1531-ben Antwerpenben történt megalapítása óta közel 450 évig a tőzsdék olyan fizikai vetülettel rendelkező intézmények voltak, ahol erre képzett közvetítők és specialisták bonyolították a kereskedést. Az utóbbi néhány évtizedben viszont az értékpapírok kereskedésének módja jelentősen megváltozott. Az átalakulás nem csupán a kereskedés módjában következett be, mivel a platformok száma és diverzitása is jelentősen növekedett. Létrejött a kereskedési színterek piaca.

A technika fejlődése által a pénzügyi infrastruktúra napjainkban a fizika törvényeit feszegeti. A sebességért folytatott harc viszont nem ma kezdődött. A legenda szerint a Rothschild család postagalambjai által a waterlooi csata kimeneteléről előbb szerzett információt, mint a többi kereskedő. Ezt kihasználva, elterjesztve az angol vereséget, az államkötvényeiktől megszabaduló befektetők papírjait olcsón felvásárolva, óriási profitra tett szert.

Ezután közel száz évig, az 1970-es évekig a tőzsdei telegrafikus kattogó (*ticker*) volt az információk megszerzésének leggyorsabb eszköze, illetve a telefon az üzletkötés leggyorsabb módja. Napjainkban már nagy sebességű adatkapcsolattal rendelkező speciális célhardverek végzik a kereskedést. A kolokációs szerverközpontokban az adatokat átvivő üvegszálak kábelek hossza is centiméterre meghatározott a fénysebesség (300000 km/s) hatásai miatt. A felhasznált szerverek is a feladatra vannak tervezve. Mérnökök, programozók és ún. *kernel hackerek* dolgoznak azon, hogy a lehető legkisebbre szorítsák a kereskedést végző szerverek reakcióidejét. Ennek érdekében a legjobb és legdrágább hardvereket alkalmazzák, fizikai szinten programoznak áramköröket és logikai kapukat kereskedési célokra ún. FPGA csipeken, valamint testre szabják az operációs rendszert (jellemzően Unix/Linux) a minimális válaszidő eléréséért.

## 1.2. „Fegyverkezési verseny”

A nagy frekvenciás kereskedési ipar szereplői rendkívül magas összegeket hajlandók a kereskedési infrastruktúrára költeni. A fénysebesség miatt a távolság minden kilométere az információ közlésének fizikai alsó korlátját 3,3 mikroszekundummal növeli. A nagy frekvenciás kereskedők időskáláján ez nagyon sok idő, emiatt a fizikai távolságok csökkentésére nagy összegeket hajlandók fordítani. Ennek példája a Chicago és New York közötti szuper-gyors információs sztrádáért vívott verseny. A befektetők dollárok százmillióit költötték egy-egy néhány milliszekundummal gyorsabb vezeték kiépítésére, mely aztán csak néhány évig vagy hónapig vezette a listát. [20]

Az alábbi táblázat a fejlődés fázisait mutatja be:

Építő	Befejezés éve	Hosszúság	Gyorsaság	Technológia
Original Cable	1985	1609 km	14,5 ms	üvegszál vezetékek
Spread Networks	2010	1328 km	13,1 ms	üvegszál vezetékek
Mckay Brothers	2012 Július	1198 km	9 ms	11 GHz-es mikrohullám
Tradeworx	2012 December	1176 km	8,5 ms	11 GHz-es mikrohullám

Az iparban tapasztalható elvadult „fegyverkezési” verseny példája, hogy állítólag elméleti fizikusok már azon gondolkodnak, hogyan lehetne a híres láthatatlan, mindenén áthatoló részecske, a neutrínó segítségével akár a Föld középpontján keresztül is kommunikálni. Egy ilyen kommunikációs csatorna mindkét végpontján az adáshoz résecskegyorsítókra, a vételhez pedig a neutrínók észleléséhez szükséges gigantikus medencékre lenne szükség.

## 1.3. A nagy frekvenciás és algoritmikus kereskedés működése

A nagy frekvenciás kereskedés és az algoritmikus kereskedés fogalmak definíciói nem egyértelműen tisztázottak valamint néha hibásan egymás szinonimájaként használják őket. Ennek érdekében felsoroljuk néhány közös és eltérő jellemzőjüket.

### A nagy frekvenciás és az algoritmikus kereskedés közös jellemzői:

- Előre megtervezett és programozott kereskedési döntési mechanizmus
- Professzionális kereskedők alkalmazzák
- Valós idejű piaci adatok használata
- Megbízások automatizált benyújtása
- Megbízások automatizált kezelése
- Emberi beavatkozás hiánya
- Közvetlen piaci hozzáférés

**A nagy frekvenciás kereskedés jellemző tulajdonságai:**

- Nagyon nagy számú ajánlat
- Az ajánlatok nagyon gyors visszavonása
- Saját számlás kereskedés
- Közvetítő vétel-eladásból származó profit
- Pozíciók zárása minden nap végén
- Nagyon alacsony válaszidők (*latency*) fenntartása
- Kolokáció használata, azaz a kereskedést bonyolító szerverekhez nagyon közel történő telepítés
- Kizárólag magas likviditású eszközök kereskedelme

**1.4. Nagy frekvenciás kereskedési stratégiák**

A nagy frekvenciás kereskedés nem egy stratégia, sokkal inkább egy fejlett technológiai infrastruktúra használatára utal, melynek felhasználásával tradicionális kereskedési stratégiák kerülnek implementálásra. Emiatt az egyes kereskedési stratégiák felülvizsgálata és szabályozása lényeges. Magának a HFT infrastruktúrának korlátozása a piac likviditási és hatékonysági igényeit hátrányosan érintené. Viszont számos nagy frekvenciás kereskedésben használt stratégia alkalmas a piac integritásának csökkentésére és az információs aszimmetriával való visszaélésre. Továbbá a HFT elősegíti az ilyen stratégiák megvalósítását, emiatt pedig szabályozási szempontból rendkívül fontos a felülvizsgálatuk. A nagy frekvenciás kereskedési stratégiák rendkívül sokrétűek. A teljesség igénye nélkül ismertetek néhányat.

**1.4.1. Latency arbitrázs**

A HFT algoritmusok ágát, ahol a profit forrása elsősorban a piaci adatokhoz és a kereskedési platformhoz való gyorsabb hozzáférés jelenti, *latency* arbitrázsnek nevezik. Az ilyen kereskedők elsődleges és azonnali adatforrásokat, kolokációt és milliszekundumos illetve nanoszekundumos döntéshozatalokra specializált infrastruktúrát használnak. Gyakori módszer az amerikai legjobb vételi és eladási ajánlatokat tartalmazó NBBO (National Best Bid and Offer) rendszerrel szembeni sebességelőny kihasználása.

Ennek a kereskedési formának egyik legnagyobb ellenzője a Themis Trading, akik könyvben [21] és számos tudományos cikkben tiltakoztak ellene. Állításuk szerint a HFT kereskedők tudják előre milyen irányba fog mozdulni az NBBO, és ezt kihasználva belépnek a piacra az NBBO árfolyamon szereplő likviditással szemben. Például egy vételi ajánlat

esetén az arbitrázsor eladja drágábban az eszközt az eredeti áránál. Ezt az fenti érvelést a Tradeworx cég azzal támadta, hogy csupán a késedelem alapján nem lehet kereskedni. Szerintük az NBBO reakcióidejét nem lehet kihasználni, mivel ha a HFT kereskedő tudja is milyen irányba fog mozdulni az árfolyam, ezzel nem tud visszaélni mert az ajánlati könyvben nincs hozzá elég likviditás [15].

#### **1.4.2. Momentum stratégia**

Az algoritmikus kereskedők momentum stratégiája sok szempontból megegyezik a klasszikus napon belüli technikai kereskedéssel. Ezek a stratégiák más HFT stratégiákkal szemben nem törekednek a likviditás biztosítására vagy a piaci hatékonyságok kihasználására [15]. A döntési mechanizmusok általában agresszívek, magas a likviditás igényük és céljuk a piaci trendek és mozgások kihasználása. Az ilyen algoritmusok befolyásolhatják a piacot és részben az önbeteljesítő hatásukból próbálnak profitot hajtani.

#### **1.4.3. Tranzakciós költségekre épülő stratégiák**

Néhány kereskedési platform a likviditást biztosító kereskedők csalogatása céljából aszimmetrikus költségszerkezetet vezetett be. Eszerint a likviditást biztosító passzív kereskedőknek alacsonyabb tranzakciós költségeket számítanak fel, sőt még visszatérítést is kaphatnak.[15] Ezzel szemben az agresszív kereskedőknek magasabbak a tranzakciós költségei. A platform üzemeltetőjének előnye az ilyen típusú költségszerkezetből onnan ered, hogy a piacnak likviditást biztosító szereplők tranzakciós költségek általi csalogatása növeli a likviditást és a passzív limitáras megbízást adó kereskedők számát. Emellett a beadott limitáras megbízások magas számáért kompenzálják őket az alacsonyabb tranzakciós költségek és visszatérítések.

#### **1.4.4. Eszközök és piacok közötti és ETF arbitrázs**

Klasszikus kereskedési stratégiának számít a piacok közötti illetve erős kapcsolatban lévő eszközök kereskedése által a piaci hatékonyságok kihasználása. Amennyiben egy eszköznek különböző piacokon különbözik az ára, akkor a kereskedő az olcsóbb megvételével és a drágább eladásával azonnali profitra tud szert tenni. Ez a stratégia a HFT megjelenésével új időskálára tolódott, és még inkább kiélezi a sebességért folytatott fegyverkezési versenyt. Az európai piac magasabb fragmentáltsága és a kereskedési platformok növekvő száma növeli az ilyen lehetőségek megjelenésének esélyét. A piacok közötti arbitrázs mellett jelentős a különböző szoros kapcsolatban lévő eszközök közötti arbitrázs is. Például egy opció túl magas ára esetén, annak eladásával és az alaptermék vételével arbitrázs lehetőséget állhat elő. Ugyanígy az ETF arbitrázs, az ETF és az alaptermék árának változása közötti reakcióidőt használja ki.

## 1.5. A nagy frekvenciás kereskedés védelme és kritikája

### 1.5.1. Érvek mellette

#### 1. A HFT algoritmusok elősegítik és biztosítják az eszközárak konzisztenciáját

A devizapiac empirikus vizsgálatában Chaboud, Chiquoine, Hjalmarsson és Vega [16] cikkében megmutatja, hogy a két leglikvidebb devizapár (euró-dollár és euró-yen) esetén a számítógépes algoritmusok jóval gyorsabbak és hatékonyabbak a háromszög-arbitrázs felismerésében és kihasználásában. Emellett az algoritmikus kereskedés segítségével a befektetők könnyebben és egyszerűbben lebonyolíthatnak mindkettejük számára hasznos ügyleteket. Ez társadalmilag is hasznos hatás, hiszen általa a pénzügyi eszközök azoknak a kezébe kerülnek, akik leginkább értékesnek tartják őket. Ebből a szempontból a kereskedési algoritmusok hatásai pozitívak és kétrétűek:

- Kiterjesztik a kereskedők kognitív határait, és globális szempontból a kereskedésben részt vevő ágensek (emberek és gépek) döntéshozatalon keresztüli hozzáadott értéke növekszik
- Csökkentik a partner keresésének költségét és idejét, valamint ezen keresztül a tranzakciós költségeket is

#### 2. A HFT algoritmusok csökkentik a piac fragmentáltságát

Az utóbbi évtizedben a piac töredezettsége nőtt, azzal, hogy számos új kereskedési platform jelent meg. Egy kereskedő elsődleges szempontja a kereskedés helyének megválasztásakor, hogy találjon megfelelő mennyiségű és minőségű partnert az adott platformon. Ez az egyéni szempont egyértelműen a centralizáltság felé tolja a piacot. Ezenkívül további szempontjai lehetnek egy kereskedőnek a szabályozási, adózási és tranzakciós kérdések. Ez utóbbi szempontokban a kevésbé centralizált platformok vonzóbbak a befektetőknek, és emiatt akár a magasabb likviditást is hajlandóak feláldozni az alacsony tranzakciós költségeikért. A különböző kereskedési platformok között piaci verseny alakult ki, ahol a legkülönbözőbb tranzakciós szabályok és költségekkel próbálják a kereskedőket magukhoz csalogatni. Tovább bonyolítja a helyzetet az algoritmikus és egyszerű kereskedők közötti ellentét. A tőzsdék és kereskedési platformok úgy igyekeznek egyensúlyozni a szabályozásukban és tranzakciós költségeikben, hogy az egyszerű és algoritmikus kereskedők gyakran ellentétes igényeit is kielégítsék.



### 1.5.2. Ellenérvek

#### 1. Piaci manipuláció

Számos HFT stratégia eredendően rejtett szándékú és az ügyletek valós célját igyekezik titokban tartani a piac többi szereplőjétől. Ebből a célból jöttek létre az ún. *Dark Pool* platformok. A nagy frekvenciás kereskedők részt vesznek a piaci manipulációban [12]. Ennek 3 formáját különböztetjük meg:

- **Eltömítés** (*stuffing*)

Óriási mennyiségű ajánlat beadása és ezzel torlódás létrehozása. Ekkor az egyszerű kereskedő nem látja át mi történik a piacon és nehézkessé válik számára a kereskedés. A gyorsabb kereskedő, akinek jobb hozzáférése a kereskedési információkhoz és át tudja látni mi történik a piacon, így profitra tud szert tenni a lassú kereskedő kárára.

- **Kifüstölés** (*smoking*)

Ekkor a HFT kereskedő rendkívül előnyösnek tűnő limitáras megbízásokat tesz, azzal a szándékkal, hogy a lassú kereskedőket a piacra csalogassa. Ezek után gyorsan visszavonja ezt az ajánlatot és a lassú kereskedők számára hátránysabbakkal helyettesíti, abban a reményben, hogy a lassú kereskedők piaci áras megbízásait kihasználva profitra tud szert tenni.

- **Átejtés** (*spoofing*)

Tegyük fel, hogy a nagy frekvenciás kereskedő vásárolni szeretne. Ekkor ellentmondásos módon limitáras eladási megbízásokat ad a legjobb vételi ajánlat felett. Nem célja realizálni ezeket az ajánlatokat és a sebességelőnyéből adódóan képes ezeket az ügylet létrejötte előtt visszavonni. Az ilyen nagy volumenű limitáras eladási megbízások sorozatának valódi célja, hogy a hirtelen trend egy ijedt befektetőt limitáras eladási ajánlat beadására ösztönözzön. Ezután a nagy frekvenciás kereskedő visszaélve előnyével alacsonyabb áron tud vásárolni.

#### 2. Nem tökéletes verseny

A HFT infrastruktúra fenntartása jelentős fix költséggel jár. Ennek következtében [22] egyensúlyelméleti módszerekkel amellet érvel, hogy míg a nagy volumenben kereskedő szereplőknek megéri a HFT infrastruktúrákba befektetni, a jóval nagyobb számú kis volumenű befektetőnek nem. Ennek következtében egyensúlyban kis számú nagy frekvenciás, nagy volumenben kereskedő szereplő lesz a piacon illetve sokkal több lassú, kis volumenben kereskedő.

Ezt az állítást a gyakorlat is igazolni látszik, mivel egy felmérés szerint az Amerikában bejegyzett kb. 20000 befektetési tevékenységet folytató cégnek mindösszesen 2%-a vesz részt nagy frekvenciás kereskedésben [15]. Ezzel szemben a HFT cégek a kereskedési volumen 73%-áért felelősek.

### 3. Rendszerkockázat

A nagy frekvenciás kereskedésben használt stratégiák hasonló jellegűek és erősen korreláltak, óriási volumenben kereskednek, ezáltal csökkentik a piac diverzitását, illetve ebből következően növelik a rendszerkockázatot. Chaboud [16] szerint a HFT stratégiák sokkal kevésbé heterogének, mint a klasszikus kereskedésben felhasználtak. Ezt azzal bizonyítja, hogy a 2007. augusztus 16-án Dollár-Yen piacon történt sokk során összehasonlítja az algoritmikus és klasszikus módon kötött ügyleteket. Itt kimutatja, hogy a számítógépek agresszívan egymás hatását erősítve adták el a dollárt, és jóval magasabb volt a viselkedésükben a korreláció mint az emberi kereskedésben. Ezáltal aznap a számítógépes *order flow* rövid időre destabilizálta a dollárt, amit aztán az emberi kereskedők megfordítottak.

A 2010. május 6-án bekövetkezett *Flash Crash* is tekinthető az algoritmikus kereskedés által teremtett rendszerkockázat egy bizonyítékának. Az államadóssági válság egyik következményeként aznap az ajánlati könyv mélysége az átlagnál alacsonyabb volt. Ennek következtében, amikor egy fundamentális kereskedő egy jelentős méretű 4,1 milliárd dolláros futures pozíció lezárásának algoritmikus módon történő lebonyolításába kezdett, elszabadultak a számítógépek. Az algoritmus nem csökkentette a kereskedett volument a magas árhatás ellenére. Kezdetben a megbízásokat felfogták a HFT és egyéb kereskedők, később viszont a többi algoritmus is lavinaszerű eladásba kezdett. Ezek után a pánik átterjedt a részvénypiacra is, és a DJIA 9%-os esését eredményezte.

Megállapíthatjuk, hogy az algoritmusok általi kereskedés jelentős rendszerkockázattal rendelkezik. A komplex, egymást befolyásoló és gerjesztő ágensek kölcsönhatásai elméletileg is megjósolhatatlanok. Továbbá a sebességükből adódóan az emberi beavatkozás lehetősége is korlátozott. Mindemellett az algoritmusok folyamatosan fejlődnek és a programozók a korábbi negatív tapasztalatokból okulva feltehetően egyre több vészféket építenek be. Ennek következtében az egyébként magas rendszerkockázat egy mérsékelt negatív trendjében reménykedhetünk.

## 1.6. Szabályozási lehetőségek

### 1.6.1. Az európai és amerikai kereskedési rendszer összehasonlítása

- Az amerikai szabályozó (U.S. Regulation National Market System) létrehozta az NBBO (National Best Bid and Offer) rendszert. Az összes kereskedési platformnak közölnie kell az ajánlati könyvében szereplő legjobb vételi és eladási ajánlatot egy SIP (Securities Information Processor) rendszerrel, ami összesíti az adatokat és minden eszközre kiszámolja az NBBO értékeket. Emellett a rendszeren keresztül az NBBO árfolyamokon történő kereskedés is lehetséges.

- A szabályozó emellett kötelezi a kereskedési platformokat, hogy az NBBO rendszerben szereplő ajánlattól rosszabbon nem jöhet létre bennük ügylet. Amennyiben egy kereskedési platformon nincs jobb ajánlat az NBBO-nál, akkor kötelező az ajánlat többi platformra történő továbbítása (trade-through rule). Ezáltal a szabályozó kötelezi a kereskedési platformokat a rendszereik összekapcsolására.
- Az európai szabályozó, szemben az amerikaival, nem hozott létre egy pán-európai NBBO rendszert, csupán irányelveket fogalmazott meg. Ezek szerint minden befektési intézménynek, amikor az ügyfele nevében jár el, a költség, sebesség, tranzakciós költség, elszámolás szempontjából törekedni kell a lehető legjobb ügylet megkötésére.
- Szemben az amerikai szabályozással itt nem a kereskedési platformra vonatkozik a szabályozás, hanem a tranzakciót indító pénzügyi intézményre. Ennek az intézmények két módon tudnak eleget tenni. Egyik lehetőség, hogy létrehoznak egy NBBO jellegű közös platformot, ami bizonyítottan a legjobb ajánlatot tartalmazza. A másik út pedig, hogy minden egyes tranzakciónál egyedi döntést hoznak.
- Az európai és amerikai szabályozó vállalt célja, hogy az újabb kereskedési platformokat versenyképesé tegye a tőzsdékkel, és ezzel növelje a költségek és szolgáltatások terén a versenyt.

### 1.6.2. A HFT kereskedés korlátozása

Mary Schapiro az amerikai SEC korábbi igazgatója keményen kritizálta a HFT ipart. Véleménye szerint a nagy frekvenciás kereskedés negatív hatása az értékpapírpiacon stabilitására rendkívül nagy, mindeközben semmilyen speciális szabályozás nem vonatkozik rájuk. A HFT kereskedők a beadott ajánlataik 95%-át visszavonják, ami felveti a piaci manipuláció gyanúját. Schapiro az ajánlatok visszavonására vonatkozó tranzakciós díj bevezetését javasolta. Emellett azt is felveti, hogy a sebesség növelése érdekében a nagy frekvenciás kereskedők a kockázatkezelési folyamatokat is korlátozzák, ezáltal növelve az összeomlások esélyét. Javaslatára szerint a HFT ipar résztvevői kötelezhetőek lennének, hogy alacsony likviditású, magas volatilitású kritikus időszakokban beszálljanak a kereskedésbe [23].

Az SEC igazgatójának kritikáit a HFT ipar negatívan fogadta. Véleményük szerint a magasabb tranzakciós költségek csökkentenék a likviditást és a spread-eket, ezáltal kárt okoznának a kisbefektetőknek. A nagy frekvenciás kereskedési lobbij Schapiro javaslatainak többségét „megtorpedózta” [21].

## 2. fejezet

# A nagy frekvenciás kereskedés hatásainak vizsgálata a matematikai pénzügyek eszközeivel

### 2.1. Bevezetés

A klasszikus közgazdaságtanban az arbitrázsra egy hasznos folyamatként tekintenek, vagyis mint a félreárazások és piaci hatékonytalanságok eliminálásának eszközére. Az algoritmikus és nagy frekvenciás kereskedést ennek a piaci önszabályozó folyamatnak egy hatékony végrehajtójaként kezelik. Számos empirikus vizsgálat igazolta, hogy a számítógépes kereskedés növeli a piaci likviditást, csökkenti a bid-ask spread-eket és a volatilitást. Mindeközben sokan vitatják azt, hogy a nagy frekvenciás kereskedés hasznos a piacok számára. A támadók leggyakoribb érvei, hogy ezek a kereskedők tulajdonképpen növelik a volatilitást, ráadásul piaci árelmozdulásokat tudnak indukálni, amelyekből aztán profitot szereznek.

Az általam bemutatni kívánt modellben a szerzők azt az állítást járják körül a matematika eszközeivel, amely szerint a nagy frekvenciás kereskedés tulajdonképpen bennfentes kereskedésnek minősül. A klasszikus információszimmetriához képest annyi a különbség, hogy ebben az esetben nem a termék fundamentális áráról rendelkeznek többletinformációval, hanem az *order flow* folyamatáról. Jarrow és Protter továbbiakban vázolt modellje a lassú és gyors kereskedők közötti különbséget matematikailag úgy próbálja megfogni, hogy a lassú kereskedők stratégiái előrejelezhető sztochasztikus folyamatok, míg a gyors kereskedőké nem feltétlenül előrejelezhetőek, csak azt tesszük fel róluk, hogy *opcionálisak*.

A valószínűségelméletben és a pénzügyi matematikában az igazságos játékot vagy piacot leíró objektumok a martingálok. A vázolt modell lényege, hogy a nagy frekvenciás kereskedők úgy torzítják a piacot, hogy azon nem lesz martingálmérték, és ezáltal a gyors

kereskedők állandó arbitrázslehetőséget szereznek.

## 2.2. A modell feltevései

Feltesszük, hogy a vizsgált piac versengő és surlódásmentes. Nincsenek bid-ask spreadek és teljesen likvid a piac. A piaci szereplőkről feltesszük, hogy árelfogadóak és minden kereskedő számára tökéletes a piac. Kétféle kereskedőt különböztetünk meg: az egyik a közönséges (lassú) - mint egy nyugdíjalap vagy kisbefektető -, a másik pedig a nagy frekvenciás kereskedő. A kétféle szereplőnek különbözik a kereskedési sebessége, illetve az egy időpontban a rendelkezésükre álló információ is.

Matematikailag a lassú kereskedők befektetési stratégiáját egy előrejelezhető sztochasztikus folyamatként reprezentáljuk. Szemléletesen, minden időpillanatban tudnia kell a következő pillanathoz tartozó stratégiáját, hogy átalakíthassa a portfólióját. Ezzel szemben ha a nagy frekvenciás kereskedők egy jól definiált piaci anomáliát észlelnek, azonnal és elsőként képesek erre reagálni, mielőtt bármelyik másik szereplő reakciója megjelenne az árfolyamban. Emiatt a nagy frekvenciás stratégiáról nem tesszük fel, hogy előrejelezhető, csupán azt, hogy *opcionális* az árfolyam folyamatára nézve. A két stratégiát leíró folyamat különböző jellegéből fogjuk modellezni a kereskedők közötti sebességbeli eltéréseket.

Továbbá tegyük fel, hogy ugyanarra a piaci jelzésre az összes nagy frekvenciás kereskedő hasonlóan reagál, és ezáltal úgy viselkedik, mint egy nagy volumenben kereskedő szereplő. Mindeközben a mennyiség függvényében árelmozdító hatást is kifejtenek. Ezt a fajta piaci viselkedést igazolják a nagy frekvenciás ún. alpha-generáló stratégiák, mint az index arbitrázs vagy a momentum kereskedés. A lassabb kereskedők is látják a hasonló piaci anomáliákat, viszont nem tudnak kellő sebességgel kereskedni ahhoz, hogy nyereséget realizálhassanak.

A kereskedés módjáról feltesszük, hogy folytonos a  $t \in [0, \infty)$  intervallumon. A részvényárról feltesszük, hogy nem fizet osztalékot, a kockázatmentes eszköz pedig a pillanatnyi spot kamatlábbal kamatozik. Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy a spot kamatláb állandó és nulla.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a vázolt modellben a nagy frekvenciás kereskedők rendkívüli profitra tudnak szert tenni a közönséges kereskedők kárára.

## 2.3. Modell

A modellt a  $(\Omega, P, \mathcal{F}, F)$  filtrált valószínűségi mezőn tekintjük. A  $P$  mérték az objektív statisztikai mérték, a kockázatszemleges mértéket később vezetjük be. A kereskedés folytonos időben történik, egy surlódásmentes és versengő piacon. A valószínűségi mezőn az alábbi adaptált folyamatokat definiáljuk:

**Részvényár:** Az  $S_t$  kockázatos részvényárról feltesszük, hogy adaptált a valószínűségi mezőre, nem fizet osztalékot. Továbbá a részvényárfolyamot nagy frekvenciás kereskedők jelenléte nélkül a

$$dS_t = S_{t-}\sigma(S_{t-})dZ_t \quad (2.1)$$

dinamika írja le. Itt a  $\sigma(\cdot)$  a volatilitást megadó függvény,  $S_{t-}$  a részvényárfolyam baloldali határértéke  $t$  időpontban, és  $Z$  pedig egy szemimartingál az  $\mathcal{F}$  filtrációban. A fenti árfolyam dinamikát tekinthetjük a részvény fundamentális értékének. Amennyiben nagy frekvenciás kereskedők is jelen vannak a piacon, akkor az árfolyam dinamikáját a

$$dS_t = S_{t-}\sigma(S_{t-})dZ_t + \eta(S_{t-})dX_t \quad (2.2)$$

egyenlet adja meg. Ebben az esetben az  $\eta(\cdot) > 0$  függvény az árfolyam nagy frekvenciás módon kereskedett mennyiségre való érzékenységét jelenti. A nagy frekvenciás kereskedés hatásait a dinamikában az  $\eta(S_{t-})dX_t$  taggal próbáljuk megfogni, ami interpretálható mint a mennyiséggel arányos árelmozdító hatás.

**Közönséges (lassú) kereskedő:** A  $H$  folyamat jelölje a közönséges kereskedő egy lehetséges kereskedési stratégiáját. Erről a folyamatról feltesszük, hogy egy előrejelezhető, megengedett és önfinanszírozó stratégia a részvény és a kockázatmentes eszköz piacán.

**Nagy frekvenciás kereskedő:** Jelölje továbbá  $X$  a nagy frekvenciás kereskedők kollektív stratégiáját. Erről feltesszük, hogy egy olyan tiszta ugró szemimartingál folyamat, amire teljesül, hogy adaptált, cádlág, önfinanszírozó és megengedett stratégiát ír le. Fontos része a modellnek, hogy az  $X$  stratégiáról nem tételezzük fel, hogy előrejelezhető, ami a nagy frekvenciás kereskedésnek azt a tulajdonságát hivatott megfogni, hogy az ügyleteket indító jelzések előre nem várt hirtelen ugrásokként jelentkeznek.

Az egyszerűség kedvéért legyen, hogy  $\eta \equiv 1$ . Ezzel a modell általánosságát némiképp csökkentjük, hiszen a keresleti görbe meredekségét állandónak tekintjük, viszont a bizonyítandó állításokat a feltevés lényegileg nem befolyásolja. Tehát a továbbiakban a részvényár dinamikáját az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlettel írjuk le.

$$dS_t = S_{t-}\sigma(S_{t-})dZ_t + dX_t \quad (2.3)$$

Ennek az létezik megoldása és a volatilitást megadó függvénytől függ. Abban az esetben, ha  $\sigma(x) \equiv 1$ , akkor az árfolyam dinamikája egyszerűen az alábbi sztochasztikus exponenciális formulára vezet:

$$S_t = \mathcal{E}_X(Z)_t = \mathcal{E}(Z)_t \left( \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(Z)_s} d(X_s - [X, Z]_s) \right) \quad (2.4)$$

Az eddig definiált részvényár dinamika még nem zárja ki a negatív részvényárak meg-

jelenését. Ennek elkerülése érdekében bevezetünk még néhány kikötést:

1. Ha  $\Delta X_s \Delta Z_s \neq 0$ , akkor feltesszük, hogy  $\Delta X_s \geq -(S_{s-} \sigma(S_{s-}) \Delta Z_s)$ .
2. Ha  $\Delta X_s \Delta Z_s = 0$ , akkor pedig  $\Delta x_s \geq -s_{s-}$ .

Mivel az  $S$  folyamat az  $X$  kereskedési stratégia driftje által még negatívvá válhat, ezért feltesszük, hogy az  $X$  folyamat driftje 0. Ezenkívül kössük ki, hogy a piac nem teljes, tehát nem létezik egyértelmű martingál mérték. Ehelyett a piac választ a lehetségesek közül egyet és ezzel árazza a derivatív termékeket.

**2.3.1. Definíció** (Alapfeltevések). *A következő feltételekből indulunk ki:*

1.  $Z$  és  $X$  szemimartingálok.
2.  $X$  tiszta ugró folyamat, továbbá  $[X, Z] = 0$ , vagyis az  $X$  és  $Z$  folyamatoknak nincs közös ugrásuk.
3. A  $dS_t = S_{t-} \sigma(S_{t-}) dZ_t$  egyenlet megoldása egyértelmű feltéve, hogy  $S_0 > 0$ .
4. Az  $X$  folyamat a nagy frekvenciás kereskedés stratégiáját reprezentálja (egyaránt lehet pozitív és negatív).
5. Nagy frekvenciás kereskedők jelenléte esetén az árfolyam dinamikája:  $dS_t = S_{t-} \sigma(S_{t-}) dZ_t$ .
6. A közönséges kereskedő  $H$  kereskedési stratégiája előrejelezhető folyamat (adaptált, balról folytonos, jobbról határértékkel rendelkező).  
Jelölése:  $t \geq 0$  időpontban  $H_{t-}$
7. Jelölje  $X^*$  a nagy frekvenciás kereskedő stratégiáját, ahol  $X_s^* = X_{s-}$  a lassú ügyleteknek megfelelő komponens, míg  $X_s^* = X_s$  (itt nincs határérték) a nagy frekvenciás kereskedésnek megfelelő komponens. Ebben az esetben a kereskedők ismerik az ügyleteik árelmozdító hatását is és ennek tükrében határozzák meg a stratégiát.

A modellben megjelenő szereplők és folyamatok ismeretében felírjuk az egyes szereplők megengedett önfinanszírozó stratégiáit.

**2.3.2. Lemma** (A kereskedők értékfolyamatai). *Az alábbi 3 esetet különböztetjük meg:*

1. Közönséges kereskedők, nagy frekvenciás kereskedők jelenléte nélkül:

$$V_H(t) = H_0 + \int_0^t H_{s-} dS_s = H_0 + \int_0^t H_{s-} S_{s-} \sigma(S_{s-}) dZ_s \quad (2.5)$$

2. Közönséges kereskedők, nagy frekvenciás kereskedők jelenléte esetén:

$$V_H(t) = H_0 + \int_0^t H_{s-} dS_s = H_0 + \int_0^t H_{s-} S_{s-} \sigma(s_{s-}) dZ_s + \int_0^t H_{s-} dX_s \quad (2.6)$$

3. Nagy frekvenciás kereskedők:

$$\begin{aligned}
 V_X(t) &= X_0 + \int_0^t X_s^* dS_s & (2.7) \\
 &= X_0 + \int_0^t x_{s-S_{s-}\sigma(S_{s-})} dZ_s + \int_0^t X_s dX_s \\
 &= X_0 + \int_0^t X_{s-} S_{s-} \sigma(S_{s-}) dZ_s + \frac{1}{2} \left( X_t^2 + \sum_{s \leq t} \Delta X_s^2 \right)
 \end{aligned}$$

**Bizonyítás:** Az első két állítás következik az alapfeltevésben bevezetett jelölésekből. Kizárólag a 3. egyenlet második fele szorul bizonyításra. Tekintsük a következő integrált:  $\int_0^t X_s dX_s$ . Parciális integrálással:

$$\int_0^t X_{s-} dX_s = \frac{1}{2} (X_t^2 - [X, X]_t). \quad (2.8)$$

Mivel  $\int_0^t X_s dX_s = \int_0^t (X_{s-} + \Delta X_s) dX_s$  és

$$\begin{aligned}
 \int_0^t X_s dX_s &= \frac{1}{2} (X_t^2 - [X, X]_t) + \sum_{s \leq t} \Delta x_s^2 & (2.9) \\
 &= \frac{1}{2} (X_t^2 - [X, X]_t^c + \sum_{s \leq t} \Delta X_s^2)
 \end{aligned}$$

Észrevéve, hogy  $[X, X]_t^c = 0$  1 valószínűséggel az alapfeltevésből és  $[X, X]_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s^2$  bizonyítottuk az állítást. ■

Az alábbiakban azt fogalmazzuk meg, hogy a nagy frekvenciás kereskedők jelenlétének hiányában a piac jól működik:

**2.3.3. Definíció.** *(Jól működő piacok)* Létezik egy ekvivalens  $Q$  martingál mérték, ami mellett az alábbi két folyamat lokális martingál:

$$dS_t = S_{t-} \sigma(S_{t-}) dZ_t \quad (2.10)$$

$$dS_t = S_{t-} \sigma(S_{t-}) dZ_t + dX_t \quad (2.11)$$

Ebből a feltevésből következik, hogy a piac jól működik, abban az értelemben, hogy nincs arbitrázs lehetőség a közönséges kereskedők számára. A fenti egyenletet átalakítva kapjuk:

$$dZ_t = \frac{1}{S_{t-} \sigma(S_{t-})} dS_t \quad (2.12)$$



Azt látjuk, hogy  $Z$  kifejezhető, mint egy lokális martingál szerinti sztochasztikus integrál:

$$dZ_t = \frac{1}{S_{t-}\sigma(S_{t-})} dS_t. \quad (2.13)$$

Mivel az integrandus balról folytonos és lokálisan korlátos, ezért ő maga is egy lokális martingál a  $Q$  mérték szerint. Továbbá szintén a fenti egyenlet átrendezéséből és ugyanezzel az érveléssel látjuk, hogy  $X$  is lokális martingál a  $Q$  mérték szerint.

Általában teljesül, hogy nincs arbitrázs, ha létezik egy ekvivalens  $Q$  valószínűségi mérték, ami mellett az árfolyam lokális martingál. Most azt látjuk be, hogy nem létezik egy ilyen mérték az  $(S, H, X)_t$  vektorfolyamatra.

**2.3.4. Tétel** (Rendkívüli profit lehetősége). *A korábbi feltevések mellett az alábbi állítások igazak:*

1. *A közönséges kereskedők számára nincs arbitrázs lehetőség.*
2. *A nagy frekvenciás kereskedők rendkívüli profitra tesznek szert.*
3. *Nem létezik olyan ekvivalens martingálmérték, ami mellett a közönséges és a nagy frekvenciás kereskedők értékfolyamatai is lokális martingálok lesznek.*
4. *Ha a nagy frekvenciás kereskedők stratégiái előrejelezhető folyamatok, akkor a rendkívüli profit elérése nem lehetséges.*

**Bizonyítás:**

- A feltevésből, hogy a piac jól működik, következik, hogy létezik egy  $Q$  valószínűségi mérték, hogy a 2.10 egyenletek lokális martingálok.
- Legyen  $Q$  a korábbi feltevésben szereplő mérték, ami mellett az árfolyamok lokális martingálok. Ekkor az ismert eredményekből a közönséges kereskedők számára nincs arbitrázs, hiszen az értékfolyamataik szintén lokális martingálok lesznek. Ezzel az (1) állítást beláttuk.
- A  $Q$  mérték alatt a nagy frekvenciás kereskedők értékfolyamata szubmartingál, a benne szereplő nemnegatív második tagja miatt. Ebből következik (2) állítás.
- A (4) állítás abból következik, hogy az  $X_s^* = X_{s-}$  esetben a kapott értékfolyamat már  $Q$ -lokális martingál lesz..
- A (3) állítás igazolásához tegyük fel, hogy létezik egy  $Q^*$  valószínűségi mérték, ami mellett minden értékfolyamat lokális martingál. A korábbi érvelés felhasználásával teljesülnie kell, hogy ekkor  $Z$  és  $X$  eszerint a mérték szerint szintén lokális martingál lesz. Abban az esetben, ha a plusz tag  $\int_0^t X_{s-} dX_s$  volna, akkor ez nyilvánvaló lenne.

Itt viszont  $\int_0^t X_s dX_s$  szerepel, és a sztochasztikus integrál integrandusa opcionális folyamat és nem előrejelezhető. Az értékfolyamatokra vonatkozó állítás miatt elég az alábbi  $Y$  folyamatot tekintenünk:

$$Y_t = \frac{1}{2}(X_t^2 + [X, X]_t) \tag{2.14}$$

- Tehát  $Y$ -nak mindhárom egyenletben lokális martingálnak kell lennie. Viszont tudjuk, hogy  $Y_0 = 0$  és  $Y_t \geq 0$  minden  $t \geq 0$  időpontra.
- Az előző két állítás csak akkor lehet igaz, ha 1 valószínűséggel  $Y \equiv 0$ , ami viszont ellentmondás, mivel  $X \neq 0$ .

■

## 2.4. Következtetések

A közönséges kereskedők értékfolyamatai martingálok, mivel ők csak azután tudnak kereskedni, miután az információt megszerezték, és az információ által indukált nagy frekvenciás ügyletek és ezek hatása is realizálódott. Mivel a nagy frekvenciás kereskedés az árfolyamokat is befolyásolja, és az elmozdulás iránya is ismert, ezáltal önbeteljesítő profitokra tehetnek szert. Az, hogy valójában a nagy frekvenciás kereskedők számára valódi arbitrázs jön-e létre, a piac tulajdonságaitól is függ. Azt is beláttuk, hogy a nagy frekvenciás kereskedés által generált profit a közönséges kereskedők kárára keletkezik. Ezáltal piaci hatékonyságtalanság jön létre. A modellben a rendkívüli profitok csak akkor lehetségesek, ha a nagy frekvenciás kereskedők folyamatai opcionálisak és nem előrejelezhetőek. Ez magyarázza a manapság megfigyelhető nanoszekundumokért vívott fegyverkezési versenyt a HFT iparban.

Számos empirikus kutatás állítja, hogy a nagy frekvenciás kereskedés növeli a piac hatékonyságát, mivel növeli a likviditást, valamint csökkenti a bid-ask spread-eket és a volatilitást. Ezzel szemben a fent vázolt spread-ek és likviditási korlátok nélküli egyszerű modellben is rendkívüli profit megszerzésére nyílik lehetőség.

## 3. fejezet

# A nagy frekvenciás árfolyamok dinamikáját leíró folyamatokra vonatkozó próbák

### 3.1. Feltevések és alapfogalmak

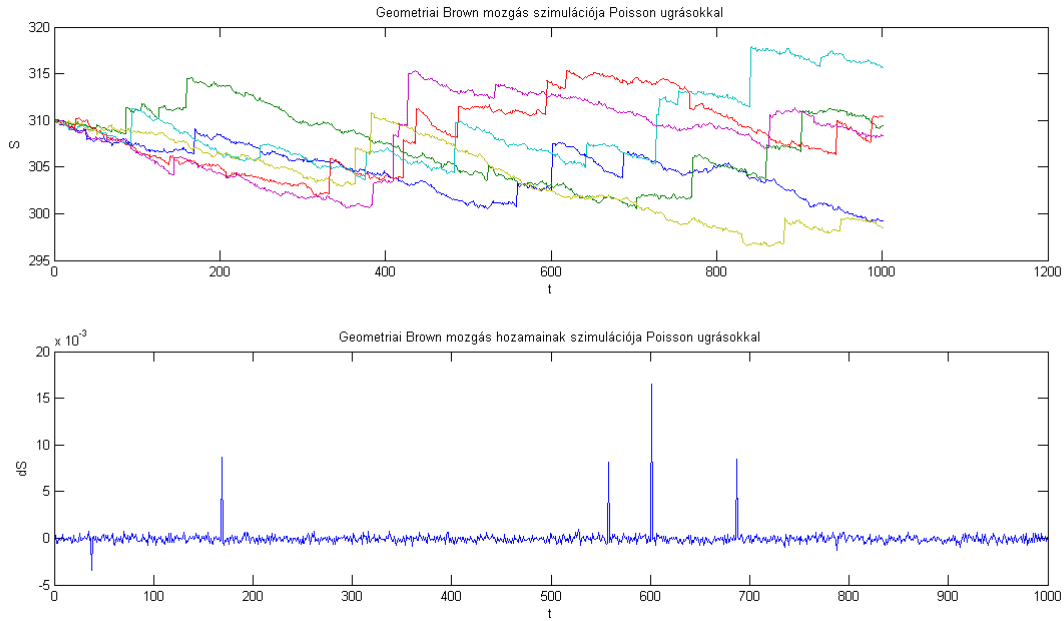
A szemimartingálok osztálya rendkívül tág és tartalmazza a pénzügyi alkalmazásokban használt legtöbb folyamatot. Emellett elméletileg is jól megalapozott a használatuk, mivel az Eszközárzás Alaptétele szerint a szemimartingálok osztályán létezik olyan ekvivalens martingálmérték, ami mellett a részvényár ún.  $\sigma$ -martingál lesz és teljesül az arbitrázsmen-tesség egy általánosítása (*No Free Lunch With Vanishing Risk*) [10]. Egy szemimartingál előáll, mint egy lokális martingál és egy korlátos variációjú folyamat összege.

Az árfolyamok  $X_t$  logaritmusáról a továbbiakban feltesszük, hogy egy Itô szemimartingál folyamatot követ, mely az alábbi alakban áll elő:

$$X_t = X_0 + \underbrace{\int_0^t b_s ds}_{\text{drift}} + \underbrace{\int_0^t \sigma_s dW_s}_{\text{folytonos rész}} + \underbrace{\int_0^t \int_{|x| \leq \varepsilon} x(\mu - \nu)(ds, dx)}_{\text{kis ugrások}} + \underbrace{\int_0^t \int_{|x| > \varepsilon} x\mu(ds, dx)}_{\text{nagy ugrások}} \quad (3.1)$$

ahol  $W_t$  jelöli a Wiener-folyamatot,  $\mu$  az ugrásmérték,  $\nu$  pedig egy ún. kompenzátor Lévy-mérték. A  $\mu$  és  $\nu$  egyaránt véletlen mértékek a  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  halmazon és a Lévy-mértékre fennáll, hogy szorzattá bomlik:  $\nu(dt, dx) = dtF_t(dx)$ . Természetesen a fenti integrál rövidítve is írható egy sztochasztikus differenciálegyenlet formájában. Bevezetve az ugró tagra a  $J_t$  jelölést, felírhatjuk az egyenletet:

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t + dJ_t \quad (3.2)$$



3.1. ábra. Egyik legegyszerűbb példa ugró folyamatra: GBM normális ugrásokkal, melyek időhomogén Poisson-folyamat szerint következnek be. Felül az árfolyam, míg alul a hozamok szimulációja látható.

**3.1.1. Definíció (Ugrásmérték).**  $\mu_X(B)$  az  $X_t$  ugrásmértéke, ha minden  $B \subset [0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mérhető (valószínűleg Lévy értelemben) halmazra

$$\mu_X(B) = \#\{t : (t, X_t - X_{t-}) \in B\}.$$

**3.1.2. Definíció (Lévy-mérték).**  $\nu(A)$  az  $X_t$  Lévy folyamat Lévy mértéke, ha  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -re

$$\nu(A) = E\#\{t \in [0,1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}.$$

Azaz az egységnyi idő alatt várható  $A$ -ba eső nagyságú ugrások száma.

## 3.2. Lévy-Itô felbontás

**3.2.1. Tétel (Lévy-Itô dekompozíció).** Legyen  $X_t$  Lévy-folyamat,  $\nu$  a Lévy-mértéke

·  $\nu$  Radon-mérték  $\mathbb{R} \setminus 0$ -n és kielégíti a következőket:

$$\int_{|x| \leq 1} x^2 d\nu(x) < \infty, \quad \int_{|x| \geq 1} d\nu(x) < \infty.$$

Az 1-nek nincs szerepe, csak elkülönítjük vele a 0-hoz közeli és a 0-nál nagyobb ugrásokat.

·  $X_t$  ugrásmértéke  $\mu_X$  Poisson véletlen mérték  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ -en, intenzitásmértéke pedig:

$d\nu(x) \times dt$ .

- Létezik egy  $\gamma$  konstans (vagy vektor, ha  $\mathbb{R}^d$  értékű a folyamatunk), továbbá egy  $W(t)$  Wiener folyamat (ez is lehet  $d$  dimenziós, ha  $X$  is az) A szórással (A szórásmátrixszal), hogy

$$X_t = \gamma t + w(t) + X^l(t) + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{X}^\varepsilon(t), \quad (3.3)$$

ahol  $X^l(t) = \int_{|X| \geq 1, s \in [0, t]} x d\mu(s, x)$  a nagyobb ugrásokért felelős  $c$ -Poisson folyamat, és

$$X^\varepsilon(t) = \int_{\varepsilon \leq |X| < 1, s \in [0, t]} x \{d\mu(s, x) - ds d\nu(x)\} = \int_{\varepsilon \leq |X| < 1, s \in [0, t]} x d\tilde{\mu}(s, x)$$

a kicsi ugrásokért felelős  $c$ -Poisson folyamat.

$d\mu(s, x) - ds d\nu(x)$ -ben a második tagban megjelenik a kompenzáció.

A 3.3. egyenletben szereplő tagok függetlenek, a konvergencia 1 valószínűségű és egyenletes az utolsó tagban. Az  $(A, \nu, \gamma)$  triplet (hármás) egyértelműen meghatározza a tagokat és így karakterizálja a Lévy-folyamatot. Egy szemimartingál mindig véges számú nagy ugrással rendelkezik a  $[0, T]$  intervallumon, viszont az apró ugrások száma egyaránt lehet véges és végtelen. Emiatt a kis és nagy ugrásokat egy rögzített  $\varepsilon > 0$  küszöbvel választjuk el egymástól (tulajdonképpen ez a küszöb definiálja mi számít kis és nagy ugrásnak). Megjegyezzük, hogy az  $\varepsilon$  értéke tetszőlegesen választható (gyakori a  $\varepsilon = 1$  választás) és amennyiben az ugrások összegezhetőek, ez a szétválasztás el is hagyható. Ekkor egy szemimartingál nagy ugrásainak száma a  $[0, T]$  intervallumon mindig véges lesz. Ezzel szemben a kis ugrások száma egyaránt lehet véges és végtelen.

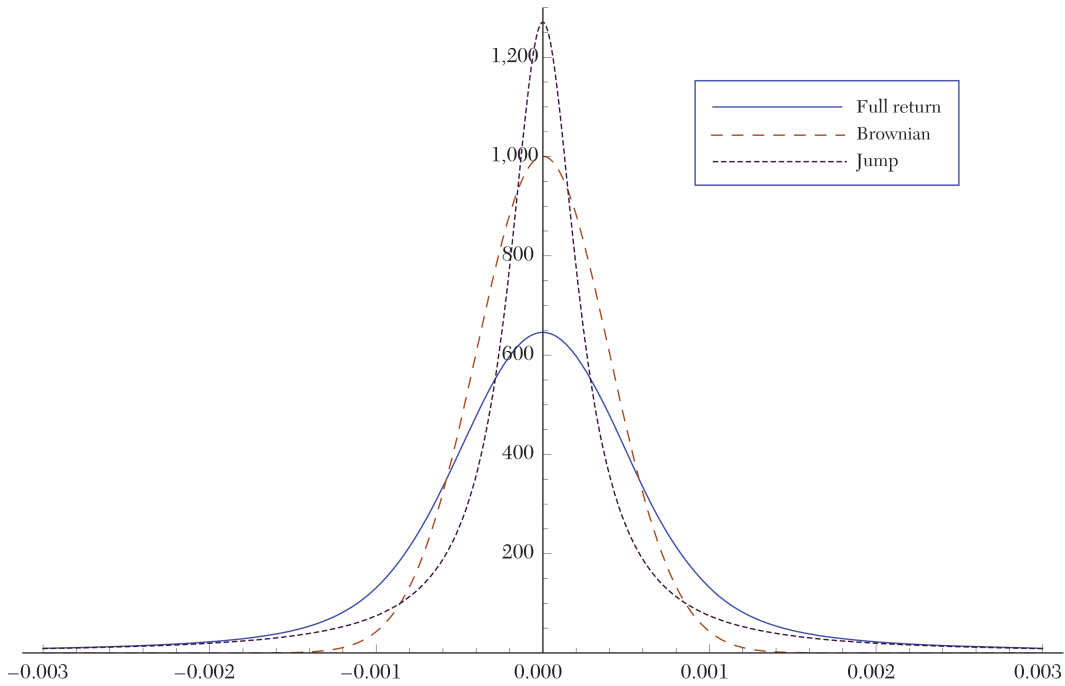
Minden  $A \in \mathbb{R}$  részhalmazra  $\nu([0, t] \times A)$  folyamat növekedő és kompenzálja az  $X_t$  folyamat ugrásainak számát, abban az értelemben, hogy a két folyamat különbsége lokális martingál lesz. Formálisan

$$\nu([0, t] \times (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)) < \infty, \quad (3.4)$$

ahol  $\nu([0, t] \times [-\varepsilon, \varepsilon])$  egyaránt lehet véges és végtelen, viszont feltesszük, hogy

$$\int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} x^2 \nu([0, t], dx) < \infty. \quad (3.5)$$

Pénzügyi szempontból a folyamat minden tagja megfeleltethető egy kockázattípusnak. A folytonos rész az alaptermék árának klasszikus eszközökkel (delta-hedge) fedezhető kockázata. A nagy ugrások olyan piaci eseményekhez rendelhetők, mint a csőd kockázata és új fontos információk beérkezése. A kis ugrások pedig az olyan apró árváltozásokként értelmezhetők, amik alacsony időskálán jelentkeznek (például mikrostrukturális hatásokból) és hosszabb távon nincs hatásuk az árfolyamra. Az ilyen ugrásokból eredő kockázat elsősorban az algoritmikusan és általában rövid időskálán kereskedő szereplőket érinti.



3.2. ábra. A loghozamok eloszlásának felbontása folytonos és ugró komponensre [2]

A kis ugrásokat kompenzáltuk, viszont a nagyokat nem. Ennek oka, hogy ezt sok esetben nem tudjuk megtenni, mivel a momentumok nem feltétlenül léteznek. A kis ugrások kompenzálása viszont azért fontos, mert enélkül az összeg divergálhat. Amennyiben az ugrási aktivitás véges és összegezhető, azaz  $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s| < \infty$  minden  $t$ -re, ahol

$$\Delta X_s = X_s - X_{s-} \quad (3.6)$$

az ugrás mérete egy  $s$  időpillanatban, akkor már teljesül, hogy

$$\int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} |x| \nu([0, t], dx) < \infty. \quad (3.7)$$

Ebben az esetben nincs szükség kompenzátorra és a folyamat felírható az alábbi egyszerűbb alakba:

$$X_t = X_0 + \underbrace{\int_0^t b_s ds}_{\text{drift}} + \underbrace{\int_0^t \sigma_s dW_s}_{\text{folytonos rész}} + \sum_{s \leq t} \Delta X_s, \quad (3.8)$$

ahol az új drift tag a korábbi reprezentációból a

$$b'_s = b_s - \int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} x F_s(dx) \quad (3.9)$$

alakban áll elő.

### 3.3. A statisztikai eszköztár felépítése

Feltesszük, hogy az árfolyamot egy diszkrét  $\Delta_n$  felbontású időskálán vizsgáljuk. A loghozamok sorozatát az alábbi módon jelöljük:

$$\Delta_i^n = X_{i\Delta_n} - X_{(i-1)\Delta_n}. \quad (3.10)$$

A további statisztikai próbáknak a legfontosabb építőköve lesz a folyamat realizált  $p$ -edik felülről levágott variációja, amit az alábbi formulával számolunk:

$$B(p, u_n, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{\lfloor T/\Delta_n \rfloor} |\Delta_i^n X|^p \mathbf{1}_{\{|\Delta_i^n X| \leq u_n\}}, \quad (3.11)$$

ahol  $p \geq 0$  valós szám a hatványkitevő,  $u_n$  pedig az ún. levágási szinteket megadó sorozat. Feltesszük még, hogy  $T$  állandó, és  $\Delta_n \rightarrow 0$ . Ezenkívül az  $u_n$  sorozat is konvergál nullához. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy léteznek  $\varpi \in (0, 1/2)$  és  $\alpha > 0$  konstansok, hogy  $u_n = \alpha \Delta_n^{\varpi}$ . Abban az esetben, ha egyáltalán nem használunk levágási küszöböt, a  $B(p, \infty, \Delta_n)$  jelölést fogjuk alkalmazni. Bevezetjük még az előző feltételes variáció ellenettjét, ahol csak az egy adott paraméternél nagyobb méretű ugrásokat akarjuk figyelembe venni:

$$U(p, u_n, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{\lfloor T/\Delta_n \rfloor} |\Delta_i^n X|^p \mathbf{1}_{\{|\Delta_i^n X| > u_n\}}, \quad (3.12)$$

ahol ismét  $u_n = \alpha \Delta_n^{\varpi}$ . Elemi halmazelméleti megfontolásból következik, hogy:

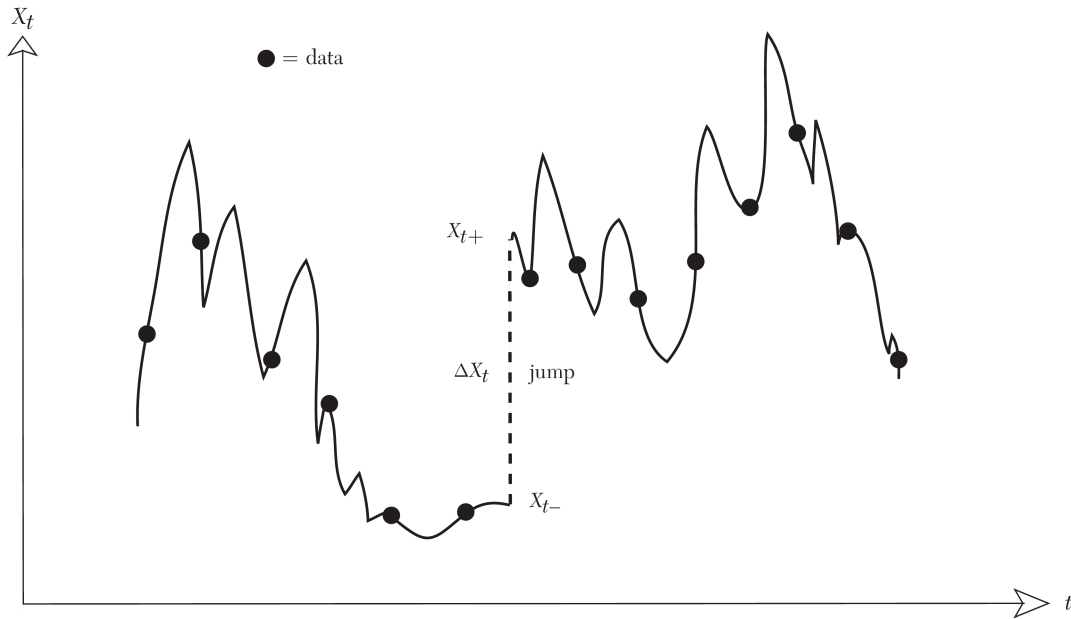
$$U(p, u_n, \Delta_n) = B(p, \infty, \Delta_n) - B(p, u_n, \Delta_n) \quad (3.13)$$

Megjegyzendő még, hogy a  $p = 0$  esetben az előző statisztika nem csinál mást, mint összeszámolja az  $u_n$ -nél nagyobb ugrások számát

$$U(0, u_n, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{\lfloor T/\Delta_n \rfloor} \mathbf{1}_{\{|\Delta_i^n X| > u_n\}} \quad (3.14)$$

Az árfolyamokat leíró folyamatokra vonatkozó statisztikai próbákat  $B(p, u_n, \Delta_n)$  és  $U(0, u_n, \Delta_n)$  variációs statisztikák aszimptotikus tulajdonságait felhasználva fogjuk felépíteni. Viszont mielőtt ezt megtennénk, megvizsgáljuk hogyan viselkednek ezek a háromváltozós függvények, és hogyan reagálnak az argumentumaik megváltozására, valamint a folyamat mely jellemzőire lehet az értékükből következtetni.

**A  $B(p, u_n, \Delta_n)$  és  $U(0, u_n, \Delta_n)$  értékei a  $p$  hatványkitevő függvényében** A hatványkitevő változtatása segítségével szétválasztható a folytonos Wiener-tag illetve az ugró tag. Ha  $p < 2$ , akkor a folytonos tag dominálja a statisztika értékét,  $p > 2$  esetben pedig az ugró tag fog dominálni. Abban a speciális esetben, ha  $p = 2$  a két tag egyenlően súlyozódik. Ez



3.3. ábra. A mögöttes folytonos sztochasztikus folyamatot szeretnénk karakterizálni diszkrét megfigyelések alapján [2]

az eset különleges pénzügyi jelentőséggel bír, hiszen ekkor pontosan a volatilitást, illetve a feltételes volatilitást számoljuk.

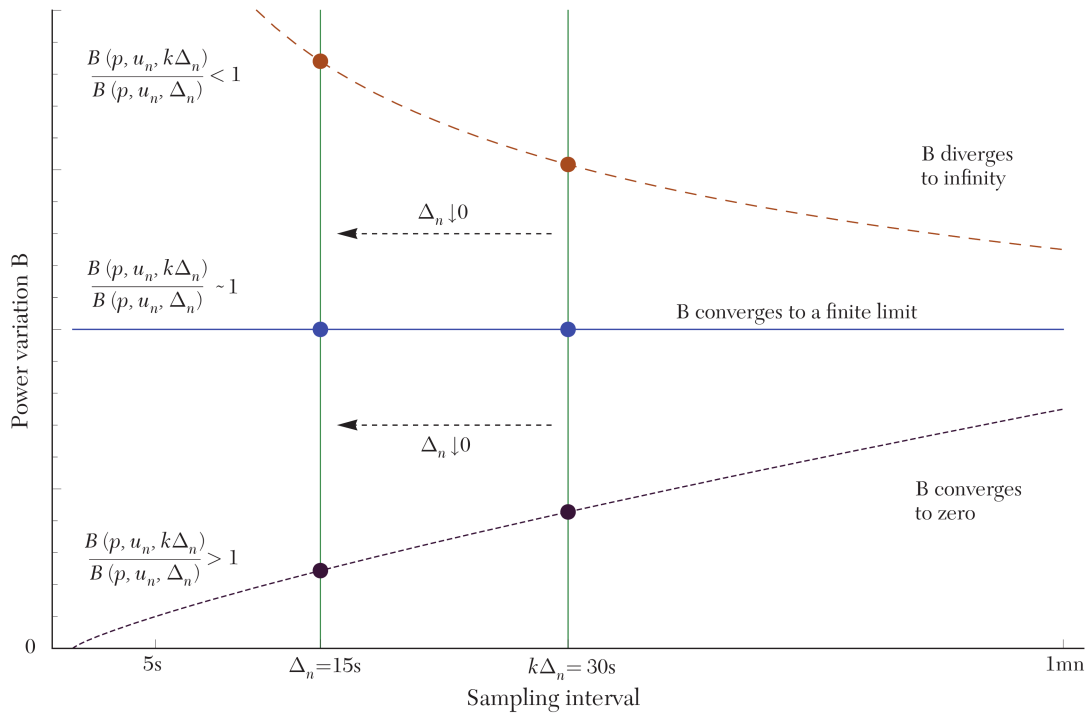
**A  $B(p, u_n, \Delta_n)$  és  $U(0, u_n, \Delta_n)$  értékei az  $u_n$  levágási paraméter függvényben** Az  $u_n$  paraméter változtatásával azt befolyásolhatjuk, hogy a különböző méretű ugrásokat figyelembe vegyük-e a variáció számításakor. Ez az ugrások jelenlétének vizsgálatánál fontos. Mivel tudjuk, hogy a nagy ugrások száma csak véges lehet, ezért az  $u_n$  változó csökkentésével a  $B(p, u_n, \Delta_n)$  függvény biztosan ki fogja szűrni a nagy ugrásokat. Ugyanígy az előzőeket megfordítva az  $u_n$  növelésével az  $U(0, u_n, \Delta_n)$  értékéből biztosan el fognak tűnni a folytonos Wiener-tag hatásai és csak az ugró rész marad.

**A  $B(p, u_n, \Delta_n)$  és  $U(0, u_n, \Delta_n)$  értékei  $\Delta_n$  mintavételezési gyakoriság függvényében** A mintavételezési gyakoriság változtatása segítségével arra következtethetünk, hogy a  $p$ -adikus variációk egy véges pozitív számhoz, nullához vagy végtelenhez konvergálnak. Emellett a  $p$  változtatásával következtethetünk arra, hogy egy adott hatványkitevő esetén melyik tag dominál a folyamatban.

### 3.4. Milyen folyamatok vannak jelen az árfolyamban?

Mivel a nagy frekvenciás adatokra lokálisan a drift nem jellemző, ezért erről feltesszük, hogy 0. Ekkor a  $[0, T]$  intervallumon az alábbi trajektóriákat tartalmazó halmazokat defi-





3.4. ábra. A variációs statisztika háromféle lehetséges viselkedése (végtelenbe divergál, véges a határérték, 0 a határérték) és ezek felismerési módjai [2]

niálhatjuk:

$$\Omega_T^c = \{X \text{ folytonos } [0, T]\text{-n}\} \quad (3.15)$$

$$\Omega_T^j = \{X \text{ ugrásokkal rendelkezik } [0, T]\text{-n}\} \quad (3.16)$$

$$\Omega_T^f = \{X \text{ véges sokszor ugrik } [0, T]\text{-n}\} \quad (3.17)$$

$$\Omega_T^i = \{X \text{ végtelen sokszor ugrik } [0, T]\text{-n}\} \quad (3.18)$$

$$\Omega_T^W = \{X \text{ rendelkezik folytonos Wiener-taggal } [0, T]\text{-n}\} = \left\{ \int_0^T \sigma_S^2 ds > 0 \right\} \quad (3.19)$$

$$\Omega_T^{noW} = \{X\text{-ben nincs Wiener-tag } [0, T]\text{-n}\} = \left\{ \int_0^T \sigma_S^2 ds = 0 \right\} \quad (3.20)$$

A célunk tehát, hogy az árfolyam logaritmusát leíró szemimartingál diszkrét időpillanatokban történő megfigyelésével előálló idősorból eldöntsük, hogy az eredeti folyamat melyik fenti halmazba tartozik. Általánosan ez persze nem kivitelezhető, hiszen egy folytonos folyamat és annak diszkrétizáltja nem különíthető el egyértelműen egy idősor ismeretében. A statisztikákat úgy tervezzük meg, hogy a frekvencia növelésével - vagyis a  $\Delta_n \rightarrow 0$  határértékben aszimptotikusan jól teljesítsenek. Az ismertetett statisztikai módszereket a lehető legáltalánosabb szemimartingál típusú modellekre készítjük el. Emiatt egyaránt működni fognak sztochasztikus volatilitás, ugró diffúziós és egyéb tetszőlegesen bonyolult folyamatokra is. A konkrét folyamatok becslésére és specifikálására sem lesz itt szükség.

### 3.4.1. Vannak-e ugrások az árfolyamban?

Az  $X_t$  folyamat változásának a mértékét a folytonos és az ugró megváltozások  $p$ -adikus variációjával ( $p > 0$ ) fogjuk mérni és definiáljuk a hozzájuk tartozó formulákat:

$$V(p) = \int_0^T |\sigma_s|^p ds \quad (3.21)$$

$$J(p) = \sum_{s \leq T} |\Delta X_s|^p \quad (3.22)$$

A  $V(p)$  értéke véges minden  $p > 0$  kitevőre és pozitív az  $\Omega_T^W$  halmazon. A  $J(p)$  biztosan véges, ha  $p \geq 2$  és leggyakrabban végtelen, ha  $p < 2$ . Az  $X$  folyamat kvadratikus variációja előáll, mint  $[X, X]_T = V(2) + J(2)$ .

A  $J(p)$  értékének becslése általánosságban igen nehéz, viszont abban az esetben, ha  $\Delta_n \rightarrow 0$ :

$$\begin{cases} B(p, \infty, \Delta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} J(p) & \text{ha } p > 2 \\ \frac{\Delta_m^{1-p/2}}{m_p} B(p, \infty, \Delta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} V(p) & \text{ha } X_t \in \Omega_T^c \end{cases}$$

ahol  $m_p$  jelöli a standard normális valószínűségi változó abszolút értékének  $p$ -edik momentumát.

A fentiekből következik, hogy  $p > 2$  esetén  $B(p, \infty, \Delta_n)$  határértékben  $J(p)$ -hez tart. Tehát, ha  $X_t$  ugró folyamat, akkor  $J(p)_t > 0$ . Abban az esetben viszont, ha folytonos, akkor a határérték:  $J(p) = 0$  és  $B(p, \infty, \Delta_n)$  nullához tart  $\Delta_n^{p/2-1}$  sebességgel.

Ezeket az állításokat felhasználva már konstruálható egy tesztstatistika az ugrások jelenlétének tesztelésére. A módszer lényege, hogy választunk egy  $p > 2$  kitevőt és a  $B(p, \infty, k\Delta_n)$  variációk értékét összehasonlítjuk két különböző időskálán:

$$S_J(p, k, \Delta_n) = \frac{B(p, \infty, k\Delta_n)}{B(p, \infty, \Delta_n)} \quad (3.23)$$

A fenti hányados attól függően, hogy az  $X_t$  folyamat rendelkezik-e ugrásokkal, teljesen másként viselkedik:

$$S_J(p, k, \Delta_n) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{ha } X_t \in \Omega_T^j \\ k^{p/2-1} & \text{ha } X_t \in \Omega_T^c \cap \Omega_T^w. \end{cases} \quad (3.24)$$

Az  $\Omega_T^j$  halmazon a két variáció konvergál egy véges számhoz, tehát a hányados 1-hez fog tartani. Az  $\Omega_T^c \cap \Omega_T^w$  halmazon viszont 0-hoz tart, ezért a hányados monoton növekedni fog a hatványkitevő függvényében. Megjegyezzük, hogy  $\Omega_T^c \cap \Omega_T^w$  esetet azért nem vettük figyelembe, mivel pénzügyi-közgazdasági szempontból irrelevánsnak tekinthető egy folytonos, kizárólag driftet tartalmazó folyamat.

### 3.4.2. Véges vagy végtelen az ugrási aktivitás?

A pénzügyi matematikában az ugró modelleknek két fő kategóriáját különböztetjük meg. Az egyik az ugró diffúziók családja, amit egy drift tag, egy Wiener-folyamat által meghajtott diffúziós tag, valamint egy véges ugrási aktivitású folyamat (például Compound Poisson) jellemez. A folyamatok másik osztálya, a végtelen aktivitású modellek, mint például az általánosított hiperbolikus modellek.

Először definiáljuk pontosan az ugrási aktivitást, amihez a korábban definiált  $J(p)$  (3.22) függvényt fogjuk felhasználni. Definiáljuk az  $I_T = \{p \geq 0 : J(p) < \infty\}$  véletlen halmazt. Ez a halmaz egy félegyenest alkot és  $[\beta_T, \infty)$  vagy  $(\beta_T, \infty)$  alakban áll elő. Azt is tudjuk, hogy  $2 \in I_T$ , ezért  $\beta_T(\omega) \in [0, 2]$ . A  $\beta_T(\omega)$  érték egy, a  $t \mapsto X_t(\omega)$  trajektória ugrási aktivitását jól mutató mérőszám. Az is teljesül rá, hogy amennyiben  $X$  Lévy-folyamat,  $\beta_T(\omega) = \beta$ , vagyis  $\beta$  értéke független  $\omega$ -tól és  $T$ -től. Ezt a kitevőt nevezzük, illetve ennek  $\beta_T$  megfelelőjét - *Általánosított Blumenthal-Gettoor indexnek* vagy egyszerűen az ugrási aktivitás fokának. A  $\beta_T$  index tulajdonképpen azt a sebességet adja meg, ahogyan egy folyamat ugrásmértéke divergál a 0 körül, ami valóban az apró ugrások jelenlétének gyakoriságát karakterizálja. A  $\beta_T$  index úgy is definiálható, mint azon  $p \geq 0$  kitevők infimuma, amikre

$$\int_{\{|x| \leq 1\}} |x|^p F(dx) < \infty, \quad (3.25)$$

ahol  $F(dx)$  a Lévy-mérték. Meg kell jegyeznünk, hogy ez az ugrási aktivitás időben változó és véletlenszerű is lehet, viszont annak érdekében, hogy elméletileg kezelhessük a problémát, feltesszük, hogy ez konstans (ez az eset lefedi az összes gyakorlatban használt modellt). Pontosabban:

$$\nu(dt, dx) = \frac{1}{|x|^{1+\beta}} (a_t^+ \mathbf{1}_{(0, z_t^+]}(x) + a_t^- \mathbf{1}_{[-z_t^-, 0)}(x)) + \nu'(dt, dx) \quad (3.26)$$

ahol  $a_t^+$  és  $a_t^-$  nemnegatív, míg  $z_t^+$  és  $z_t^-$  pozitív sztochasztikus folyamatok, továbbá  $\nu'$  egy másik Lévy-mérték, melynek  $\beta'$  indexe kisebb, mint  $\beta$ . Teljesül még, hogy  $\beta \in (0, 2)$ , különben  $\nu$  nem lenne Lévy-mérték. Ez a feltétel kizárólag a folyamat nulla körüli kis ugrásainak viselkedésére vonatkozik, a nagy ugrásokat a  $\nu'$  mérték adja meg. Az  $a_t^\pm$  folyamatok az intenzitást adják meg, minél nagyobb az értékük, annál több a kis ugrások száma. A  $z_t^\pm$  folyamatok pedig azt a tartományt adják meg, ahol a hozamok ugrásmértéke  $\beta$ -stabilis eloszlású. Tudjuk továbbá, hogy amennyiben  $\int_0^T (a_s^+ + a_s^-) ds > 0$  teljesül, akkor a  $\beta$  értéke teljes  $[0, T]$  intervallumon állandó. Fennáll még, hogy  $X_t$  stabilis eloszlása esetén a folyamat Lévy-mértéke  $1/|x|^{1+\beta}$ -val arányos. A fenti tulajdonságot kielégítő folyamatok halmazára külön jelölést vezetünk be, mivel annak jelentősége lesz a továbbiakban:

$$\Omega_T^{i\beta} = \left\{ \int_0^T (a_s^+ + a_s^-) ds > 0 \right\} \quad (3.27)$$

Megjegyezzük, hogy fennáll  $\Omega_T^{i\beta} \subseteq \Omega_T^i$ . A következő részben annak eldöntése a célunk, hogy az ugrások aktivitása szempontjából milyen jellegű a folyamat.

### $H_0$ : Véges ugrási aktivitás

Precízebben megfogalmazva a nullhipotézis:  $H_0 : \Omega_T^f \cap \Omega_T^W$ , illetve az alternatív hipotézis:  $H_1 : \Omega_T^i$ . A korábbiakhoz hasonlóan az  $\Omega_T^f \cap \Omega_T^{\text{no}W}$  halmazzal nem foglalkozunk, mivel annak semmilyen pénzügyi vonatkozása nincs. Ismét választunk egy  $k \geq 2$  egész skálázási együtthatót illetve egy  $p > 2$  valós variációs kitevőt. A tesztstatisztika annyiban különbözik az ugrások jelenlétének vizsgálatától, hogy most történik levágás egy  $u_n$  számmal.

$$S_{FA}(p, u_n, k, \Delta_n) = \frac{B(p, u_n, k\Delta_n)}{B(p, u_n, \Delta_n)} \quad (3.28)$$

A hatványkitevőt ismét  $p > 2$ -nek választjuk. A célunk a nagy és a kis ugrások megkülönböztetése és ezt az  $u_n = \alpha \Delta_n^\varpi$  választással elérhetjük. Amennyiben csak nagy ugrások vannak a folyamatban, a két levágott  $p$ -edik variáció ezeket kiszűri és csak a Wiener-tag marad valamint a hányados  $k^{p/2-1}$ -hez fog tartani. Viszont, ha végtelen az ugrási aktivitás, akkor a levágások ezt nem tudják kiszűrni, mert minden  $\Delta_n$  méretű időintervallumban végtelen sok ugrás történik. A  $p > 2$  feltétel miatt a Wiener-tagot dominálni fogják az ugrások és emiatt a  $B(p, u_n, k\Delta_n)$  levágott  $p$ -variációk értéke 0-hoz fog konvergálni, a hányadosuk pedig 1-hez. Tehát a tesztstatisztika határértéke az alábbiak szerint alakul:

$$S_{FA}(p, u_n, k, \Delta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{cases} k^{p/2-1} & \text{ha } X_t \in \Omega_T^f \cap \Omega_T^W \\ 1 & \text{ha } X_t \in \Omega_T^i \end{cases}$$

### $H_0$ : Végtelen ugrási aktivitás

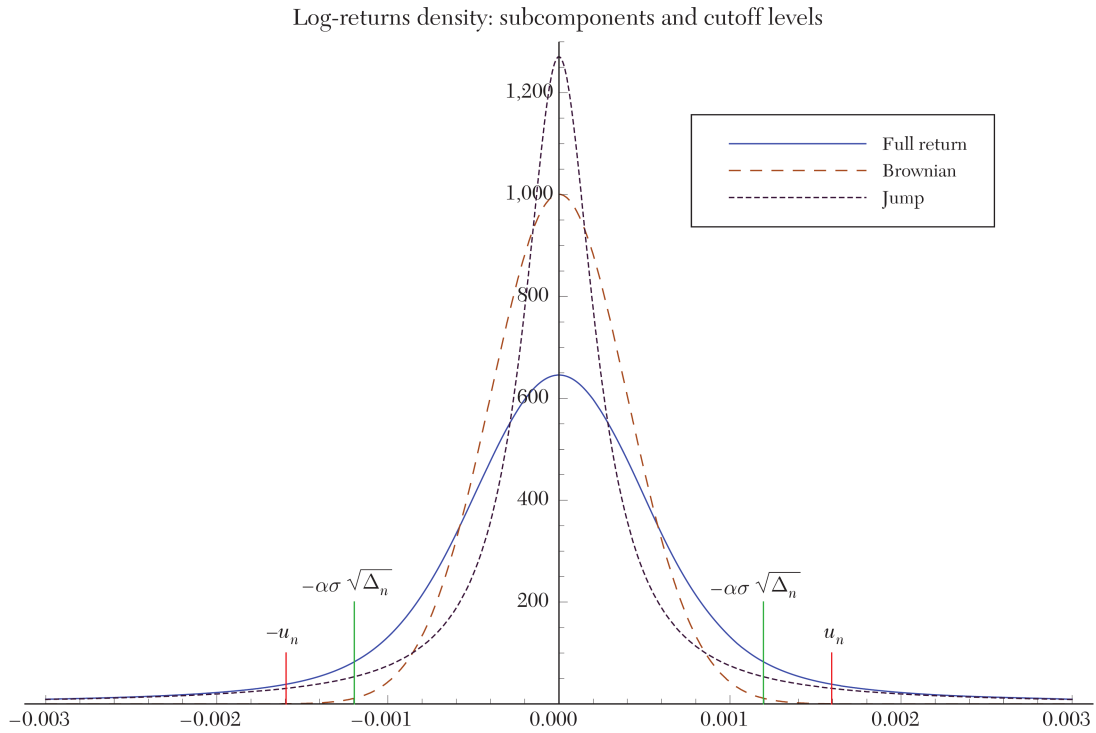
Ebben az esetben a nullhipotézis:  $H_0 : \Omega_T^i$ , valamint az alternatív hipotézis:  $H_1 : \Omega_T^f \cap \Omega_T^W$ . Az előzőhöz képest itt egy új tesztstatisztikát kell találnunk, mert az a  $H_1$  halmazon nem lesz modelfüggetlen. Ennek oka, hogy amennyiben nincs jelen  $W_t$  folyamat, az  $S_{FA}$  értékét a számunkra ismeretlen *Blumenthal-Gettoor index* fogja dominálni. Sajnos emiatt a nullhipotézis tesztelése lehetetlen további feltevések nélkül, ezért azt meg kell szorítanunk az  $\Omega_T^{i\beta}$  halmazra.

$$\nu(dt, dx) = \frac{1}{|x|^{1+\beta}} (a_t^+ 1_{(0, z_t^+]}(x) + a_t^- 1_{[-z_t^-, 0)}(x)) + \nu'(dt, dx) \quad (3.29)$$

Legyen  $\gamma > 1$  és  $p' > p > 2$  valós konstansok és definiáljuk a tesztstatisztikát az alábbi módon:

$$S_{IA}(p, u_n, \gamma, \Delta_n) = \frac{B(p', \gamma u_n, \Delta_n) B(p, u_n, \Delta_n)}{B(p', u_n, \Delta_n) B(p, \gamma u_n, \Delta_n)} \quad (3.30)$$

Az alternatív hipotézis teljesülése esetén mind a négy levágott variáció értékét a folytonos rész fogja dominálni, ezért a levágott variációk nullához fognak tartani  $\Delta_n^{p/2-1}$  illetve



3.5. ábra. A levágási együtthatókkal befolyásolható a Wiener-tag megjelenése [2]

$\Delta_n^{p'/2-1}$  sebességgel. Emiatt a hányadosban a megfelelő tagok kiejtik egymást, és aszimptotikusan a statisztika 1-hez fog tartani a  $H_1$  halmazon. Amikor pedig a  $H_0$  halmazon vagyunk, vagyis végtelen az ugrási aktivitás, a kis ugrások fognak dominálni és a levágás szintje lesz lényeges. Emiatt az alábbi konvergenciák teljesülnek a statisztika elemeire:

$$B(p', \gamma, u_n, \Delta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} u_n^{p'-\beta}, \quad B(p, u_n, \Delta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} u_n^{p'-\beta}, \quad (3.31)$$

$$B(p', u_n, \Delta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (\gamma u_n)^{p'-\beta}, \quad B(p, \gamma u_n, \Delta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (\gamma u_n)^{p'-\beta} \quad (3.32)$$

Innen pedig már egyszerűsítéssel megkapjuk a statisztika határértékét is:

$$S_{IA}(p, u_n, \gamma, \Delta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{cases} \gamma^{p-p} & \text{ha } X_t \in \Omega_T^{i\beta} \\ 1 & \text{ha } X_t \in \Omega_T^{fT} \cap \Omega_T^W. \end{cases}$$

Mindkét esetben a  $\beta$  kitevő értékétől független lesz a határérték, tehát modellfüggetlen a próba.

### 3.4.3. Wiener folyamat jelenlétének tesztelése

$H_0$ : Wiener folyamat van jelen

Az alábbiakban a Wiener-folyamat jelenlétére vonatkozó próbákkal foglalkozom. Most hatványkitevőnek a  $p < 2$  választás lesz megfelelő, mivel a Wiener-folyamat ebben az esetben dominálni fogja a variáció értékét és az végtelenbe fog tartani. Abban az esetben viszont,

ha nincs Wiener-folyamat az árfolyamban, illetve a kitevő nagyobb, mint a Blumenthal-Gettoor index, a variáció nullához fog tartani. A tesztstatisztika a  $p < 2$  és  $k \geq 2$  választással az alábbi alakot ölti:

$$S_W(p, u_n, k, \Delta_n) = \frac{B(p, u_n, \Delta_n)}{B(p, u_n, k\Delta_n)} \quad (3.33)$$

Meg kell jegyezzük, hogy Wiener-folyamat jelenléte esetén az ugrásokról nem teszünk feltételezést. Amennyiben viszont nem szerepel Wiener-folyamat a modellben, az ugrásoknak megfelelő tag eliminálásához szükséges a  $p > \beta$  feltevés. Ekkor a tesztstatisztika az alábbi módon viselkedik aszimptotikusan:

$$S_W(p, u_n, k, \Delta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{cases} k^{1-p/2} & \text{ha } X_t \in \Omega_T^W \\ 1 & \text{ha } X_t \in \Omega_T^{\text{no}W} \cap \Omega_T^{i\beta}, p > \beta \end{cases}$$

### $H_0$ : Wiener folyamat nincs jelen

Abban az esetben, ha nincs ugrás vagy véges sok van, és emellett Wiener-folyamat sincs, az árfolyam egy tiszta driftre és néhány ugrásra egyszerűsödik. Ez pénzügyi szempontból igencsak irrealisztikus és szegényes modellnek bizonyul. Abban esetben viszont, ha az ugrási aktivitás végtelen és nincs Wiener-folyamat, egy gyakorlatban is használható folyamatot kaphatunk. Azt a célt tűzzük most ki, hogy olyan tesztstatisztikát építsünk, melynek nullhipotézise, hogy az árfolyam egy driftes tiszta ugró folyamat lesz. Emellett azt is szeretnénk, ha az ugró folyamat jellegét illetően nem kellene feltételezésekkel élnünk, vagyis az ismeretlen  $\beta$ ,  $a_t^\pm$  és  $z_t^\pm$  értékektől ne függjön aszimptotikusan a statisztika.

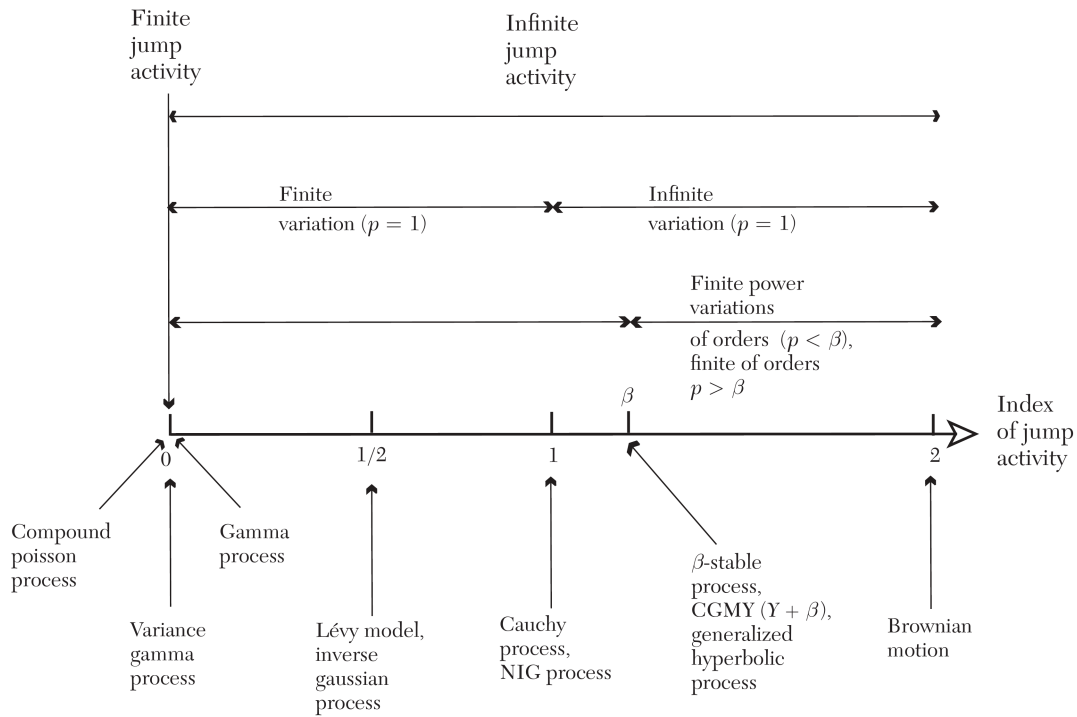
A statisztika lényege az a tény, hogy  $p=2$  kitevő esetén az ugró- és Wiener-komponens nagyságrendje megegyezik. Ezért amennyiben Wiener-folyamat van jelen, azaz a  $(H_1 : \Omega_T^W)$  halmazon vagyunk, a variációt levágás után a Wiener-tag fogja dominálni. Úgy választjuk meg a levágást megadó  $u_n$  sorozatot, hogy egy  $\gamma > 1$  skálaparaméterrel átskálázva a levágási együtthatót, a két különböző skálán vett variáció a  $H_1$  halmazon 1-hez tartson. A tesztstatisztikát az alábbi módon definiáljuk:

$$S_{\text{no}W}(p, u_n, \gamma, \Delta_n) = \frac{B(2, \gamma u_n, \Delta_n)U(0, u_n, \Delta_n)}{B(2, u_n, \Delta_n)U(0, \gamma u_n, \Delta_n)}, \quad (3.34)$$

ahol  $\gamma > 1$  valós konstans. Nézzük meg, hogy a nullhipotézis  $(H_0 : \Omega_T^{\text{no}W} \cap \Omega_T^{i\beta})$  halmazon hogyan viselkedik a tesztstatisztika. Tudjuk, hogy az ugrások farokeloszlását a  $\beta$  kitevővel jellemezhetjük, és fennáll az alábbi konvergencia:

$$\frac{B(2, \gamma u_n, \Delta_n)}{B(2, u_n, \Delta_n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma^{2-\beta} \quad (3.35)$$

Mivel a nullhipotézis szerint nincs Wiener-folyamat az árfolyamban, a fenti határérték az ugró folyamat ismeretlen  $\beta$  Blumenthal-Gettoor indexétől fog függeni. Ennek a kiküszöbölése céljából szerepel a statisztikában a hányados, ami a nagy ugrásoknak megfelelő



3.6. ábra. Nevezetes folyamatok viszonya az ugrási aktivitás tekintetében. [2]

variációk hányadosa és tudjuk róla, hogy az ugró komponens dominálja. Az is ismert, hogy határértékben

$$\frac{U(0, u_n, \Delta_n)}{\bar{U}(0, \gamma u_n, \Delta_n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma^\beta \quad (3.36)$$

A fentieket összesítve, megkaptuk a tesztstatistika aszimptotikus viselkedését:

$$S_{\text{noW}}(p, u_n, \gamma, \Delta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{cases} \gamma^2 & \text{ha } X_t \in \Omega_T^{\text{noW}} \cap \Omega_T^{i\beta} \\ \gamma^\beta & \text{ha } X_t \in \Omega_T^W \end{cases}$$

### 3.5. Az ugrási aktivitás becslése

Az alábbiakban az ugrási aktivitás becslési módszere kerül rövid bemutatásra, melynek mérőszámaként továbbra is a  $\beta_T$  Blumenthal-Gettoor indexet használjuk. Mint ismeretes a  $\beta_T$  értéke számos pénzügyekben gyakran használt folyamatra ismert és állandó:  $\beta = 0$  a Gamma és Variance Gamma folyamatra,  $\beta = \frac{1}{2}$  az Inverse Gaussian modellre, és  $\beta = 1$  a Cauchy illetve Normal Inverse Gaussian folyamatokra. Emellett, mint paraméter is megjelenik az általánosított hiperbolikus, illetve a Carr-German-Madan-Yor (CGMY-) modellben.

Mivel  $\beta$  értékére a folyamat illetve a  $\nu$  mérték 0 körüli viselkedéséből következtethetünk leginkább, kritikus kérdéssé válik a Wiener-folyamat jelenlétének kérdése is. Ugró és folytonos sztochasztikus tag jelenléte esetén valahogy szét kell választanunk a Wiener-növekményeket az apró ugrásoktól. Ennek céljából két különböző skálán fogjuk vizsgálni

az alulról levágott spektrumot, ami alkalmas eszköznek bizonyul a folytonos növekmények kiszűréséhez. A levágási együtthatókat egy  $u_n = \alpha \Delta_n^\varpi$  sorozattal definiáljuk, ahol  $\varpi \in (0, \frac{1}{2})$ . Mivel most alulról történik a levágás, az ugró komponens fog dominálni függetlenül a  $p$  kitevő értékétől, szemben a korábbi esetekkel, mikor szükség volt a  $p > 2$  választásra. Emiatt feltehető, hogy a kitevő értéke  $p = 0$ . A  $\beta$  értékének becslése kétféleképpen, a variációs statisztika levágási és időskála paraméterének változtatásával is elvégezhető. Az első esetben választunk két  $0 < \alpha < \alpha'$  levágási együtthatót, majd ezekkel definiáljuk a levágási paraméterek  $u_n = \alpha \Delta_n^\varpi$  és  $u'_n = \alpha' \Delta_n^\varpi$  sorozatát. Ekkor a  $\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha}$  jelölés mellett a becslés az alábbi alakot ölti:

$$\hat{\beta}_n(\varpi, \alpha, \alpha') = \frac{\log(U(0, u_n, \Delta_n)/U(0, \gamma u_n, \Delta_n))}{\log(\gamma)}. \quad (3.37)$$

A másik lehetőség, hogy az időskálát skálázzuk egy  $k$  pozitív egész paraméterrel. Ekkor a  $\hat{\beta}$  becslés előáll, mint:

$$\hat{\beta}'_n(\varpi, \alpha, k) = \frac{\log(U(0, u_n, \Delta_n)/U(0, u_n, k\Delta_n))}{\varpi \log k} \quad (3.38)$$

Bizonyítható, hogy a fenti két becslés konzisztens és létezik hozzájuk centrális határeloszlás tétel. Az is belátható, hogy a felhasznált 0 kitevőjű levágott variációk aszimptotikus eloszlása elsőrendben felírható, mint:

$$U(0, u_n, \Delta_n) \sim b_0 \Delta_n^{-\varpi\beta} \frac{1}{\alpha^\beta} \quad (3.39)$$

ahol  $b_0$  értéke független az  $u_n$  és  $\Delta_n$  értékétől. Alacsony mintaelemszám esetén pedig a torzítás csökkentése céljából egy korrekciós tag bevezetésére is lehetőség nyílik az alábbi másodrendű aszimptotikából:

$$U(0, u_n, \Delta_n) \sim b_0 \Delta_n^{-\varpi\beta} \frac{1}{\alpha^\beta} + b_1 \Delta_n^{1-2\varpi\beta} \frac{1}{\alpha^{2\beta}} \quad (3.40)$$

Ezek az aszimptotikus tulajdonságok lehetőséget biztosítanak a  $\beta$  értékének becslésére. Az  $U(0, u_n, \Delta_n)$  függvény  $u_n = \alpha \Delta_n^\varpi$  levágási paraméterének  $\alpha$  együtthatóját változtatva a másodrendű aszimptotikában egy nemlineáris regressziós feladatra vezethető vissza a becslés, ismeretlen lineáris  $b_0$  és  $b_1$  együtthatók mellett.



## 4. fejezet

# Nagy frekvenciás kereskedési adatok modellezése NIG és VG folyamatokkal

### 4.1. Motiváció

A napos felbontású kereskedési adatokra illesztett Lévy modelleknek igen széleskörű irodalma érhető el, viszont a napon belüli kereskedést leíró modellek még fejlesztés alatt állnak. Lopez és társai [3] cikkükben a pénzügyekben leggyakrabban használt ugró modellekkel, a Normal Inverse Gaussian és Variance Gamma modellekkel írják le a napon belüli kereskedés statisztikai jellemzőit.

A pénzügyi alkalmazásokban használt árfolyamokat leíró modellek közül az utóbbi két évtizedben egyértelműen a folytonos idejű sztochasztikus modellek kerültek középpontba. Ezeket egy Wiener-folyamat által meghajtott sztochasztikus volatilitás komponens illetve egy tiszta ugró komponens jellemzi, ami a véletlen időpontokban beérkező árfolyamokat elmozdító információkat írja le. Ezek a komplex modellek valóban jól le tudják írni az árfolyamok alakulását, viszont kalibrálásuk, a becsülendő paraméterek nagy száma miatt sok esetben megnehezíti a gyakorlati alkalmazásukat. Ebből az okból olyan modelleket részesítünk előnyben, melyek leírásához viszonylag kevés paraméter szükséges, mégis nagy magyarázóerővel bírnak a pénzügyi folyamatok leírására. Az egyik leginkább elterjedt ilyen folyamatosztály az exponenciális Lévy-folyamatok köre. Ezek közül is a gyakorlati alkalmazásokban leginkább elterjedt két modellt vizsgáljuk, a Normal Inverse Gaussian (Carr [6]) és a Variance Gamma (Barndorff-Nielsen [5]) modelleket. Mindkettő tisztán ugró modell, végtelen ugrási aktivitással. A Lévy-típusú modelleknek további előnyük, hogy a loghozamok bármilyen frekvencián tekintve függetlenek és azonos eloszlásúak.

## 4.2. Exponenciális Lévy-modellek

Az exponenciális Lévy modellek a klasszikus Black-Scholes modellben használt geometriai Brown-mozgás általánosításának is tekinthetők. A GBM modellben az árfolyamot a  $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}$  dinamikával írjuk le, és tudjuk, hogy teljesülnek rá az alábbi tulajdonságok:

1. A loghozamok egy  $[t, t+h]$  intervallumon  $N(\mu h, \sigma^2 h)$  eloszlásúak
2. Az  $X_t$  loghozamok diszjunkt intervallumokon függetlenek
3. Az árfolyamok  $t \rightarrow S_t$  trajektóriái 1 valószínűséggel folytonosak, azaz:

$$\mathbb{P}(S_u \rightarrow S_t | u \rightarrow t \forall t) = 1$$

A fenti feltevéseket felírhatjuk, az  $X_t$  ún. loghozam folyamatra is:

$$X_t := \log \frac{S_t}{S_0}. \quad (4.1)$$

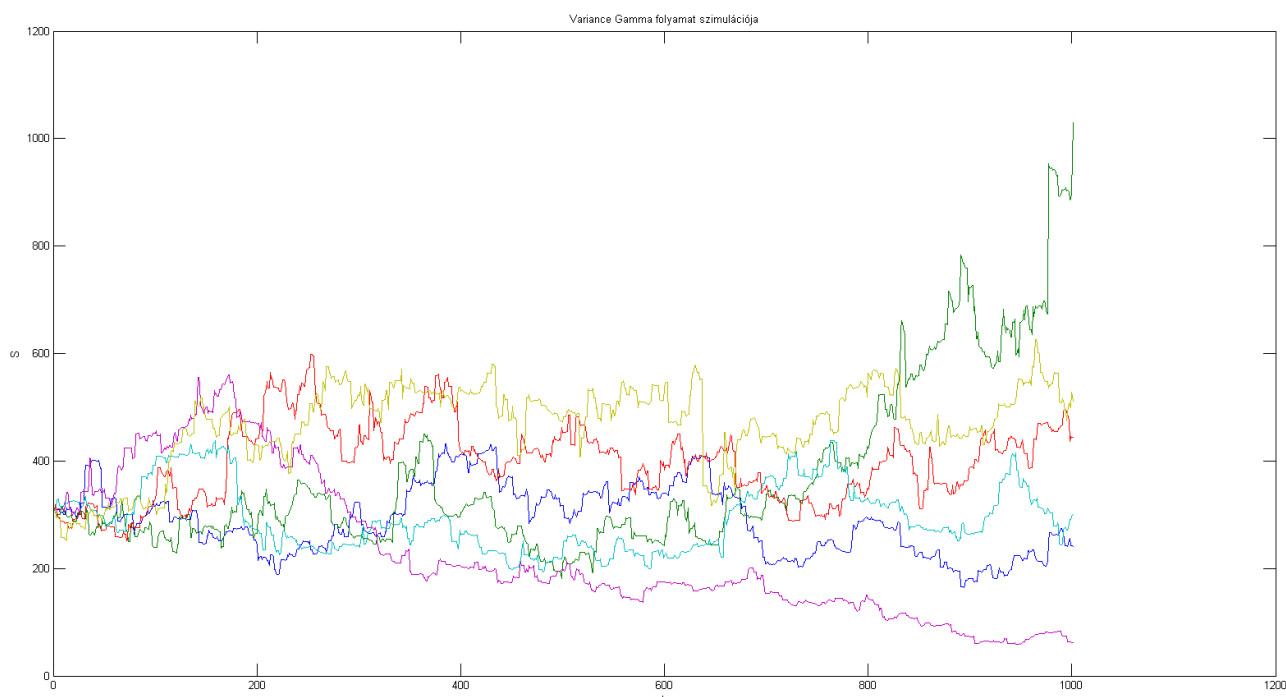
Ebben az esetben  $X_t$ -re kell kikötnünk, hogy folytonos trajektóriájú, független növekményű és a növekményei  $X_{t+h} - X_t \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$  normális eloszlásúak. Ekkor az eszközár-folyamat felírható az alábbi alakban:

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t} \quad (4.2)$$

Az empirikus vizsgálatokban kiderült, hogy a GBM feltevései sokszor nem elfogadhatóak, különösen igaz ez a napon belüli adatok tekintetében. A loghozamok empirikus eloszlásai valójában jóval vastagabb farokeloszlást és magasabb csúcsosságot indikálnak, mint az a normális eloszlásból következne. A függetlenség szintén vitatható, mivel az abszolút loghozamok lassan lecsengő autokorrelációt mutatnak. Azt is megfigyelték, hogy a magas volatilitású események időben klasztereződnek. Ami a folytonosságot illeti, ez csupán egy kézenfekvő tulajdonság, ami likvid eszközök magas kereskedési aktivitását tükrözi. A frekvencia növelésével a megfigyelt árfolyamok természetesen jóval töredezetebbek lesznek, ezáltal az ezeket leíró modell folytonossága sem indokolt.

Az exponenciális Lévy modellben lazítjuk a Black-Scholes modell feltételezéseit, abban az értelemben, hogy a normális eloszlás helyébe tetszőleges eloszlást helyettesítünk. Emellett nem követelünk meg szigorú folytonosságot, csak azt, hogy kizárólag elsőfajú szakadásai (ugrások) lehetnek a folyamatnak. Ennek bevezetése azért szükséges, mert ha a folytonosságot is megköveteljük, akkor továbbra is a Wiener-folyamat lesz az egyetlen, ami eleget tesz a feltételeknek. Tehát az exponenciális Lévy-modellt leírhatjuk az alábbi feltételekkel:

1. Egy adott  $h$  időegység alatt a folyamat adott  $F_h$  eloszlású.
2. Az  $X_t$  loghozamok diszjunkt intervallumokon függetlenek



4.1. ábra. A Variance Gamma folyamat trajektóriáinak szimulációja

3. A  $t \rightarrow S_t$  trajektóriák kizárólag elsőfajú szakadásokat tartalmazhatnak (ugrások).

Az általános ELM modellek bemutatása után ennek két leggyakrabban használt speciális esetét mutatom be.

### 4.3. Variance Gamma és Normal Inverse Gaussian modellek

A Variance Gamma (VG) és Normal Inverse Gaussian (NIG) Lévy modelleket Carr és Barndorff-Nielsen vezették be 1998-ban pénzügyi termékek  $X_t := \log(S_t/S_0)$  loghozamának modellezésére [6]. Ezen modellek lényege, hogy egy driftes Wiener-folyamatot egy tőle független véletlen órával átskálázunk. Formálisan a loghozam  $X_t$  folyamatát az alábbi

$$X_t = \sigma W(\tau(t)) + \theta \tau(t) + bt \quad (4.3)$$

alakban állítjuk elő, ahol  $\sigma > 0$ ,  $\theta, b \in \mathbb{R}$  konstansok,  $W$  Wiener-folyamat, és  $\tau$  egy szubordinátor (nem csökkenő Lévy folyamat, mely a véletlen időfolyamatot reprezentálja), amire  $\mathbb{E}(\tau(t)) = t$ , és  $\text{Var}(\tau(t)) = \kappa t$ . A  $\tau$  folyamat értelmezhető mint a kereskedési aktivitást időben leíró folyamat.

A két modell közötti különbség abban áll, hogy a VG modellben  $\tau(t)$  Gamma eloszlású  $\beta := \kappa$  skálaparaméterrel és  $\alpha := t/\kappa$  alakparaméterrel, míg a NIG modellben  $\tau(t)$  Inverz Gauss eloszlású  $\mu = 1$  várható értékkel és  $\lambda = 1/(t\kappa)$  alakparaméterrel.

A modellekben szereplő paraméterek szemléletes interpretációi az alábbiak:

1. A  $\sigma$  paraméter loghozamok teljes varianciáját adja meg (akár a GBM modelljében). Szimmetrikus esetben, vagyis ha  $(\theta = 0)$ ,  $\sigma^2$  a loghozamok egységnyi időre eső szórásnégyszetét jelenti.
2. A  $\kappa$  együttható a loghozamok csúcsosságát és farokvastagságát adja meg. A szimmetrikus  $(\theta = 0)$  esetben,  $\kappa$  a klasszikus csúcsossági paraméter, ami a loghozamok relatív csúcsosságát adja meg a normális eloszláshoz képest.
3.  $b$  a naptári-idő (átskálázatlan idő) szerinti drift együttható.
4.  $\theta$  az ún. *business time* szerinti drift együttható és a loghozamok ferdeségét határozza meg.

Egy VG folyamat felírható mint két egyszerű monoton növekedő Lévy-folyamat (a folyamatok az árfolyam felfelé illetve lefelé mozgását reprezentálják) különbsége:

$$X_t = X_t^+ - X_t^- + bt, \quad (4.4)$$

ahol  $X^+$  és  $X^-$  független Gamma Lévy-folyamatok az alábbi paraméterekkel:

$$\alpha^+ = \alpha^- = \frac{1}{\kappa}, \quad \beta_{\pm} := \frac{\sqrt{\theta^2 \kappa^2 + 2\sigma^2 \kappa} \pm \theta \kappa}{2}. \quad (4.5)$$

A vizsgált folyamatok előnye, hogy létezik az eloszlásaikhoz zárt alakú formula. A VG modellben az  $X_t$  folyamat sűrűségfüggvénye az alábbi alakban írható:

$$p_t(x) = \frac{\sqrt{2} \exp\left(\frac{\theta(x-bt)}{\sigma^2}\right)}{\sigma \sqrt{\pi \kappa} \frac{t}{\kappa} \Gamma\left(\frac{t}{\kappa}\right)} \left(\frac{|x-bt|}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\kappa} + \theta^2}}\right)^{\frac{t}{\kappa} - \frac{1}{2}} K_{\frac{t}{\kappa} - \frac{1}{2}}\left(\frac{|x-bt| \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\kappa} + \theta^2}}{\sigma^2}\right), \quad (4.6)$$

ahol  $K$  a másodfajú módosított Bessel-függvény.

A NIG modell sűrűségfüggvénye felírható az alábbi alakban:

$$p_t(x) = \frac{t \exp\left(\frac{t}{\kappa} + \frac{\theta(x-bt)}{\sigma^2}\right)}{\pi} \left(\frac{(x-bt)^2 + \frac{t^2 \sigma^2}{\kappa}}{\frac{\theta^2}{\kappa \sigma^2} + \frac{1}{\kappa^2}}\right)^{-\frac{1}{2}} K_1\left(\frac{\sqrt{(x-bt)^2 + \frac{t^2 \sigma^2}{\kappa}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\kappa} + \theta^2}}{\sigma^2}\right). \quad (4.7)$$

A továbbiakban feltesszük, hogy a loghozamokat megadó  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  folyamatot vizsgáljuk a  $[0, T]$  intervallumban az egyenletesen megfigyelt  $t_i = i\delta_n$ ,  $i = 1, \dots, n$  időpillanatokban, ahol  $\delta_n = T/n$ . A továbbiakban feltesszük, hogy  $X$  növekményei függetlenek és stacionáriusak. Ekkor már véletlen mintaként tekinthetjük az alábbi  $n$  elemű sorozatot.

$$\Delta_i^n := \Delta_i^n X := X_{i\delta_n} - X_{(i-1)\delta_n}, \quad i = 1, \dots, n,$$

Legyen továbbá az  $X_{\delta_n}$  folyamat sűrűségfüggvénye  $f_{\delta_n}(\cdot) := f_{\delta_n}(\cdot; \sigma, \theta, \kappa, b)$  alakú. A továbbiakban bemutatjuk azokat a statisztikai módszereket, amikkel majd a valós adatokhoz történő kalibrálás fog történni.

## 4.4. Paraméterek becslése

Az alábbiakban bemutatjuk a két leggyakrabban használt paraméteres statisztikai becslési módszert a maximum likelihood becslést illetve a momentum módszert. Általánosságban a ML módszert jobbnak szokták tartani a momentum módszerhez képest, viszont a momentum módszernek is megvannak az előnyei. A momentum módszer becslését gyakran használják az ML becsléshez szükséges optimalizálás kezdőpontjaként. Ennél sokkal fontosabb tulajdonsága, pedig az, hogy konzisztens marad a hozamok autokorrelációja esetén is, és kizárólag a stacionaritás és ergodicitás teljesülése szükséges a használatához.

### 4.4.1. Momentum módszer

A VG modell várható értékét és első három centrális momentumát az alábbi formulák adják:

$$\mu_1(X_\delta) := E(X_\delta) = (\theta + b)\delta \quad (4.8)$$

$$\mu_2(X_\delta) := \text{Var}(X_\delta) = (\sigma^2 + \theta^2\kappa)\delta \quad (4.9)$$

$$\mu_3(X_\delta) := E(X_\delta - EX_\delta)^3 = (3\sigma^2\theta\kappa + 2\theta^3\kappa^2)\delta \quad (4.10)$$

$$\mu_4(X_\delta) := E(X_\delta - EX_\delta)^4 = (3\sigma^4\kappa + 12\sigma^2\theta^2\kappa^2 + 6\theta^4\kappa^3)\delta + 3\mu_2(X_\delta)^2. \quad (4.11)$$

Ezután a momentumok módszerével megbecsülhetők a paraméterek. Nem kell mást tennünk, mint az  $X_{\delta_n}$  tapasztalati centrális momentumait meghatározni és ezután megoldani a fenti egyenleteket:

$$\hat{\mu}_{k,n} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \Delta_i^n - \bar{\Delta}^{(n)} \right)^k \quad k \geq 2 \quad (4.12)$$

ahol  $\bar{\Delta}^{(n)} := \sum_{i=1}^n \Delta_i^n / n$ . Sajnos a fenti egyenletrendszer megoldása nem triviális és kizárólag numerikus módszerekkel valósítható meg. Az egyenletrendszer egyszerűbb alakra hozása céljából bevezetjük az  $\mathcal{E} := \theta^2\kappa/\sigma^2$  segédváltozót. Ezután a fenti egyenletrendszert átírhatjuk az alábbi formába:

$$\mu_2(X_\delta) = \delta\sigma^2(1 + \mathcal{E}) \quad (4.13)$$

$$\mu_3(X_\delta) = \delta\sigma^2\theta\kappa(3 + 2\mathcal{E}) \quad (4.14)$$

$$\frac{\mu_4(X_\delta)}{3\mu_2^2(X_\delta)} - 1 = \frac{\kappa}{\delta} \frac{1 + 4\mathcal{E} + 2\mathcal{E}^2}{(1 + \mathcal{E})^2} \quad (4.15)$$

Ezeket a formulákat tovább alakítva kapjuk:

$$\frac{3\mu_3^2(X_\delta)}{\mu_2(X_\delta)(\mu_4(X_\delta) - 3\mu_2^2(X_\delta))} = \frac{\mathcal{E}(3+2\mathcal{E})^2}{(1+4\mathcal{E}+2\mathcal{E}^2)(1+\mathcal{E})} := f(\mathcal{E}) \quad (4.16)$$

A fent kapott  $f(\mathcal{E})$  függvényről már tudjuk, hogy szigorúan monoton növekvő és konkáv a  $(-1+2^{-1/2}, \infty) \cup (-\infty, 2)$  tartományon, tehát itt hatékonyan megoldható numerikusan. Az egyenlet baloldalát egyszerűbb alakra írhatjuk a tapasztalati ferdeség és csúcsosság felhasználásával:  $3\text{Skw}(X_\delta)^2/\text{Krt}(X_\delta)$ , ahol:

$$\text{Skw}(X_\delta) := \frac{\mu_3(X_\delta)}{\mu_2(X_\delta)^{3/2}} \quad \text{Krt}(X_\delta) := \frac{\mu_4(X_\delta)}{\mu_2(X_\delta)^2} - 3$$

Végezetül a tapasztalati becsléseket beírjuk a paraméterek helyére:

$$\widehat{\text{Var}}_n := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n - \bar{\Delta}_n^n)^2, \quad \widehat{\text{Skw}}_n := \frac{\hat{\mu}_{3,n}}{\hat{\mu}_{2,n}^{3/2}}, \quad \widehat{\text{Krt}}_n := \frac{\hat{\mu}_{4,n}}{\hat{\mu}_{2,n}^2} - 3 \quad (4.17)$$

Összegezzük a momentum becslés módszerének lépéseit:

1. Numerikusan meghatározzuk az alábbi egyenlet  $\hat{\mathcal{E}}_n^*$  megoldását:

$$f(\mathcal{E}) = \frac{3\widehat{\text{Skw}}_n^2}{\widehat{\text{Krt}}_n} \quad (4.18)$$

2. Elvégezzük az MM becslést az alábbi képletekből:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_n^2 &:= \frac{\widehat{\text{Var}}_n}{\delta_n} \left( \frac{1}{1+\hat{\mathcal{E}}_n^*} \right) & \hat{\kappa}_n &:= \frac{\delta_n \widehat{\text{Krt}}_n}{3} \left( \frac{(1+\hat{\mathcal{E}}_n^*)^2}{1+4\hat{\mathcal{E}}_n^*+2\hat{\mathcal{E}}_n^{*2}} \right) \\ \hat{\theta}_n &:= \frac{\hat{\mu}_{3,n}}{\delta_n \hat{\sigma}_n^2 \hat{\kappa}_n} \left( \frac{1}{3+2\hat{\mathcal{E}}_n^*} \right) & \hat{b}_n &:= \frac{1}{\delta_n} \bar{\Delta}_n^n - \hat{\theta}_n = \frac{X_T}{T} - \hat{\theta}_n \end{aligned}$$

A fenti becslés csak abban az esetben működik, ha  $\hat{\mathcal{E}}_n^* \in (-1+2^{-1/2}, \infty)$ , ami pedig akkor teljesül, ha:

$$\frac{3\widehat{\text{Skw}}_n^2}{\widehat{\text{Krt}}_n} < 2. \quad (4.19)$$

Szükséges feltétel még a  $\hat{\kappa}_n$  pozitivitásához, hogy a tapasztalati csúcsosság  $\widehat{\text{Krt}}_n$  is pozitív.

Arra az igen gyakori esetre, amikor  $\theta$  nagyon kicsi a Seneta (2004) által bevezetett egyszerű approximációs módszert használjuk. A becslés lényege, hogy kihasználjuk azt a tényt, hogy  $\hat{\mathcal{E}}_n^* \approx 0$  és ebből a korábbi becsléseink az alábbi alakra egyszerűsödnek:

$$\hat{\sigma}_n^2 := \frac{\widehat{\text{Var}}_n}{\delta_n}, \quad \hat{\kappa}_n := \frac{\delta_n \widehat{\text{Krt}}_n}{3} \quad (4.20)$$

$$\hat{\theta}_n := \frac{\hat{\mu}_{3,n}}{3\delta_n \hat{\sigma}_n^2 \hat{\kappa}_n} = \frac{\widehat{\text{Skw}}_n (\widehat{\text{Var}}_n)^{1/2}}{\delta_n \widehat{\text{Krt}}_n}, \quad \hat{b}_n := \frac{X_T}{T} - \hat{\theta}_n \quad (4.21)$$

Itt érdemes újra megjegyeznünk, hogy a  $\sigma^2$  paraméter a folyamat teljes varianciáját adja meg, továbbá a  $\hat{\sigma}_n^2$  becslése és a realizált variancia (RV) között az alábbi szoros kapcsolat áll fenn.:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{T - \delta_n} \sum_{i=1}^n \left( X_{i\delta_n} - X_{(i-1)\delta_n} - \frac{X_T}{n} \right)^2 = \frac{1}{T - \delta_n} \overline{RV}_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (4.22)$$

ahol a realizált varianciát ( $\overline{RV}_n$ ) az alábbi képlettel számoljuk:

$$\overline{RV}_n := \sum_{i=1}^n \left( X_{i\delta_n} - X_{(i-1)\delta_n} \right)^2 \quad (4.23)$$

A NIG modell várható értékét és centrális momentumait megadó formulák az alábbiak:

$$\mu_1(X_\delta) := \mathbb{E}(X_\delta) = (\theta + b)\delta, \quad (4.24)$$

$$\mu_2(X_\delta) := \text{Var}(X_\delta) = (\sigma^2 + \theta^2 \kappa)\delta, \quad (4.25)$$

$$\mu_3(X_\delta) := \mathbb{E}(X_\delta - \mathbb{E}X_\delta)^3 = (3\sigma^2\theta\kappa + 3\theta^3\kappa^2)\delta, \quad (4.26)$$

$$\mu_4(X_\delta) := \mathbb{E}(X_\delta - \mathbb{E}X_\delta)^4 = (3\sigma^4\kappa + 18\sigma^2\theta^2\kappa^2 + 15\theta^4\kappa^3)\delta + 3\mu_2(X_\delta)^2. \quad (4.27)$$

Most egy jóval egyszerűbb egyenletet kaptunk:

$$\frac{3\mu_3^2(X_\delta)}{\mu_2(X_\delta)(\mu_4(X_\delta) - 3\mu_2^2(X_\delta))} = \frac{9\mathcal{E}}{5\mathcal{E} + 1} := f(\mathcal{E}) \quad (4.28)$$

ezért zárt formájú megoldást is tudunk rá adni:

$$\hat{\mathcal{E}}_n^* = \frac{\widehat{\text{Skw}}_n^2}{3\widehat{\text{Krt}}_n - 5\widehat{\text{Skw}}_n^2} \quad (4.29)$$

A momentumbecslést ebben az esetben az alábbi formulák adják:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_n^2 &:= \frac{\widehat{\text{Var}}_n}{\delta_n} \left( \frac{1}{1 + \hat{\mathcal{E}}_n^*} \right) & \hat{\kappa}_n &:= \frac{\delta_n \widehat{\text{Krt}}_n}{3} \left( \frac{1 + \hat{\mathcal{E}}_n^*}{1 + 5\hat{\mathcal{E}}_n^*} \right) \\ \hat{\theta}_n &:= \frac{\hat{\mu}_{3,n}}{\delta_n \hat{\sigma}_n^2 \hat{\kappa}_n} \left( \frac{1}{3 + 3\hat{\mathcal{E}}_n^*} \right) & \hat{b}_n &:= \frac{1}{\delta_n} \Delta^n - \hat{\theta}_n = \frac{X_T}{T} - \hat{\theta}_n \end{aligned}$$

#### 4.4.2. Maximum likelihood becslés

A maximum likelihood módszer az elméletileg leginkább megalapozott becslés nagy elemszámú minták esetére. Legyen  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  véletlen mintára, ami a  $f(\cdot|\theta)$  eloszlás-családból származik és a  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$  paraméter vektor definiálja az eloszlást. Ekkor  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x})$  becslést úgy végezzük el, hogy maximalizáljuk a

$$\mathcal{L}(\theta|\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta). \quad (4.30)$$

likelihood függvényt a paraméterek terén. Az így kapott  $\hat{\theta}(\mathbf{x})$  lesz a  $\theta$  paraméter maximum likelihood becslése (MLE).

Most tekintsük a Lévy-folyamatokra vonatkozó ML becsléseket. Mivel feltettük, hogy a loghozamokat leíró  $X_\delta$  folyamat növekményei független, azonos eloszlású valószínűségi változók, ezért egy  $f_\delta(\cdot|\theta)$  eloszlást feltételezve elvégezhetjük a ML becslést. A ML becslés feltétele, hogy független minta szükséges a meghatározásához. A nagy frekvenciás adatok esetében ez nem feltétlenül igaz, viszont a megfigyelések nagy száma és az autokorreláció gyengesége miatt mégis hatékonyan működik. A NIG és VG folyamatoknak létezik zárt formájú sűrűségfüggvényük, ezért a becslés viszonylag egyszerű. A ML becslés itt egy nemlineáris optimalizálási feladatra vezet.



## 5. fejezet

# Empirikus vizsgálatok

A nagy frekvenciás kereskedési adatok jellemzője, hogy nem egyenletes időtengelyen történik a mintavétel, hanem az árfolyamok megváltozásakor (milliszekundumos illetve másodperces felbontásban). Ennek következtében a klasszikus definíció értelmében nem tekinthetők idősornak, emiatt közvetlenül nem alkalmazhatók rájuk az ökonometria megszokott módszerei. Az időben egyenetlen mintavételű nagy frekvenciás kereskedési adatokra vonatkozó statisztikai módszereket napjainkban rendkívül aktívan kutatják.

Az ún. *tick* adatok másik jellemzője, hogy a magas frekvencia miatt a megfigyelések száma is óriási. A személyi számítógépek kapacitása sok esetben nem elegendő a kezelésükre. Az általam használt nagy frekvenciás devizaárfolyam adatok memóriáigénye egy devizapárra, 5 napra körülbelül 20 MB volt. A teljes adatbázis 20 devizapárra a egy évre körülbelül 5 GB tárterületet igényelt. Komolyabb statisztikai vizsgálatok elvégzése személyi számítógépen ekkora adatmennyiség esetén már komoly korlátokba ütközik. Például egy maximum likelihood becslés numerikus elvégzéséhez akár 1000-szer is ki kell értékelni a célfüggvényt a több száz MB adaton.

A számítási igény kezelhető korlátok közé szorításának céljából a nagy frekvenciás adatokat heti illetve havi bontásban tekintettem kizárólag 2014 első 4 hónapjára, az egyik leglikvidebb EUR/USD devizapárra, illetve az EUR/HUF árfolyamra.

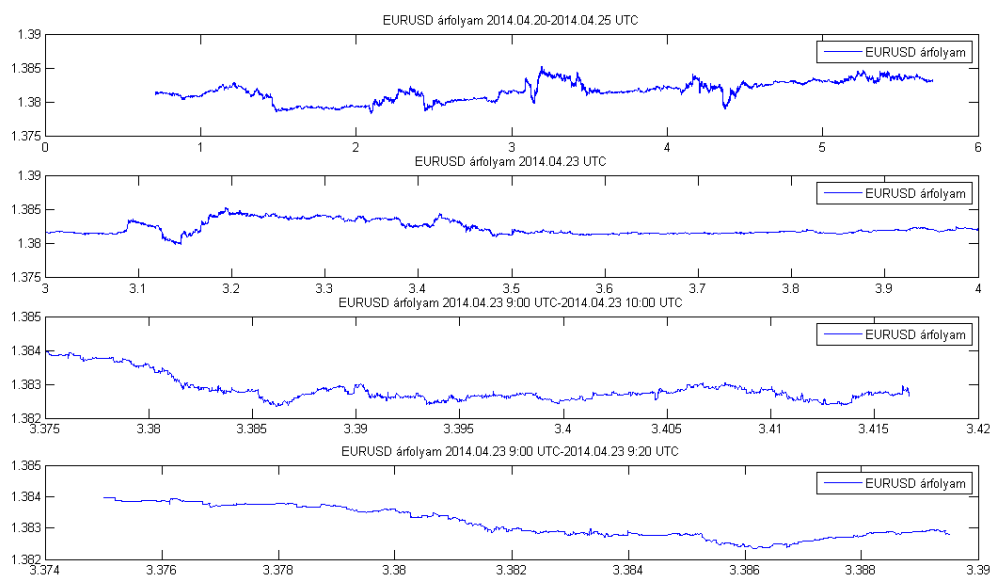
### 5.1. A devizaárfolyamok empirikus tulajdonságai

A nagy frekvenciás kereskedési adatok statisztikai jellemzői sok szempontból különböznek a megszokott napi felbontású pénzügyi idősoroktól. A tick adatokban az időtengely mintái szintén hordoznak információt. Az idő- és árfolyamugrások együttes modellezésének módszertana dinamikusan fejlődő területe a statisztikának [19]. Néhány empirikus tulajdonság, ami tick adatok vizsgálatánál érdeklődésre tarthat számot:

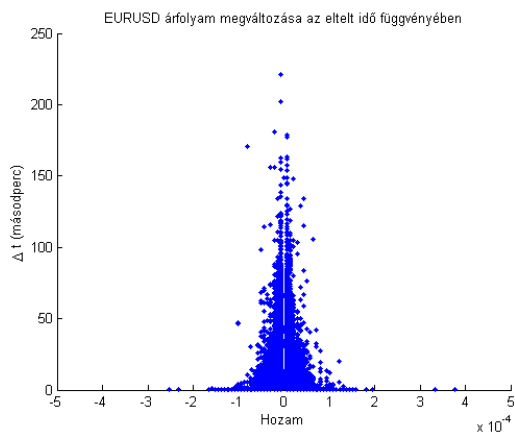
- A tick adatok számának trendje, periodicitása havi és éves időskálán.
- A tick-ek számának eloszlása egy napon belül.

- Az időugrások méretének (logaritmikus)eloszlása.
- Az árfolyamugrások eloszlása illetve autokorrelációja.
- Az időugrások és árfolyamugrások együttes eloszlása, korrelációja illetve általános összefüggőségi struktúrája.

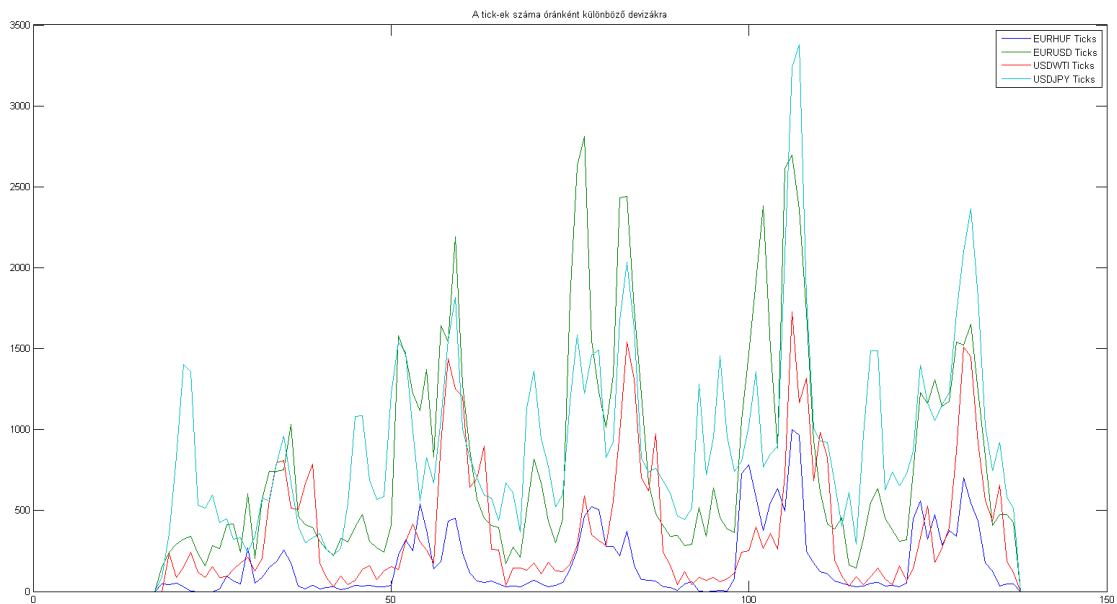
A felsorolt statisztikai jellemzők a nagy frekvenciás kereskedési algoritmusok alapját is képezik, ezért a modellezésük szintén rendkívül aktívan kutatott terület.



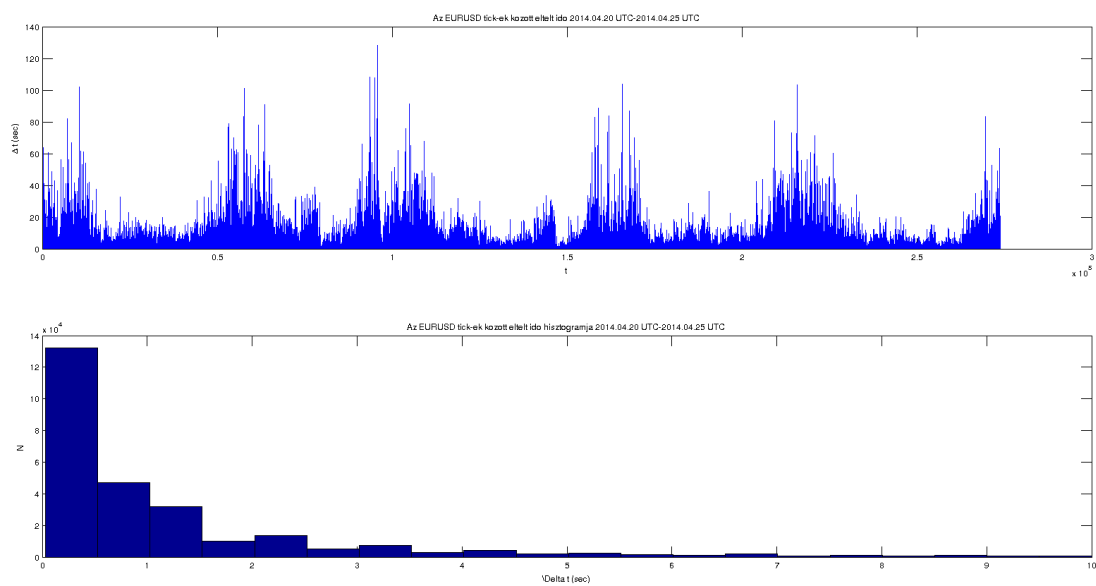
5.1. ábra. Az EUR/USD árfolyam 1 hetes, 1 napos, 1 órás, illetve 20 perces időskálán, 2014.04.20 és 2014.04.25. között



5.2. ábra. Az EUR/HUF idő- és árfolyamugrások méretének együttes empirikus eloszlása 2014.04.20 és 2014.04.25. között. Mivel a tick adatokban nem szerepel két egyenlő szomszédos árfolyam, a 0 felett egy vékony üres sáv van.

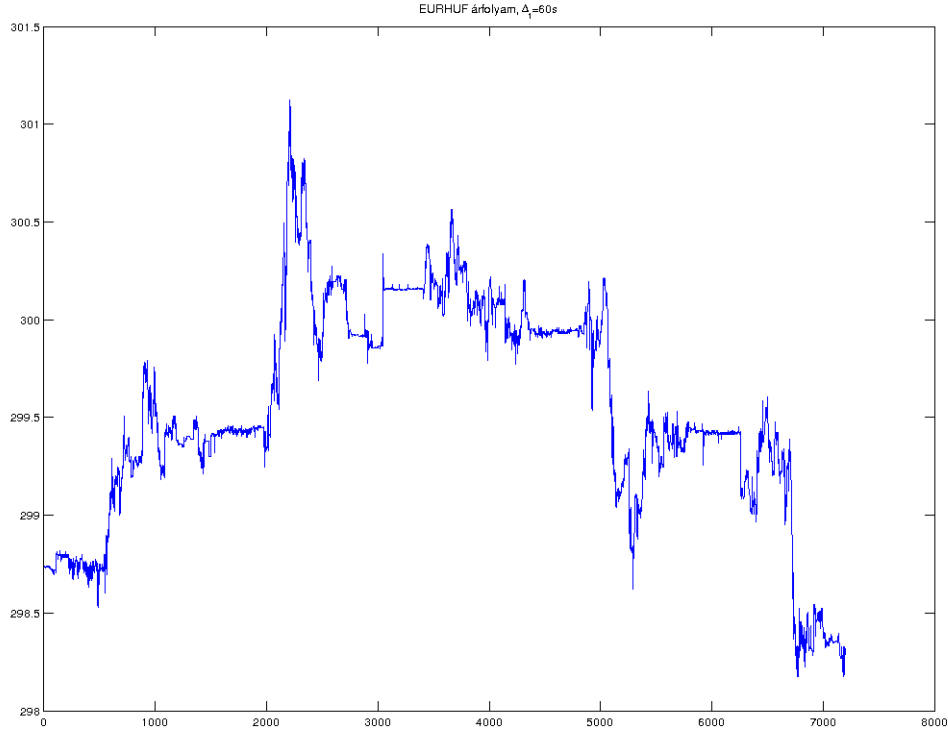


5.3. ábra. Az EUR/USD, EUR/HUF, USD/JPY devizapárookra illetve a WTI/USD olaj-árra vonatkozó tick-ek száma óránként, 2014.04.20 és 2014.04.25. között.



5.4. ábra. Az EUR/USD tick-ek között eltelt idők idősora és histogramja.

## 5.2. A hipotézisvizsgálati módszerek bemutatása

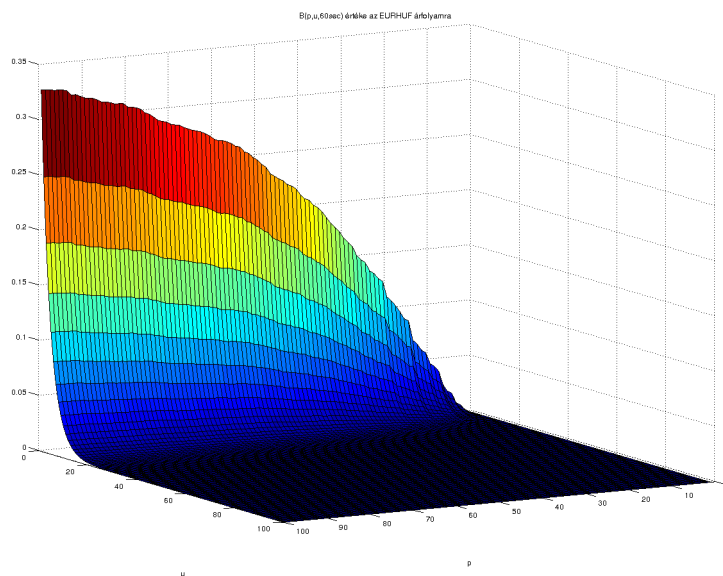


5.5. ábra. Az EUR/HUF árfolyam 2014. januári 1 perces felbontású időszora

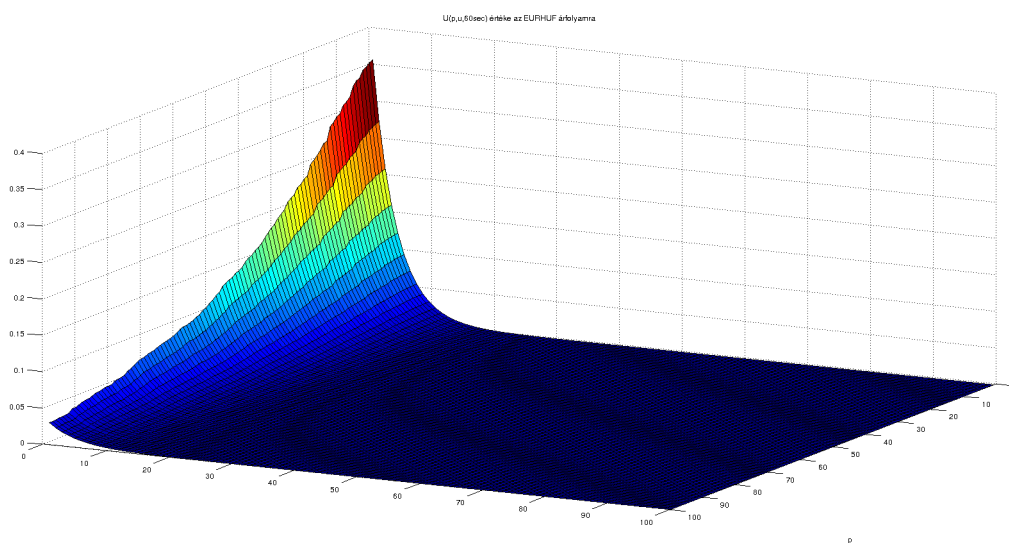
A 3. Fejezetben található függvények  $p$ -adikus levágott variációk tulajdonságait és a belőlük felépíthető próbákra mutatok néhány empirikus vizsgálatot az alábbiakban. Az elemzést 1 heti EURHUF árfolyam adaton végeztem el. Elkészítettem a  $B(p, u_n, \Delta_n)$  és  $U(p, u_n, \Delta_n)$  függvények MATLAB implementációját. Ehhez szükség volt az árfolyamok különböző időskálán vett értékeire ehhez 60 darab idősort készítettem, amihez 1-60 perces ablakméretekkel lépcsősen (legutóbbi tick szerint) interpoláltam a loghozamokat. Tehát a konvergenciát az  $n = 1 \dots 60$  időtávon tudjuk vizsgálni, ráadásul ezt még jobban le kell csökkentenünk amennyiben az időfelbontást átskálázzuk.

$$B(p, u_n, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{\lceil T/\Delta_n \rceil} |\Delta_i^n X|^p \mathbf{1}_{\{|\Delta_i^n X| \leq u_n\}}, \quad (5.1)$$

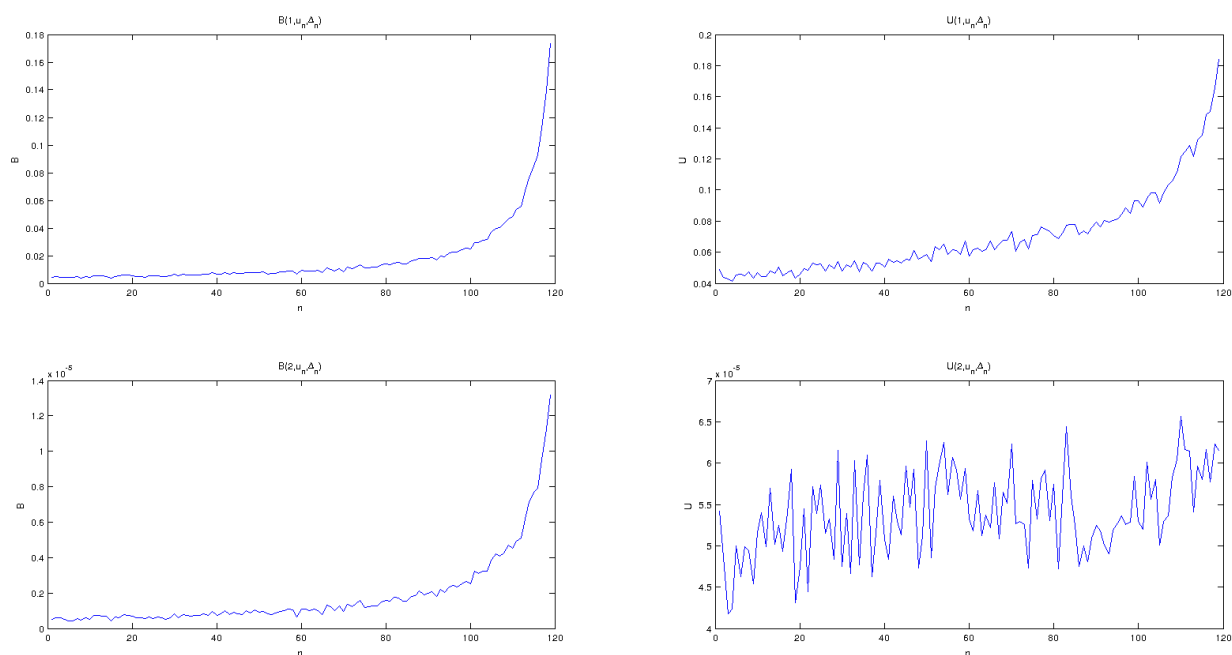
$$U(p, u_n, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{\lceil T/\Delta_n \rceil} |\Delta_i^n X|^p \mathbf{1}_{\{|\Delta_i^n X| > u_n\}}, \quad (5.2)$$



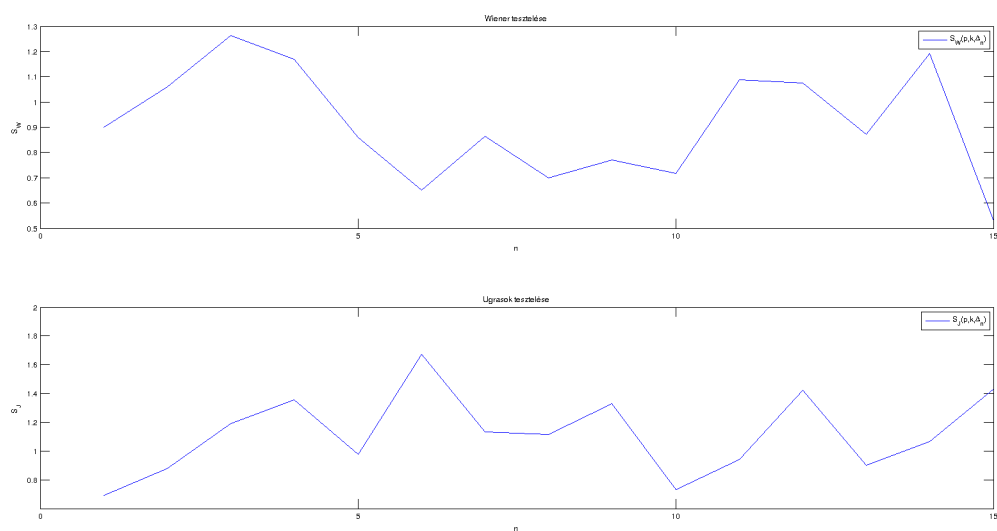
5.6. ábra. A  $B(p, u, 60sec)$  értéke az EUR/HUF árfolyamra  $p$  és  $u$  függvényében



5.7. ábra. Az  $U(p, u, 60sec)$  értéke az EU/HUF árfolyamra  $p$  és  $u$  függvényében



5.8. ábra. A  $B(1, u_n, \Delta_n), U(1, u_n, \Delta_n), B(2, u_n, \Delta_n)$  és  $U(2, u_n, \Delta_n)$  értéke 1-60 perces interpolációs felbontásra az EUR/HUF árfolyamra



5.9. ábra. Az  $S_W(p=1.6, u_n, k=3, \Delta_n)$  és  $S_J(p=3, k=3, \Delta_n)$  tesztstatisztikák értéke az EUR/HUF árfolyamra különböző  $n$ -ekre

A tesztstatisztikák értéke nagyon függ lokálisan a paraméterek lokális választásától. A konvergencia feltehetően hosszútávon bekövetkezik, ehhez viszont 1 hétnél hosszabb

adatokkal kellene dolgozni. A számításigény ezzel természetesen jóval megnőne. Azt vettem továbbá észre, hogy az  $n$  növekedésével a statisztikák értéke instabillá válik. Ennek oka véleményem szerint, hogy a rendelkezésre álló adatok száma jelentősen csökken az  $n$  növelésével az időátskálázás miatt (pl  $n = 60$  esetén csak 120 megfigyelésünk van). A fenti  $S_W$  és  $S_J$  statisztikák szemmel láthatóan 1 körül ingadoznak, szemben az másik hipotézis szerinti  $k^{p/2-1}$  és  $k^{1-p/2}$ . Ennek következtében azt a sejtést fogalmazhatjuk meg, hogy a nagy frekvenciás devizaárfolyam folyamatában pusztán ugrások találhatók, Wiener-folyamat nem. Természetesen jóval alaposabb elemzést igényelne ennek az állításnak a szignifikáns igazolása.

### 5.3. A devizaárfolyamok, mint Normal Inverse Gaussian és Variance Gamma folyamatok

Az előző fejezetben ismertetett becslési módszerek felhasználásával elkészítettem az EUR/HUF és EUR/USD árfolyamokra vonatkozó NIG és VG folyamatok paramétereinek becslését. A 2014 első 4 hónapját tartalmazó tick adatokat 5, 10, 20 másodperces, 1, 5 és 20 perces, valamint 1 órás ablakméretekkel lépcsősen (legutóbbi tick szerint) interpoláltam. Ezután a loghozamok idősorán elkészítettem a paraméterekre vonatkozó momentum becsléseket, melyeket az alábbi 3 táblázatban összesítettem. A becslések stabilitására vonatkozóan az alábbi következtetéseket vontam le:

- A  $\sigma$  becslése mindkét folyamatra stabilnak tekinthető. Az időablak növelésével az értéke is monoton növekedő. Ennek oka lehet, hogy az adatok finomsága másodperces szinten nem elég nagy, ezért kevés az ugrás.
- A  $\kappa$  paraméter becslése nehezebb feladat, kis időablakban különösen. Észrevehetjük, hogy míg 5, 10, 20 és 60 másodpercnél erősen ingadozik, 5 perces felbontás felett stabilnak tekinthetőek az értékek.
- A  $b$  és  $\theta$  paraméterek határozzák meg a trendet a folyamatban. Azt tapasztaltam, hogy a két paraméter gyakran egymást kompenzálja és a becslésekben gyakran a naptári és üzleti idő szerinti drift közel egymás ellentettjei. A paraméterek konkrét értéke viszont erősen függ a piacon megfigyelhető lokális napos trendektől.
- A vizsgált időszakban az EUR/HUF és EUR/USD volatilitási paramétereit összehasonlítva azt vettem észre, hogy a naptári  $\sigma$  volatilitás az EUR/HUF árfolyamnál magasabb, míg a *business time* szerinti  $\kappa$  volatilitás az EUR/USD árfolyamnál lett nagyobb.

Hónap	Időablak (sec)	$\sigma$	$\kappa$	$b$	$\theta$
Jan.	5	0,00923	0,00156	-0,00830	0,00620
Feb.	5	0,00814	0,00091	-0,01761	0,02356
Márc.	5	0,00864	0,00088	0,00647	-0,00746
Ápr.	5	0,00701	0,00161	-0,00587	0,01043
Jan.	10	0,00932	0,00191	-0,00768	0,00559
Feb.	10	0,00821	0,00094	-0,01670	0,02263
Márc.	10	0,00873	0,00112	0,00114	-0,00213
Ápr.	10	0,00704	0,00197	-0,00832	0,01288
Jan.	20	0,01076	0,00233	-0,01467	0,01192
Feb.	20	0,00952	0,00101	-0,01920	0,02711
Márc.	20	0,00996	0,00114	-0,00891	0,00756
Ápr.	20	0,00813	0,00248	-0,01068	0,01677
Jan.	60	0,01611	0,00119	-0,02315	0,01703
Feb.	60	0,01384	0,00067	-0,04674	0,06438
Márc.	60	0,01477	0,00077	-0,01043	0,00746
Ápr.	60	0,01221	0,00117	-0,02636	0,04001
Jan.	300	0,03034	0,00039	-0,11071	0,08623
Feb.	300	0,02743	0,00057	-0,09328	0,16425
Márc.	300	0,02874	0,00044	0,00555	-0,01776
Ápr.	300	0,02320	0,00053	-0,03861	0,09246
Jan.	600	0,03888	0,00041	-0,10916	0,06616
Feb.	600	0,03501	0,00051	-0,11999	0,24084
Márc.	600	0,03682	0,00048	-0,01789	-0,00394
Ápr.	600	0,03003	0,00042	0,03275	0,05788
Jan.	1200	0,04857	0,00026	-0,36424	0,28841
Feb.	1200	0,04720	0,00046	-0,24215	0,44965
Márc.	1200	0,04846	0,00052	0,01419	-0,05366
Ápr.	1200	0,03689	0,00031	-0,05995	0,21191
Jan.	3600	0,07577	0,00018	-0,42693	0,20231
Feb.	3600	0,06835	0,00033	-0,28771	0,84064
Márc.	3600	0,07717	0,00038	-0,22885	0,13509
Ápr.	3600	0,06033	0,00024	0,04777	0,35432

5.1. táblázat. 2014-es havi bontású EUR/USD árfolyam Normal Inverse Gaussian paramétereinek MM becslései



Hónap	Időablak (sec)	$\sigma$	$\kappa$	$b$	$\theta$
Jan.	5	0,00923	0,00168	-0,00759	0,00548
Feb.	5	0,00814	0,00098	-0,01595	0,02190
Márc.	5	0,00864	0,00089	0,00648	-0,00747
Ápr.	5	0,00701	0,00174	-0,00520	0,00976
Jan.	10	0,00932	0,00201	-0,00699	0,00490
Feb.	10	0,00821	0,00100	-0,01494	0,02087
Márc.	10	0,00873	0,00113	0,00099	-0,00198
Ápr.	10	0,00704	0,00207	-0,00784	0,01240
Jan.	20	0,01077	0,00268	-0,01303	0,01028
Feb.	20	0,00953	0,00108	-0,01695	0,02486
Márc.	20	0,00996	0,00117	-0,00890	0,00755
Ápr.	20	0,00814	0,00284	-0,00915	0,01523
Jan.	60	0,01612	0,00125	-0,02203	0,01590
Feb.	60	0,01386	0,00072	-0,04075	0,05839
Márc.	60	0,01477	0,00079	-0,01124	0,00827
Ápr.	60	0,01221	0,00122	-0,02502	0,03867
Jan.	300	0,03036	0,00042	-0,09887	0,07439
Feb.	300	0,02749	0,00063	-0,07354	0,14451
Márc.	300	0,02876	0,00047	0,00164	-0,01384
4	300	0,02323	0,00058	-0,02793	0,08178
Jan.	600	0,03890	0,00043	-0,09823	0,05523
Feb.	600	0,03537	0,00060	-0,05492	0,17576
Márc.	600	0,03684	0,00051	-0,02034	-0,00149
Ápr.	600	0,03006	0,00044	0,04284	0,04779
Jan.	1200	0,04872	0,00029	-0,30671	0,23088
Feb.	1200	0,04752	0,00053	-0,15346	0,36095
Márc.	1200	0,04856	0,00057	-0,00443	-0,03504
Ápr.	1200	0,03694	0,00033	-0,03437	0,18632
Jan.	3600	0,07602	0,00020	-0,34225	0,11763
Feb.	3600	0,07276	0,00043	0,19887	0,35405
Márc.	3600	0,07781	0,00044	-0,24351	0,14976
Ápr.	3600	0,06044	0,00026	0,09990	0,30219

5.2. táblázat. 2014-es havi bontású EUR/USD árfolyam Variance Gamma paramétereinek MM becslései

Hónap	Időablak (sec)	$\sigma$	$\kappa$	$b$	$\theta$
Jan.	60	0,04289	0,00008	-0,07884	0,21458
Feb.	60	0,05188	0,00010	-0,20160	0,17168
Márc.	60	0,04380	0,00008	0,06329	-0,11025
Ápr.	60	0,03608	0,00016	0,12713	-0,08695
Jan.	300	0,06619	0,00009	0,18024	0,15919
Feb.	300	0,08229	0,00012	-0,02850	-0,04832
Márc.	300	0,06420	0,00011	0,09498	-0,20924
Ápr.	300	0,04932	0,00010	-0,14766	0,24977
Jan.	600	0,07426	0,00011	0,07852	0,37927
Feb.	600	0,09444	0,00014	-0,43941	0,33763
Márc.	600	0,07267	0,00015	0,21547	-0,36651
Ápr.	600	0,05459	0,00011	-0,11716	0,24801
Jan.	1200	0,08358	0,00013	-0,30923	0,97890
Feb.	1200	0,11425	0,00014	-0,00390	-0,14617
Márc.	1200	0,08591	0,00016	0,55924	-0,78000
Ápr.	1200	0,06218	0,00012	-0,34844	0,53980
Jan.	3600	0,13376	0,00012	0,97391	0,66310
Feb.	3600	0,16327	0,00014	-0,27350	-0,08232
Márc.	3600	0,11505	0,00015	0,84882	-1,41044

5.3. táblázat. 2014-es havi bontású EUR/HUF árfolyam Normal Inverse Gaussian paramétereinek MM becslései

## 6. fejezet

# Forráskódok

A forráskódokat elérhetővé tettem a GitHub nevű online verziókezelő rendszerben az alábbi linken: <https://github.com/gotamas/HFT>. A kód hatékony kezeléséhez ajánlott Linus Torvalds **git** nevű elterjedt ingyenes verziókezelő szoftverének használata.

# Irodalomjegyzék

- [1] Márkus László: *Eszközár folyamatok modellezése, valamint európai és amerikai opciók árazása*, ELTE, egyetemi jegyzet, 2013
- [2] Ait-Sahalia, Yacine , Jean Jacod: *Analyzing the Spectrum of Asset Returns: Jump and Volatility Components in High Frequency Data*, Journal of Economic Literature,, 50(4), 2012
- [3] José E. Figueroa Lopez, Steven R. Lancette, Kiseop Lee, Yanhui Mi: *Estimation of NIG and VG models for high frequency financial data*, Handbook of Modeling High-Frequency Data in Finance, Ch.1, 2012
- [4] Ait-Sahalia, Yacine , Jean Jacod: *Is Brownian Motion Necessary to Model High Frequency Data*, Annals of Statistics, Vol.38(5), 2010
- [5] R. Greenberg, J. Barndorff-Nielsen, Ole E.: *Processes of Normal Inverse Gaussian Type*, Finance and Stochastics 2 (1): 41-68., 1998
- [6] Carr, Peter, Hélyette Geman, Dilip B. Madan, and Marc Yor: *The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation*, Journal of Business 75 (2): 305-32., 2002
- [7] Ait-Sahalia, Yacine, and Jean Jacod: *Testing for Jumps in a Discretely Observed Process*, Annals of Statistics 37 (1): 184-222., 2009
- [8] Ait-Sahalia, Yacine, Per A. Mykland, and Lan Zhang. *How Often to Sample a Continuous-Time Process in the Presence of Market Microstructure Noise*, Review of Financial Studies 18 (2): 351-416., 2005
- [9] Ait-Sahalia, Yacine, and Jean Jacod. *Estimating the Degree of Activity of Jumps in High Frequency Data*, Annals of Statistics 37 (5A): 2202-44., 2009
- [10] Delbaen, Freddy, and Walter Schachermayer: *A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing*, Mathematische Annalen 300: 463-520, 1994
- [11] Podolskij, Mark: *Limit Theorems for High Frequency Financial Data*, Lecture Notes, University of Heidelberg, 2012

- 
- [12] Biais, Bruno: *High Frequency Trading*, Toulouse School of Economics, London School of Economics, Technical paper, 2011
- [13] Ait-Sahalia, Yacine, Mehmet Saglam: *High Frequency Traders: Taking Advantage of Speed*, 2012
- [14] Tarun Chordia Amit Goyal Bruce N. Lehmann Gideon Saar Cornell: *High-Frequency Trading*, Johnson School Research Paper Series 20-2013
- [15] Peter Gomber, Björn Arndt, Marco Lutat, Tim Uhle: *High-Frequency Trading*, Goethe University, Frankfurt am Main, Technical Paper, 2013
- [16] Chaboud, Alain, Erik Hjalmarsson, Clara Vega, and Ben Chiquoine: *Rise of the Machines: Algorithmic Trading in the Foreign Exchange Market* (Federal Reserve International Finance Discussion Paper No. 980), 2010
- [17] Peter Gomber, Björn Arndt, Marco Lutat, Tim Uhle: *High-Frequency Trading*, Goethe University, Frankfurt am Main, Technical Paper, 2013
- [18] Jarrow, Robert , Philip Protter: *A Dysfunctional Role of High Frequency Trading in Electronic Markets*, Johnson School Research Paper Series 08-2011
- [19] Nikolaus Hautsch: *Econometrics of Financial High-Frequency Data* Springer Finance, 2012
- [20] *Wired: Raging Bulls: How Wall Street Got Addicted to Light-Speed Trading*  
[http://www.wired.com/2012/08/ff\\_wallstreet\\_trading/all/](http://www.wired.com/2012/08/ff_wallstreet_trading/all/)
- [21] Arnuk, Sal , Joseph Saluzzi: *Broken Markets: How High Frequency Trading and Predatory Practices on Wall Street are Destroying Investor Confidence and Your Portfolio*, FT Press, 2012
- [22] Biais, B., T. Foucault , S. Moinas: *Equilibrium algorithmic trading* , Toulouse School of Economics (IDEI), 2010
- [23] Schapiro, Mary: *Strengthening Our Equity Market Structure*, Beszéd, 2010. Szeptember 7.
- [24] Nagy frekvenciás kereskedési adatok: [ratedata.gaincapital.com](http://ratedata.gaincapital.com)

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Márkus Lászlónak aki elfoglaltságai ellenére szakított rám időt és javaslataival és tanácsaival hozzájárult a dolgozat elkészüléséhez.

Köszönettel tartozom továbbá Fontányi Andornak és Talabér Dóra Editnek akik a vázlatok ellenőrzésében és a hibák felkutatásában nyújtottak nélkülözhetetlen segítséget.

Hálás köszönettel tartozom még családomnak akik mindenben támogattak és mindig mellettem álltak.