Viszontbiztosítás és Szolvencia II.

MSc Szakdolgozat

Írta: Gondos Réka
Biztosítási és pénzügyi matematika MSc
Aktuárius szakirány

Témavezető: Kerényi István
Minősített magyar aktuárius

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

2014

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni köszönetem témavezetőmnek, Kerényi Istvánnak, aki munkája mellett mindig szakított rám időt; sőt, még hétvégente is válaszolt minden apró kérdésemre. Mindezt rengeteg türelemmel, aprólékossággal és sosem váratva meg. Ő segített a témaválasztásban is, így köszönöm neki, hogy beleáshattam magam ebbe az érdekes témakörbe – ezzel közelebb hozva mind a viszontbiztosítást, mind a Szolvencia II-t.

Másrészt köszönöm a családomnak, akik mindig megfelelő munkakörnyezetet biztosítottak nekem dolgozatom megírásához és még azt is elnézték nekem, hogy csak ritkán láttak – és emellett mindvégig támogattak és biztattak. Köszönöm a munkatársaimnak a segítségüket az anyaggyűjtésben és felkészülésben; és türelmüket is, mely teljesen kifogyhatatlannak látszott dolgozatom megírásának ideje alatt. Illetve köszönöm barátaimnak is a rengeteg támogatást!

Végül, de semmiképpen sem utolsósorban, köszönöm Backhausz Ágnesnek és Luptovics Jánosnak, hogy kritikus időben segítettek egy problémás résznél, ezzel lehetővé téve szakdolgozatom idei benyújtását.

Bevezetés

Egy biztosító a csőd ellen sokféle módon védekezhet: nagyobb szavatoló tőkét képezhet, illetve alkalmazhat kockázatcsökkentő technikákat. A dolgozatban azt vizsgálom, hogy a viszontbiztosítás hogyan hat a szavatoló tőke szükségletre. Azt is megnézzük, hogy a tőkeköltség csökken-e, illetve, hogy ezzel a tőkeköltség-csökkenéssel megtérül-e a viszontbiztosítás díja. Hogy aktuálisabb keretek között vizsgáljuk az előbbi problémákat, a szavatoló tőke számítást a készülő Szolvencia II. szabályozói rendszer keretei közé igyekeztem beilleszteni.

Az első fejezetben a viszontbiztosítást mutatom be. Ismertetem a fogalmát és matematikai modelljét, majd az egyes viszontbiztosítási fajták csoportosítási lehetőségeit és azon belül a főbb típusait. Az arányosságra, mint csoportosítási lehetőségre külön kitérek és bemutatom az egyes arányos és nem arányos formákat. A típusoknak kiemelem az előnyeit és hátrányait is. A fejezet végén néhány kárfüggő kitételt taglalok a viszontbiztosítási szerződésben, illetve kimondok néhány fontosabb optimalitási tételt – azaz, hogy bizonyos feltételek között melyik viszontbiztosítás számít a legjobbnak.

A Szolvencia II. szabályozói rendszer a második fejezet témája, hiszen napjainkban a biztosítók életének szerves részét képezi és, amikor szavatoló tőke szükségletről beszélünk, akkor nem tehetjük meg, hogy elsiklunk felette. Bemutatom dióhéjban a felépítését és legalapvetőbb jellemzőit, különös tekintettel a szavatoló tőke és szavatoló tőke szükséglet számítására. Az utóbbit is a több rugalmassági szint közül, csak az úgynevezett standard formula irányából közelítjük meg, hiszen a biztosítók is várhatóan a legtöbben ezt fogják alkalmazni. A standard formulán belül bemutatom az alap szavatoló tőke szükséglet kockázati moduljait és almoduljait (vagyis azoknak szavatoló tőke szükségletét), különös tekintettel a nem-élet és partner kockázatra.

Végső soron kitérünk a – fent említett – viszontbiztosítás hatásának vizsgálatára egy nem-életbiztosítási példán keresztül. Ebben a fejezetben háromféle eloszlást feltételezek a károkra és leírom, hogyan számolom a szavatoló tőke szükségletet viszontbiztosítás nélkül; illetve hogyan hat rá az arányos és a kártöbblet viszontbiztosítás. A kártöbblet viszontbiztosítás díjához meg kell határoznunk a kár, mint valószínűségi változó, egy saját megtartáson felüli várható értékét, ami nem minden esetben egyszerű. Végül rátérek az elemzésre és összehasonlítom a viszontbiztosítás nélkül; viszontbiztosítással, de partnerkockázat nélkül; illetve partnerkockázatot generáló viszontbiztosítóval kötött viszontbiztosítással számított szavatoló tőke szükségletet. Azt is megvizsgálom, hogy ha kötött a direkt biztosító viszontbiztosítási szerződést, akkor megtérült-e a viszontbiztosítási díj a tőkeköltség-csökkenés által.

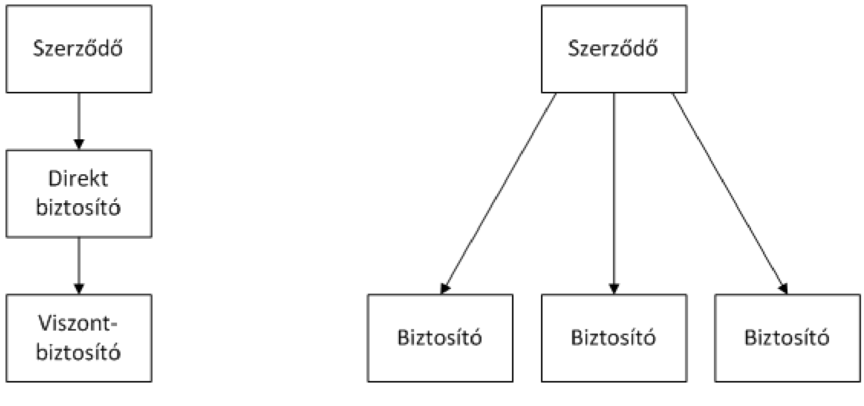
1. fejezet

A viszontbiztosítás

Ha egy biztosító társaság állományának egyes kockázatait túl nagynak tartja, akkor a tönkremenéstől való félelmében több dolgot is tehet. Az egyik megoldás a viszontbiztosítás. Ebben a fejezetben a viszontbiztosítás fogalmát és alapvető típusait mutatom be, melyek ismerete szükséges a 3. fejezetben taglaltak megértéséhez.

1.1. Fogalmai és általános matematikai modellje

Viszontbiztosítás alatt általában a biztosítók biztosítását értjük, de ez nem teljesen precíz, hiszen például egy vagyonbiztosító munkatársainak csoportos életbiztosítása egy életbiztosítónál nem tekinthető viszontbiztosításnak. Helyesebb lenne azt mondani, hogy egy **viszontbiztosítás** során egy biztosító az általa vállalt kockázatok egy részét vagy egészét továbbadja egy másik biztosító társaságnak, ezzel profitja egy részét feladva, de nagyobb biztonságot vásárolva. Ekkor az első biztosítót nevezzük **direkt biztosító**nak, cedáló társaságnak vagy közvetlen aláírónak – aki a másik társasággal szemben **viszontbiztosított** –, míg a másodikat **viszontbiztosító**nak; azt is mondjuk, hogy az első társaság **passzív viszontbiztosítási tevékenység**et végez, a második pedig **aktív**at. Az is előfordulhat, hogy a viszontbiztosító is továbbadja az átvállalt kockázatok egy részét, ezt **retrocedálás**nak hívják. Egy biztosító részvénytársaság (a magyar törvények szerint) végezhet aktív, illetve passzív viszontbiztosítási tevékenységet is, például egy kis biztosító egyesület egyes kockázatait átvállalja, de közben saját termékeket is értékesít, mely egy részét viszontbiztosításba adja. A retrocedálás révén a viszontbiztosítási szerződéseknek egész hálózata alakulhat ki (és alakult is ki a nemzetközi gyakorlatban). A viszontbiztosítás nem összetévesztendő az együttbiztosítással, mikor több biztosító megosztja a kockázatot (gondoljunk itt a paksi atompoolra). A különbség jól szemléltethető a következő ábrán, feltételezve, hogy a szerződőnek van egy kockázata és azt szeretné biztosítani.



A bal oldalon a viszontbiztosítás, jobb oldalon az együttbiztosítás rajza látható. Persze ez lényegesen bonyolódhat, a viszontbiztosító is továbbadhatja a kockázatait akár több társaságnak is.

Most térjünk rá a modellezésre!

A direkt biztosítást jellemezze az X valószínűségi változó, a kifizetendő kárösszeg, melynek eloszlásfüggvényét jelölje F. Legyen továbbá P a biztosítás díja. A viszontbiztosítás ekkor egyszerűen modellezhető a következő formában.

1.1. Definíció. Vegyük a $T : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mérhető függvényt, illetve legyen X a kifizetendő kárigény. Ekkor a **viszontbiztosítási szerződés**t az alábbiak adják meg:

- $0 \leq T(X) \leq X$ – a direkt biztosító saját megtartása vagy önrésze, azaz amennyit ő fizet a kárból;
- $R(X) := X - T(X)$ – a viszontbiztosító részesedése a kárból;
- P_0 – a direkt biztosító része a P díjból;
- $P_1 = P - P_0$ – a viszontbiztosítóé.

1.2. Következmény. *Az 1.1 definícióból következik, hogy*

- $F_0(x) = P(T(X) < x)$*;*
- $F_1(x) = P(X - T(X) < x) = P(R(X) < x)$*.*

szintén léteznek és eloszlásfüggvények.

Tehát a közvetlen aláíró kockázatát a (P_0, F_0) pár, a viszontbiztosítóét a (P_1, F_1) pár írja le.

1.3. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy jogos volt a feltevésünk, miszerint $0 \leq T(x) \leq x$, hiszen $T(x)$ negativitása azt jelentené, hogy a direkt biztosító érdekelt lenne a kárösszeg növelésében, míg $T(x) > x$ azt, hogy $x - T(x) < 0$, azaz a viszontbiztosítónak lenne profitja a károkból. $T(x) = x$ esetén a direkt biztosító nem köt viszontbiztosítást, a $T(x) = 0$ esetet pedig **fronting**nak nevezzük. Utóbbi azt jelenti, hogy a közvetlen aláíró egyáltalán nem vállal kockázatot, azt teljes egészében a viszontbiztosító viseli.

Ha a biztosítást a nettó várható érték elv alapján árazzák, azaz

$$P = E(X) \tag{1.1}$$

fennáll, akkor igazak a következők:

$$\begin{align} P &= \int_0^\infty x dF(x), \tag{1.2} \\ P_0 &= \int_0^\infty x dF_0(x) = \int_0^\infty T(x) dF(x) \notag \\ P_1 &= \int_0^\infty x dF_1(x) = \int_0^\infty (x - T(x)) dF(x) \tag{1.3} \end{align}$$

és mindegyik integrál létezik és véges, hiszen T-ről feltettük, hogy mérhető függvény.

1.4. Megjegyzés. Mivel $0 \leq T(x) \leq x$ és az integrál monoton, ezért teljesül a fenti integrálokra, hogy

$$0 \leq P_0 \leq P,$$

így P_0, P_1 és P is nemnegatív.

1.2. Csoportosítása és legfőbb típusai

A tipikus viszontbiztosítási szerződés két részből áll, egy fogalom definíciós részből és egy összefoglalóból, ahol a szerződés paramétereit rögzítik. Ilyenek lehetnek az átvállalt kockázatok köre, a viszontbiztosítási díj és az esetleges jutalék, a károkból való részesedés számításának módja, illetve a szerződés időbeli hatálya és az elszámolási szabályok.

Nézzük meg most ezek szerint, milyen csoportosítási lehetőségeink vannak!

- Végez-e a viszontbiztosító kockázat elbírálást? Ha végez, akkor **fakultatív** viszontbiztosításról beszélünk. Ez általában nagyobb biztosítási összegű szerződések esetén fordul elő. A másik eset, amikor nem végezhet kockázat elbírálást, a viszontbiztosító köteles elvállalni a direkt biztosító által felajánlott kockázatot – ezt **kötelező** viszontbiztosításnak nevezzük. Ekkor általában a közvetlen aláíró is köteles az adott kockázatokat felajánlani.
- Milyen az átvállalt kockázatok köre? Sok esetben egy bizonyos szempontba beletartozó összes kárt viszontbiztosításba adnak, például 2012-ben kötött szerződések tűzkár kockázatai – utóbbit gyakran nevezik **szerződéses** (vagy treaty) viszontbiztosításnak. De gyakori az a fajta treaty is, hogy adott egy limit, és a limit alattiakra a viszontbiztosításba adott kockázat elfogadása kötelező, a felettiekre fakultatív.
- A legfontosabb csoportosítási szempont viszont, hogy hogyan osztja meg a kockázatokat a direkt biztosító és viszontbiztosító társaság. Eszerint két típust különböztetünk meg leggyakrabban: **arányos** és **nem arányos** viszontbiztosítás. Ezt a két típust részletesebben is megvizsgáljuk ebben a részben és látjuk majd, hogy ezeken belül is többféle változat létezik.

1.2.1. Arányos viszontbiztosítás

Az arányos formának két változatát ismertetem. Az egyik a **kvóta (Quota Share – QS) viszontbiztosítás**, amikor a direkt biztosító és a viszontbiztosító abban egyezik meg, hogy egy üzletág vagy mondjuk egy termék esetén az éves bevételének q $(0 \leq q \leq 1)$ részét megtartja magának a közvetlen aláíró, míg az $(1-q)$ részét átadja a viszontbiztosítónak – cserébe az a bekövetkező károk $(1-q)$ részét kifizeti a direkt biztosítónak. A másik arányos forma a **surplus viszontbiztosítási forma**, melynél a direkt biztosító kockázatonként dönti el, hogy milyen megtartási arányt alkalmaz.

Quota Share

A fenti T függvényt használva tehát a QS-re fennáll X kockázat mellett, hogy

$$T(X) = qX.$$

Megint csak nettó várható érték elvet feltételezve és 1.3 egyenletet felhasználva látható, hogy a díjból is ugyanolyan arányban részesül a viszontbiztosító, mint a kockázatból:

$$P_1 = \int_0^\infty (x - T(x))dF(x) = \int_0^\infty (1-q)xdF(x) = (1-q)\int_0^\infty xdF(x) = (1-q)P.$$

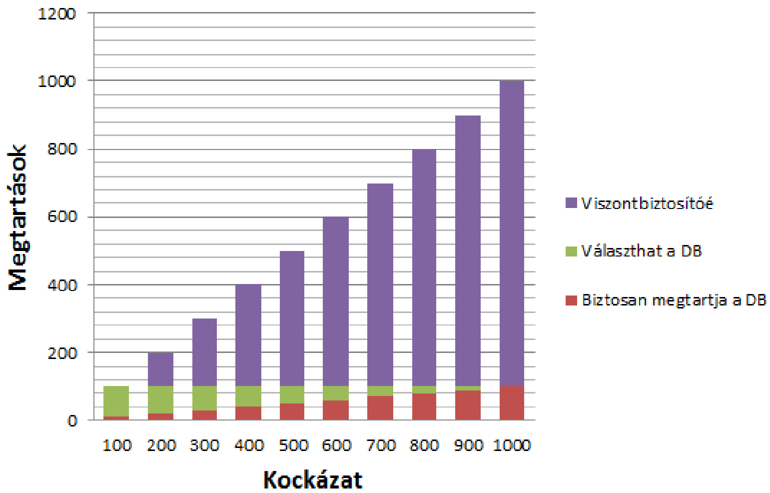
Surplus

A kvóta viszontbiztosítási forma hátrányainak kiküszöbölésére jött létre a surplus viszontbiztosítás. Előnye a QS-sel szemben, hogy a direkt biztosító az általa még elvállalható kis kockázatokat teljes egészében megtarthatja és így a viszontbiztosításba adással járó többletadminisztrációt is elkerülheti. Tehát kockázatonként dönti el, hogy milyen megtartási arányt alkalmaz, azaz a kvóta (q) értéke biztosítási összegenként változik. Adjuk meg most a következőképp, felhasználva az 1.1 definícióban bevezetett T leképezést:

$$T(X) = \begin{cases} 1 \cdot X, & \text{ha} \quad S \le M, \\ \frac{M}{S} \cdot X, & \text{ha} \quad M \le S \le (L+1)M, \\ \left(1 - \frac{LM}{S}\right) \cdot X, & \text{ha} \quad S \ge (L+1)M, \end{cases}$$

ahol S a biztosítási összeget jelöli, M a direkt biztosító által alkalmazott maximális megtartás és L pedig a limit, ami a definícióból láthatóan azt jelöli, hogy a $T(X)$ megtartás az M-nél LM-mel nagyobb biztosítási összegekre újfent változik egy másik S-től függő arányra.

Az alábbi ábra jól szemlélteti a saját megtartás mozgásterét a kockázat függvényében:



1.2.2. Nem arányos viszontbiztosítás

A nem arányos viszontbiztosítási formák egyik leggyakoribb jellemzője, hogy a károknak a nagyságától függ, hogy mekkora részt adunk viszontbiztosításba, általában a kárnak egy bizonyos értéken felüli részét. Ezt a formát nevezzük **kártöbblet (Excess of Loss)**, avagy röviden csak **XL viszontbiztosítási formá**nak, ekkor a károk szerződésenként vagy káreseményenként kerülnek meghatározásra. Formálisan tehát az XL viszontbiztosítás felírható az X kockázatra a fenti 1.1 definíció T és R függvényeit használva:

$$T(X) = \min(X, M),$$
$$R(X) = |X - M|_+,$$

ahol M a korábban is alkalmazott megtartás és a $|.|_+$ függvény a következőt jelöli valamely x változóra:

$$|x|_+ = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \ge 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Gyakran alkalmaznak a nem arányos viszontbiztosításnál is egy L limitet, ekkor a képletek így módosulnak:

$$T(X) = \min(X, M) + |X - L|_+,$$
$$R(X) = \min(|X - M|_+, L).$$

A kártöbblet viszontbiztosításnak két továbbfejlesztését használják leggyakrabban:

- **Stop Loss**,
- **Katasztrófa XL** (Cat-XL) vagy más néven: **esemény alapú kártöbblet** viszontbiztosítás.

Ezeknél X összegkár és a két típus abban különbözik, hogy X összegkárba milyen elv szerint kerülnek a károk. A Stop Loss esetén X-et egy adott időszakban bekövetkezett károk összege határozza meg, sűrűn az *éves összkár*ként definiálják, ez jellemzően a mezőgazdasági károknál fordul elő. A katasztrófa XL viszontbiztosítási formánál pedig X, mint *egy káreseményből* eredő összkár adható meg. Itt fontos, hogy mi számít egy káreseménynek és azt általában területileg és időben is behatároljak (például 100 kilométeres körzetben és 1 héten belül bekövetkezett károk). Ez sokszor bonyolult lehet, mert például egy lakásbiztosítás esetén földrengésnél az utórengéseknél is fizessen a viszontbiztosító, vagy az már nem számít bele a káreseménybe?

A gyakorlatban előfordulnak még:

- legnagyobb r kár viszontbiztosítás (röviden LCR: Largest Claims Reinsurance),
- ECOMOR viszontbiztosítás.

Előbbinél, ha feltesszük, hogy N kárunk volt és az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ károkat (itt a sorrend időrendi) nagyság szerint sorba rendezzük – jelölje ezt $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_N^*$, akkor a viszontbiztosítóra jutó kárrész:

$$R(X) = X_N^* + X_{N-1}^* + \cdots + X_{N-r+1}^*.$$

Az ECOMOR viszontbiztosítási formára a következő viszontbiztosítási kárrész jellemző:

$$R(X) = \sum_{i=N-r+1}^{N} (X_i^* - X_{N-r+1}^*), \quad r \geq 2.$$

Tehát az r. legnagyobb kárt mindig levonjuk és úgy összegzünk a fentivel ellentétben.

Összefoglalásul tekintsük át a fontosabb viszontbiztosítási formák tulajdonságait. A táblázat tartalmát az [1] jegyzetből vettem.

Viszontbiztosítás neve	QS	Surplus	XL	Cat-XL	Stoploss
Típusa	arányos	arányos	nem arányos	nem arányos	nem arányos
Adminisztráció	egyszerű	nehéz	egyszerű	megfogalmazás	egyszerű
Szelektálás	nincs	lehet	nincs	nincs	nincs
VB rész. minden kárból	igen	igen	nem	nem	nem
Díjkalkuláció	egyszerű	egyszerű	nehéz	szubjektív	nehéz
Díj	arányos	arányos	olcsó	viszonylag olcsó	viszonylag drága
Nagy egyedi károk esetén	véd	véd	véd	érdektelen	érdektelen
Nagy kárgyak. esetén	nem véd	nem véd	nem véd	nem véd	véd
Kár kumuláció esetén	nem véd	nem véd	nem véd	véd	érdektelen
Rossz kárhányad esetén	nem véd	nem véd	nem véd	nem véd	véd

1.1. táblázat. Viszontbiztosítási formák tulajdonságai

1.3. Kárfüggő kitételek a viszontbiztosítási szerződésben

Sok egyéb kiegészítés tartozhat még egy viszontbiztosítási szerződés részletező felébe, ebben a részben ezek közül tekintünk át néhányat.

1.3.1. Viszontbiztosítási jutalék az eltérő költségek miatt

A valóságban a direkt biztosító és a viszontbiztosító is profitért dolgozik, költségekkel, de a viszontbiztosító elismeri, hogy a direkt biztosító relatív költségei magasabbak, ezért ad jutalékot – ezt nevezzük **viszontbiztosítási jutalék**nak. Gyakori az arányos viszontbiztosítások körében. Erre az esetre mutatok egy példát (ez az [1] jegyzetből származik).

Legyen a közvetlen aláíró költségigénye C_0, a viszontbiztosítóé C_1. A viszontbiztosítási jutalékot pedig jelölje majd C_2. A szerződő az alábbi díjat fizeti a direkt biztosítónak (megint nettó várható érték elvet felvételezve – 1.1 egyenlet):

$$\Pi = \frac{E(X)}{1 - C_0} = \frac{P}{1 - C_0}.$$

A viszontbiztosítónak ebből ezt a díjat adja át:

$$\Pi_1 = (1 - q)\frac{P}{1 - C_0} = \frac{P_1}{1 - C_0}. \tag{1.5}$$

Ha ezt csökkentjük a viszontbiztosítási jutalékkal, akkor kapjuk:

$$\Pi_1' = (1 - q)\frac{P}{1 - C_1} = \frac{P_1}{1 - C_1}. \tag{1.6}$$

Ebből 1.5 és 1.6 egyenleteket összevetve, a viszontbiztosítási jutalék:

$$C_2 = 1 - \frac{\Pi_1'}{\Pi_1} = 1 - \frac{1 - C_0}{1 - C_1}. \tag{1.7}$$

A magyar nem-életbiztosítási gyakorlatban a viszontbiztosítási jutalék 25% körül van, míg a direkt biztosító költségigénye 40%. Ehhez válasszunk még 20%-os saját megtartást. Ekkor az 1.7 azonosságot átrendezve kapjuk, hogy C_1 viszontbiztosítási költségigény 20%.

1.3.2. Viszontbiztosítási jutalék – Profit comission

A viszontbiztosítási jutalék egyik formájában olyan jutalék, amit a direkt biztosító kaphat a viszontbiztosító társaságtól, ha az utóbbi nyereséget könyvel el, ezt szokás nemzetközi viszonylatban **profit comission**-nek nevezni. Ez is példán elmondva érthető meg a legegyszerűbben.

Tegyük fel, hogy a viszontbiztosítási jutalék aránya 25%, a viszontbiztosító költségigénye 17,5%; illetve a kárhányad az első évben legyen 100%, a második évben pedig 0%. A díj (ami megegyezik a kárkifizetéssel, ha a kárhányad 100%; mint az első évben) legyen 100 egység. Ekkor a viszontbiztosító bevétele az első évben a következő:

$$100 - 100 - 17,5 = -17,5;$$

míg a második évben (feltéve, hogy az előző évi „profitot" visszük át a következő évre):

$$100 - 0 - 17,5 - 17,5 = 65.$$

Látható, hogy így a viszontbiztosítási jutalék

$$65 \cdot 25\% = 16,25.$$

1.5. Megjegyzés. Ha arányos viszontbiztosítási formát használunk és $q = 0$, azaz frontingról beszélünk, akkor a jutalékot *fronting fee*-nek nevezzük.

1.3.3. Sliding scale comission

Ez a viszontbiztosítási jutalék egy formája, mikor a jutalék aránya közvetlenül a kárhányadtól függ. Ezt is egy példán keresztül mutatom be.

Ha mondjuk PC-vel jelöljük a viszontbiztosítási jutalék arányát, a kárhányadot pedig d-vel, akkor a következő szakaszonként lineáris függvény sliding scale comissiont határoz meg:

- $PC = 30\%$, ha $d \geq 60\%$;
- PC lineárisan nő 35%-ra, míg d 50%-ra csökken;
- PC lineárisan nő 40%-ra, mialatt 35%-ra csökken d;
- végül $PC = 40\%$, ha $d \leq 35\%$.

1.3.4. Reinstatement premium (RP)

A reinstatement premium vagy ismételt érvénybe helyezési díj – mint a neve is utal rá – az a díj, melynek ellenében a direkt biztosító újra érvénybe helyezheti a viszontbiztosítási fedezetet a fedezet kimerülése esetén, ami általában a viszontbiztosítási díj valamekkora része. Legtöbbször az elhasznált fedezet arányában kell megfizetni az új fedezetet. Például a

$$\text{Cat-XL} \quad 1@100\%$$

azt jelöli, hogy az adott esemény alapú kártöbblet viszontbiztosítást egyszer újra érvénybe lehet helyezni a viszontbiztosítási díj 100%-áért cserébe.

1.3.5. Aggregált önrész

Az aggregált önrész vagy aggregate deductible az esemény alapú kártöbblet viszontbiztosításnál szokott előfordulni. A viszontbiztosítási kárösszegeket itt is összesítjük, majd az így kialakult kárösszegre alkalmazunk egy XL formát. Tekintsük a következőt példaként, szintén egy Cat-XL esetére szorítkozva:

$$10 \text{ mFt xs } 10\text{mFt xs } 10\text{mFt}.$$

Ez azt jelenti, hogy a szerződés a 10 mFt feletti 10mFt széles sávra nyújt fedezetet, szintén 10 mFt aggregált önrésszel. Tegyük fel ekkor, hogy az adott sávot elérő károk 15 mFt, 13 mFt és 25 mFt. A sávba eső részek tehát 5 mFt, 3 mFt, illetve 10 mFt (hiszen a sáv teteje 20 mFt-nál van); ez összesen 18 mFt. Ez azt jelenti, hogy az aggregált önrészt meghaladó rész 8 mFt. A viszontbiztosító így ennyit fizet ki.

A szerződések részleteinek boncolgatása után rátérünk a szerződések optimalitásának vizsgálatára.

1.4. Optimalitás

Ebben a részben azt nézzük meg, hogy bizonyos feltételek mellett melyik viszontbiztosítás számít optimálisnak. A tételek bizonyításai megtalálhatók [1], illetve [2] jegyzetekben.

Először azt nézzük meg, hogy melyik viszontbiztosítás jelenti a legkisebb kockázatot a két résztvevő társaság számára.

1.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott az X kockázat, melyre teljesül, hogy* $\operatorname{essinf} X = 0$. *Legyen továbbá D_1^2 olyan érték, melyre $0 \leq D_1^2 \leq D^2(X)$ és az is igaz, hogy a viszontbiztosításba kerülő állomány szórásnégyzete a D_1^2 értékben rögzített, vagyis*

$$D^2(X - T(X)) = D_1^2.$$

Ekkor létezik olyan $0 \leq q \leq 1$ kvóta, mellyel a q kvótájú viszontbiztosítás optimális abban az értelemben, hogy a direkt biztosítónál maradó állomány szórásnégyzete ($D^2(T(X))$) minimális.

Tehát, ha az állományok szórásnégyzetét szeretnénk minimalizálni, akkor a kvóta viszontbiztosítást érdemes választanunk.

A második tétel arról szó, hogy a károk változékonysága ellen a biztonságot legolcsóbban a kártöbblet viszontbiztosítással tudjuk megvásárolni.

1.7. Tétel. *Legyen $M \geq 0$ rögzített. Ekkor az azonos tiszta díjú (nettó várható érték elvvel árazott: 1.1) viszontbiztosítási formák között optimális az M megtartású XL viszontbiztosítás, abban az értelemben, hogy a direkt biztosítónál maradó kockázat szórásnégyzetét minimalizálja, azaz képlettel:*

$$T_0(X) = \min(X, M)$$

esetén igaz, hogy tetszőleges T transzformációra

$$D^2(T(X)) \geq D^2(T_0(X)). \tag{1.8}$$

Az előbbi tételnél a valóságot jobban közelíti, ha nem tiszta díjú szerződéseket, hanem β paraméterű szóráselvet alkalmazunk a viszontbiztosítási díjak meghatározására:

$$P(X, \beta) = E(X) + \beta D(X).$$

Ekkor az alábbi tétel igaz.

1.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy X nem elfajult kockázat, illetve legyen $\beta > 0$ rögzített valós szám. Ha minden P β paraméterű szóráselvvel számított viszontbiztosítási díjra teljesül, hogy*

$$P < P(X, \beta) < +\infty,$$

akkor létezik $M > 0$ megtartás és $r \in (0, 1)$ szám, hogy

$$T_0(x) = x - (1 - r)|x - M|_+$$

leképezés optimális abban az értelemben, hogy minimalizálja a direkt biztosítónál maradó kockázat szórásnégyzetét, azaz tetszőleges T függvényre teljesül az 1.8 egyenlőtlenség a jelenlegi T_0 leképezéssel.

Az 1.8 tételben a létezés egyébként a következő lemmán múlik:

1.9. Lemma. *Legyen $0 < P < P(X, \beta)$ és X szórása véges. Ekkor létezik $M > 0$ és $r \in [0, 1]$, hogy teljesülnek az alábbiak:*

$$E(|X - M|_-) = \frac{r}{\beta} D(|X - M|_+),$$

$$P = P((1 - r)|X - M|_+, \beta),$$

ahol tetszőleges x-re

$$|x|_- = \begin{cases} -x, & ha \quad x \leq 0, \\ 0, & ha \quad x > 0. \end{cases}$$

2. fejezet

Szolvencia II.

A fejezet témájául szolgáló Szolvencia II. (röviden: S2) egy szabályozó rendszer, amelyre való felkészülés napjainkban igen szerves részét képezi a biztosító társaságok életének. Jelenleg a Szolvencia I. (S1) a hatályos (EU) szabályozás, ami megegyezik a jelenlegi magyar szabályozással is, de minden biztosító készül már az S2 bevezetésére is. Ennek várható időpontja most 2016 elejére datálható, de tekintve, hogy a szabályozás állandóan változik, ezt még mindig nem tudhatjuk biztosan. A keretirányelv bevezetésére való felkészülés részeként a biztosítók úgynevezett mennyiségi hatástanulmányokat (Quantitative Impact Studies – QIS 1-5) készítettek, amelyekből lényegében már látható a Szolvencia II. várható felépítése. A mennyiségi hatástanulmányok után készült még egy úgynevezett hosszú távú garanciás hatásfelmérés (Long Term Guarantee Assessment) is 2013-ban, ami lényegében egy „QIS 6"-nak tekinthető. Az S2 kidolgozása több szinten keresztül történik (L1-L4), az alábbi ábra jól szemlélteti a folyamatot (forrás: [5]).

Az első szint (L1) a keretirányelv, elveket határoz meg és kevés konkrét szabályt; ezt az Európai Bizottság dolgozza ki. A második szinten vannak már részletek is és elvi álláspontok, még ezt is a Bizottság dolgozza ki. Ez a szint közvetlenül hatályosul a tagállamok jogrendjében, ezért folyamatosan kitolódik az elfogadása. Az L2.5, azaz a két és feledik szint kidolgozása már az illetékes EU-hatóság (EIOPA [6]) hatásköre; ebben kétféle szabvány van: szabályozói és implementációs. A harmadik szint szintén az EIOPA, illetve a nemzeti felügyeletek feladata; felügyeleti iránymutatásokat tartalmaz. A negyedik szint (L4) nem jogalkotói szint, ez a szabályozás végrehajtásáról, kikényszerítéséről és megfigyeléséről szól, illetve lehetnek benne javaslatok a korszerűsítésre – ez újfent a Bizottság hatásköre. Fontos, hogy a későbbi szintek nem mondhatnak ellent a korábbiaknak.

2.1. Az Szolvencia II. fő vonásai

A Szolvencia II. és az arra felkészülés jelenleg a biztosítók egyik legnagyobb munkát igénylő feladata, hiszen nemcsak az aktuáriusoknak ad rengeteg megoldandó problémát, hanem a legtöbb biztosítással foglalkozó területnek is. A jelenlegi merev, de igencsak egyszerű S1 rendszert leváltó S2 **kockázat orientált**, lényege, hogy minden lehetséges eseményt, körülményt figyelembe vegyünk a szavatoló tőke szükséglet számításakor. Természetesen teljes biztonság nem lehetséges, nem készülhetünk fel minden eshetőségre, de az S2 sokkal alaposabb felkészültséget jelent. Alapjaiban változtatja meg a tartalék- és szavatoló tőke számítást, ezzel felrúgva a korábban alkalmazott módszereket. Az S2 **hárompilléres rendszer**, hasonló a bankok által használt Bázel II.-höz.

1. Kvantitatív követelmények, azaz tartalék- és tőkeszabályozás;
2. Kvalitatív követelmények, azaz irányítási rendszer és felügyeleti felülvizsgálati folyamat;
3. Piaci fegyelem, közzététel.

A dolgozatban inkább csak az első pillérre koncentrálunk.

A Szolvencia II. elvek által vezérelt, a biztosítóknak magukra, a konkrét termékekre le kell valahogy fordítaniuk. Alapvetően **piac-konzisztens** rendszer, ami iránymutatást ad az eszközök és a kötelezettségek értékelésére, illetve a tőkeszükséglet és a szavatoló tőke számítására (több egyéb dolog mellett).

Nagyon fontos, hogy érvényesüljön az **arányosság elve** mindhárom pillérnél. Meg kell bizonyosodni arról, hogy a használt aktuáriusi és statisztikai módszerek arányosak a fennálló kockázat természetével, mértékével és komplexitásával. Fő követelmény továbbá, hogy a szavatoló tőke mindig nagyobb legyen, mint a szavatoló tőke szükséglet (röviden: SCR) – ha ez nem teljesül, a felügyelet meghatározott lépéseket tehet.

A teljes portfóliót **szegmentálni kell** hasonló kockázatok szerint (Lines of Business – LoB) a biztosítástechnikai tartalékok értékeléséhez és egyes esetekben Homogén Kockázati Csoportokra (HKCs) is kell bontani. Szerződéses kötelmeket kell vennünk tehát előbbi szerint, így például a nem-életbiztosításokból származó járadékok is életbiztosítási kötelezettségeknek számítanak. Néhány számunkra fontos esetre térjünk is ki!

2.1.1. Lines of Business – LoB

A nem-életbiztosítási kötelezettségeket 12 különböző LoB-be kell sorolnunk :

1. orvosi költségekre szóló biztosítás,
2. jövedelem biztosítás,
3. munkavállalók kártérítési biztosítása,
4. gépjármű felelősség biztosítás,
5. egyéb jármű biztosítás,
6. tengeri, légi és szállítási biztosítás,
7. tűz és egyéb károk esetére szóló vagyonbiztosítás,
8. általános felelősség biztosítás,

9. hitel- és kezességbiztosítás,
10. jogvédelmi biztosítás,
11. segítségnyújtási biztosítás,
12. pénzügyi veszteség biztosítás.

Az arányos viszontbiztosításokat ugyanezen 12 lines of business-be kell sorolni, viszont a nem-arányos viszontbiztosításokat az alábbi 4 kategóriába:

1. egészség (ami lényegében az előzőből az első 3 pont),
2. baleset (4, 8)
3. tengeri, légi és szállítási (6)
4. vagyon (5, 7, 9, 10-12).

A többi LoB-t itt nem soroljuk fel (de megtalálható a [6] anyagoknál), a dolgozat szempontjából csak előbbiek játszanak fontos szerepet.

Fontos pont még, hogy a szerződéseket szét kell választani élet és nem-élet részekre. Azaz szerződéselemeket kell vizsgálni, nem szerződéseket; és a szegmentálást is ezekre a szerződéselemekre kell elvégezni. Ezt nevezzük **„tartalom a forma fölött"** elvnek – erre jó például szolgálnak az életbiztosításhoz kötött nem-élet kiegészítők, melyeket nem-élet elvek szerint kell kezelni. Ezt a különböző élet és nem-élet értékelési technikák indokolják.

Másrészt, alapvetően minden mérlegtételt **valós értékelés**sel kell kiszámítani, azaz mindent úgy kell értékelni, mint amennyiért normál körülmények között üzletfelek elcserélnék egymás között a kötelezettséget vagy eszközt. Megjegyzendő továbbá, hogy a viszontbiztosítás szempontjából az értékelés bruttó. Egy kötelezettséget replikálható és nem replikálható esetben máshogy lehet és kell értékelni. Előbbinél nem kell modellt alkalmazni, lehet a piachoz mérni, hiszen ekkor a kötelezettség valós értéke megegyezik az őt replikáló eszköz valós, azaz most piaci értékével. Az érdekesebb eset, mikor a **kötelezettség nem replikálható**.

2.1.2. Értékelés nem replikálható kötelezettség esetén

Mikor egy kötelezettség nem replikálható, akkor a szabályozás szerint modellt kell alkalmazni az értékeléshez.

A Szolvencia II. ekkor három fontos dologra alapoz:

- valószínűséggel súlyozott jövőbeli pénzáramok (lényegében várható értékhez hasonló),
- a pénz időértéke,
- kockázati marzs (vagy kockázati ráhagyás).

Előbbi kettő majd a legjobb becslés fogalmához tartozik, míg a harmadik a kockázati marzs fogalmához; ezeket részletesebben is meg fogjuk vizsgálni.
Az S2 kétféle – nem feltétlen megegyező – definíciót ad a kötelezettségek értékelésére:

- Valós Érték $\approx$ Aktuális Kilépési Érték
- Legjobb Becslés + Kockázati Marzs

Legjobb Becslés

A **Legjobb becslés** (LB – vagy angolul: Best Estimate) a jövőbeli szerződéses pénzáramok várható jelenértéke a kockázatmentes hozamgörbével diszkontálva. Pénzáramnak számítanak a díjbevétel, szolgáltatások, kárkifizetések, jutalékok, költségek és ezen kiadások esetleges megtérülései. Bele kell még foglalnunk az opciók és garanciák explicit értékelését, illetve a jövőbeli diszkrecionális szolgáltatásokat (FDB) is.

Szükséges lehet illeszkedési, illetve volatilitási kiigazítás is. Mindkettőt az alap kockázatmentes hozamgörbére alkalmazzák, előbbit piaci illikviditás esetén, utóbbit pedig ciklikusnak nevezhető piaci zavarok okozta torzulások esetén.

Kizárólag az értékelés napján érvényben lévő szerződésekre és az akkor le nem zárt károkra nézve kell meghatározni a tartalékot – ez kizárja a káringadozási tartalék képzésének lehetőségét. Minden szerződésre meg kell állapítani a **szerződés határá**t, ami azért fontos, mert a biztosító csak a határig veheti figyelembe a díjat (illetve a szolgáltatásokat, kárkifizetéseket, stb.) – ezt elhagyva már új szerződésről beszélünk. A szerződés határát úgy definiálja, hogy az a pont, amikor a biztosító egyoldalúan megszüntetheti a szerződést vagy visszautasíthatja a díjat, illetve módosíthatja azt vagy a szolgáltatást a kockázatok természetének megfelelően. Az S2 tartalék figyelembe veszi a jövőbeli várható nyereségeket, de a várható költségeket és jutalékokat is, illetve a viszontbiztosítási megtérülésnél a várható hitelveszteséget is számszerűsíteni kell.

2.1. Megjegyzés. A Szolvencia II. tartaléka lehet negatív és kisebb is, mint a visszavásárlási érték.

Aktuáriusi és statisztikai technikákat kell alkalmazni a legjobb becslés számítására, hogy a cash-flow-kat befolyásoló kockázatokat minél pontosabban ragadják meg. Ezek lehetnek szimulációs, determinisztikus és elemzési technikák. Az életnél jellemzően érdemes a robosztusabb eredmény érdekében szimulációs technikákat használni, míg a nem-élet esetén általában a determinisztikus és analitikus megoldások célravezetőbbek.

A nem-életbiztosítási kötelezettségek legjobb becslésénél a függő károk tartalékát és a díjak tartalékát külön kell számítani. Erre az ágra többféle aktuáriusi technikát lehet alkalmazni, a leggyakoribbak:

- aggregált kifutási háromszögeken alapuló előrejelzési módszerek,
- kár gyakoriságon és nagyságon alapuló modellek,
- az expected loss ratio (várható veszteség aránya) és más arányok becslésén alapuló módszerek,
- előbbiek kombinációi.

Kockázati marzs

A másik fontos fogalom a kötelezettségek értékelésénél a **kockázati marzs** (KM vagy **RM** – Risk Margin) vagy kockázati ráhagyás. A teljes portfólióra kell meghatározni, majd az egyes szegmensek között szétosztani.

A kockázati marzs meghatározásának lépései:

- annak meghatározása, hogy az üzlet mekkora szavatoló tőke szükségletet generál most, illetve minden további évben a kifutásig,
- szorzás a 6% -os tőkeköltség rátával,

- jelenértéket kell számolni a tagokra az alap hozamgörbével.

A szabályozás azt is kiköti, hogy úgy kell megállapítani, hogy érvényesüljön a **tőkeköltség elve** is: a portfóliót akkor veszi át egy másik piaci szereplő, ha a legjobb becslés fölött akkora a kockázati marzs, mint annak a tőkének a költsége, amelyet az üzlet fedezeteként a kötelezettségek végső kifutásáig tartani kell.

A kockázati marzs tehát az alábbi módon számolható ki:

$$RM = CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}},$$

ahol CoC a tőkeköltség ráta, azaz megállapodás szerint 6%; $SCR(t)$ a referencia vállalat szavatoló tőke szükséglete t év elteltével és r_{t+1} a megfelelő alap kockázatmentes hozamráta a $(t+1)$. évben. Egyszerűsítésként feltételezhetjük, hogy $SCR(t)$ kiszámolható a következő módon:

$$SCR(t) = SCR(0) \cdot \frac{BE(t)}{BE(0)}, \qquad t = 1, 2, 3, \ldots,$$

ahol $BE(t)$ a referencia vállalat portfóliójának viszontbiztosításra nézve nettó legjobb becslése a t. évben.

Future discretionary benefits – FDB értékelése

A vállalatoknak figyelembe kell venniük a legjobb becslés számításakor a jövőbeli diszkrecionális nyereségeket (FDB), azaz azokat a nyereségeket, amik várhatóak, de nincsenek szerződésben garantálva. Az értékét a biztosítástechnikai tartalékok legjobb becslése során külön kell kezelni. A dolgozatban egyszerűsítés végett nem fogok számolni ezekkel a nyereségekkel, hiszen inkább az életbiztosítások terén van ennek nagyobb jelentősége.

2.2. Szavatoló tőke és szavatoló tőke szükséglet, Standard formula

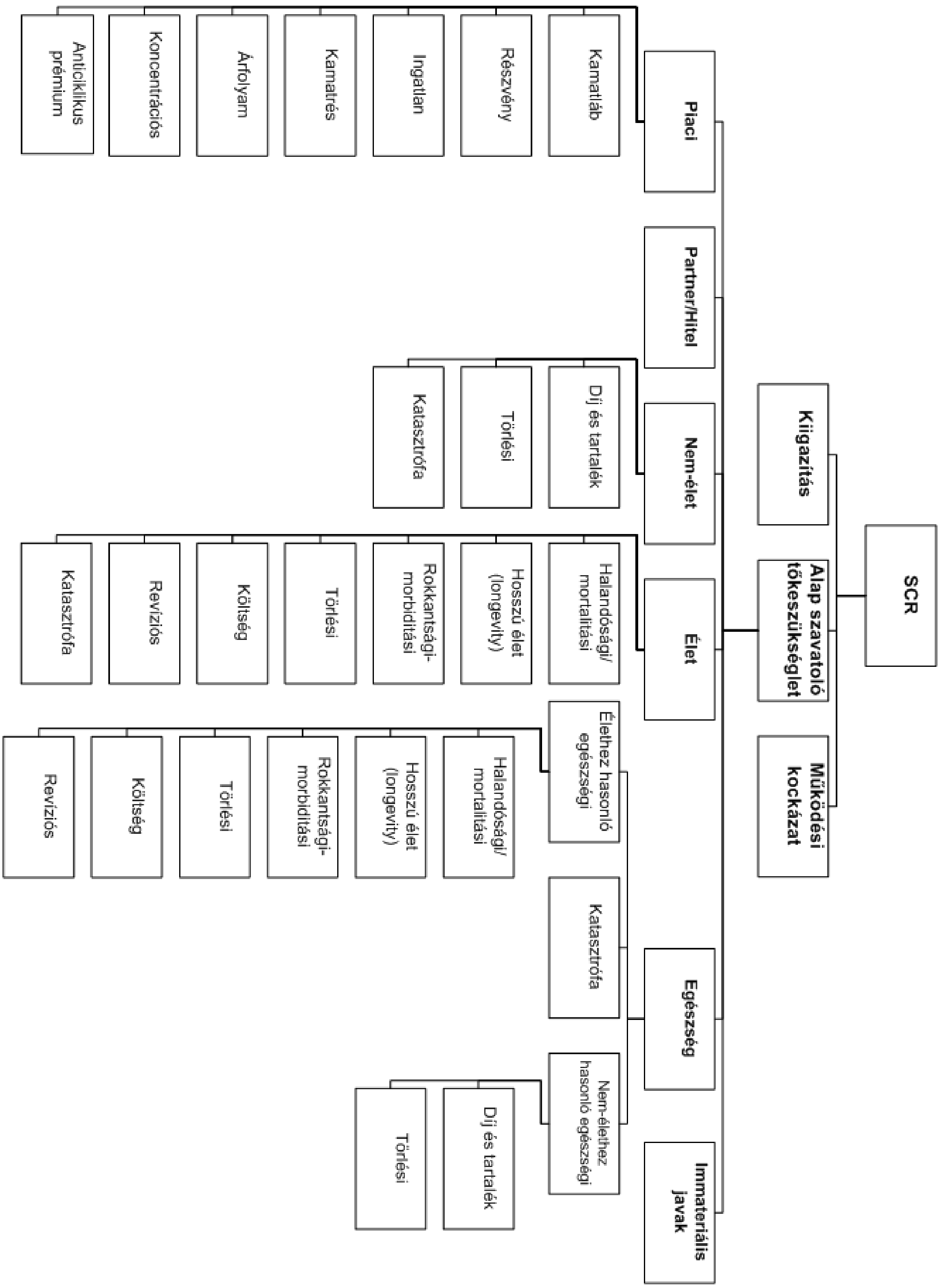
Az átlagos kockázatokkal rendelkező biztosítóknak tőkeszükségleteik meghatározására ajánlott, hogy az EIOPA ([6]) által kidolgozott standard formulát használják. Felépítése legjobban a 2.1 ábrával szemléltethető ([5] és [6] nyomán).

2.2. Megjegyzés. A szavatoló tőke szükséglet számolásának egyébként többféle rugalmassági szintje is van, mi ezek közül csak a standard formulára szorítkozunk majd. Lehet még az alábbiakat használni:

- standard formula egyszerűsítésekkel,
- standard formula vállalat-specifikus paraméterekkel,
- részleges belső modell,
- belső modell.

A piaci, partner (vagy hitel), nem-élet, élet, egészség és immateriális javakhoz tartozó kockázati modulok alatt az egyes almodulok (illetve minden esetben ezek tőkeszükségletei) láthatók, melyeket a legtöbb esetben lineáris korrelációs mátrixokkal kell összeadnunk – ahogyan a kockázati modulokat is, hogy megkapjuk az alap szavatoló tőkeszükségletet (BSCR). A dolgozatban a partner (counterparty default) és nem-élet (non-life underwriting risk) modulokra helyezünk nagyobb súlyt.

Minden modul és almodul specifikációja az alábbi pontokra van bontva:



2.1. ábra. A standard formula kockázatainak moduljai és almoduljai

- Leírás
- Input
- Output
- Számítás
- Egyszerűsítés

Mi nem fogjuk követni a fenti specifikációt.

Három modult érintenek a biztosítási kockázatok (underwriting risks):

- élet,
- egészség,
- nem-élet.

Sok almodulnál a tőkeszükséglet számolása **szcenárióalapú** – úgy határozzuk meg a tőkeszükségletet, mint egy adott szcenárió hatását az **alapvető szavatolótőke (Basic Own Funds – BOF)** szintjére. A BOF-ot úgy írhatjuk le mint különbséget az eszközök és források között. A BOF megváltozását, azaz ΔBOF-ot pozitívnak definiáljuk, amikor a szcenárió a BOF csökkenését eredményezi. Amikor viszont az adott forgatókönyv a BOF növekedését okozza, akkor nem képezünk „negatív tőkeszükségletet”, ekkor azt nullaként rögzítjük. Az SCR-t másrészt úgy kell behatárolnunk, hogy a biztosító alapvető szavatolótőke Value-at-Risk-jének (VaR) 99,5%-os konfidencia szinten megfeleljen az egy éves periódusra. A teljesség kedvéért definiáljuk a VaR-t, ugyanis később is szükség lesz rá.

2.3. Definíció. A **Value-at-Risk (VaR)**, avagy kockázatnak kitett érték a következő értékkel egyezik meg a p valószínűség mellett:

$$\mathrm{VaR}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\} = \inf\{x : P(L < x) \geq p\},$$

azaz maga a p-kvantilis; ahol L a kockázat és F az ő eloszlásfüggvénye.

Ha egyszerűsítéseket kívánunk alkalmazni a szavatoló tőke szükséglet számítása során, akkor a következő lépéseket kell elvégeznünk, hogy meggyőződjünk az adott egyszerűsítés megfelelőségéről:

1. Annak értékelése, hogy a természet, mérték és komplexitás hármasának megfelelő-e;
2. A modell hiba értékelése.

A szavatoló tőke szükséglet számításának bemutatása során a nagyobb egységektől fogunk a kisebbek felé haladni. A 2.1 ábra alapján tehát a teljes SCR a következőképp számolható:

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{op}, \tag{2.1}$$

ahol $BSCR$ az alap szavatoló tőke szükséglet, Adj a biztosítástechnikai tartalékok és halasztott adók kockázatelnyelő képessége miatti kiigazítás, SCR_{op} pedig a működési kockázat tőkeszükséglete.

Az összeg három tagja közül a legnagyobb jelentőséggel számunkra a $BSCR$ bír, ezt láthatjuk a 2.1 ábrán is – értéke az ábrán látható modulokból származik, de azokat lineáris korrelációs mátrix segítségével kell összeadnunk:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{ij} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{immaterialis} \tag{2.2}$$

Corr	Piaci	Partner	Élet	Egészség	Nem-élet
Piaci	1				
Partner	0,25	1			
Élet	0,25	0,25	1		
Egészség	0,25	0,25	0,25	1	
Nem-élet	0,25	0,5	0	0	1

2.2. ábra. A BSCR korrelációs mátrixa

ahol $Corr_{ij}$ az alábbi mátrix (i, j)-edik eleme: SCR_i pedig az i. modulhoz tartozó tőkeszükséglet (természetesen az immateriálist kihagyva).

A 2.1 összegben szereplő Adj az alábbi módon számolható:

$$Adj = Adj_{TP} + Adj_{DT},$$

ahol Adj_{TP} a biztosítástechnikai tartalékok, Adj_{DT} pedig a halasztott adók kockázatelnyelő képessége miatti kiigazítás. Fontos, hogy ezek a tagok nem lehetnek pozitívak és kiszámolásukhoz a bruttó és nettó $BSCR$, a működési kockázat miatti tőkeszükséglet és jövőbeli diszkrecionális szolgáltatások (FDB) szükségesek. Erre most nem térünk ki külön.

Az utolsó tag 2.1 egyenletben a működési kockázat tőkeszükséglete, SCR_{op}. Ez a nem megfelelő belső folyamatok, az alkalmazottak vagy a rendszer hibái, vagy külső események miatti veszteség kockázatából származik. Így számítandó ki:

$$SCR_{op} = \min(0,3 \cdot BSCR; Op) + 0,25 \cdot Exp_{ul},$$

ahol Exp_{ul} az előző 12 hónap unit-linked életbiztosítási költségeiből ered, Op pedig a következő érték:

$$Op = \max(Op_{dijak}; Op_{tartalekok}),$$

amelynél a maximum két tagja az előző 12 hónap élet, UL-élet, nem-élet viszontbiztosításra nézve bruttó megszolgált díjaiból és az élet, UL-élet, nem-élet bruttó biztosítástechnikai tartalékokból (a kockázati marzsot nem számítva) származtathatók – ezt sem taglaljuk a dolgozat során részletesen.

Térjünk most át a $BSCR$ moduljainak számítási módszereire!

Az immateriális javak miatti kockázat tőkeszükséglete egyszerűen számolható magából az immateriális javak értékéből (IA):

$$SCR_{immaterialis} = 0,8 \cdot IA.$$

A többi modul nem intézhető el ilyen gyorsan.

2.2.1. Piaci kockázat

A piaci kockázat a pénzügyi eszközök piaci árának szintjéből vagy volatilitásából ered. Például a részvényárak, kamatlábak, ingatlanárak és árfolyamok változásaitól függ. A piaci modul tehát a következőképp számolható ki:

$$SCR_{mkt} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrMkt_{i,j} \cdot Mkt_i \cdot Mkt_j},$$

ahol $CorrMkt$ korrelációs mátrix most az alábbi módon definiálandó:

CorrMkt	Kamatláb	Részvény	Ingatlan	Kamatrés	Árfolyam	Koncentrációs	Anticiklikus prémium
Kamatláb	1						
Részvény	A	1					
Ingatlan	A	0,75	1				
Kamatrés	A	0,75	0,5	1			
Árfolyam	0,25	0,25	0,25	0,25	1		
Koncentrációs	0	0	0	0	0	1	
Anticiklikus prémium	0	0	0	0	0	0	1

ahol A 0 vagy 0,5, meghatározott feltételek szerint dől el, hogy mikor melyik. Az Mkt_i pedig a $CorrMKt$ mátrixban is látható, hogy az i. almodul tőkeszükséglete.

A piaci kockázati modul biztosítástechnikai tartalékok veszteségelnyelő képességével csökkentett értékét ugyanígy kell kiszámítani, csak annyi a különbség, hogy az almodulokat is csökkenteni kell a veszteségelnyelő képességgel.

2.2.2. Partner nemteljesítési kockázat – Counterparty default risk

A partner kockázat egy fontosabb részét képezi a dolgozatnak, ezért részletesebben is foglalkozunk vele, hiszen a viszontbiztosítás is ezen keresztül hat leginkább a szavatoló tőke szükségletre. A partner kockázatnak a partner váratlan hibájából, mulasztásából, illetve hitelképességének romlásából származó lehetséges veszteségeket kell kifejeznie. A modul hatókörébe tartoznak a kockázatcsökkentő szerződések, mint például a – már itt is említett – viszontbiztosítási ügyletek vagy például a derivatívák, de egyéb hitelezések (amik nem kerültek a kamatrés kockázat almodulba) és közvetítői követelések is ide sorolandók.

Az egy partnerhez tartozó összes kockázatot együtt kell kezelni, függetlenül a szerződéses kötelem jogi formájától. Kétféle típusa van a partner kockázatnak, ezeket 1-es típusú és 2-es típusú kockázatnak nevezzük. Az 1-es típusú kockázathoz tartoznak azok a kockázatok, amelyek nincsenek diverzifikálva, illetve ahol a partner nagy valószínűséggel osztályozva van. Ide tartoznak a kockázatcsökkentő szerződések is, így mi ezzel fogunk csak most részletesebben foglalkozni – ezen belül is a kockázatcsökkentő szerződések kockázataival. A 2-es típusú kockázati osztály egyébként az általában diverzifikált kockázatokat takarja, de ennél a partner gyakran nincs osztályozva.

Az eddigiekhez hasonlóan a partner kockázat tőkeszükséglete is felírható nettó és bruttó formában. Tehát

$$SCR_{def} = \sqrt{SCR_{def,1}^2 + 1,5 \cdot SCR_{def,1} \cdot SCR_{def,2} + SCR_{def,2}^2},$$

ahol $SCR_{def,i}$ az i-edik típusú partner kockázat tőkeszükségletét jelenti.

Az 1-es típusú kockázat tőkeszükséglet kiszámolásához szükségünk van először a kockázat úgynevezett LGD (loss-given-default), azaz „nemteljesítési veszteségráta” becslésére és a partner nemteljesítésének valószínűségére. Utóbbi megadható a szolvencia ráta vagy a partner osztályozása alapján, erre később részletesen is kitérek. Ebből a nemteljesítési valószínűségből tudjuk számolni a veszteség eloszlásának varianciáját és szórását is, amiket rendre V-vel, illetve $\sqrt{V}$-vel jelölünk. Ezekkel már felírhatjuk az 1-es típusú kockázat tőkeszükségletét:

$$SCR_{def,1} = \begin{cases} 3 \cdot \sqrt{V}, & \text{ha} \quad \sqrt{V} \leq 7,05\% \cdot \sum_i LGD_i, \\ 5 \cdot \sqrt{V}, & \text{ha} \quad 7,05\% \cdot \sum_i LGD_i < \sqrt{V} \leq 20\% \cdot \sum_i LGD_i, \\ \sum_i LGD_i, & \text{ha} \quad 20\% \cdot \sum_i LGD_i \leq \sqrt{V}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Az LGD_i az i-edik független partner LGD-jét jelöli – ezt a kockázatcsökkentő szerződéseknél és azon belül a viszontbiztosítás esetén az alábbi módon kell kiszámolni:

$$LGD_i = 0,5 \cdot \max(0; Recoverables_i + RM_{re,i} - Collateral_i).$$

A $Recoverables_i$ az i-edik viszontbiztosítási szerződésből származó megtérülés legjobb becslése, a $Collateral_i$ a viszontbiztosítási ügylet fedezetének kockázattal kiigazított értéke, az $RM_{re,i}$ pedig az i-edik viszontbiztosítási ügyeletből származó biztosítási kockázat kockázatcsökkentő hatása. Lehet viszont az LGD_i-nek másik értéke is, ha a viszontbiztosító biztosítékkal fedezett kötelezettségvállalása nagyobb, mint az eszközök 60%-a a mérlegben. Ekkor így számolandó ki:

$$LGD_i = 0,9 \cdot \max(0; Recoverables_i + RM_{re,i} - Collateral_i).$$

Ezekhez viszont tudnunk kell a kockázatcsökkentő hatást is, ami két tőkeszükséglet különbségeként adódik:

- a biztosítási és piaci kockázat elméleti tőkeszükséglete, nem véve figyelembe a viszontbiztosítási ügylet kockázatcsökkentő hatását (SCR_{hyp});
- a biztosítási és piaci kockázat tőkeszükséglete bármilyen korrigálás mellőzésével ($SCR_{without}$).

Ez az érték egyébként sokszor lehet 0.

Ha megengedünk egyszerűsítést, akkor $RM_{re,i}$ a következőképp írható fel:

$$RM_{re,i} = RM_{re,all} \cdot \frac{Recoverables_i}{Recoverables_{all}},$$

ahol $Recoverables_{all}$ az összes viszontbiztosítási szerződésből (összes partneréből) származó megtérülés legjobb becslése, míg $RM_{re,all}$ az összes partner esetére számított kockázatcsökkentő hatás (ez kézenfekvően úgy számolható, ha egyik viszontbiztosítási ügyletet se vesszük figyelembe egy elméleti tőkeszükséglet számolására és ennek vesszük a különbségét a biztosítási kockázatra számított tőkeszükséglettel). Ha arányos viszontbiztosítási szerződésről van szól, akkor a kockázatcsökkentő hatás a j-edik biztosítási kockázat és i-edik partner esetén így is számolható:

$$RM^j_{re,i} = \frac{Recoverables_i}{BE - Recoverables_{all}} \cdot SCR_j,$$

ahol BE a bruttó – megtérülésre nézve – kötelezettségek legjobb becslése, SCR_j pedig a j-edik biztosítási kockázat tőkeszükséglete.

Még a $Collateral_i$ értékre van szükségünk, ez számolható a fedezeti eszközök piaci értékének és a piaci kockázat kiigazításának különbségéből.

Visszatérve a 2.3 képlethez, meg kell még határoznunk a V értéket. Ezt az 1-es típusú kockázat esetén az alábbi módon kell számítanunk, miután már meghatároztuk az LGD_i értékeket:

$$V = V_{inter} + V_{intra} = \sum_{j,k} \frac{PD_k(1-PD_k)PD_j(1-PD_j)}{1,25(PD_k+PD_j) - PD_kPD_j} \cdot TLGD_j \cdot TLGD_k + \\ + \sum_j \frac{1,5PD_j(1-PD_j)}{2,5-PD_j} \cdot \sum_{PD_j} LGD_j^2, \tag{2.4}$$

ahol $TLGD_j$ a PD_j valószínűséggel nem teljesítő partnerek LGD-inek összege, az összeg második tagjánál pedig a LGD_j^2-eket szintén azokra a partnerekre adjuk össze, amelyek PD_j valószínűséggel nem teljesítenek.

A PD_i valószínűségeket a hitelminőségi besorolások, illetve előbbi hiányában a partner szolvencia aránya szerint a következőképp kell besorolni:

Hitelminőségi besorolás	0	1	2	3	4	5	6
Nemteljesítés valószínűsége (PD_i)	0,002%	0,01%	0,05%	0,24%	1,20%	4,175%	4,175%

Szolvencia arány	196%	175%	150%	125%	122%	100%	95%	75%
Nemteljesítés valószínűsége (PD_i)	0,01%	0,05%	0,1%	0,2%	0,24%	0,5%	1,2%	4,175%

Ha valahova az adott értékek közé esik a szolvencia arány, akkor PD_i-t interpolációval kell meghatározni, illetve 75%-nél alacsonyabb aránynál PD_i 4,175%-ra, 196%-nál nagyobbnál pedig 0,01%-ra rögzítendő.

2.2.3. Élet biztosítási kockázat – Life underwriting risk

Mivel a dolgozat inkább a nem-élet biztosítási kockázattal hivatott foglalkozni, ezért az életbiztosítási modul tőkeszükségletének számítását csak röviden érintjük.

Ennek kapcsán, mint láttuk, fontos az is, hogy a „tartalom a forma fölött” elv miatt például a nem-életbiztosításból származó annuitások is ide tartoznak. A life underwriting risk tőkeszükségletét egyébként szcenáriók hatásait vizsgálva szokás meghatározni.

Az élet modul tőkeszükséglete a 2.1 ábrából is láthatóan hét almodulon nyugszik. Hasonlóan a piaci kockázathoz, itt is vizsgálhatjuk a nettó tőkeszükségletet is, azaz a tőkeszükségletet csökkentve a biztosítástechnikai tartalékok veszteségelnyelő képességével. Számolása az alábbi képlet alapján történik:

$$SCR_{elet} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrLife_{i,j} \cdot Life_i \cdot Life_j}$$

ahol az előzőekhez hasonlóan $CorrLife$ is a egy korrelációs mátrix, most az élet almodulok egymáshoz képesti korrelációját adja meg:

CorrLife	Halandósági	Hosszú élet	Rokkantsági	Törlési	Költség	Revíziós	Katasztrófa
Halandósági	1						
Hosszú élet	-0,25	1					
Rokkantsági	0,25	0	1				
Törlési	0	0,25	0	1			
Költség	0,25	0,25	0,5	0,5	1		
Revíziós	0	0,25	0	0	0,5	1	
Katasztrófa	0,25	0	0,25	0,25	0,25	0	1

a $Life_i$ érték pedig az i-edik élet almodul tőkeszükségletét jelöli.

2.2.4. Egészség biztosítási kockázat – Health underwriting risk

A 2.2.3 almodulhoz hasonlóan, az egészségbiztosítási modul tőkeszükségletét is csak röviden taglalom. Ezt a modult három részre kell osztanunk, előbbi kettőre a technikai jellegük miatt:

- élethez hasonló egészségbiztosítási kötelezettségek (SLT Health);

- élethez nem hasonló egészségbiztosítási kötelezettségek (Non-SLT Health);
- egészség katasztrófa almodul (CAT).

Ezek láthatók a 2.1 ábrán is. Az egészség modul is számolható nettó és bruttó módon a biztosítástechnikai tartalékokra tekintettel. A képlet a következő a tőkeszükségletre:

$$SCR_{egeszseg} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrHealth_{i,j} \cdot Health_i \cdot Health_j},$$

ahol továbbra is $Health_i$ az i-edik egészségbiztosítási almodul tőkeszükségletét, $CorrHealth$ a lineáris korrelációs mátrixot jelöli:

CorrHealth	SLT Health	Non-SLT Health	CAT
SLT Health	1		
Non-SLT Health	0,5	1	
CAT	0,25	0,25	1

A $Health_{SLT}$ almodul tőkeszükségletének számolásakor ugyanúgy kell eljárni, mint az élet modul tőkeszükségletének számolásánál – annyi különbséggel, hogy a katasztrófa kockázatot ki kell belőle hagyni, hiszen az másik almodulba tartozik itt. A $Health_{Non-SLT}$-nél hasonlóan, ott pedig a nem-élet modul számolási módját kell alapul venni.

2.2.5. Nem-élet biztosítási kockázat – Non-life underwriting risk

A nem-életbiztosítási modul tartalmazza a szerződőre vonatkozó (megújítás, felmondás) feltételezések miatti bizonytalanságot és figyelembe veszi a következő 12 hónap várható új szerzéseit is.

A nem-élet biztosítási kockázat három almodulból áll:

- nem-élet díj és tartalék kockázati almodul,
- nem-élet törlési kockázat almodul,
- nem-élet katasztrófa kockázat almodul.

Az előzőekhez hasonlóan a nem-élet modul tőkeszükséglete is a következőképpen néz ki:

$$SCR_{nl} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrNL_{i,j} \cdot NL_i \cdot NL_j},$$

ahol NL_i az i-edik nem-élet alkockázat tőkeszükségletét jelöli, míg $CorrNL_{i,j}$ a megfelelő lineáris korrelációs mátrixot.

CorrNL	NL díj és tart	NL törlési	NL CAT
NL díj és tart	1		
NL törlési	0	1	
NL CAT	0,25	0	1

Nem-élet díj és tartalék kockázat

Ez a modul kombinálja a nem-élet biztosítási kockázat két fő forrását, a díj kockázatot és a tartalék kockázatot. A díj kockázat a kárgyakoriság és -nagyság miatti, illetve időbeli ingadozásból származik. Beletartoznak az új szerzések (így a megújítás is) és meglévő szerződések le nem járt kockázatai. Azt is belekalkuláljuk, hogy esetleg a szerződés díjtartaléka nem elégséges a kárkifizetésre vagy akár meg kell emelni a tartalékot. Emellett a költségek ingadozását is figyelembe vesszük, hiszen ez elég jelentős lehet egyes szegmensekben. A tartalék kockázat pedig a kárrendezés időbeli és nagyságbeli ingadozása miatt fontos tényező.

A díj és tartalék kockázat tőkeszükséglete (NL_{pr}) az alábbi szorzatalakban írható fel:

$$NL_{pr} = 3 \cdot \sigma \cdot V,$$

ahol σ az együttes szórása a nem-élet díj és tartalék kockázatnak, V pedig a volumenmérték. Ezek meghatározásához viszont még egyéb változókat kell bevezetnünk, illetve szegmensenként kell először megvizsgálnunk őket, majd ezekből kihozhatjuk az összesített szórást és volumenmértéket.

A 2.1.1 részben már felsoroltam az egyes szegmenseket, ezen a 12 LoB-en fut végig a következőkben szereplő s index. A volumenmérték az s szegmensre az alábbi módon számítandó ki:

$$V_s = (V_{prem,s} + V_{res,s}) \cdot (0,75 + 0,25 \cdot DIV_s),$$

ahol DIV_s a földrajzi szegmenseken (j index) összegződik (erről bővebben: [6]):

$$DIV_s = \frac{\sum_j (V_{prem,j,s} + V_{res,j,s})^2}{(V_{prem,s} + V_{res,s})^2}.$$

Egyes szegmensekben könnyű dolgunk van, hiszen DIV_s azokban 1-nek definiálható.

Határozzuk még meg a $V_{prem,s}$ és $V_{res,s}$ értékeket! A tartalék részre vonatkozó tagot gyorsan elintézhetjük:

$$V_{res,s} = PCO_s,$$

azaz az s-edik szegmens függőkárainak legjobb becslése. $V_{prem,s}$ pedig felírható az elmúlt 12 hónap díjainak ($P_{last,s}$), a következő 12 hónap díjainak becslésével (P_s), illetve a meglévő ($FP_{existing_s}$) és következő 12 hónapban kezdődő szerződések várható jelenértékeinek ($FP_{future,s}$) segítségével.

$$V_{prem,s} = \max(P_s; P_{last,s}) + FP_{existing_s} + FP_{future,s}.$$

Végül V már egyszerűen áll elő:

$$V = \sum_s V_s.$$

Most már áttérhetünk a szórás meghatározására. A teljes szórás az alábbi alakban áll elő:

$$\sigma = \frac{1}{V} \cdot \sqrt{\sum_{s,t} CorrS_{s,t} \cdot \sigma_s \cdot V_s \cdot \sigma_t \cdot V_t},$$

amiből V_s, V_t értékeket már ismerjük, $CorrS$ korrelációs mátrix pedig az alábbi (a számozott sorok rendre a 2.1.1 részben lévő nem-élet 4-12. szegmensekre – arányos viszontbiztosítással együtt – és a nem-arányos viszontbiztosítás 2-4 LoB-jaira vonatkoznak):

CorrS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1											
2	0,5	1										
3	0,5	0,25	1									
4	0,25	0,25	0,25	1								
5	0,5	0,25	0,25	0,25	1							
6	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1						
7	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1					
8	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1				
9	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1			
10	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	1		
11	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1	
12	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	1

Már csak a σ_s értékeket kell meghatároznunk. Ehhez az egyes szegmensek szórásának értéke a díj ($\sigma_{prem,s}$) és tartalék ($\sigma_{res,s}$) kockázat esetén is megadható táblázatos formában. Ebben ugyanazok a számozott sorok, mint az előző $CorrS$ mátrixban. Az első oszlop a díj kockázat szórásait jelöli (a viszontbiztosításra nézve bruttó módon), a második oszlop pedig a tartalék kockázat szórásait (de ezt nettó módon):

Szegmens	$\sigma_{prem,s}$	$\sigma_{res,s}$
1	15%NP_{lob}	9%
2	8%NP_{lob}	8%
3	10%NP_{lob}	11%
4	8%NP_{lob}	10%
5	14%NP_{lob}	11%
6	12%NP_{lob}	19%
7	7%NP_{lob}	12%
8	9%NP_{lob}	20%
9	13%NP_{lob}	20%
10	17%	20%
11	17%	20%
12	17%	20%

ahol NP_{lob} a nem-arányos viszontbiztosítás miatti kiigazítás, amivel a vállalatok az egyedi kockázatonkénti XL viszontbiztosítás kockázatcsökkentő hatását vehetik számításba – általában 80%-100% környékén van. Egyedi szegmensekre az alábbi módon számítható ki a szórás:

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{(\sigma_{prem,s}V_{prem,s})^2 + \sigma_{prem_s}\sigma_{res,s}V_{prem_s}V_{res,s} + (\sigma_{res,s}V_{res,s})^2}}{V_{prem,s} + V_{res,s}}.$$

Nem-élet törlési kockázat

A törlési kockázat szavatoló tőke szükséglete két sokk kombinációjából származó alapvető szavatolótőke megváltozásából (veszteségéből) ered. Képlettel:

$$NL_{lapse} = \Delta BOF|(lapseshock_1, lapseshock_2),$$

ahol $lapseshock_1$ a nem-életbiztosítási szerződések 40%-ának megszüntetése (ami a biztosítástechnikai tartalékok megnövelését okozná), illetve $lapseshock_2$ a biztosítástechnikai tartalékok számolása során alkalmazott jövőbeli biztosítási szerződések számának 40%-os emeléséből ered. Azt a sokkot kell vennünk, ami negatívabban hat az alapvető szavatoló tőkére.

Nem-élet katasztrófa (CAT) kockázat

A katasztrófa (CAT) kockázat olyan extrém vagy rendhagyó eseményekből származik, melyeket nem tudtunk megfelelően lefedni a díj és tartalék kockázat tőkeszükségletének számolása során. A CAT kockázat tőkeszükségletét a 99,5%-os VaR-ra kell beállítani. Ezen a kockázaton belül is megkülönböztetünk alkockázatokat:

- természeti katasztrófa ($natCAT$),
- nem-arányos vagyon viszontbiztosítás katasztrófa kockázata ($npproperty$),
- mesterséges katasztrófa ($mmCAT$),
- más nem-élet katasztrófa ($CATother$).

Ennek megfelelően a teljes nem-élet katasztrófa kockázat tőkeszükséglete az alábbi módon írható fel:

$$SCR_{nlCAT} = \sqrt{(SCR_{natCAT} + SCR_{npproperty})^2 + SCR^2_{mmCAT} + SCR^2_{CATother}}.$$

Az egyes alkockázatok tőkeszükségletének számítására most nem térek ki, hiszen rendkívül szerteágazó és sajnos nem fér dolgozataim keretei közé.

3. fejezet

A viszontbiztosítás hatása a tőkekövetelményre

Jelen fejezetben azt vizsgáljuk majd, hogyan hat a viszontbiztosítás a szavatoló tőke szükségletre, illetve, hogy lehet-e csökkenteni segítségével a tőkeköltséget. Az előző két fejezet során bemutattam a viszontbiztosítás és a Szolvencia II. főbb jellemzőit, feldolgozásuk előkészületként szolgált ehhez a fejezethez. Láttuk, hogy a Szolvencia II. főként kockázatérzékeny és elvek által vezérelt; illetve a viszontbiztosítás fő típusait is bemutattam, így az itt említett típusok sem lesznek ismeretlenek. Most már mindenünk megvan az elemzéshez.

Mivel ebben a fejezetben olyan feltételezésekkel élek majd, melyek a standard formula használhatóságát megkérdőjelezik, ezért lényegében egy saját modellt, melyet tekintsünk a biztosító belső modelljének, fogok alkalmazni. A 2 fejezetben lévő 2.2 részben láttuk, hogy a szavatoló tőkét úgy kell beállítani, hogy a biztosító alapvető szavatolótőkéjének 99,5%-os VaR-jának megfeleljen egy éves időtávon. Ebből fogunk kiindulni. Másrészt nettó szavatoló tőke szükségletet vizsgálunk, nem a bruttót csökkentve a viszontbiztosítással. A 2.2 szekcióban bemutatott modulok közül is csak a nem-élet kockázatot tekintjük, illetve a viszontbiztosítás révén a partnerkockázatot. A többi modult nem érintjük, hiszen a dolgozat célja ezen két modul egymásra hatásának kiélezése.

A viszontbiztosítás hatását a tőkeszükségletre inkább elméleti oldalról közelítjük meg. Veszünk egy most induló nem-életbiztosítót, melynek első termékét dobjuk piacra. Az egyszerűség kedvéért ezt tekinthetjük egy lakásbiztosításnak, hiszen ott a kárkifizetésekről feltételezhetjük, hogy azonnal megtörténnék. A kárvolumenre többféle eloszlást is feltételezek, de mind a díjakat, költségeket és az induló tőkét is determinisztikusnak vesszük. Utóbbit majd a tőkeszükséglet határozza meg, kezdetben ez ismeretlen. Megvizsgáljuk tehát, hogy viszontbiztosítás nélkül, illetve többféle típusú és mértékű viszontbiztosítással milyen szavatoló tőkére van szüksége a biztosítónak és hogy ezáltal a tőkeköltségen is tudunk-e spórolni. A tőkeköltséget[1] úgy értjük, hogy az a hozam, amit elveszít a tulajdonos azzal, hogy egy másik ilyen kockázati szintű befektetésből ide irányítja át a tőkéjét. Ez „economic profit”-ot generál, mely nem a számviteli, hanem a tőkeköltséggel korrigált profit.

3.1. Szavatoló tőke szükséglet viszontbiztosítás nélkül

Kezdetben tehát tekintsük a következő változókat:

[1]Forrás: `http://www.investorwords.com/`

- Nyitó tőke: C
- Díj: $Prem$
- Költségszázalék (a díj arányában, a jutalékot tartalmazza): a
- Károk: X.

Ahol értelemszerűen $a \in [0, 1]$. Úgy fogjuk megválasztani C-t, hogy éppen elkerüljük a csődöt. X az éves kárösszeget jelöli, erre a valószínűségi változóra feltételezünk különböző eloszlásokat. Most mindenhol eltekintünk a diszkontálástól, hiszen csak egy évre kellene, az pedig a jelenlegi kamatkörnyezetben elhanyagolható. A kérdés voltaképpen most az, a matematika nyelvén, hogy melyik az a C érték, melyre

$$P(C + (1 - a)Prem - X \geq 0) = 99,5\%. \tag{3.1}$$

Hiszen a Szolvencia II-es szabályok alapján csak fél százalék csődvalószínűség elfogadott. A fenti kifejezésből C-t általában meg tudjuk határozni, ha ismerjük X eloszlását. Átrendezés után kapjuk, hogy

$$P(X \leq C + (1 - a)Prem) = 99,5\%.$$

Most még konkrét eloszlások helyett csak azt tegyük fel, hogy X folytonos eloszlású! Ekkor az $\{X = C + (1 - a)Prem\}$ esemény valószínűsége 0, így

$$P(X < C + (1 - a)Prem) = 99,5\%$$

egyenlőségből ugyanazt a C-t tudjuk kifejezni. Jelölje X eloszlásfüggvényét F (és sűrűségfüggvényét f)! Ekkor a fenti az

$$F(C + (1 - a)Prem) = 99,5\%$$

alakba írható át. Mivel X folytonos, ezért vehetjük az F függvény inverzét, amiből kapjuk, hogy

$$C + (1 - a)Prem = F^{-1}(99,5\%).$$

Ebből már adódik is C-re a képlet:

$$C = F^{-1}(99,5\%) - (1 - a)Prem. \tag{3.2}$$

Ebből a levezetésből látható az is, hogy ha a 3.1 egyenlet valószínűségének hasában a C-hez még más tagot is hozzáadunk, akkor az a végén ugyanúgy kivonódik az F^{-1}-ből, mint az $(1 - a)Prem$.

3.1. Megjegyzés. A VaR – kockázatnak kitett érték – definíciójából (2.3) könnyen látható, hogy ha F folytonos, akkor $F^{-1}(p)$ éppen a p valószínűséghez tartozó VaR-t jelenti, azaz VaR(p)-t.

Árazzuk be továbbá a biztosítást az alábbi képlet segítségével:

$$(1 - a) \cdot Prem = E(X).$$

Ebben a modellben a nem-élet kockázati modul tőkeszükségletét nem a standard formula szabályai szerint számoljuk, mert az nem adná vissza az eloszlások speciális tulajdonságait és a viszontbiztosítás hatását. Kiemelném azt is, hogy minden szavatoló tőke szükségletet az első üzlet megkötése előtt számolunk.

Ha tudjuk tehát X eloszlását, akkor C, azaz a tőkeszükséglet, már számolható is a 3.2 képlettel. A 3.2 és a 3.4 részekben három különböző eloszlás esetén elemezzük a tőkeszükségletet, illetve majd azt is, hogy a viszontbiztosítással együtt csökken vagy növekszik-e az értéke.

3.2. Az arányos viszontbiztosítás hatása a tőkeszükségletre

Az arányos – és azon belül is a Quota Share – viszontbiztosítás esetével csak röviden foglalkozunk. Ebben a szekcióban az is kiderül, hogy miért.

Három eloszlás esetén vizsgáljuk (láthatók a 41 oldalon) a viszontbiztosítás hatását. Az exponenciális eloszlás elméleti szempontból érdekes eset, azt azért választottam. Általában viszont károk összegének eloszlására alkalmasabb a normális eloszlás feltételezése, hiszen a centrális határeloszlás tétel[2] miatt aszimptotikusan az azonos eloszlású, független valószínűségi változók összege normális eloszlású. A valóság viszont nem mindig ilyen szép, mert egyáltalán nem biztos, hogy azonos eloszlásúak, illetve függetlenek az összeadandók. Ezért szokás más eloszlásokat is illeszteni a károkra, én így még a mostanában népszerű Pareto eloszlást választottam.

A paraméterek választásánál arra törekedtem, hogy az eloszlások összehasonlíthatóak legyenek, így az volt a célom, hogy a várható értékek megegyezzenek, a szórások pedig közel legyenek egymáshoz. Érzékenységvizsgálatot is futtattam a paraméterekre, hogy a viszontbiztosítás ne legyen teljesen haszontalan és végül így jöttek ki a következő paraméterek:

Eloszlások	Exponenciális	Normális		Pareto	
Paraméterek	λ	m	σ	x_m	α
Par. értékek	1	1	1,5	0,59	2,41
Várható érték	1	1		1	
Szórás	1	1,5		1	

3.1. ábra. Az eloszlások paraméterei

Kiszámítottam a tőkeszükségletet (viszontbiztosítás nélkül) a 99,5%-os VaR segítségével minden eloszlás esetén, ahol minden esetben egy 4 körüli érték jött ki. Mint láttuk, a viszontbiztosító a díjból és károkból is arányos részt kap, esetünkben $(1-q)$-szorosát, így a direkt biztosítónál ezek q-szorosa marad. A díjat természetesen még terhelik költségek is, ezt a díj arányos részének tekintem, mint ahogy írtam is a 3.1 részben. Ezt alap esetben teljesen a direkt biztosító viseli, ezért néztem több esetet is a viszontbiztosításra:

- a viszontbiztosító nem ad viszontbiztosítási jutalékot,
- a viszontbiztosító kis jutalékot ad,
- a viszontbiztosító nagy jutalékot ad.

A fent említett paraméterek esetén minden eloszlásnál arra az eredményre jutottam, hogy a viszontbiztosítás csökkenti a szavatoló tőke szükségletet. Általában akár a felére is le tudta csökkenteni a fenti paraméterekkel és 20%-os direkt biztosítói megtartás mellett. A q paraméterre végeztem mindhárom eloszlásnál érzékenységvizsgálatot is és q nem befolyásolja, hogy a viszontbiztosítás csökkenti-e a szavatoló tőke szükségletet.

Az előbbi eredmények örvendetesek, de amiért nem foglalkoztam tovább ezzel az esettel, az az, hogy a tőkeköltség-csökkenés viszont egyik esetben sem térítette meg a viszontbiztosítási díjat. Hiszen a viszontbiztosító megkapja a díj arányos részét, de ő is profitért

[2] Teljesüléséhez szükséges az is, hogy a valószínűségi változók véges szórásúak legyenek, például a Pareto eloszlásnál ez $\alpha > 2$ feltételt jelent a 3.5 definícióban

dolgozik, így a tőkeköltség csökkenése nem olyan mértékű, mint maga a viszontbiztosítási díj. Ezt q változtatása sem másította meg; sőt, minden q-ra a megtérülések aránya állandó maradt. Természetesen az arányos viszontbiztosítás célja nem is elsősorban a tőkeköltség csökkentése, hanem azért jó, mert csökkenti a károk szórását.

Megtérülések	Exp(λ)	N(m,σ)	Pareto(x_m,α)
Nincs jutalék	15,47%	13,91%	15,33%
Kis jutalék	18,05%	16,23%	17,89%
Nagy jutalék	21,92%	19,71%	21,72%

A későbbiekben viszont látjuk majd, hogy a kártöbblet viszontbiztosítás némely esetekben orvosolni tudja ezt a problémát, ezért azzal foglalkoztam behatóbban. De először a következő részben meghatározzuk az XL viszontbiztosítás díját is a három eloszlás esetén, hiszen ez nem olyan triviális, mint az arányos viszontbiztosításnál.

3.3. A kártöbblet viszontbiztosítás díja

Az 1.2.2 részben láttuk, hogy az XL viszontbiztosítás viszontbiztosítóra jutó kárrésze az

$$R(X) = |X - M|_+,$$

ahol M a direkt biztosító saját megtartása és feltételezhető, hogy $M \geq 0$, hiszen károkról van szó. A viszontbiztosítás díját ennek segítségével kalibráljuk, vesszük ennek a valószínűségi változónak a várható értékét, de hogy a viszontbiztosítónak is megérje az üzlet, ezt még korrigáljuk egy viszontbiztosítási pótlékkal, jelölje ezt b. A viszontbiztosítási díj tehát a következő lesz:

$$P_1 = \frac{1}{1-b} \cdot E(|X - M|_+). \tag{3.3}$$

$E(|X - M|_+)$ meghatározása viszont nem mindig egyszerű.

Induljunk el először általánosan, jelölje a sűrűségfüggvényt f, az eloszlásfüggvényt pedig F! Felhasználva a várható értékre az ismert integrálos felírást és $|.|_+$ függvény 1.4 definícióját:

$$\begin{aligned}
E(|X - M|_+) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x - M|_+ f(x)dx = \\
&= \int_{-\infty}^{M} |x - M|_+ f(x)dx + \int_{M}^{\infty} |x - M|_+ f(x)dx = \\
&= 0 + \int_{M}^{\infty} (x - M) f(x)dx = \\
&= \int_{M}^{\infty} x f(x)dx - \int_{M}^{\infty} M f(x)dx = \\
&= E(X) - \int_{-\infty}^{M} x f(x)dx - M\Big(1 - \int_{-\infty}^{M} f(x)dx\Big) = \\
&= E(X) - \int_{-\infty}^{M} x f(x)dx - M\Big(1 - F(M)\Big), \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

ahol a végén megint a várható érték integrállal való felírását használtuk, illetve f és F kapcsolatát.

A 3.4 eredmény még később hasznunkra lesz, de most menjünk egy kicsit tovább! Az eloszlásfüggvény tulajdonságai miatt és a parciális integrálás szabályát alkalmazva kapjuk az előzőből, hogy

$$E(|X-M|_+) = E(X) - \left(\Big[xF(x) \Big]_{-\infty}^{M} - \int_{-\infty}^{M} F(x)dx \right) - M\Big(1 - F(M)\Big) =$$
$$= E(X) - MF(M) + \int_{-\infty}^{M} F(x)dx - M\Big(1 - F(M)\Big) =$$
$$= E(X) - M + \int_{-\infty}^{M} F(x)dx. \tag{3.5}$$

Az exponenciális és normális eloszlásoknál 3.4 azonosságból, míg a Pareto eloszlásnál a 3.5 végeredményből indulunk ki.

3.3.1. Exponenciális eloszlás

Először megnézzük az XL viszontbiztosítás díját, ha $X \sim Exp(\lambda)$ eloszlású. Itt és Pareto eloszlásnál az integrálok mehetnek 0-tól, hiszen az eloszlás- és sűrűségfüggvények csak nemnegatív számokon vannak értelmezve. De egyébként is feltehetnénk ezt, hiszen negatív károkkal nem szokás foglálkozni. Ha felhasználjuk a 3.4 definícióból a sűrűségfüggvényét és eloszlásfüggvényét, a 3.4 eredményünket, illetve a parciális integrálás szabályát, akkor adódik, hogy

$$E(|X-M|_+) = E(X) + \int_0^M x \cdot (-1) \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - M(1 - F(M)) =$$
$$= E(X) + \Big[xe^{-\lambda x} \Big]_0^M + \int_0^M -e^{-\lambda x} dx - Me^{-\lambda M} =$$
$$= E(X) + Me^{-\lambda M} + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^M - Me^{-\lambda M} =$$
$$= E(X) + \frac{e^{-\lambda M}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}.$$

Azaz végül azt kapjuk az exponenciális esetre, hogy

$$E(|X-M|_+) = \frac{e^{-\lambda M}}{\lambda}.$$

3.3.2. Normális eloszlás

Tegyük fel most, hogy $X \sim N(m, \sigma)$ és használjuk fel a 3.3 definícióban szereplő tulajdonságait a normális eloszlásnak! Ekkor

$$E(|X-M|_+) = E(X) + \int_{-\infty}^{M} -x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx - M(1 - F(M)). \tag{3.6}$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{d}{dx} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = -\frac{(x-m)}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

a 3.6 kifejezés integráljában lévő tag átírható a következő formában, felhasználva a normális eloszlás sűrűségfüggvényét is:

$$
\begin{aligned}
E(|X-M|_+) = E(X) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{M} -\frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} + \frac{m}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} - \frac{m}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
- M(1-F(M)) = \\
= E(X) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{M} - m \int_{-\infty}^{M} f(x)dx - M(1-F(M)) = \\
= E(X) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(M-m)^2}{2\sigma^2}} - mF(M) - M(1-F(M)).
\end{aligned}
$$

Azaz átrendezés után adódik:

$$
E(|X-M|_+) = E(X) - M + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(M-m)^2}{2\sigma^2}} + F(M)(M-m).
$$

3.3.3. Pareto eloszlás

Gyakorlatban manapság sokat használják a Pareto eloszlást, hiszen igen gyakran illeszkedik jól a károkra. Tegyük fel tehát, hogy $X \sim Pareto(x_m, \alpha)$! Ekkor a kártöbblet várható értékére kapjuk a 3.5 egyenletbe helyettesítve a 3.5 definícióban lévő eloszlásfüggvényt:

$$
\begin{aligned}
E(|X-M|_+) &= E(X) - M + \int_0^M F(x)dx = \\
&= E(X) - M + \int_0^{x_m} 0dx + \int_{x_m}^{M} \left(1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^{\alpha}\right) dx = \\
&= E(X) - M + 0 + M - x_m - x_m^{\alpha} \int_{x_m}^{M} x^{-\alpha} dx = \\
&= E(X) - x_m - x_m^{\alpha} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{x_m}^{M} = \\
&= E(X) - x_m - x_m^{\alpha} \left(\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{x_m^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \\
&= E(X) - x_m + \frac{x_m^{\alpha} M^{1-\alpha}}{\alpha - 1} + \frac{x_m}{1-\alpha} = \\
&= E(X) - x_m \frac{\alpha}{\alpha - 1} + \frac{x_m^{\alpha} M^{1-\alpha}}{\alpha - 1} = \\
&= \frac{x_m^{\alpha} M^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.
\end{aligned}
$$

Az utolsó egyenlet azért teljesül, mert a Pareto eloszlás várható értéke éppen $x_m \frac{\alpha}{\alpha-1}$, ha $\alpha > 1$ (ezt pedig feltehetjük most). Tehát a Pareto eloszlásra is megkaptuk az egyenletünket,

$$
E(|X-M|_+) = \frac{x_m^{\alpha} M^{1-\alpha}}{\alpha - 1},
$$

így nem marad más hátra, mint az egyes eloszlásokra a szavatoló tőke szükségletek számolása – viszontbiztosítás nélkül, illetve viszontbiztosítással.

3.2. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy ha $M \leq x_m$, akkor egyszerűsödik a képlet:

$$
E(|X-M|_+) = E(X) - M.
$$

3.4. Az XL viszontbiztosítással és anélkül számolt tőkeszükséglet összehasonlítása

Az arányos viszontbiztosításhoz hasonlóan ugyanazokat a paramétereket alkalmaztam az elemzés során itt is, ugyanazokból az okokból kifolyólag, amik a 3.1 táblázatban is szerepelnek. Az XL viszontbiztosítás hatását részletesebben is megvizsgálom, mert ez egy sokkal érdekesebb eset, mint a fenti arányos viszontbiztosítás esete. Ebbe a modellbe már a vizsgálódásom során a partnerkockázatot is belevettem a viszontbiztosító csődjének kockázatán keresztül.

Ahogy a 3.1 részben láttuk, először is meghatároztam a viszontbiztosítás nélküli szavatoló tőke szükségleteket. Ezek után vettem mindegyiknél egy M paramétert, ami, mint láttuk, a közvetlen aláíró saját megtartását jelöli; ezt a várható érték kétszeresére állítottam be, ami jelen esetben kettő. Erre a paraméterre is végeztem érzékenységvizsgálatot és arra jutottam, hogy M kisebb változtatása nem befolyásolja túlságosan az eredményeimet, és túl nagyra, illetve túl kicsire állítani M-et nem lenne kézenfekvő. A valóságban sem alkalmaznak túl kicsi M-et, mert egy direkt biztosítónak el kell tudnia vállalni az átlag körüli károkat, illetve túl nagy M esetén nem csökken jelentősen a szavatoló tőke szükséglet.

Mielőtt megvizsgálnánk a három eloszlás eredményeit, menjünk végig az egyes elemzések lépésein!

Mindhárom eloszlásnál – a fenti paraméterek mellett – meghatároztam a viszontbiztosítási díjhoz szükséges $E(|X - M|_+)$ értékeket, a 3.3 részben levezetett eredmények segítségével. Azonban korábban említettem, ez még nem a tényleges viszontbiztosítási díj, ezt még korrigálni kell egy viszontbiztosítási pótlékkal, hogy a viszontbiztosítónak is megérje az üzlet – ezt a paramétert most 40%-ra állítottam be, azaz $b = 40\%$ a 3.3 képletben.

Két esetben vizsgáltam meg ezek után a szavatoló tőke szükségletet – mely most egyébként csak az alap szavatoló tőke szükségletből áll, a működési kockázattól és a kiigazítástól eltekintettem. Az egyik, mikor nincs partnerkockázat és az SCR csak a nem-életbiztosítási kockázatból ered, illetve mikor a partnerkockázatot is beillesztem a modellbe. A partnerkockázatot utóbbinál a Szolvencia II. standard formulája alapján számoltam (2.2.2 rész).

A partnerkockázat nélküli SCR-t az alábbi módon számolom:

$$SCR_{VB-vel} = M - (1-a)Prem + \frac{1}{1-b} \cdot E(|X - M|_+), \tag{3.7}$$

ahol most $(1-a)Prem = E(X)$, ami jelen esetben 1.

A tőkeköltség csökkenése (az arányos viszontbiztosításnál is így számoltam) a következő képlettel írható le:

$$CoC_{csökk} = CoC \cdot (SCR_{VBnélkül} - SCR_{VB-vel}),$$

ahol $SCR_{VBnélkül}$ a viszontbiztosítás nélküli szavatoló tőke szükséglet, amit korábban C-vel jelöltünk (3.2), $CoC_{csökk}$ értelemszerűen a tőkeköltség-csökkenést, CoC a tőkeköltség rátáját jelöli, ami a Szolvencia II. esetén megállapodás szerint 6% – és én is ezt használom. Hogy hány százalékban térül meg a viszontbiztosítás díja, az az alábbi módon számítandó, amennyiben a megtérülést a Ret, mint return jelöli:

$$Ret = \frac{CoC_{csökk}}{P_1}.$$

Az arányos viszontbiztosításnál erre jött ki 20% körüli érték, azaz a viszontbiztosítási díjnak csak az ötöde térült meg! Ha ez nagyobb 100%-nál, az csak „economic profit”, ez nem feltétlenül jelent valós profitot, de csoportszinten még realizálódhat is.

3.4.1. A partner nemfizetési kockázat a modellben

Ebben a részben a modellemre alkalmazott partner nemfizetési kockázat szavatoló tőke szükségletét vezetem le, melynek a 2.2.2 részben leírt módon indultam neki.

Háromféle minősítésű viszontbiztosító partnerkockázatát vizsgáltam meg, de csak egyszerre az egyikkel kötünk szerződést:

Minősítés	AA	BB	B
PD	0,010%	1,200%	4,175%

ahol PD a partner nemteljesítési valószínűségét jelöli, ezt a 2.2.2 részben vettem. A 2.3 partnerkockázat miatti szavatoló tőke szükséglet meghatározásához szükségünk van egy LGD értékre, illetve ki kell számolnunk $\sqrt{V}$-t. Mivel egyszerre csak egy partner van egy adott nemteljesítési kockázattal, ezért csak egy LGD-t kell számolnunk, ami most a következő képletre egyszerűsödik:

$$LGD = 0,5 \cdot \max(0, Recoverables + RM),$$

hiszen $Collateral$-t 0-nak és az LGD-szorzót 0,5-nek tekinthetjük a modellben. A $Recoverables$ és és az RM is egyszerűen számolható:

$$Recoverables = E(|X - M|_+)$$
$$RM = SCR_{VBnélkül} - SCR_{VB-vel}$$

azaz RM a tőkeköltség-csökkenés, $Recoverables$ pedig nyilvánvalóan a fenti érték, hiszen pont így kalkuláltuk a viszontbiztosítási díjat. Már csak V-t kell meghatároznunk és most a 2.4 képlet leegyszerűsödik, hiszen egyszerre csak egy PD érték és összesen egy LGD van.

$$V = \frac{1,5PD(1 - PD)}{2,5 - PD} \cdot LGD^2.$$

Így már minden megvan a 2.3 partnerkockázat miatti szavatoló tőke szükséglet számolásához.

3.4.2. A különböző eloszlások eredményeinek összehasonlítása

Először a partnerkockázat nélküli viszontbiztosítással számolt tőkeszükségletet hasonlítjuk össze a viszontbiztosítás nélküli szavatoló tőke szükségletekkel, melyeket a 3.2 képlettel számoltam, ezekre a következőt kaptam:

	Exp(λ)	N(m,σ)	Pareto(x_m,α)
$SCR_{VBnélkül}$	4,30	3,86	4,26
SCR_{VB-vel}	1,23	1,38	1,12

Látható, hogy mindegyik eloszlásnál jelentősen lecsökkent a tőkeszükséglet, de vajon megtérül-e a tőkeköltség-csökkenés által a viszontbiztosítási díj?

	Exp(λ)	N(m,σ)	Pareto(x_m,α)
$CoC_{csökk}$	0,18	0,15	0,19
Ret	81,74%	39,48%	154,80%

Tehát míg a Pareto eloszlásnál megtérül a viszontbiztosítás díja, az exponenciális és normális eloszlásnál továbbra sem. A Pareto eloszlásnál viszont SCR-csökkentés és tőkeköltség-csökkentés szempontjából is megéri viszontbiztosítást kötni. Persze megint hangsúlyoznám, hogy ez csak economic profit, tehát nem biztos, hogy ténylegesen realizálódik.

De a valóság nem mindig ilyen szép, annak is megvan a veszélye, hogy a viszontbiztosító, akinek átadtuk a kockázatot, csődbe megy és nem tud nekünk teljesíteni. Emiatt az eshetőség miatt – a 3.4.1 részben leírt módon – számoltam partner nemfizetési kockázat miatti tőkeszükségletet háromfajta partner esetén is.

	Exp(λ)	N(m,σ)	Pareto(x_m,α)
SCR_{defAA}	0,037	0,032	0,037
SCR_{defBB}	0,678	0,573	0,678
SCR_{defB}	1,253	1,060	1,254

A nem-életbiztosítási kockázat tőkeszükségletét még „össze kell adnunk” a partnerkockázatéval, amihez a 2.2 képletet használtam 0,5-es korrelációval, amit a 2.2 mátrixból szedtem.

	Exp(λ)	N(m,σ)	Pareto(x_m,α)
$BSCR_{AA}$	1,235	1,386	1,131
$BSCR_{BB}$	1,542	1,619	1,449
$BSCR_{B}$	1,960	1,937	1,880

Így látjuk, hogy a szavatoló tőke szükséglet csökkent a viszontbiztosítás nélkülihez képest és a partnerkockázat modellbe vétele nem okozott túl nagy eltérést – ezt mutatja az alábbi két táblázat.

Eltérések	Exp(λ)	N(m,σ)	Pareto(x_m,α)
AA	3,063	2,478	3,127
BB	2,756	2,244	2,810
B	2,339	1,927	2,379

Eltérések	Exp(λ)	N(m,σ)	Pareto(x_m,α)
AA	0,010	0,008	0,010
BB	0,316	0,241	0,327
B	0,734	0,559	0,758

Tehát még partnerkockázattal együtt is megéri viszontbiztosítást kötni abból a szempontból, hogy a tőkeszükséglet lecsökken.

Nézzük meg viszont, hogy a tőkeköltség-csökkenés még mindig megtéríti-e a viszontbiztosítási díjat a Pareto eloszlásnál, vagy a partnerkockázat figyelembe vétele okozott-e számottevő különbséget!

	$Exp(\lambda)$	$N(m,\sigma)$	$Pareto(x_m,\alpha)$
Ret_{AA}	81,48%	39,35%	154,31%
Ret_{BB}	73,32%	35,65%	138,65%
Ret_{B}	62,21%	30,60%	117,39%

Nem meglepő módon kevésbé térül meg a viszontbiztosítási díj, ami azt okozza, hogy az exponenciális eloszlás és normális eloszlás esetén még kevésbé előnyös viszontbiztosítás kötni. Azért fontos megemlíteni, hogy ez az $M = 2E(X)$ eset, például $M = 4E(X)$ (ahol most $E(X) = 1$) esetén már az exponenciális eloszlásnál és a normális eloszlásnál is visszakapjuk a viszontbiztosítási díjat, de így maga a viszontbiztosítással együtt számolt szavatoló tőke szükséglet is megnő – ezáltal már igen közel kerülve a viszontbiztosítás nélkül számolt szavatoló tőke szükséglethez.

M=4	$Exp(\lambda)$	$N(m,\sigma)$	$Pareto(x_m,\alpha)$
Ret_{AA}	248,45%	237,44%	159,03%
Ret_{BB}	233,64%	223,96%	149,53%
Ret_{B}	217,18%	209,79%	139,04%

Látható, hogy $M = 4E(X)$ esetén még jobb eredményt is érünk el a normális és exponenciális eloszlásokkal. Persze ez azért van, mert M növelésével lényegesen csökkenhet a viszontbiztosítási díj, de nem biztos, hogy a direkt biztosító tud akkora megtartást vállalni. Jó hír viszont, hogy Pareto eloszlás feltételezésekor még ebben az $M = 2E(X)$ esetben is megéri a viszontbiztosítás.

Összefoglalás

A dolgozat konklúziója tehát az, hogy elméleti oldalról tekintve a viszontbiztosítást, mint szavatoló tőke szükségletet csökkentő módszert, érdemes viszontbiztosítást kötni. Ebből a szemszögből mind az arányos és mind a kártöbblet viszontbiztosítás megéri, hiszen igen jelentős csökkenést érhetünk el.

Ám a viszontbiztosítás így önmagában még nem biztos, hogy túl sokat ér. Ha el kell költenünk az összes tőkeköltség-csökkenésen nyert „economic profit"-unkat a viszontbiztosítási díjra, akkor ugyanott vagyunk, mintha nem kötöttünk volna viszontbiztosítást. Ez történik az arányos viszontbiztosítás esetén mindhárom eloszlásnál, illetve a kártöbblet viszontbiztosításnál exponenciális és normális eloszlás feltételezésekor. Persze M növelésével ezt a problémát is orvosolhatjuk; kérdés, hogy adott direkt biztosító meddig képes növelni a megtartását. Ha képes növelni, akkor az exponenciális és normális eset képes jobb eredményt is produkálni a Paretónál. Viszont a Pareto eloszlású károk esete igen kedvező képet mutat még a mindenképpen elfogadható nagyságú M paraméterek mellett is. Tehát ennél „economic profit" szintjén mindenképpen megéri viszontbiztosítást kötni. Érdekes lenne megvizsgálni még, hogy ez hogyan hat a számviteli profitra, illetve más és bonyolultabb eloszlásokat feltételezve, és gyakorlatiasabb (például cash-flow) modellek esetén is ezt tapasztaljuk-e; sajnos azonban ezek már nem fértek be dolgozatom keretei közé.

A dolgozatban használt eloszlások

3.3. Definíció (**Normális eloszlás**)**.** Egy X folytonos valószínűségi változó normális eloszlást követ m és σ paraméterekkel, ha sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Jelölése:

$$X \sim N(m, \sigma^2).$$

Ekkor az X valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete a következő:

$$\begin{aligned} E(X) &= m, \\ D^2(X) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

3.4. Definíció (**Exponenciális eloszlás**)**.** Egy X folytonos valószínűségi változó exponenciális eloszlású a λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye és (ezzel együtt) eloszlásfüggvénye a következő alakúak:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

Jelölése:

$$X \sim Exp(\lambda).$$

Ekkor az X valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete a következő:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\lambda}, \\ D^2(X) &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

3.5. Definíció (**Pareto eloszlás**)**.** Egy X folytonos valószínűségi változó Pareto eloszlást követ az x_m és α paraméterekkel, ha sűrűségfüggvénye és (ezzel együtt) eloszlásfüggvénye a következő alakúak:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \frac{x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & \text{ha} \quad x \geq x_m, \\ 0, & \text{ha} \quad x < x_m \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha, & \text{ha} \quad x \geq x_m, \\ 0, & \text{ha} \quad x < x_m \end{cases}$$

Jelölése:

$$X \sim Pareto(x_m, \alpha).$$

Ekkor az X valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete a következő:

$$E(X) = \begin{cases} \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1}, & \text{ha} \quad \alpha > 1, \\ \infty, & \text{ha} \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$D^2(X) = \begin{cases} \left(\frac{x_m}{\alpha - 1}\right)^2 \frac{\alpha}{\alpha - 2}, & \text{ha} \quad \alpha > 2, \\ \infty, & \text{ha} \quad \alpha \in (1, 2] \end{cases}$$

Irodalomjegyzék

[1] Kerényi István: *Viszontbiztosítás*, Aktuárius Jegyzetek 5. – BCE, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék, 2011

[2] Prokaj Vilmos előadásainak jegyzetei 2013/2014 I. félév, Általános biztosítás II. tantárgy – ELTE, Valószínűségszámítás és Statisztika Tanszék

[3] Bognár Katalin: *A viszontbiztosítás matematikai módszerei*, Állami Biztosító, 1987

[4] Huczka Daisy: *A viszontbiztosítás, mint a kockázat áthárításának eszköze*, BKE, Biztosítási Oktató és Kutató Csoport, 1991

[5] Hanák Gábor előadásainak anyaga 2013/2014 II. félév, Eredményelemzés és szolvencia tantárgy – BCE, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

[6] EIOPA/CEIOPS: Szolvencia. II segédanyagok
Letölthetők az internetről: `https://eiopa.europa.eu/`

[7] `http://www.wikipedia.org/`

Az 1.2.1 ábrához és a kalkulációhoz (és az alapján készített táblázatokhoz) a Microsoft Office 2010 Excel-jét használtam.
Az 1.1 és a 2.1 ábrákat a Microsoft Office Visio 2007-es verziójával készítettem.