FÜGGŐSÉGEK HATÁSA A NEM-ÉLET TARTALÉKOLÁSRA

SZAKDOLGOZAT

2014. június 2.

Írta: Hegedűs Endre
Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc
Aktuárius szakirány

Témavezető: Arató Miklós
egyetemi docens
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudomyányi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Arató Miklósnak, aki a konzultációk során kitartóan segítette munkámat, szakértelmével és hasznos tanácsaival.

Hálával tartozom kollégáimnak, akik rugalmas hozzáállása sokat segített abban, hogy az egyetemi tanulmányaim összeegyeztethetővé váljanak a munkahelyemmel.

Legfőképp pedig köszönettel tartozom menyasszonyomnak, Basa Adriennek, akinek a támogatása, türelme és szeretete nélkül az egyetemi tanulmányaimban idáig nem juthattam volna el és ez a dolgozat sem jöhetett volna létre.

ABSZTRAKT

A Szolvencia II szabályozás bevezetésének oka, hogy a múltban nemcsak a biztosítási felügyeletek, hanem maguk a biztosító társaságok is úgy gondolták, hogy alulbecsülik a kockázati kitettségüket. A szabályozásban általában a várható érték elv szerinti kártartalékolást követelték meg, emiatt a biztosító társaságok nem fektettek nagy hangsúly a káresemények közötti összefüggések vizsgálatára. A biztonságos tartalékolást úgy érték el, hogy a paramétereket óvatosan becsülték meg. A Szolvencia II szabályozás már foglalkozik eloszlásokkal és összefüggésekkel. Szakdolgozatomban az egydimenziós és többdimenziós log-normális eloszlás modelljeit mutatom be a kártartalékolásban, összefüggéseket feltételezve az adatok struktúráiban. Majd a bemutatott módszereket számítási példán hasonlítom össze, azt a konklúziót keresve, hogy melyik módszer teljesíti, vagy akár múlja felül a Szolvencia II elvárásait.

TARTALOM

1. BEVEZETÉS

Bár a Szolvencia II még nem lépett életbe az Európai Unióban, és a szakdolgozatom írásakor a legfrissebb információim alapján ez 2015-ig nem is várható, Svájcban 2006-tól törvényi erejű lett egy új szabályozás. Az új szabályozás két, számomra fontos célja, hogy az Európai Unió területén működő biztosítókat kockázatkezelés szempontjából közös nevezőre hozza, illetve, hogy növelje a minimális szavatoló tőke szintet a value at risk 99,5%-os megbízhatósági szintjére (máshol az expected shortfall 99%-os megbízhatósági szintjére). A Szolvencia I nem írt elő meghatározott megbízhatósági szintet, de visszamérve sokak szerint 95%-os éves szinten működött. Ami azt jelenti, hogy átlagosan 20 évente történik egy olyan esemény, ami egy biztosító csődjét jelentheti. Ezzel az új szabályozással, egy sokkal biztonságosabbnak hangzó 200 évre nőhet ez a várható időtartam.

(Bánhidi, 2011) cikke jól összefoglalja a Svájcban használatos szolvencia tesztet, melynek sok kapcsolódási pontja van a Szolvencia II-vel. A kockázatviselésre rendelkezésre álló tőke (Risk-Bearing Capital) a következőképpen kerül meghatározásra: az eszközök piaci értéke és a tartalékok diszkontált best estimate értéke közötti különbség. A biztosítási kockázat a standard modell feltevései szerint két, egymástól függetlenül kezelendő részre bontható, nevezetesen a múltbeli károk tartalékainak lebonyolítási eredményéből és a vizsgált év káralakulásából fakadó kockázatokra.

A bonyolítási eredményt minden vizsgált modell esetén részletesen tárgyalom. További fontos feltételezés, hogy a múltbeli károk kifutása során a várható lebonyolítási eredmény 0, vagyis sem lebonyolítási profitot, sem lebonyolítási veszteséget nem eredményez a várható lebonyolítási eredmény. Ezt az eredményt a 4. fejezetben mutatom be.

A standard modell előírásai szerint a nem-életbiztosítási termékek 13 termékcsoportra vannak osztva. A károk eloszlásának meghatározása alapvetően termékcsoportonként történik, az egyenként kiszámított átlag és variancia értékek a múltbéli károk esetén összeadódnak és csak a normál károk összegzésekor kerül korreláció alkalmazásra. Ezt az 5. fejezetben külön is megvizsgálom, feltételezve, hogy mégis létezik összefüggés a termékcsoportok között a múltbéli károk esetén is.

(Merz, Wuthrich, & Hashorva, Dependence Modeling in Multivariate Claims Run-Off Triangles, 2011) tanulmányában a fejlődési hányadok többdimenziós log-normális eloszlásának feltételezése mellett, a termékcsoportok és a számviteli évek közötti összefüggéseket vizsgálták. A termékcsoportok közötti összefüggés arra a gondolkodásra utal, hogy a különböző termékcsoportokba eső káresemények ugyanazon egyén viselkedését tükrözik. Például, ha valaki a hanyag viselkedése, vagy tájékozatlansága miatt nem jelenti be időben, a Kötelező gépjármű felelősségbiztosítás kárát, akkor feltehetjük, hogy a Casco kötvényén bekövetkezett kárát sem kezeli majd másképp. Gyakori, hogy az egyének különböző kockázatú kötvényeiket ugyanannál a biztosítónál kötik meg, hiszen a biztosítók kedvezményeket adnak ebben az esetben, sőt keresztértékesítenek is a saját ügyfeleiken. Ezen felül gondolhatunk még összefüggésre a számviteli évek között is, aminek az okai a gazdasági változások, infláció vagy akár a biztosító tartalékolási politikája is lehet. A gazdasági környezet megváltozása a kárrendezéskor megállapított kárösszeget befolyásolja, például, ha drágulnak a gépjármű alkatrészei, akkor a becsült kárösszeg is megnő. Abban az esetben, ha a biztosító biztonságosabb tartalékolást választ, az adott számviteli év legtöbb kárkönyvelésére hatással van. Saját feltevésem az összefüggések vizsgálatára, az a gyakorlati tapasztalat, amikor az egyes kárévek eltérő késői kárgyakorisága és késői átlagos kárkifizetése jellemzően végigfut a kárév teljes kifutásán. Így korrelációs összefüggést feltételezek az egyes kifutási periódusok között.

A szakdolgozatomban először egy gyors áttekintéssel szolgálok a láncszemhányados módszerről (Merz & Wuthrich, Prediction Error of the Expected Claims Development Result in the Chain Ladder Method, 2007) tanulmánya alapján. Ez az a módszer, ami alapjául szolgál a későbbi számítási metódusoknak. A mai napig széles körben elterjedt a biztosítók gyakorlatában, mert annak ellenére, hogy függetlenséget feltételez a legtöbb esetben, az eredményei pontosnak nevezhetőek. A 3. fejezetben bemutatott modell a Szolvencia II szabályaihoz szükséges ismereteket tartalmazza (Merz & Wuthrich, Log-normal model for cumulative claims, 2008) tanulmánya alapján. A log-normális modell az aktuáriusok által leginkább elfogadott eloszláscsaládok egyike a káresemények és kárráfordítások modellezésére. A 4. fejezetben kiterjesztem a modellt a többdimenziós log-normális eloszlás irányába, újradefiniálva a többdimenziós környezetben a becsült kártartalékokat, a becslés hibáját és a bonyolítási eredményt, ahogy azt (Merz, Wuthrich, & Hashorva, Dependence Modeling in Multivariate Claims Run-Off Triangles, 2011) is tárgyalta. A fejezet végén kovariancia struktúrákban definiálom a feltételezett összefüggéseket az adatokban, amelyek a könyvelési évek, termékcsoportok és kifutási periódusok közötti kapcsolatokat írják le. Az 5. fejezet egy, a megértést segítő, áttekintő példa után a saját gyűjtésű adatok bemutatásával kezdődik, majd ezeken az adatokon végigszámolom a szakdolgozatban ismertetett korrelációs modellek hatásait. Összehasonlításként a számítási módszerek megbízhatóságát vizsgálom az MSEP (mean squared error of prediction – becslés hibája) és CDR (claim developement result – bonyolítási eredmény) mutatókon keresztül, ami a Szolvencia II egyik szintén szigorúbban monitorozni kívánt mutatószáma.

Szakdolgozatom célja, hogy bemutassam azoknak az alapelveknek az elméleti és gyakorlati hátterét, amelyek a Szolvencia II szabályozásának részei lesznek. Továbbá azoknak az összefüggéseknek a vizsgálata, amelyek pontosabbá, biztonságosabbá teszik a számítási modelleket, összehasonlítva a jelenleg legelterjedtebben használttal és a Szolvencia II által megkívánttal.

2. LÁNCSZEMHÁNYADOS MÓDSZER

Az IBNR tartalékolásban jól ismert (Mack, 1993) láncszemhányados módszerét egy átalakított verziójában szeretném bemutatni, amely verziót (Merz & Wuthrich, 2007) mutatta be a svájci szolvencia teszt alapelveinek motivációjára.

2.1 JELÖLÉSEK

Tegyük fel, hogy $C_{i,j}$ jelöli a kumulatív kárráfordításokat az $i \in \{0,1,\cdots,I\}$ kárévből és $j \in \{0,1,\cdots,J\}$ kifutásból, ahol J jelöli azt a teljes kifutást, ami után már nem jelentenek be több kárt az adott kárévből. Szakdolgozatomban kárévekről, számviteli évekről, és kifutási évekről lesz szó, mint az időperiódus egy egységei. A felügyeleti szabályozásban azonban ennél gyakoribb tartalékszámítási kötelezettsége van a biztosító társaságoknak (csak a tartalékok megképzését értem ez alatt, nem a tőkemegfelelés vizsgálatát). Megjegyzem, hogy az 5. fejezet gyakorlati példájában ettől eltérő időperiódusokkal számolok.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $I = J$, azaz tegyük fel, hogy a megfigyeléseinkben már eltelt annyi év, hogy legalább annyi káréve (sora) legyen a háromszögnek, mint a vizsgált kockázati termék teljes kifutása (oszlopa).

Tegyük fel, hogy a $t = I$ számviteli évben vagyunk, ekkor a tényleges megfigyelések halmazát jelölje a következő:

$$D_I = \{C_{i,j}; i + j \leq I\}.$$

Célunk, hogy becsüljük az egyes kárévek teljes kifutásának összes kárráfordítását, abból az információból, amit $t = I$ időpontban ismerünk, azaz kiszámoljuk az alábbi feltételes várható értéket:

$$E\left[C_{i,J} \middle| D_I\right].$$

Amikor egy számviteli évvel később újraszámoljuk a tartalékszükségletet a kárévekre, akkor a $t + 1 = I + 1$ időpontban és $D_{I+1} = \{C_{i,j}; i + j \leq I + 1 \text{ és } i \leq I\}$ információk birtokában az $E\left[C_{i,J} \middle| D_{I+1}\right]$ várható értéket fogjuk számítani. A D_I σ-algebra pontos definícióját, és a benne értelmezett valószínűségi változók martingál tulajdonságát a 3.5 bekezdésben látom be.

2.2 MODELL ÉS FELTEVÉSEK

2.2.1 MODELL FELTEVÉSEK Legyenek az egyes kárévek kifutásban egymást követő elemeinek a hányadosai a fejlődési hányadok, a következők

$$\eta_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$$

, ξ_j várható értékkel és σ_j szórással.

A továbbiakban éljünk azokkal a modell feltevésekkel, amelyekre (Mack, 1993) építette az eloszlás nélkül vizsgált kártartalékolási eljárását:

(1) A kárévek függetlenek egymástól, azaz $\{\mathrm{C}_{\mathrm{i},1}, \cdots, \mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{J}}\} \perp \{\mathrm{C}_{\mathrm{j},1}, \cdots, \mathrm{C}_{\mathrm{j},\mathrm{J}}\}$, ahol $i \neq j$

(2) $E\left[\mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{j}} \middle| \mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{k}}: 1 \leq k \leq j-1\right] = \xi_j \mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{j}-1}$

(3) $D^2\left[\mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{j}} \middle| \mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{k}}: 1 \leq k \leq j-1\right] = \sigma_j^2 \mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{j}-1}$

(4) $\mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{j}} > 0$ 1 valószínűséggel

2.2.2 ÁLLÍTÁS A 2.2.1 feltevései alapján a ξ_j várható értékre torzítatlan becslést ad a következő

$$\hat{\xi}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j-1}}$$

BIZONYÍTÁS A várható érték becslésének torzítatlanságához a 2.2.1 modell feltevések (2) pontját használhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
E\left[\hat{\xi}_j\right] &= E\left[E\left[\frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j-1}} \middle| \mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{k}}: 1 \leq k \leq j-1\right]\right] \\
&= E\left[\frac{1}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j-1}} E\left[\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \middle| \mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{k}}: 1 \leq k \leq j-1\right]\right] \\
&= E\left[\frac{1}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j-1}} \sum_{i=0}^{I-j-1} E\left[C_{i,j} \middle| \mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{k}}: 1 \leq k \leq j-1\right]\right] \\
&= E\left[\frac{1}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j-1}} \sum_{i=0}^{I-j-1} \xi_j \mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{j}-1}\right] = \xi_j E\left[\frac{1}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j-1}} \sum_{i=0}^{I-j-1} \mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{j}-1}\right] = \xi_j.
\end{aligned}$$

Ebben azt használtuk fel, hogy $\mathrm{C_{i,j-1}}$ mérhető a $\mathrm{C_{i,k}}: 1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{j} - 1$ feltételre nézve, a 2.2.1 modell feltételezések (1) pontja szerint a kárévek függetlenek egymástól, illetve a (4) pont a kárráfordítások szerint 1 valószínűséggel nagyobbak nullánál. ■

A szórásnégyzet becsléséhez vegyük a korrigált tapasztalati szórásnégyzetet. Ezt a későbbiekben fogjuk használni a 2.3 bekezdésben.

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I - j + 1} \sum_{i=0}^{I-j+1} \left[\eta_{i,j} - \hat{\xi}_j\right]^2$$

2.2.3 ÁLLÍTÁS (LÁNCLÉTRA MÓDSZER) A 2.2.1 modell feltevések alapján a 2.2.2 pontban becsült várható értékek korrelálatlanok. Ekkor a következőképpen becsülhetjük a kifutási háromszög még nem ismert elemeit

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,I-i}\hat{\xi}_{I-i} \cdots \hat{\xi}_{j-2}\hat{\xi}_{j-1}$$

A fenti becslés torzítatlan becslése az $E\left[C_{i,J}\middle|D_I\right]$ feltételes várható értéknek.

A bizonyításhoz lásd (Mack, 1993) 2. Állítását. A korrelálatlanság feltételezése meglepő lehet, hiszen $\hat{\xi}_k$ és $\hat{\xi}_{k-1}$ ugyan azokból az adatokból számolódik.

2.3 BONYOLÍTÁSI EREDMÉNY

A 2.2 bekezdésben ismertetett modell és feltevések alapján megbecsülhetjük a t számviteli évben rendelkezésre álló információk alapján az egyes kárévek teljes kifutására jutó teljes kárráfordítást. A t számviteli évben a következő elméleti tartalékot kellene megképezni az egyes kárévekre, ha ismernénk a kárráfordításokat:

$$R_i^t = C_{i,J} - C_{i,t-i}.$$

Ez nyilvánvalóan nem áll rendelkezésünkre, így a 2.2.3 módszer torzítatlan becslését felhasználva a következő gyakorlati tartalékot fogjuk megképezni az egyes kárévekre:

$$\hat{R}_i^t = \hat{C}_{i,J} - C_{i,t-i}.$$

Amikor a $t + 1$-dik számviteli évben újraszámoljuk ugyan arra az i kárévre szükséges tartalékot, eltérő eredményt kapunk, hiszen a t számviteli évben a D_t információból számítottunk, míg a $t + 1$ számviteli évben a D_{t+1} információ halmaz áll rendelkezésünkre. E kettő közti eltérést nevezzük bonyolítási eredménynek, ami a biztosítói eredmény kimutatásban megjelenik. Emiatt a Szolvencia II kifejezetten nagy hangsúlyt fektet a korábbi évek $i < I + 1$ tartalékváltozásainak vizsgálatára. A $t + 1 = I + 1$ kárév bonyolítási eredménye a teljes megképzett tartalék lenne, hiszen ennek a kárévnek a nyitó tartaléka 0, ezt természetesen nem hívjuk bonyolítási eredménynek.

2.3.1 DEFINÍCIÓ Az elméleti bonyolítási eredmény az $i \in \{0,1,\cdots,I\}$ kárévre a $(t,t+1]$ számviteli évekre

$$CDR_i(t+1) = E\left[R_i^t \middle| D_t\right] - \left(X_{i,t-i+1} + E\left[R_i^{t+1} \middle| D_t\right]\right),$$

ahol $X_{i,I-i+1} = C_{i,I-i+1} - C_{i,I-i}$ a kárráfordítások összege a $[I-i, I-i+1]$ időszakban, vagyis az átló megváltozása.

2.3.2 KÖVETKEZMÉNY (BEST ESTIMATE) A $CDR_i(t+1)$ bonyolítási eredmény egy D_{t+1} mérhető valószínűségi változó 0 várható értékkel. Továbbá

$$CDR_i(t+1) = E\left[C_{i,J} \middle| D_t\right] - E\left[C_{i,J} \middle| D_{t+1}\right] = \left(E\left[C_{i,I-i+1} \middle| C_{i,I-i}\right] - C_{i,I-i+1}\right) \prod_{j=I-i+1}^{J-1} \xi_j$$

BIZONYÍTÁS A bizonyítást a 2.3.2 Következmény két állításáról lásd a 3.6.1 Lemma martingál tulajdonságának bizonyításánál.

Mivel az η_j fejlődési hányadok ismeretlenek, ezért a várható értékének torzítatlan becslésével helyettesítjük ($\hat{\xi}_j$). Ekkor felírhatjuk a tényleges bonyolítási eredményt:

$$\widehat{CDR}_i(t+1) = \hat{R}_i^t - \left(X_{i,t-i+1} + \hat{R}_i^{t+1}\right) = \hat{C}_{i,J}^t - \hat{C}_{i,J}^{t+1}$$

A svájci szolvencia teszt és várhatóan a Szolvencia II szabályrendszere szerint a bonyolítási eredmény volatilitását két tételből kell kimutatni. Az alkotóelemek a folyamatkockázat (process risk) és a paraméter kockázat (estimation error). Az előbbi hivatott kifejezni az egyes károk esetében meghatározott tartalék pontos kiszámítása körüli kockázatot, bizonytalanságot. Ezzel szemben a paraméter kockázat az egész termékcsoportra vonatkozóan fejezi ki a hasonló kockázatot, vagyis azt, hogy termékcsoport-szinten történt alul- vagy felültartalékolás. Ez utóbbi kockázat tartalmazza a paraméterbecslések hibáját is. A standard modell feltételezései szerint ez a kétfajta kockázat független egymástól, így a közös variancia egyszerűen a két variancia összegeként számítandó.

2.3.3 DEFINÍCIÓ A t számviteli évben becsült tartalékszint bonyolítási eredményének várható négyzetes hibája a D_t információk alapján

$$MSEP\left(E\left[\widehat{CDR}_i(t+1) \middle| D_t\right]\right) = E\left[\left(CDR_i(t+1) - E\left[\widehat{CDR}_i(t+1) \middle| D_t\right]\right)^2 \middle| D_t\right].$$

A 2.3.2 Következményt felhasználva a 2.3.3 Definíció a következőképpen írható fel

$$MSEP\left(E\left[\widehat{CDR}_i(t+1)\middle|D_t\right]\right) = \underbrace{Var(CDR_i(t+1)|D_t)}_{folyamat\ kockázat} + \underbrace{\left(E\left[\widehat{CDR}_i(t+1)\middle|D_t\right]\right)^2}_{paraméter\ kockázat}$$

Látható, hogy a paraméter kockázat a becsült tartalékok változásán alapul, azaz a számítási modell bizonytalanságait tükrözi, míg a folyamat kockázat a ténylegesen bekövetkezett károkon történő tartalékképzések, feloldások és kárkifizetések változásait adja vissza.

A következő két lemma (Merz & Wuthrich, 2007) 4.2 és 4.4 eredményei, amelyek explicit számolható alakra hozzák a folyamat és paraméter kockázat mutatókat.

2.3.4 LEMMA (FOLYAMAT KOCKÁZAT) A folyamat kockázat az $i \in \{0,1,\cdots,I\}$ kárévre a $(t,t+1]$ számviteli évekre

$$Var(CDR_i(t+1)|D_t) = E\left[C_{i,J}\middle|D_t\right]^2 \frac{\sigma_{I-i}^2/\xi_{I-i}^2}{C_{i,I-i}}.$$

2.3.5 LEMMA (PARAMÉTER KOCKÁZAT) A paraméter kockázat becsült várható értéke az $i \in \{0,1,\cdots,I\}$ kárévre a $(t,t+1]$ számviteli évekre

$$E\left[\left(E\left[\widehat{CDR}_i(t+1)\middle|D_t\right]\right)^2\middle|D_t\right] = \left(C_{i,J}\right)^2\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/\hat{\xi}_{I-i}^2}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,I-\mathrm{i}}} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{I-j,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,I-\mathrm{i}}}\right)^2 \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/\hat{\xi}_{I-i}^2}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}\right)$$

2.4 KÁRÉVEK AGGREGÁCIÓJA

A Szolvencia II szabályozásai szerint az egyes kárévekre kiszámított bonyolítási eredmény aggregációjakor figyelemmel kell lenni a számítási módszertanban lehetséges halmozott hatásokra, ugyanis a $C_{i,J}$ és $C_{k,J}$ kárráfordításokat ugyan azokból a tényleges kárráfordításokból számoltuk ki. A könnyebb megértés szempontjából lássuk először két különböző kárév becsült várható bonyolítási eredményének hibáját

$$\begin{aligned}
&MSEP\left(E\left[\widehat{CDR}_i(t+1)+\widehat{CDR}_k(t+1)\middle|D_t\right]\right)\\
&\quad = Var(CDR_i(t+1)|D_t) + Var(CDR_k(t+1)|D_t)\\
&\quad + \left(E\left[\widehat{CDR}_i(t+1)\middle|D_t\right] + E\left[\widehat{CDR}_k(t+1)\middle|D_t\right]\right)^2\\
&\quad = MSEP\left(E\left[\widehat{CDR}_i(t+1)\middle|D_t\right]\right) + MSEP\left(E\left[\widehat{CDR}_k(t+1)\middle|D_t\right]\right)\\
&\quad + 2E\left[\widehat{CDR}_i(t+1)\middle|D_t\right]E\left[\widehat{CDR}_k(t+1)\middle|D_t\right]
\end{aligned}$$

Vagyis két különböző kárév becsült várható bonyolítási eredményének hibája a hibák összege plusz az egyes kárévek paraméter kockázatainak, gyökeinek a kétszeres szorzata. A 2.3.5 Lemma eredményei alapján a következőt írhatjuk fel, ami (Merz & Wuthrich, 2007) 4.5 eredménye, a szakdolgozatomban bevezetett jelölésekkel.

2.3.6 ÁLLÍTÁS A becsült tartalékok várható bonyolítási eredményének becsült hibája a D_t információk alapján az aggregált kárévekre

$$\widehat{MSEP}\left(E\left[\sum_{i=1}^{I}\widehat{CDR}_i(t+1)\middle|D_t\right]\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{I}\widehat{MSEP}\left(E\left[\widehat{CDR}_i(t+1)\middle|D_t\right]\right)$$

$$+2\sum_{i<k}\hat{C}_{i,J}\hat{C}_{k,J}\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2/\hat{\xi}_{t-i}^2}{\sum_{i=0}^{I-j-1}C_{i,t-\mathrm{i}}}+\sum_{j=t-i+1}^{J-1}\left(\frac{C_{t-j,j}}{\sum_{i=0}^{t-j}C_{i,t-\mathrm{i}}}\right)^2\frac{\hat{\sigma}_{t-i}^2/\hat{\xi}_{t-i}^2}{\sum_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j}}\right)$$

Ezzel kiszűrhetjük a halmozott hatást, és számíthatjuk ki a bonyolítási eredmény várható négyzetes hibáját az aggregált kárévekre.

3. Log-normális modell

Ebben a fejezetben ismertetjük azt a log-normális alapmodellt, amit (Merz & Wuthrich, 2008) mutatott be. A svájci szolvencia teszt számítási módszertanában megkövetelt kritériumaiban a becsléshez használt fejlődési hányadokban a tényleges adatokból becsült várható értéken kívül a szórást is fel kell használni. Ebben a fejezetben bemutatom azt a modellt, ami teljesíti a svájci szolvencia teszt minimális számítási kritériumait, és várhatóan a Szolvencia II alapelveit is követi majd.

A független modellt csak egy termék esetén ismertetem, azaz legyen $n = 1$ és $C_{i,j,n} = C_{i,j}$. Tegyük fel, hogy a kumulatív kárráfordítások fejlődési hányadai független, azonos log-normális eloszlásúak.

3.1 Jelölések és feltevések

Ebben a fejezetben szeretném továbbra is használni az $\eta_{i,j}$ jelölést, azonban mostantól a fejlődési hányadok logaritmusait jelölöm vele. Az egyes fejlődési hányadok $F_{i,j} = C_{i,j}/C_{i,j-1}$ független, log-normális eloszlásúak ξ_j várható értékkel és σ_j^2 szórásnégyzettel, azaz

$$\eta_{i,j} = \log(F_{i,j}) \sim \mathcal{N}(\xi_j, \sigma_j^2),$$

minden $i \in \{0,1,\cdots,I\}$ és $j \in \{0,1,\cdots,J\}$ esetén. Az így definiált fejlődési hányadok várható értéke:

$$E[F_{i,j}] = exp\left\{\xi_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2\right\},$$

szórása pedig

$$Var[F_{i,j}] = exp\{2\xi_j + \sigma_j^2\}(exp\{\sigma_j^2\} - 1).$$

3.2 Modell

Az így definiált fejlődési hányadokkal a következő tulajdonságok teljesülnek:

(1) A kárévek függetlenek egymástól, azaz $\{\mathrm{C}_{\mathrm{i},1},\cdots,\mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{J}}\} \perp \{\mathrm{C}_{\mathrm{j},1},\cdots,\mathrm{C}_{\mathrm{j},\mathrm{J}}\}$, ahol $i \neq j$

(2) $E[C_{i,j}|D_I] = C_{i,j-1}E[F_{i,j}|D_I] = C_{i,j-1}\ exp\left\{\xi_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2\right\}$,

(3) $Var[C_{i,j}|D_I] = C_{i,j-1}^2 Var[F_{i,j}|D_I] = C_{i,j-1}^2\ exp\{2\xi_j + \sigma_j^2\}(exp\{\sigma_j^2\} - 1)$.

(4) $\mathrm{C}_{\mathrm{i},\mathrm{j}} > 0$ 1 valószínűséggel

Látható, hogy a 2. fejezetben tárgyalt lánclétra módszer feltevései közül csak a feltételes szórásnégyzetre vonatkozó nem teljesül.

Ebben a D_I feltételt egyelőre hagyjuk definiálatlanul, nevezzük káralakulásnak, ami az I kárévig bekövetkezett összes káresemény halmaza. Később a 3.5 bekezdésben látjuk el a σ-algebra tulajdonságával és benne értelmezett valószínűségi változókat a martinál tulajdonságaival. Vegyük észre, hogy a független log-normális modell azt feltételezi, hogy a j-edik időszaki fejlődési hányad független az addig bekövetkezett károktól. Az összefüggő modellekben ezt a feltevést fogjuk részletesebben vizsgálni.

3.3 PARAMÉTERBECSLÉS

Fontosnak tartom, a (Merz & Wuthrich, 2008) tanulmányt kiegészíteni a paraméterbecslések részletesebb leírásával, hiszen a gyakorlatban is erre támaszkodhatunk. A log-normális modell paraméterbecslését maximum likelihood módszerrel végezzük. A likelihood függvény a következő lesz:

$$L(\eta_{i,1}, \cdots \eta_{i,J}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}}\right)^J exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}\sum_{i=0}^{I-j}(\eta_{i,j} - \xi_j)^2\right\},$$

a log-likelihood függvény pedig

$$logL = -\frac{J-i}{2}log(2\pi\sigma_j^2) - \frac{1}{2\sigma_j^2}\sum_{i=0}^{I-j}(\eta_{i,j} - \xi_j)^2,$$

Külön maximalizálva ξ_j és σ_j^2 szerint a következőt kapjuk:

$$\widehat{\xi_J} = \frac{1}{I-j+1}\sum_{i=0}^{I-j} log\left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}\right)$$

, ami gyakorlatilag az egyes évek, már ismert fejlődési hányadainak átlaga, ha σ_j^2 ismert;

$$\widehat{\sigma_J^2} = \frac{1}{I-j+1}\sum_{i=0}^{I-j}\left[log\left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}\right) - \widehat{\xi_J}\right]^2$$

, ami pedig a becsült átlagtól vett négyzetes átlagos eltérés, ha ξ_j ismert. Könnyen látható, hogy a $\widehat{\xi_J}$-k normális eloszlást, a szórásnégyzet becslései pedig χ^2 eloszlást követnek $I-j$ szabadságfokkal. Azaz

$$\widehat{\xi_J} \sim \mathcal{N}\left(\xi_j, \frac{\sigma_j^2}{I-j+1}\right) \quad \text{, és} \quad \frac{I-j}{\sigma_j^2}\widehat{\sigma_J^2} \sim \chi_{I-j}^2$$

A becsült paraméterekkel a 3.2 Modell értelmében a kumulatív kárbecslés a következő lesz:

$$\widehat{C_{i,J}} = \hat{E}\left[C_{i,J}|D_I\right] = C_{i,I-i} + exp\left\{\sum_{j=I-i+1}^{J} \hat{\xi}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=I-i+1}^{J} \sigma_j^2\left(1-\frac{1}{I-j+1}\right)\right\}.$$

3.4 BECSLÉS HIBÁJA

A becslések hibáját úgy kaphatjuk meg, hogy a megbecsült időszakra (év/negyedév/hónap) várt káralakulást $\widehat{C_{i,J}}$ hasonlítjuk össze a később bekövetkezett tény adatokkal $C_{i,J}$. Ebből a mutatóból a felépített modell számára rengeteg addicionális információra tehetünk szert. Ha rendszeresen nagy eltérést tapasztalunk, és ez üzleti oldalról nem magyarázható, azaz nem a tudatos tartalékolási politika eredménye, akkor probléma lehet a modell beállításaival, például az alkalmazott IBNR szorzókkal. Azonban, ha egyszeri nagy kilengésekről van szó, akkor érdemes részletes elemzést készíteni az adott időszaki kárbejelentésekről, és nagykárok vagy nagy bonyolítások után kutatni.

A log-normális modell szempontjából ahhoz, hogy a kapott becslés megbízható legyen, először azt kell belátnunk, hogy a becsült modell torzítatlan. Ezt (Merz & Wuthrich, 2008) 5.6 pontjában leírtak szerint teszem arra az esetre, amikor σ_j^2 ismert.

3.4.1 LEMMA A 3.1 bekezdés jelöléseivel és a 3.2 bekezdés paraméterbecsléseivel a következők igazak:

a) Adott $C_{i,I-i}$ mellett a $\widehat{C_{i,J}}$ becslés torzítatlan a $E\left[C_{i,J}|D_I\right] = E\left[C_{i,J}\middle|C_{i,I-i}\right]$-re
b) $\widehat{C_{i,J}}$ torzítatlan becslése $E\left[C_{i,j}\right]$-nek
c) a kárbecslés hibája a következő

$$msep_{C_{i,J}|D_I}\left(\widehat{C_{i,J}}\right) = {C_{i,I-i}}^2 Var\left(exp\left\{\sum_{j=I-i+1}^{J}\eta_{i,j}\right\}\right) + \left(E\left[C_{i,J}|D_I\right]-\widehat{C_{i,J}}\right)^2$$

BIZONYÍTÁS

a) A bizonyításhoz definiáljuk a kumulatív kárráfordításokat egy logaritmus skálán:

$$Z_{i,j} = log\left(C_{i,j}\right)$$

Vegyük észre, hogy ekkor

$$Z_{i,J} = Z_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^{J} log\left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}\right) = Z_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^{J}\eta_{i,j}$$

Ekkor a 3.2 modell feltevései szerint

$$E\left[Z_{i,J}\middle|D_I\right] = Z_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^{J}\xi_j$$

amit a következőképp becsülhetünk

$$\hat{Z}_{i,J} = \hat{E}\left[Z_{i,J} \middle| D_I\right] = Z_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^{J} \widehat{\xi_J}$$

A log-normális modell definíciói, a 3.2 modell feltevések és az imént definiált kumulatív kárráfordítások tulajdonságai alapján

$$E\left[\widehat{C_{i,J}} \middle| C_{i,I-i}\right] = E\left[exp\{\hat{Z}_{i,J}\} \middle| C_{i,I-i}\right] exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=I-i+1}^{J}\left(\sigma_j^2 - \frac{\sigma_j^2}{I-j+1}\right)\right\} = E\left[C_{i,J} \middle| C_{i,I-i}\right]$$
$$= E\left[C_{i,J} | D_I\right]$$

b) A második állítás egyértelműen következik az elsőből.

c) A becslés hibáját a D_I káralakuláson alapuló becslés és tény négyzetes eltérésének várható értékéből kaphatjuk meg, felhasználva, hogy $\widehat{C_{i,J}}$ és $C_{i,J}$ korrelálatlanok:

$$msep_{C_{i,J}|D_I}\left(\widehat{C_{i,J}}\right) = E\left[\left(\widehat{C_{i,J}} - C_{i,J}\right)^2 \middle| D_I\right] = Var\left(C_{i,J} \middle| D_I\right) + Var\left(\widehat{C_{i,J}} \middle| D_I\right)$$
$$= {C_{i,I-i}}^2 Var\left(exp\left\{\sum_{j=I-i+1}^{J} \eta_{i,j}\right\}\right)$$
$$+ {C_{i,I-i}}^2 exp\left\{\sum_{j=I-i+1}^{J} \sigma_j^2\left(1 - \frac{1}{I-j+1}\right)\right\} \times Var\left(exp\left\{\sum_{j=I-i+1}^{J} \widehat{\xi_J}\right\}\right).$$

Ebből következik, hogy

$$E\left[\left(\widehat{C_{i,J}} - C_{i,J}\right)^2 \middle| D_I\right]$$
$$= {C_{i,I-i}}^2\, exp\left\{\sum_{j=I-i+1}^{J}\left(2\xi_j + \sigma_j^2\right)\right\}\left[exp\left\{\sum_{j=I-i+1}^{J} \sigma_j^2\right\}\right.$$
$$\left. + exp\left\{\sum_{j=I-i+1}^{J}\left(\frac{\sigma_j^2}{I-j+1}\right) - 2\right\}\right]$$

A becslés hibájára tehát egy explicit, jól számolható alakot kaptunk. A későbbiekben ez egy fontos mutatószám lesz a különböző tartalékolási eljárások összehasonlítására.

3.5 MARTINGÁL TULAJDONSÁG

Ebben a bekezdésben kiegészítem a (Merz & Wuthrich, 2008) tanulmányt a martingál tulajdonság tárgyalásával. Ennek a bizonyítása fontos a 3.6 bekezdésben tárgyalt bonyolítási eredmény tárgyalásához. Legyen t az a számviteli év, amikor a tartalékképzést végezzük.

3.5.1 DEFINÍCIÓ Ha a $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_I$ folyamatosan fejlődő egymásba ágyazott káralakulásra a következők igazak:

1. A D_t halmaz nem üres, azaz $D_t \neq \emptyset$,
2. D_t zárt a komplementer képzésre, azaz $C_{i,j}^t \in D_t \Rightarrow \overline{C_{i,j}^t} \in D_t$,
3. D_t zárt a megszámlálható unióképzésre, azaz $C_{i,j}^t \in D_t \Rightarrow \bigcup_{i=1}^I C_{i,j}^t \in D_t$.

Akkor a D_t halmazt σ-algebrának, a $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_I$ folyamatosan fejlődő egymásba ágyazott káralakulást pedig σ-algebra rendszernek nevezzük. Megjegyezzük, hogy az $\bigcup_{i=1}^I C_{i,j}^t = \sum_{i=1}^I C_{i,j}^t$ a teljes I-dik évig megismert kifutási háromszög ráfordítása a j-edik késleltetésig.

3.5.2 DEFINÍCIÓ Legyen adva a σ-algebrák $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_I$ növekvő sorozata, továbbá legyen D_t mérhető $C_{i,j}^t$ valószínűségi változók sorozata. Ekkor azt mondjuk, hogy a $C_{i,j}^t$ valószínűségi változók sorozata martingált alkot a D_t σ-algebra rendszerre nézve, ha a következők teljesülnek:

1. $E\left[\left|C_{i,j}^t\right|\right] < \infty$,
2. $E\left[C_{i,j}^{t+1} \middle| D_t\right] = C_{i,j}^t$ 1 valószínűséggel minden i, j-re.

Az egyes időpillanatokban a kifutási háromszögben más és más értékeket láthatunk, ugyanis a kárrendezés folyamata elhúzódhat. Főleg felelősségbiztosítások esetén, azon belül is személyi sérüléses károknál, a kárrendezés folyamata több évig is elhúzódhat, így az általában negyedévente megképzett IBNR tartalék ezt az időszakot nem képes egyben áthidalni. A második feltétel akkor teljesül, ha a $\mathrm{t}+1$-edik időpillanatra, a t-edik időszakig megismert kárinformációkon alapuló várható kárértékünk megegyezik a t-edik pillanatban tapasztalttal. Ez pedig igaz a fent ismertetett modellre, hiszen az adott időpillanatban látott káralakulásból jelezzük előre fejlődési hányadokon keresztül az elkövetkező évek káreseményeit.

Vezessük le ebből a fejlődési hányadok és az IBNR becslés martingál tulajdonságát. A továbbiakban jelöljük $\widetilde{C_{i,J}^t}$-al azon kárbecsléseket, ahol a paraméterek ismertek.

3.5.3 ÁLLÍTÁS A következők martingál tulajdonsággal rendelkeznek:

1. $F_{i,j}^{t}$ a fejlődési hányadok martingál tulajdonságúak
2. $\eta_{i,j}^{t}$ a fejlődési hányadok logaritmusai szupermartingál tulajdonságúak
3. $\widetilde{C_{i,J}^{t}}$ a egyes kárévek becsült teljes kárráfordításai martingál tulajdonságúak

BIZONYÍTÁS

1. $F_{i,j}^{t} = \frac{C_{i,j}^{t}}{C_{i,j-1}^{t}} = \frac{E\left[C_{i,j}^{t+1}\middle|D_t\right]}{E\left[C_{i,j-1}^{t+1}\middle|D_t\right]} = E\left[\frac{C_{i,j}^{t+1}}{C_{i,j-1}^{t+1}}\middle|D_t\right] = E\left[F_{i,j}^{t+1}\middle|D_t\right].$

   Ami teljesíti a martingálok második feltételét. Az első feltétel teljesülését normális káralakulást feltételezve igaznak tekinthetjük.
2. A fejlődési hányadok martingál tulajdonságának belátásához a Jensen-egyenlőtlenséget használjuk fel.

   $\eta_{i,j}^{t} = log\left(F_{i,j}^{t}\right) = log\left(E\left[F_{i,j}^{t+1}\middle|D_t\right]\right) > E\left[log\left(F_{i,j}^{t+1}\right)\middle|D_t\right] = E\left[\eta_{i,j}^{t+1}\middle|D_t\right].$

   Az egyenlőtlenség a logaritmus függvény konkavitása miatt áll fenn. Az egyenlőtlenség miatt a fejlődési hányadok logaritmusai szupermartingál tulajdonsággal rendelkeznek.
3. $\widetilde{C_{i,J}^{t}} = C_{i,J-1}^{t} * E\left[F_{i,J}^{t}|D_t\right] = E\left[C_{i,J-1}^{t+1}|D_t\right] * E\left[F_{i,J}^{t}|D_t\right] = E\left[C_{i,J-1}^{t+1}|D_t\right] * E\left[F_{i,J}^{t}\right] =$
   $E\left[C_{i,J-1}^{t+1}|D_t\right] * E\left[E\left[F_{i,J}^{t+1}\middle|D_t\right]\right] = E\left[C_{i,J-1}^{t+1}E\left[F_{i,J}^{t+1}\right]|D_t\right] = E\left[\widetilde{C_{i,J}^{t+1}}|D_t\right].$

   Ami teljesíti a martingál tulajdonságot.

Az egyes években megképzett IBNR tartalékot, mint valószínűségi változót, martingál tulajdonsággal ruházhattuk fel. A martingál tulajdonság a korrekt játék modellje, ahol a korábbi információk nem befolyásolják a jövőbeli kimenetelt.

3.6 BONYOLÍTÁSI EREDMÉNY

Lebonyolítási eredményről beszélünk akkor, amikor a biztosító a tartalékait teljesen, esetleg részben feloldja, és velük szemben teljesíti a tényleges kifizetéseket. Ezen kettő összeg közötti különbözet eredményt produkál, ami egy biztonságos tartalékolási politika és átlagos káralakulás mellett általában negatív előjelű, azaz nagyobb a tartalék, mint a kifizetés. Hasonló bonyolítási eredményről beszélhetünk az IBNR tartalékoknál is, azzal a különbséggel, hogy ebben az esetben nem történik tényleges kifizetés. Az egymást követő időszakokban újrabecsült tartalékszükséglet közötti különbség adja ezt az eredményt . A megtörtént, de csak később bejelentett károk esetén képződik függőkár tartalék is, ami a kifizetés teljesítésére szolgál.

A lebonyolítási eredmény a következő lesz:

$$CDR_i(t+1) = \widetilde{C_{i,J}^{t}} - \widetilde{C_{i,J}^{t+1}}$$

3.6.1 LEMMA A $(t+1)$ időszaki lebonyolítási eredmény a D_I^t időszaki káralakulásra nézve feltételes várható értéke 0, azaz

$$E[CDR_i(t+1)|D_I^t] = 0.$$

BIZONYÍTÁS Felhasználva a $\widetilde{C_{i,J}^t}$ martingál tulajdonságait:

$$E[CDR_i(t+1)|D_t] = E\left[\widetilde{C_{i,J}^t} - \widetilde{C_{i,J}^{t+1}}\middle| D_t\right] = E\left[\widetilde{C_{i,J}^t}\middle| D_t\right] - E\left[\widetilde{C_{i,J}^{t+1}}\middle| D_t\right] = \widetilde{C_{i,J}^t} - \widetilde{C_{i,J}^t} = 0.$$

3.6.2 MEGJEGYZÉS A választott log-normális modellünk a martingál tulajdonság segítségével biztosítja azt, hogy egy adott pillanatban minden rendelkezésre álló információt felhasználunk arra, hogy a modelltől elvárható legjobban becsüljük meg a teljes káralakulást, és úgymond a becslési modellben ne legyen „hézag”, amit a következő évben realizálnánk.

A gyakorlatban viszont az elméleti modell gyakran nem állja meg a helyét, ugyanis az egyik időpillanatban látott kifutási háromszög, egy másik pillanatban megváltozhat, ami az egész becslést újraszámíttatja. Ezek a változások adódhatnak abból, hogy a már megnyitott káraktákon később felvisznek újabb tartalékokat, vagy lezárnak kárügyeket és a kifizetés és tételes függőkártartalék közötti különbség mutatkozik meg a háromszögben. Vagy akár abból is, hogy regressz útján a biztosító a károkozóval téríttetí meg a kárt, és a biztosító ezt a káraktákon számolja el. Emiatt számolni kell azzal a kockázattal, hogy az egyik időpillanatban megképzett IBNR tartalék nem elegendő az adott kárév teljes kifutásának fedezésére, emiatt a lebonyolítási eredmény negatív is lehet. A Szolvencia II ezért kiemelten foglalkozik ezzel a területtel, és a lebonyolítási eredmény hibáját vizsgálja.

A továbbiakban a (Merz & Wüthrich, Modeling the Claims Development Result For Solvency Purposes, 2008) publikációjának eredményei alapján vizsgáljuk a bonyolítási eredmény D_I^t feltételre vett várható értékétől vett várható négyzetes eltérését. Ez a várható érték a 3.6.1 Lemma eredménye alapján nulla, így ezt tűntetjük fel az alábbiakban:

$$msep_{\sum_i CDR_i(t+1)|D_t}(0) = E[(\textstyle\sum_i CDR_i(t+1) - 0)^2|D_t] = Var[\textstyle\sum_i CDR_i(t+1)|D_t] =$$
$$Var\left[\textstyle\sum_i \widetilde{C_{i,J}^{t+1}}\middle| D_t\right] = \textstyle\sum_{i,l} Cov\left(\widetilde{C_{i,J}^{t+1}}, \widetilde{C_{l,J}^{t+1}}\middle| D_t\right).$$

Ez a kifejezés számszerűsíti az eltérést attól az előzetes elvárásunktól, hogy a $t+1$ időpontban becsült IBNR tartalék megegyezik a t időpontban becsülttől a D_I^t káralakulás információit felhasználva. A levezetés több fontos meggondolásra szorul, például az aggregált bonyolítási eredmény fogalma, illetve az utolsó tagban szereplő kovariancia jelentősége. Ezen a ponton válik külön a független és az összefüggő modell. Ebben a fejezetben a független modell esetén vizsgáljuk, a következőben pedig az összefüggőt.

Független modell esetén azzal a feltevéssel élünk, hogy az IBNR becslésekben nincs korreláció a kárévek között. Ekkor a fenti levezetésben, az utolsó tagban a kovariancia mátrix elemeire:

$$\mathrm{Cov}\left(\widetilde{C_{i,J}^{t+1}}, \widetilde{C_{l,J}^{t+1}} \middle| \mathrm{D_I^t}\right) = \begin{cases} 0, \text{ha } i \neq l \\ Var\left[\widetilde{C_{i,J}^{t+1}} \middle| \mathrm{D_I^t}\right], \text{ha } i = l \end{cases}$$

A független esetet felhasználva, a bonyolítási eredmény hibája aggregáció nélkül

$$msep_{CDR_i(t+1)|D_t}(0) = Var[CDR_i(t+1)|D_t] = Var\left[\widetilde{C_{i,J}^{t+1}} \middle| D_t\right] = \prod_{j=I-i+1}^{J-1} \hat{\xi}_j^2 \, Var\left[C_{i,I-i+1} \middle| D_t\right]$$

$$= C_{i,I-i} \prod_{j=I-i+1}^{J-1} \hat{\xi}_j^2 \, \hat{\sigma}_{I-i}^2 = E\left[C_{i,J} \middle| D_t\right]^2 \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / \hat{\xi}_{I-i}^2}{C_{i,I-i}} = \widetilde{C_{i,J}^{t}}^{\,2} \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / \hat{\xi}_{I-i}^2}{C_{i,I-i}}$$

Ezt aggregálva pedig a független modellt feltételezve kapjuk, hogy

$$msep_{\sum_i CDR_i(t+1)|D_t}(0) = \sum_i msep_{CDR_i(t+1)|D_t}(0) = \sum_i \widetilde{C_{i,J}^{t}}^{\,2} \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / \hat{\xi}_{I-i}^2}{C_{i,I-i}}$$

Itt fontos újra megjegyezni, hogy ebben a képletben ismertnek tételezzük fel a modell paramétereit.

A következő fejezetben azt a meglehetősen összetett modellt vizsgálom, amikor a fejlődési hányadok nem függetlenek egymástól. Különböző korrelációs struktúrákat fogok feltételezni, amit az 5. fejezetben egy számítási példán is összehasonlítok.

4. TÖBBDIMENZIÓS LOG-NORMÁLIS MODELL

Összefüggő káralakulás feltételezésekor sejtünk egy háttérben ható erőt, ami közösen hat a megfigyelt értékekre. Ilyen közösen ható erők lehetnek gazdasági vonatkozású (infláció), demográfiai (halandósági változások), vagy akár szociális/politikai (alacsony jogosítvány korhatár vagy kedvező autóhitel konstrukciók). Ezek közös háttérbeli kockázatot jelentenek a számviteli évek, vagy akár a kockázati termékek között. Gondoljunk csak a kiegészítő biztosításokra, mikor egy adott kockázati termék mellé egy másik kockázatból származó kiegészítőt köthetünk; például kötelező biztosításunk mellé casco kiegészítőt. Ekkor kockázatonként különválasztva, és utána aggregálva a becsült IBNR tartalékokat, torzított eredményt kaphatunk, hiszen az alapterméken és a kiegészítő terméken bekövetkezett káresemény mögött ugyan az a vezető, illetve gépjármű van.

(Merz, Wuthrich, & Hashorva, 2011) tanulmányban publikált modelljében, többdimenziós log-normális eloszlásból indultak ki, ahol kockázati termékenként egy-egy kifutási háromszöget tekintettek. Első lépésben bemutatom (Merz, Wuthrich, & Hashorva, Dependence Modeling in Multivariate Claims Run-Off Triangles, 2011) modell feltevéseit, a többdimenziós normális eloszlásról, majd újra definiálom többdimenziós környezetben az IBNR becslés számítását, a becslés hibáját és a bonyolítási eredményt.

4.1 JELÖLÉSEK ÉS FELTEVÉSEK

Hasonlóan a független esethez legyenek $i \in \{1, \cdots, I\}$ a kárévek, $j \in \{1, \cdots, J\}$ pedig a kifutási évek. Ezen felül legyenek $n \in \{1, \cdots, N\}$ a kockázati termékek jelölései, vagy ahogyan nemzetközileg elterjedt LoB – Line of Business. Továbbra is tegyük fel, hogy $I \geq J + 1$ és a kárévek teljes kifutása J, azaz legfeljebb J év alatt minden kárt bejelentenek és rendeznek egy kárévből.

Legyen most $C_{i,j,n} > 0$ a kumulatív kárráfordítás az i kárév j-edik kifutásában és az n kockázati terméken. Legyenek $\eta_{i,j,n} = log\left(C_{i,j,n}/C_{i,j-1,n}\right)$ a fejlődési hányadok logaritmusai, amelyekre vezessük be először a következő hasznos jelöléseket:

$$\eta_{i,j} = \left(\eta_{i,j,1}, \eta_{i,j,2}, \cdots, \eta_{i,j,N}\right)' \in \mathbb{R}^N,$$

$$\eta_i = \left(\eta_{i,0}', \eta_{i,1}', \cdots, \eta_{i,J}'\right)' \in \mathbb{R}^a,$$

$$\eta = (\eta_1', \eta_2', \cdots, \eta_I')' \in \mathbb{R}^d,$$

ahol $a = N(J + 1)$ és $d = aI$.

Ezek után legyen η többdimenziós normális eloszlású, adott $\theta \in \mathbb{R}^a$ várható értékkel és $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ kovariancia mátrixszal. Itt a θ paraméter szintén többdimenziós normális eloszlású $\mu \in \mathbb{R}^a$ várható értékkel és $T \in \mathbb{R}^{a\times a}$ kovariancia mátrixszal.

Szemléletes lehet a struktúra átlátásához az is, ha felírom a többdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényét:

$$f(\eta,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} det(\Sigma)^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}(\eta - A\theta)'\Sigma^{-1}(\eta - A\theta)\right\}$$
$$\times \frac{1}{(2\pi)^{a/2} det(\mathrm{T})^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}(\theta - \mu)'\mathrm{T}^{-1}(\theta - \mu)\right\},$$

ahol $A = (1, \cdots, 1)' \in \mathbb{R}^{d\times a}$, ami $I = {}^{d}/_{a}$ darab, $a \times a$ méretű egységmátrixból áll.

A Σ kovariancia mátrix struktúrájának definiálását későbbre hagyjuk. Kulcs szerepe lesz a különböző összefüggő modellek felvezetésekor. Definiálhatunk benne összefüggést a kárévek, a számviteli évek vagy akár a kockázati termékek között is.

4.2 MODELL

A fentiek a többdimenziós normális eloszlásra jól szemlélteti a modell irányát, azonban keveset mond a gyakorlati megvalósíthatóságról. Ebben a bekezdésben ismertetem (Merz, Wuthrich, & Hashorva, 2011) módszerét arra a Bayes-i becslésre, hogyan határozzuk meg η fejlődési hányadoknak az ismert adataiból a teljes modell eloszlását.

4.2.1 ÁLLÍTÁS η többdimenziós normális eloszlású, melynek a következők az első két momentumai:

$$E(\eta) = A\mu \qquad \text{és} \qquad S = Cov(\eta) = \Sigma + \mathrm{ATA}'.$$

BIZONYÍTÁS A karakterisztikus függvény segítségével bizonyítjuk az állítást. Legyen $y \in \mathbb{R}^d$, ekkor a többváltozós normális eloszlás karakterisztikus függvénye:

$$E[exp\{y'\eta\}] = E\big[E[exp\{y'\eta\}|\theta]\big] = E\left[exp\left\{iy'A\theta + y'\Sigma\frac{y}{2}\right\}\right] = exp\left\{iy'A\mu + y'\mathrm{ATA}'\frac{y}{2} + y'\Sigma\frac{y}{2}\right\}$$
$$= exp\left\{iy'A\mu + y'(\Sigma + \mathrm{ATA}')\frac{y}{2}\right\}.$$

Amelyből következik az állítás. ■

Legyen egy nem üres valós halmaz a következő:

$$D \subset \{(i,j,n); i = 1,\cdots,I, j = 0,\cdots,J, n = 1,\cdots,N\} = \mathcal{J}$$

Továbbá legyen P_D leképezés a $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{|D|}$, ahol $|D|$ a D halmaz számossága. Ennek megfelelően legyen D^c a D halmaz komplementere és P_{D^c} a hasonló komplementer leképezés. Ennek segítségével felbonthatjuk a η fejlődési hányadokat két különálló térre:

$$\eta \to \left(\eta^D, \eta^{D^c}\right),$$

Szemléletesen D halmaz jelentheti a kárkifutásainkból már ismert (bekövetkezett és bejelentett) elemeket, míg D^c halmaz a még ismeretlen, becsülni akart elemeket. A felbontáshoz a következő lemma adja meg a többdimenziós normális eloszlásra jellemző tulajdonságokat.

4.2.2 LEMMA A $\left(\eta^D, \eta^{D^c}\right)$ vektor többdimenziós normális eloszlású a következő momentumokkal:

$$\mu_D = E[\eta^D] = P_D A\mu \quad \text{és} \quad S_D = Cov(\eta^D) = P_D S P_D',$$

$$\mu_{D^c} = E\left[\eta^{D^c}\right] = P_{D^c} A\mu \quad \text{és} \quad S_{D^c} = Cov\left(\eta^{D^c}\right) = P_{D^c} S P_{D^c}'.$$

A kovariancia mátrix a két komponens, η^D és η^{D^c} között:

$$S'_{D^c,D} = S_{D,D^c} = Cov\left(\eta^D, \eta^{D^c}\right) = P_D S P_{D^c}'.$$

BIZONYÍTÁS A lemma következik a bekezdés első állításból, hiszen a P_D és P_{D^c} lineáris leképezés csak egy permutációját adja a már definiált η vektornak. Ez nem változtatja meg az eloszlást, így a komponensek első két momentumait is ugyan úgy definiálhatjuk. ■

Ezek után felírhatjuk azt az állításunkat, amely segítségével a kifutási háromszögek megfigyelt tény értékiből η^D számíthatjuk ki a meg nem figyelt értékek η^{D^c} (illetve a teljes kártörténet) eloszlását.

4.2.3 ÁLLÍTÁS A η^{D^c} meg nem figyelt értékek fejlődési hányadainak feltételes eloszlása, adott η^D fejlődési hányadok mellett, többdimenziós normális eloszlású a következő feltételes várható értékkel:

$$\mu_{D^c}^{post} = E\left[\eta^{D^c} \middle| \eta^D\right] = \mu_{D^c} + S_{D^c,D}(S_D)^{-1}(\eta^D - \mu_D),$$

illetve a következő feltételes kovariancia mátrixszal:

$$S_{D^c}^{post} = Cov\left(\eta^{D^c} \middle| \eta^D\right) = S_{D^c} - S_{D^c,D}(S_D)^{-1} S_{D,D^c}.$$

BIZONYÍTÁS A bizonyítás alapját (Johnson & Wichern, 1988) 4.6 Eredménye adja. Legyen

$$\underset{(d\times d)}{B}=\begin{bmatrix}\underset{(|D|\times|D|)}{A} & \underset{(|D|\times d-|D|)}{-S_{D^c,D}(S_D)^{-1}}\\ \underset{(d-|D|\times|D|)}{0} & \underset{(d-|D|\times d-|D|)}{A}\end{bmatrix},$$

ezért

$$B(\eta-\mu)=B\begin{bmatrix}\eta^{D^c}-\mu_{D^c}\\ \eta^D-\mu_D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta^{D^c}-\mu_{D^c}-S_{D^c,D}(S_D)^{-1}(\eta^D-\mu_D)\\ \eta^D-\mu_D\end{bmatrix},$$

Aminek az együttes eloszlása normális a következő kovariancia mátrixszal:

$$B\Sigma\mathrm{B}'=\begin{bmatrix}A & -S_{D^c,D}(S_D)^{-1}\\ 0 & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_{D^c} & S_{D^c,D}\\ S_{D,D^c} & S_D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & 0'\\ \left(-S_{D^c,D}(S_D)^{-1}\right)' & A\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}S_{D^c}-S_{D^c,D}(S_D)^{-1}S_{D,D^c} & 0'\\ 0 & S_D\end{bmatrix}.$$

Mivel $\eta^{D^c}-\mu_{D^c}-S_{D^c,D}(S_D)^{-1}(\eta^D-\mu_D)$ és $\eta^D-\mu_D$ normális eloszlásúak és 0 a kovarianciájuk, ezért függetlenek. Továbbá $\eta^{D^c}-\mu_{D^c}-S_{D^c,D}(S_D)^{-1}(\eta^D-\mu_D)$ eloszlása $N_{|D|}\left(0,S_{D^c}-S_{D^c,D}(S_D)^{-1}S_{D,D^c}\right)$. Adott η^D mellett $\mu_{D^c}+S_{D^c,D}(S_D)^{-1}(\eta^D-\mu_D)$ konstans. Amiatt, hogy $\eta^{D^c}-\mu_{D^c}-S_{D^c,D}(S_D)^{-1}(\eta^D-\mu_D)$ és $\eta^D-\mu_D$ függetlenek, a $\mu_{D^c}+S_{D^c,D}(S_D)^{-1}(\eta^D-\mu_D)$ feltételes eloszlása megegyezik a feltétel nélkülivel. Hasonlóan adott η^D mellett η^{D^c} eloszlása $N_{|D|}\left(\mu_{D^c}+S_{D^c,D}(S_D)^{-1}(\eta^D-\mu_D),S_{D^c}-S_{D^c,D}(S_D)^{-1}S_{D,D^c}\right)$. ■

Valójában itt egyszerűen a normális korreláció tételét alkalmaztuk.

Alkalmazzuk a fenti állítást és segítségével építsük fel az IBNR becslés modelljét a többváltozós normális eloszlás esetén. Tegyük fel, hogy a t időpillanatban vagyunk, amire $I\le t<I+J$. A kifutási háromszögeinkben megfigyeltük már a $C_{i,j,n}$ kumulatív kárráfordításokat, amelyekre $i+j\le t$. A t időpillanatig már megfigyelt kumulatív kárráfordítások indexeinek halmazát jelöljük a következőképp:

$$D_t=\{(i,j,n)\in\mathcal{J};\ i+j\le t\}.$$

A megfigyelt kárráfordítások σ-algebrája pedig legyen a következő:

$$F_t=\sigma\{C_{i,j,n};(i,j,n)\in D_t\}=\sigma\{\eta_{i,j,n};(i,j,n)\in D_t\}=\sigma\{\eta^{D_t}\}.$$

Ekkor a t időpillanatban megbecsült kárráfordítás az egyes kárévek és kockázati termékek teljes kifutására:

$$\hat{C}_{i,J,n}^{t} = E\left[C_{i,J,n}^{t}\middle|F_t\right] = C_{i,t-i,n}^{t} E\left[exp\left\{\sum_{j=t-i+1}^{J} \eta_{i,j,n}\right\}\middle|\eta^{D_t}\right].$$

Vezessük be a következő mátrixszorzást a könnyebb jelölés érdekében:

$$e'_{t|i,n}\eta^{D_t^c} = (1,\cdots,1)' P_{D_{t|i,n}^c}\eta = \sum_{j=t-i+1}^{J} \eta_{i,j,n}$$

Vegyük észre, hogy a fenti összegzés a meg nem figyelt kárráfordításokhoz tartozó fejlődési hányadokat összegzi az egyek kárévekben és kockázati termékekben.

4.2.4 ÁLLÍTÁS A t időpillanatban megbecsült kárráfordítások az $n \in \{1,\cdots,N\}$ kockázati termékekre, $i \in \{t-J+1,\cdots,I\}$ kárévekre és $t \in \{I,\cdots,I+J-1\}$ számviteli évekre a következő:

$$\hat{C}_{i,J,n}^{t} = E\left[C_{i,J,n}^{t}\middle|\eta^{D_t}\right] = C_{i,t-i,n} exp\left\{e'_{t|i,n}\mu_{D^c}^{post} + \frac{1}{2}e'_{t|i,n}S_{D^c}^{post}e_{t|i,n}\right\}.$$

BIZONYÍTÁS Mivel a $e'_{t|i,n}\eta^{D_t^c}$ kifejezés egy összegzés a $\eta^{D_t^c}$ vektor elemei fölött, ezért a fenti állítás értelmében $e'_{t|i,n}\eta^{D_t^c}|\eta^{D_t}$ többdimenziós normális eloszlású, $e'_{t|i,n}\mu_{D^c}^{post}$ várható értékkel és $e'_{t|i,n}S_{D^c}^{post}e_{t|i,n}$ varianciával. A fenti állításban a log-normális eloszlás tulajdonságai miatt pedig

$$E\left[e\,xp\left\{\sum_{j=t-i+1}^{J}\eta_{i,j,n}\right\}\middle|\eta^{D_t}\right] = E\left[exp\{e'_{t|i,n}\eta^{D_t^c}\}\middle|\eta^{D_t}\right] = exp\left\{e'_{t|i,n}\mu_{D^c}^{post} + \frac{1}{2}e'_{t|i,n}S_{D^c}^{post}e_{t|i,n}\right\}. \blacksquare$$

4.2.5 KÖVETKEZMÉNY A fenti állítás értelmében az $n \in \{1,\cdots,N\}$ kockázati termék $i \in \{t-J+1,\cdots,I\}$ kárévének becsült szükséges tartalékszintje a $t \in \{I,\cdots,I+J-1\}$ számviteli évben

$$\hat{R}_{i,n}^{t} = E\left[C_{i,J,n} - C_{i,t-i,n}\middle|F_t\right] = C_{i,t-i,n}\left(exp\left\{e'_{t|i,n}\mu_{D^c}^{post} + \frac{1}{2}e'_{t|i,n}S_{D^c}^{post}e_{t|i,n}\right\} - 1\right).$$

4.3 A BECSLÉS HIBÁJA

A becslés hibáját a többdimenziós esetben hasonlóképpen definiáljuk, mint az egyváltozós log-normális eloszlásnál. A becslés hibájának mérésekor arra vagyunk kíváncsiak, hogy a becsült teljes kárráfordítás mennyiben tér el a tényleges ráfordításoktól. Újra megjegyzem, hogy ebben a bekezdésben követem (Merz, Wuthrich, & Hashorva, 2011) tanulmány felépítését.

$$msep_{\sum_{i,n}C_{i,J,n}|F_t}\left(\sum_{i,n}\hat{C}_{i,J,n}^{t}\right) = E\left[\left(\sum_{i,n}C_{i,J,n} - \sum_{i,n}\hat{C}_{i,J,n}^{t}\right)^2\middle|F_t\right]$$

Ezzel a választott számítási módszer hibáját mérhetjük vissza. Ezt a mutatót rendszeresen monitorozva a módszer megbízhatóságáról kaphatunk képet. Legyünk figyelemmel arra, hogy az adatainkat érhetik eseti hatások a ténylegesen bekövetkező, illetve bejelentésre kerülő károkban, ami megnövelheti a tényleges és becsült kárráfordítások különbözetét. Ekkor a hibában tapasztalt növekedés nem feltétlenünk a modell hibájára utal, hanem az alapadatok tisztítása szükséges, például nagykárok kiszűrésével, vagy eseti korrekciókkal, amelyek a cégek tartalékolási politikáinak hatásait kell ellensúlyozniuk.

A fent leírt várható négyzetes eltérés valójában a tényleges kárráfordítások varianciája, így a becslés hibáját a következőképpen módosíthatjuk:

$$msep_{\sum_{i,n} C_{i,J,n}|F_t}\left(\sum_{i,n} \hat{C}_{i,J,n}^t\right) = Var\left[\sum\nolimits_{i,n} C_{i,J,n}\middle|F_t\right] = \sum_{i,l,n,m} Cov\left(C_{i,J,n}, C_{l,J,m}\middle|F_t\right).$$

Vegyük észre, hogy ez utóbbi felírásban nem szerepel a kárráfordítás becslése, emiatt tehát a kockázati termékek egyes káréveinek teljes tényleges kárráfordításainak ismeretében meghatározhatjuk a becslés hibáját. Nem meglepő, hiszen a tényleges értékeknek magukban kell hordozniuk ezeket az információkat, ugyanis a becslés is előlük készül.

4.3.1 ÁLLÍTÁS A becslés hibájának meghatározására a $t \in \{I, \cdots, I + J - 1\}$ számviteli évben a következő formulát használhatjuk többdimenziós log-normális eloszlás esetén

$$msep_{\sum_{i,n} C_{i,J,n}|F_t}\left(\sum_{i,n} \hat{C}_{i,J,n}^t\right) = \sum_{i,l,n,m} \hat{C}_{i,J,n}^t \hat{C}_{l,J,m}^t \left(exp\left\{e_{t|i,n}' S_{D^c}^{post} e_{t|i,n}\right\} - 1\right),$$

ahol az összegzés $i, l \in \{t - J + 1, \cdots, I\}$ kárévek között és $n, m \in \{1, \cdots, N\}$ kockázati termékek között fut.

BIZONYÍTÁS A 4.2.4 Állítás bizonyításának analógiája.

Itt újfent fontos megjegyezni, hogy feltételezzük a paraméterek ismeretét.

4.4 BONYOLÍTÁSI EREDMÉNY

Hasonlóan az egydimenziós esethez most is definiáljuk a bonyolítási eredményt és annak 0-tól vett hibáját. Az alapvető definíciókban nincs eltérés, sőt ebben a fejezetben definiált F_t σ-algebrát megfeleltethetjük az egydimenziós esetben definiált $\mathrm{D_t}$ σ-algebrával, illetve ezen a σ-algebrán értelmezett becsült kárráfordítások és fejlődési hányadok martingál tulajdonságait is hasonlóképpen láthatjuk be. Továbbra is követem (Merz, Wuthrich, & Hashorva, 2011) tanulmány felépítését.

Emiatt a többdimenziós log-normális eloszlás esetén a bonyolítási eredmény a $t+1$ és t időpillanatban számolt becslések között a következő, ismert paraméterek esetén:

$$CDR_{i,n}(t+1) = \widetilde{C_{i,J,n}^{t}} - \widetilde{C_{i,J,n}^{t+1}}$$

Hasonlóképpen igaz, hogy $E\left[CDR_{i,n}(t+1)\middle|F_t\right] = 0$. Illetve az aggregált bonyolítási eredmény 0-tól vett hibája a következő alakban írható fel

$$msep_{\sum_i CDR_{i,n}(t+1)|F_t}(0) = E\left[\left(\sum_{i,n} CDR_{i,n}(t+1) - 0\right)^2 \middle| F_t\right] = Var\left[\sum_{i,n} CDR_{i,n}(t+1)\middle|F_t\right] =$$
$$Var\left[\sum_{i,n} \widetilde{C_{i,J,n}^{t+1}}\middle| F_t\right] = \sum_{i,l,n,m} Cov\left(\widetilde{C_{i,J,n}^{t+1}}, \widetilde{C_{l,J,m}^{t+1}}\middle| F_t\right).$$

Az eddigiekben definiált többdimenziós eset lehetőséget nyit arra, ahogy a fenti egyenlet utolsó tagjában szereplő kovarianciát tovább boncoljuk. A 4.2.4 Állításban felírt formulát alakítsuk át a következőképpen

$$\widetilde{C_{i,J,n}^{t+1}} = C_{i,t+1-i,n} exp\left\{\left(e'_{t+1|i,n}\mu_{D_{t+1}^c}^{post} + \frac{1}{2}e'_{t+1|i,n}S_{D_{t+1}^c}^{post}e_{t+1|i,n}\right)1_{\{i+J>t+1\}}\right\}$$
$$= C_{i,t-i,n} exp\left\{\eta_{i,t+1-i,n} + \left(e'_{t+1|i,n}\mu_{D_{t+1}^c}^{post} + \frac{1}{2}e'_{t+1|i,n}S_{D_{t+1}^c}^{post}e_{t+1|i,n}\right)1_{\{i+J>t+1\}}\right\}.$$

Célunk, hogy megpróbáljuk kifejezni a $t+1$ időszaki kárbecslések kovarianciáit a t időszakiból. Hasonlóképpen bontsuk fel a D halmazt, mint a 4.2 bekezdésben, csak itt az ismert és még nem ismert kárráfordítások helyett a t időpontban már ismert és a $t+1$ időpontban megismert halmazokra.

$$\eta^{D_{t+1}} \to \left(\eta^{D_t}, \eta^{D_{t+1}/D_t}\right).$$

A második komponensben a D_{t+1}/D_t halmazt jelöljük D_t^c-vel, azaz a t időpontban még nem ismert, és a $t+1$ időpontban megismert elemek halmaza.

A fenti egyenlet jobb oldalán szereplő $\eta_{i,t+1-i,n}$ fejlődési hányad esetén definiáljuk a következő lineáris leképezést

$$b_{t|i,n} \in \mathbb{R}^{|D_t^c|} \quad \text{, hogy} \quad b'_{t|i,n}\eta^{D_t^c} = \eta_{i,t+1-i,n}$$

A fenti egyenlet jobb oldalán szereplő $\mu_{D_{t+1}^c}^{post}$ várható értékre már ismerjük a 4.2.3 Állításból a következő felírást

$$\mu_{D_{t+1}^c}^{post} = \mu_{D_{t+1}^c} + S_{D_{t+1}^c, D_{t+1}}\left(S_{D_{t+1}}\right)^{-1}\left(\eta^{D_{t+1}} - \mu_{D_{t+1}}\right).$$

Válasszuk szét $\eta^{D_{t+1}}$-et a t időpontban már ismert és a $t+1$ időpontban megismert elemek halmazára. Legyen ehhez segítségünk a $B_{t+1}: \mathbb{R}^{|D_{t+1}|} \to \mathbb{R}^{|D_{t+1}|}$ lineáris leképezés, amelyre

$$\mathrm{B}_{t+1}\eta^{D_{t+1}} = \left(\eta_{i,j,n} 1_{\{i+j=t+1\}}\right)'$$

Ez a leképezés 0-ra állítja $\eta^{D_{t+1}}$ azon elemeit, amelyek F_t mérhetőek. Emiatt $\eta^{D_{t+1}}$ a következőképpen írható fel

$$\eta^{D_{t+1}} = (1 - \mathrm{B}_{t+1})\eta^{D_{t+1}} + \mathrm{B}_{t+1}\eta^{D_{t+1}},$$

Ahol az első tag az F_t mérhető komponens, a második pedig a $\mathrm{t}+1$ pillanatban megismert elemek halmaza. Egyesítsük a fenti két lineáris leképezést egyben

$$p'_{t|i,n}\eta^{D_t^c} = b'_{t|i,n}\eta^{D_t^c} + 1_{\{i+J>t+1\}} e'_{t+1|i,n} S_{D_{t+1}^c, D_{t+1}} \left(S_{D_{t+1}}\right)^{-1} \mathrm{B}_{t+1}\eta^{D_{t+1}}.$$

Tekintsük a következő alakban felírt kárbecslést a $t+1$ időszakra

$$\widetilde{C_{\iota,J,n}^{t+1}} = g_{t|i,n}(F_t) exp\{p'_{t|i,n}\eta^{D_t^c}\},$$

ahol $g_{t|i,n}(F_t)$ egy megfelelő, F_t mérhető konstans.

4.4.1 LEMMA

$$g_{t|i,n}(F_t) = C_{i,t-t,n} exp\left\{\left(e'_{t|i,n} - p'_{t|i,n}\right)\mu_{D_t^c}^{post} + \frac{1}{2} e'_{t|i,n} S_{D_t^c}^{post} e_{t|i,n} - \frac{1}{2} p'_{t|i,n} S_{D_t^c}^{post} p_{t|i,n}\right\}$$

BIZONYÍTÁS Mivel a becsült kárráfordítások F_t martingál tulajdonsággal rendelkeznek, ezért

$$\widetilde{C_{\iota,J,n}^{t}} = E\left[\widetilde{C_{\iota,J,n}^{t+1}}\middle| F_t\right] = g_{t|i,n}(F_t) exp\left\{p'_{t|i,n}\mu_{D_t^c}^{post} + \frac{1}{2} p'_{t|i,n} S_{D_t^c}^{post} p_{t|i,n}\right\}. \blacksquare$$

4.4.2 ÁLLÍTÁS

Az $n \in \{1, \cdots, N\}$ kockázati termékekre, $i \in \{t-J+1, \cdots, I\}$ kárévekre és $t \in \{I, \cdots, I+J-1\}$ számviteli évekre

$$Cov\left(\widetilde{C_{\iota,J,n}^{t+1}}, \widetilde{C_{\iota,J,m}^{t+1}}\middle| F_t\right) = \widetilde{C_{\iota,J,n}^{t}}\widetilde{C_{\iota,J,n}^{t}}\left(exp\left\{p'_{t|i,n} S_{D_t^c}^{post} p_{t|i,n}\right\} - 1\right)$$

BIZONYÍTÁS Vezessük le a baloldalból a jobb oldali kifejezést

$$\begin{aligned}
Cov\left(\widetilde{C_{\iota,J,n}^{t+1}}, \widetilde{C_{\iota,J,m}^{t+1}}\middle| F_t\right) &= E\left[\widetilde{C_{\iota,J,n}^{t+1}}\widetilde{C_{\iota,J,m}^{t+1}}\middle| F_t\right] - E\left[\widetilde{C_{\iota,J,n}^{t+1}}\middle| F_t\right] E\left[\widetilde{C_{\iota,J,m}^{t+1}}\middle| F_t\right] \\
&= g_{t|i,n}(F_t) g_{t|i,m}(F_t)\left(E\left[exp\left\{\left(p'_{t|i,n} - p'_{t|l,m}\right)\eta^{D_t^c}\right\}\middle|F_t\right]\right. \\
&\quad \left. - E\left[exp\left\{p'_{t|i,n}\eta^{D_t^c}\right\}\middle|F_t\right] E\left[exp\left\{p'_{t|l,m}\eta^{D_t^c}\right\}\middle|F_t\right]\right) \\
&= \widetilde{C_{\iota,J,n}^{t+1}}\widetilde{C_{\iota,J,m}^{t+1}}\left(exp\left\{p'_{t|i,n} S_{D_t^c}^{post} p_{t|i,n}\right\} - 1\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

4.5 KOVARIANCIA STRUKTÚRÁK

Ebben a fejezetben a különböző kovariancia struktúrák hatásait vizsgáljuk az eddig felépített modellen. Az egyszerűség és a könnyebb számíthatóság kedvéért legyen

$$Cov(\eta|\theta) = \Sigma = diag(\sigma) \times \Lambda \times diag(\sigma),$$

Ahol $Var(\eta_{i,j,n}|\theta)^{1/2} = \sigma_{j,n}$ és Λ a választott kovariancia struktúra mátrixa. A fejezet hátralevő részében felírom azokat a Λ kovariancia struktúra mátrixokat, amelyeket hatásait vizsgáljuk a modellen, majd az 5. fejezetben számítási példákon is bemutatom a hatásait.

4.5.1 ÖSSZEFÜGGÉS CSAK A SZÁMVITELI ÉVEK KÖZÖTT

$$Cov(\eta_{i,j,n}, \eta_{l,k,m}) = \sigma_{j,n}\sigma_{k,m}\rho 1_{\{i+j=l+k\}}$$

, ahol $(i,j) \neq (l,k)$ és ρ a fejlődési hányadok közötti korreláció erőssége.

Azaz azt feltételezzük, hogy a fejlődési hányadok kifutási háromszögében az átló elemei között van összefüggés. A kifutási háromszögben az átló elemei jelenítik meg az adott könyvelési év/hónap/hét kárráfordítását. Ez az összefüggéstípus utalhat leginkább az inflációra vagy akár a tartalékolási politika hatásaira. A gazdasági környezet megváltozása a kárrendezéskor megállapított kárösszeget befolyásolja, például, ha megdrágulnak a gépjármű alkatrészei, akkor a becsült kárösszeg is megnő. Ennek hatása a kifutási háromszögben az átló elemei között jelenik meg. Abban az esetben, ha a biztosító biztonságosabb tartalékolást választ, ekkor a ténylegesen megfigyelt kárráfordításokban ennek a hatását az átló elemei között lehet felfedezni, hiszen ez a tevékenység az adott számviteli év legtöbb kárkönyvelésére hatással van.

4.5.2 ÖSSZEFÜGGÉS CSAK A TERMÉKEK KÖZÖTT

Termékek közötti összefüggés esetén:

$$Cov(\eta_{i,j,n}, \eta_{l,k,m}) = \sigma_{j,n}\sigma_{k,m}\rho 1_{\{(i,j)=(l,k)\}}$$

, ahol $(i,j,n) \neq (l,k,m)$ és ρ a fejlődési hányadok közötti korreláció erőssége.

A kockázati termékek közötti összefüggés arra a gondolkodásra utal, hogy ugyanazon ügyfélnek több kockázatba tartozó biztosítási szerződése is lehetséges. Emiatt ezek a szerződések az egyén viselkedését tükrözik várhatóan minden kockázati kategóriában. Például, ha valakinek sok a Casco típusú kára, akkor várhatóan sok Gépjármű Felelősségbiztosítás kára is van, de gondolhatunk akár kapcsolatra az életbiztosítási és nem-életbiztosítási kötvények között is, amelyek ugyanazon ügyfélhez tartoznak.

4.5.3 ÖSSZEFÜGGÉS CSAK A KIFUTÁSOK KÖZÖTT

Saját feltételezésemként érdekes lehet megfigyelnünk, hogy az egyes kifutási periódusokhoz tartozó fejlődési hányadok hasonlóan viselkednek. Sokszor, az egyes kárévek rendelkeznek olyan sajátos tulajdonsággal, amelyek a kárév teljes kifutásán keresztül megmutatkoznak. A kárévek között eltérés lehet a későn bejelentett kárgyakoriságban, illetve a késői átlagos kárkifizetésben is, emiatt pedig a teljes kárévben magasabb vagy alacsonyabb fejlődéseket tapasztalhatunk. Ehhez definiáljuk a következőképp a fejlődési hányadok kovariancia struktúráját:

$$Cov(\eta_{i,j,n}, \eta_{l,k,m}) = \sigma_{j,n}\sigma_{k,m}\rho 1_{\{i=l;n=m\}}$$

, ahol $j \neq k$ és ρ a fejlődési hányadok közötti korreláció erőssége.

A továbbiakban bemutatom a számításokhoz használt adatok főbb jellemzőit, majd elvégzem rajta az IBNR becslést a felépített modellek alapján. A számítási eredmények összehasonlításához pedig a számítási eredmények hibáját és a bonyolítási eredmény hibáját veszem alapul.

5. ADATOK ISMERTETÉSE ÉS ELEMZÉSE

5.1 ÁTTEKINTŐ PÉLDA

A többdimenziós log-normális eloszlás modelljét a gyakorlatban nehéz elsőre elképzelni, különösen a fent leírt általános jelölések miatt. A számítási példáinkhoz viszont szükség van a pontos megértésre, így ebben a bekezdésben egy kisebb példán mutatom meg a szükséges legfontosabb lépéseket.

Tegyük fel, hogy három kárév adatait vizsgáljuk, a károk pedig három év alatt teljesen kifutnak. Összesen két kockázati termékünk van, így a következő két kifutási háromszöget kaphatjuk:

$$\begin{matrix} C_{1,0,1} & C_{1,1,1} & C_{1,2,1} \\ C_{2,0,1} & C_{2,1,1} & \boldsymbol{\hat{C}_{2,2,1}} \\ C_{3,0,1} & \boldsymbol{\hat{C}_{3,1,1}} & \boldsymbol{\hat{C}_{3,2,1}} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} C_{1,0,2} & C_{1,1,2} & C_{1,2,2} \\ C_{2,0,2} & C_{2,1,2} & \boldsymbol{\hat{C}_{2,2,2}} \\ C_{3,0,2} & \boldsymbol{\hat{C}_{3,1,2}} & \boldsymbol{\hat{C}_{3,2,2}} \end{matrix}$$

, ahol a kijelölt kumulatív károk a még ismeretlen elemek. Az indexek pedig a többdimenziós modellben bevezetett (i,j,n) jelölés megfelelő elemei. Ennek megfelelően a fejlődési hányad vektor a 4.1 bekezdésben bevezetett jelölésekkel és definícióval:

$$\boldsymbol{\eta} = \left(\eta_{1,1,1}, \eta_{1,1,2}, \eta_{1,2,1}, \eta_{1,2,2}, \eta_{2,1,1}, \eta_{2,1,2}, \eta_{2,2,1}, \eta_{2,2,2}, \eta_{3,1,1}, \eta_{3,1,2}, \eta_{3,2,1}, \eta_{3,2,2}\right) \in \mathbb{R}^a$$

, ahol $a = N(J+1)I = 12$.

A fejlődési hányadokat a következő indexcsoportosítással két részre oszthatjuk, a más ismert és a becsülni kívántakra.

$$D = \{(i,j,n); i = 1,\cdots,I, j = 1,\cdots,J-i, n = 1,\cdots,N\}$$
$$D^c = \{(i,j,n); i = 1,\cdots,I, j = J-i+1,\cdots,J, n = 1,\cdots,N\}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \left(\underbrace{\eta_{1,1,1}, \eta_{1,1,2}, \eta_{1,2,1}, \eta_{1,2,2}, \eta_{2,1,1}, \eta_{2,1,2}}_{=\boldsymbol{\eta^D} \in \mathbb{R}^D}, \underbrace{\eta_{2,2,1}, \eta_{2,2,2}, \eta_{3,1,1}, \eta_{3,1,2}, \eta_{3,2,1}, \eta_{3,2,2}}_{=\boldsymbol{\eta^{D^c}} \in \mathbb{R}^{D^c}}\right)$$

Ekkor, ha $\boldsymbol{\eta^D}$ eloszlása, várható értéke és szórásmátrixa ismert, akkor a Bayes-i feltevés szerint becsülhetjük $\boldsymbol{\eta^{D^c}}$ feltételes eloszlását, várható értékét és szórásmátrixát:

$$\mu_{D^c}^{post} = E\left[\eta^{D^c} \middle| \eta^D\right] = \mu_{D^c} + S_{D^c,D}(S_D)^{-1}(\eta^D - \mu_D),$$
$$S_{D^c}^{post} = Cov\left(\eta^{D^c} \middle| \eta^D\right) = S_{D^c} - S_{D^c,D}(S_D)^{-1}S_{D,D^c}$$

, ahol μ_{D^c} a $\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{D_c}}$-hez tartozó várható érték vektor, a szórásmátrix elemei pedig a következők:

$$S = \begin{pmatrix} S_D & S_{D.D^c} \\ S_{D^c,D} & S_{D^c} \end{pmatrix}$$

, ahol

$$S_D = (\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}, \sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}) \times \mathbf{\Lambda_{1,1}} \times (\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}, \sigma_{1,1}, \sigma_{1,2})^T$$
$$S_{D^c} = (\sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}, \sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}) \times \mathbf{\Lambda_{2,2}} \times (\sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}, \sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2})^T$$
$$S_{D^c,D} = S_{D.D^c} = (\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}, \sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}) \times \mathbf{\Lambda_{1,2}} \times (\sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}, \sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2})^T$$

, ahol $\sigma_{j,n} = Var(\eta_{i,j,n})^{1/2}$.

Itt a $\mathbf{\Lambda}$ korrelációs mátrix az az elem a legfontosabb lesz a továbbiakban. Az 5.4 fejezetben a feltételezett korrelációs struktúrákat egyenként is felírom.

Mivel a fejlődési hányadok logaritmusaival dolgozunk, ezért az $e^{\eta^{D^C}}$ feltételes várható értékét is definiálnunk kell:

$$E\left[e^{\eta^{D^C}} \middle| \eta^D\right] = e^{E\left[\eta^{D^C} \middle| \eta^D\right] + \frac{1}{2}Cov\left(\eta^{D^C} \middle| \eta^D\right)}.$$

Innen pedig már csak egy lépés kell, hogy eljussunk a 4.2.4 Állítás eredményéig:

$$\hat{C}_{i,J,n}^t = C_{i,t-i,n} exp\left\{e'_{t|i,n}\mu_{D^c}^{post} + \frac{1}{2}e'_{t|i,n}S_{D^c}^{post}e_{t|i,n}\right\}.$$

A becsült hiba a 4.3.1 Állítás eredményeképp adódik:

$$msep_{\sum_{i,n} C_{i,J,n}|F_t}\left(\sum_{i,n} \hat{C}_{i,J,n}^t\right) = \sum_{i,l,n,m} \hat{C}_{i,J,n}^t \hat{C}_{l,J,m}^t \left(exp\{e'_{t|i,n}S_{D^c}^{post}e_{t|i,n}\} - 1\right).$$

A bonyolítási eredmény pedig:

$$CDR_{i,n}(t+1) = \widetilde{C_{i,J,n}^t} - \widetilde{C_{i,J,n}^{t+1}}$$

A következőkben bemutatom a saját gyűjtésű adataimat, illetve a bennük rejlő összefüggések korrelációs struktúráit. Majd sorra veszem az egyes korrelációs struktúrákat, elvégzem a számításokat az adatokon, összehasonlítva a kapott eredményeket.

5.2 ADATOK ISMERTETÉSE

Adataimat egy biztosító valós kárkifizetéseiből gyűjtöttem. Négy kockázati terméket hasonlítok össze, a KGFB, Casco, Lakás és Általános felelősségbiztosításokat. Általában a biztosítók negyedévente kötelesek felülvizsgálni a becsült teljes kárkifutást, de egyre elterjedtebb a gyakorlatban, hogy gyakrabban is megképzik az IBNR tartalékot. Ennek oka, hogy a biztosítók gyakrabban is monitorozzák a bruttó technikai eredményüket, amihez szükséges a tételes kártartalékokon kívül a megképzett tartalékok figyelembe vétele is. A gyűjtött példám is gyakoribb periódusokat tartalmaz.

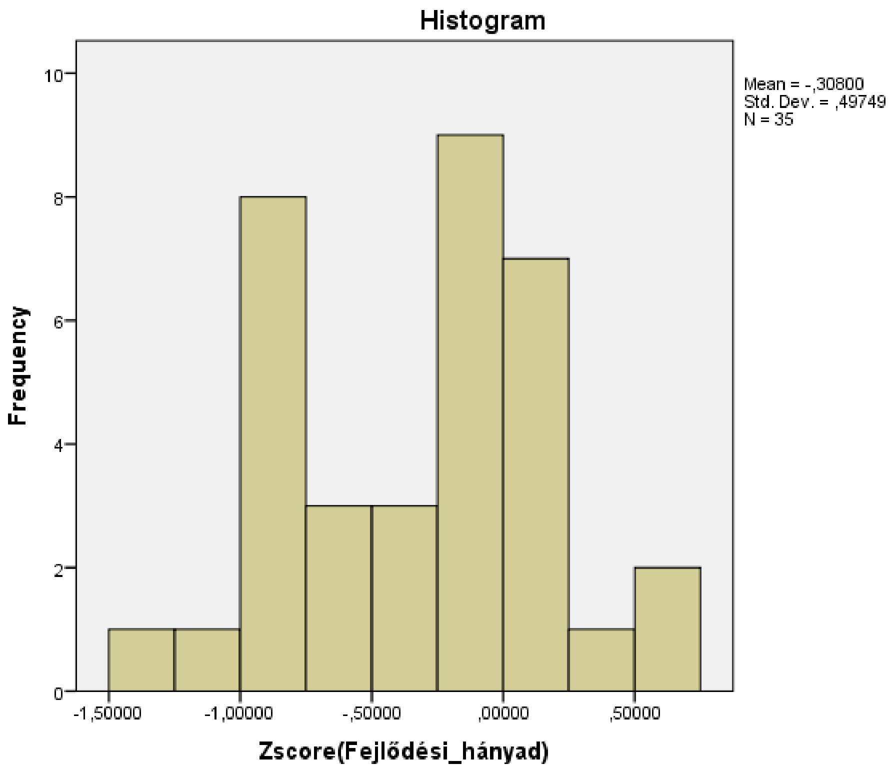
A 3. és 4. fejezetben leírt modellek azon alapulnak., hogy a fejlődési hányadok logaritmusai normális eloszlást követnek, így ez az első, ami ellenőriznünk kell a gyűjtött adatainkon. A kockázati termékek első kifutásából vett sztenderdizált fejlődési hányadait vizsgáltam ömlesztve a termékek között. Ebben azt feltételezem, hogy a kockázati termékek azonos eloszlást követnek.

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Fejlődési_hányad	,162	10	,200*	,957	10	,753

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction



Kolmogorov-Smirnov normalitás teszt nullhipotézise, hogy a vizsgált minta normális eloszlást követ, így ezt a fent látható 20%-os szignifikancia szinten el is fogadhatjuk. Az adataink között meglévő korrelációs összefüggéseket a következő bekezdésekben külön tárgyalni fogom.

5.3 FÜGGETLEN ESET

A független esetben azzal a feltételezéssel élünk, hogy a fejlődési hányadaink korrelálatlanok, azaz a korrelációs mátrix az egységmátrix

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N(J+1)I \times N(J+1)I}$$

Ekkor azt az alapesetet kapjuk, amivel a legtöbb biztosító is a gyakorlatban számít. Tekintsük a kapott eredményeket kockázati termékenként és kárévenként a következő ábrán:

PERIÓDUS i	TELJES BECSÜLT KÁRRÁFORDÍTÁS $\sum_n \hat{C}_{i,J,n}^t$	IBNR TARTALÉK $\sum_n \hat{R}_{i,n}^t$	% TELJES	MSEP $msep_{\sum_n C_{i,J,n} \mid F_t}$	% IBNR	CDR $\sum_n CDR_{i,n}^{t+1}$	%IBNR
1	1 712,6	0,0	0,0%	0,0		0,0	
2	1 739,1	9,8	0,6%	5,3	54,0%	-9,8	-100,0%
3	1 393,7	72,8	5,2%	5,5	7,5%	-60,1	-82,5%
4	1 348,9	76,3	5,7%	4,9	6,4%	-19,3	-25,3%
5	1 584,0	114,1	7,2%	6,5	5,7%	-31,6	-27,7%
6	1 743,4	149,8	8,6%	17,0	11,3%	-34,8	-23,3%
7	2 277,4	297,0	13,0%	57,7	19,4%	-94,1	-31,7%
8	1 466,8	261,4	17,8%	31,8	12,2%	-59,3	-22,7%
9	1 372,0	337,2	24,6%	40,9	12,1%	-57,1	-16,9%
10	1 463,5	517,0	35,3%	108,3	21,0%	-120,9	-23,4%
11	1 080,8	590,8	54,7%	308,8	52,3%	-60,8	-10,3%
12	260,1	220,7	84,8%	65,7	29,8%	714,7	323,9%
Összesen	**17 442,2**	**2 646,8**	15,2%	**652,4**	24,6%	**166,8**	6,3%

Termék	Teljes becsült kárráfordítás	IBNR tartalék	% Teljes	MSEP	% IBNR	CDR	%IBNR
n	$\sum_i \hat{C}_{i,J,n}^t$	$\sum_i \hat{R}_{i,n}^t$		$msep_{\sum_i C_{i,J,n} \mid F_t}$		$\sum_i CDR_{i,n}^{t+1}$	
KGFB	3 262,9	1 064,9	32,6%	223,9	21,0%	-41,0	-3,8%
Casco	6 868,5	819,6	11,9%	245,4	29,9%	166,1	20,3%
Lakás	6 883,6	576,6	8,4%	66,7	11,6%	-59,9	-10,4%
Ált. Fel.	427,2	185,6	43,4%	116,4	62,7%	101,4	54,7%

A kapott eredményekből látható, hogy a gépjármű felelősség és általános felelősségbiztosításoknak van a legnagyobb várható kifutása, hiszen ezeknél a kockázati kategóriáknál a legnagyobb a megképzett IBNR tartalék és a teljes becsült kárráfordítás aránya. Ez nem meglepő, és a gyakorlat is visszaigazolja, mert tipikusan a felelősségbiztosítások azok, amelyek kárrendezése jelentősen elhúzódhat.

Az MSEP mutatóról az adott időszaki IBNR becslés várható hibáját olvashatjuk le. Ennek értéke nagyban függ a kockázati terméken megfigyelt fejlődési hányadok szórásától, illetve köztük lévő összefüggésektől, amivel most itt nem számolunk. Az általános felelősségbiztosítás módozaton jelentős a becsült hiba, ami a termék sajátosan alacsony kárgyakoriságával és nagy átlagos kárráfordításával magyarázható. A biztosítók gyakran megtisztítják a károkat az extrém nagy értékű és rendkívül alacsony előfordulási valószínűségű elemektől, hogy ezzel csökkentsék a tapasztalt szórást.

A bonyolítási eredmény az egyik legfontosabb mutató, amit a Szolvencia II keretében a biztosítástechnikai tartalékok esetén vizsgálnak. A mutató megfogalmazva azt jelenti, hogy ugyan arra a periódusokra mennyivel becsültünk meg több, vagy kevesebb teljes kárráfordítást a következő számviteli periódusban. Ez a mutató tartalmazza a becslés egy periódusra jutó hibáját is, így, ha ez a mutató tartósan negatív, akkor a biztosító felültartalékol, ha pozitív, akkor tartalékolási problémákat sejthetünk. Érthető, hogy a Szolvencia II miért foglalkozik kiemelten ezzel a területtel. A táblázatban a tényleges bonyolítási eredmények szerepelnek. A kapott eredmények a választott periódus miatt sejtetnek tartalékolási problémákat, tényleges veszélyről nincs szó.

5.4 Összefüggés a számviteli évek között

A számviteli évek közötti összefüggésben az egymást követő években könyvelt kárkifizetések között feltételezünk összefüggést. Ezt az inflációval vagy esetleg deflációval magyarázhatjuk, hiszen maguk a kárkifizetések olyan kárrendezési folyamat keretében történnek, amelyek figyelembe veszik az adott ország gazdasági változásait. Gondoljunk például a Casco biztosításra, ahol az alkatrészek árai évről-évre változhatnak.

A 4.5 bekezdésben ismertetett kovariancia struktúrában

$$Cov(\eta_{i,j,n}, \eta_{l,k,m}) = \sigma_{j,n}\sigma_{k,m}\rho 1_{\{i+j=l+k\}} \qquad \text{, ahol } (i,j) \neq (l,k)$$

Lássuk az 5.1 bekezdés példáján a feltételezett korrelációs összefüggést a számviteli évekre:

$\boldsymbol{\eta}$	$\eta_{1,1,1}$	$\eta_{1,1,2}$	$\eta_{1,2,1}$	$\eta_{1,2,2}$	$\eta_{2,1,1}$	$\eta_{2,1,2}$	$\eta_{2,2,1}$	$\eta_{2,2,2}$	$\eta_{3,1,1}$	$\eta_{3,1,2}$	$\eta_{3,2,1}$	$\eta_{3,2,2}$
$\eta_{1,1,1}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{1,1,2}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{1,2,1}$	0	0	1	0	$\rho_{3,5}$	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{1,2,2}$	0	0	0	1	0	$\rho_{4,6}$	0	0	0	0	0	0
$\eta_{2,1,1}$	0	0	$\rho_{5,3}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{2,1,2}$	0	0	0	$\rho_{6,4}$	0	1	0	0	0	0	0	0
$\eta_{2,2,1}$	0	0	0	0	0	0	1	0	$\rho_{7,9}$	0	0	0
$\eta_{2,2,2}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$\rho_{8,10}$	0	0
$\eta_{3,1,1}$	0	0	0	0	0	0	$\rho_{9,7}$	0	1	0	0	0
$\eta_{3,1,2}$	0	0	0	0	0	0	0	$\rho_{10,8}$	0	1	0	0
$\eta_{3,2,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\eta_{3,2,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

A számviteli összefüggést feltételezve a következő eredményeket kapjuk a gyűjtött adatokon:

TERMÉK n	**TELJES BECSÜLT KÁRRÁFORDÍTÁS**	**IBNR TARTALÉK**	% TELJES	**MSEP**	% IBNR	**CDR**	%IBNR
	$\sum_i \hat{C}_{i,J,n}^t$	$\sum_i \hat{R}_{i,n}^t$		$msep_{\sum_i C_{i,J,n} \mid F_t}$		$\sum_i CDR_{i,n}^{t+1}$	
KGFB	3 279,5	1 081,5	33,0%	374,5	34,6%	-91,4	-8,5%
Casco	6 886,2	837,3	12,2%	333,8	39,9%	98,3	11,7%
Lakás	6 889,3	582,3	8,5%	108,4	18,6%	58,0	10,0%
Ált. Fel.	494,3	252,8	51,1%	346,6	137,1%	37,9	15,0%

Periódus i	Teljes becsült kárráfordítás	IBNR tartalék	% Teljes	MSEP	% IBNR	CDR	%IBNR
	$\sum_n \hat{C}^t_{i,J,n}$	$\sum_n \hat{R}^t_{i,n}$		$msep_{\sum_n C_{i,J,n} \mid F_t}$		$\sum_n CDR^{t+1}_{i,n}$	
1	1 712,6	0,0	0,0%	0,0		0,0	
2	1 739,0	9,7	0,6%	0,3	2,7%	6,5	67,1%
3	1 389,4	68,5	4,9%	7,2	10,4%	-9,2	-13,4%
4	1 350,1	77,5	5,7%	9,3	12,1%	-6,0	-7,8%
5	1 586,7	116,8	7,4%	15,4	13,1%	-3,7	-3,2%
6	1 752,5	158,8	9,1%	29,0	18,2%	-0,7	-0,4%
7	2 308,0	327,6	14,2%	145,1	44,3%	10,7	3,3%
8	1 478,4	273,0	18,5%	107,0	39,2%	4,1	1,5%
9	1 394,9	360,1	25,8%	143,4	39,8%	12,3	3,4%
10	1 506,4	559,9	37,2%	307,0	54,8%	32,4	5,8%
11	1 095,1	605,2	55,3%	276,4	45,7%	47,3	7,8%
12	236,2	196,8	83,3%	123,3	62,7%	9,2	4,7%
Összesen	**17 549,3**	**2 753,9**	15,7%	**1 163,3**	42,2%	**102,9**	3,7%

Az a fontos észrevételünk lehet, hogy a független esethez képest a becsült teljes kárráfordítás és az IBNR tartalék is emelkedett, ezzel együtt a becslés várható hibája is. A számviteli összefüggés során vizsgált korrelációs együtthatók többsége pozitív előjelű, azaz az egymást követő években tapasztalt kárkifizetések fejlődései együtt mozognak a gyűjtött adatainkban. A bonyolítási eredményünk viszont a Lakás módozat esetén negatívból pozitív előjelűvé változott, azaz egy biztonságos tartalékolás helyett egy 10%-os alultartalékolt eredményt kaptunk ebben a konkrét periódusban.

5.5 Összefüggés a kockázati termékek között

Ebben a bekezdésben azt a lehetőséget vizsgáljuk, amikor az egymástól elkülönülő kockázatokat képviselő módozatok között mégis fellelhetünk közös trendet. Ebben az egyének következetesen gondoskodó vagy hanyag viselkedését tehetjük fel. Azaz tegyük fel, hogy a biztosító állományában a többszerződéses ügyfelek, az egyes kötvényeiken bekövetkezett károkat következetesen igyekeznek, vagy elfelejtik bejelenteni.

A 4.5 bekezdésben tárgyalt kovariancia struktúrában

$$Cov(\eta_{i,j,n}, \eta_{l,k,m}) = \sigma_{j,n}\sigma_{k,m}\rho 1_{\{(i,j)=(l,k)\}} \quad \text{, ahol } (i,j,n) \neq (l,k,m)$$

Lássuk az 5.1 bekezdés példáján a feltételezett korrelációs összefüggést a kockázati termékekre:

$\boldsymbol{\eta}$	$\eta_{1,1,1}$	$\eta_{1,1,2}$	$\eta_{1,2,1}$	$\eta_{1,2,2}$	$\eta_{2,1,1}$	$\eta_{2,1,2}$	$\eta_{2,2,1}$	$\eta_{2,2,2}$	$\eta_{3,1,1}$	$\eta_{3,1,2}$	$\eta_{3,2,1}$	$\eta_{3,2,2}$
$\eta_{1,1,1}$	1	$\rho_{1,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{1,1,2}$	$\rho_{2,1}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{1,2,1}$	0	0	1	$\rho_{3,4}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{1,2,2}$	0	0	$\rho_{4,3}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{2,1,1}$	0	0	0	0	1	$\rho_{5,6}$	0	0	0	0	0	0
$\eta_{2,1,2}$	0	0	0	0	$\rho_{6,5}$	1	0	0	0	0	0	0
$\eta_{2,2,1}$	0	0	0	0	0	0	1	$\rho_{7,8}$	0	0	0	0
$\eta_{2,2,2}$	0	0	0	0	0	0	$\rho_{8,7}$	1	0	0	0	0
$\eta_{3,1,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\rho_{9,10}$	0	0
$\eta_{3,1,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\rho_{10,9}$	1	0	0
$\eta_{3,2,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\rho_{11,12}$
$\eta_{3,2,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\rho_{12,11}$	1

Ebben a struktúrában a főátló melletti elemek közötti összefüggést vizsgáljuk, azaz a példában vett két termék azonos helyzetű fejlődési hányadai között.

PERIÓDUS i	TELJES BECSÜLT KÁRRÁFORDÍTÁS	IBNR TARTALÉK	% TELJES	MSEP	% IBNR	CDR	%IBNR
	$\sum_n \hat{C}^t_{i,J,n}$	$\sum_n \hat{R}^t_{i,n}$		$msep_{\sum_n C_{i,J,n}\mid F_t}$		$\sum_n CDR^{t+1}_{i,n}$	
1	1 712,6	0,0	0,0%	0,0		0,0	
2	1 739,1	9,8	0,6%	0,0	0,2%	6,4	64,7%
3	1 393,0	72,1	5,2%	4,1	5,7%	-11,7	-16,2%
4	1 348,5	75,8	5,6%	4,0	5,2%	-8,3	-10,9%
5	1 583,4	113,5	7,2%	4,8	4,2%	-5,9	-5,2%
6	1 743,6	150,0	8,6%	6,9	4,6%	-3,7	-2,5%
7	2 277,3	296,9	13,0%	23,2	7,8%	1,9	0,6%
8	1 460,2	254,8	17,5%	15,1	5,9%	2,0	0,8%
9	1 367,1	332,3	24,3%	19,3	5,8%	8,8	2,6%
10	1 465,8	519,3	35,4%	53,0	10,2%	24,7	4,8%
11	1 147,3	657,4	57,3%	185,9	28,3%	68,0	10,3%
12	236,2	196,8	83,3%	206,9	105,2%	9,2	4,7%
Összesen	**17 474,3**	**2 678,9**	15,3%	**523,3**	19,5%	**91,4**	3,4%

TERMÉK n	TELJES BECSÜLT KÁRRÁFORDÍTÁS	IBNR TARTALÉK	% TELJES	MSEP	% IBNR	CDR	%IBNR
	$\sum_i \hat{C}_{i,J,n}^t$	$\sum_i \hat{R}_{i,n}^t$		$msep_{\sum_i C_{i,J,n}\|F_t}$		$\sum_i CDR_{i,n}^{t+1}$	
KGFB	3 260,7	1 062,8	32,6%	160,0	15,1%	-98,8	-9,3%
Casco	6 868,5	819,6	11,9%	245,4	29,9%	166,1	20,3%
Lakás	6 894,8	587,8	8,5%	100,1	17,0%	65,3	11,1%
Ált. Fel.	424,6	183,0	43,1%	44,7	24,4%	16,9	9,2%

A biztosítók ügynökei gyakran keresztértékesítenek az állományukon, azaz igyekeznek ugyan azoknak az ügyfeleknek több típusú kötvényt is eladni. Emiatt olyan közös kockázatok alakulhatnak ki a káralakulásban, amely esetén hiba lehet a függetlenség feltételezése.

Ebben a modellben a felelősségbiztosítási módozatok esetén kisebb tartalékot képeztünk, mint a független esetben, kisebb becsült hibával. Ennek oka, hogy a KGFB és Általános Felelősségbiztosítás kockázati termékek jellemzően hosszabb kifutásának varianciáját csökkenteni tudtuk a Casco és Lakás módozatok jellemzően rövidebb kifutásának varianciájával. A kisebb becsült hiba pontosabb modellre utal, amit a bonyolítási eredmény is igazol, a KGFB továbbra is biztonságosan tartalékolt, míg a többi módozaton csökkenteni tudtuk az alultartalékolás mértékét.

Ez látható is az adatokból számolt korrelációs mátrixból, amit a termékek 5. kifutási periódusában tapasztalt fejlődési hányadok között számoltunk. 10%-os szignifikancia szinten a KGFB és Általános felelősség módozatok között, illetve a Lakás és Általános Felelősség módozatok között utasíthatjuk el a korrelálatlanságot. A becsült korrelációs együtthatók pedig negatívak.

Correlations

		KGFB	Casco	Lakás	ÁltFel
KGFB	Pearson Correlation	1	,626	,369	-,766*
	Sig. (2-tailed)		,133	,416	,044
Casco	Pearson Correlation	,626	1	,225	-,640
	Sig. (2-tailed)	,133		,627	,122
Lakás	Pearson Correlation	,369	,225	1	-,749*
	Sig. (2-tailed)	,416	,627		,053
Ált Fel	Pearson Correlation	-,766*	-,640	-,749*	1
	Sig. (2-tailed)	,044	,122	,053	

*. Correlation is significant at the 0.1 level (2-tailed).

A Casco módozat esetén minden 10%-os szignifikancia szinten mindenhol elfogadtuk a korrelálatlanságot, így ennek a módozatnak a kárbecslésekor egyező tartalékszintet kaptunk a független eset feltételezésekor.

5.6 ÖSSZEFÜGGÉS A KIFUTÁSOK KÖZÖTT

Ebben a bekezdésben bemutatom a saját feltételezésemet. Annak a gyakorlatban tapasztalt összefüggésnek a hatását vizsgálom, amikor az egyes kárévek eltérő késői kárgyakorisága és késői átlagos kárkifizetése jellemzően végigfut a kárév teljes kifutásán. Ennek a hatását a fejlődési hányadokban is tapasztalhatjuk, így az egyes kifutási periódusok fejlődési hányadai között mérhetünk korrelációs összefüggést.

A 4.5 bekezdésben tárgyalt kovariancia struktúrában

$$Cov(\eta_{i,j,n}, \eta_{l,k,m}) = \sigma_{j,n}\sigma_{k,m}\rho 1_{\{i=l;n=m\}} \qquad \text{, ahol } j \neq k$$

, lássuk az 5.1 bekezdés példáján a feltételezett korrelációs összefüggést a kockázati termékekre:

$\boldsymbol{\eta}$	$\eta_{1,1,1}$	$\eta_{1,1,2}$	$\eta_{1,2,1}$	$\eta_{1,2,2}$	$\eta_{2,1,1}$	$\eta_{2,1,2}$	$\eta_{2,2,1}$	$\eta_{2,2,2}$	$\eta_{3,1,1}$	$\eta_{3,1,2}$	$\eta_{3,2,1}$	$\eta_{3,2,2}$
$\eta_{1,1,1}$	1	0	$\rho_{1,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{1,1,2}$	0	1	0	$\rho_{2,4}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{1,2,1}$	$\rho_{3,1}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{1,2,2}$	0	$\rho_{4,2}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{2,1,1}$	0	0	0	0	1	0	$\rho_{5,7}$	0	0	0	0	0
$\eta_{2,1,2}$	0	0	0	0	0	1	0	$\rho_{6,8}$	0	0	0	0
$\eta_{2,2,1}$	0	0	0	0	$\rho_{7,5}$	0	1	0	0	0	0	0
$\eta_{2,2,2}$	0	0	0	0	0	$\rho_{8,6}$	0	1	0	0	0	0
$\eta_{3,1,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$\rho_{9,11}$	0
$\eta_{3,1,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$\rho_{10,12}$
$\eta_{3,2,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\rho_{11,9}$	0	1	0
$\eta_{3,2,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\rho_{12,10}$	0	1

Ekkor a fenti korrelációs mátrixszal számolt kárbecslés a következő lesz:

Periódus i	**Teljes becsült kárráfordítás**	**IBNR tartalék**	% Teljes	**MSEP**	% IBNR	**CDR**	%IBNR
	$\sum_n \hat{C}_{i,J,n}^t$	$\sum_n \hat{R}_{i,n}^t$		$msep_{\sum_n C_{i,J,n}\|F_t}$		$\sum_n CDR_{i,n}^{t+1}$	
1	1 712,6	0,0	0,0%	0,0		0,0	
2	1 740,3	11,1	0,6%	0,1	1,3%	7,9	71,2%
3	1 395,4	74,5	5,3%	0,5	0,7%	-15,8	-21,2%
4	1 353,0	80,4	5,9%	0,7	0,9%	-13,8	-17,2%
5	1 583,9	114,0	7,2%	2,1	1,9%	2,2	1,9%
6	1 727,4	133,8	7,7%	1,0	0,7%	-2,8	-2,1%
7	2 303,0	322,6	14,0%	15,3	4,7%	-28,8	-8,9%
8	1 435,3	229,9	16,0%	9,3	4,0%	0,6	0,2%
9	1 394,2	359,4	25,8%	11,5	3,2%	-16,3	-4,5%
10	1 438,0	491,5	34,2%	10,5	2,1%	21,2	4,3%
11	1 051,3	561,3	53,4%	14,8	2,6%	42,6	7,6%
12	236,2	196,8	83,3%	11,3	5,7%	9,2	4,7%
Összesen	**17 370,6**	**2 575,2**	14,8%	**77,1**	3,0%	**6,2**	0,2%

Termék n	**Teljes becsült kárráfordítás**	**IBNR tartalék**	% Teljes	**MSEP**	% IBNR	**CDR**	%IBNR
	$\sum_i \hat{C}_{i,J,n}^t$	$\sum_i \hat{R}_{i,n}^t$		$msep_{\sum_i C_{i,J,n}\|F_t}$		$\sum_i CDR_{i,n}^{t+1}$	
KGFB	3 264,6	1 066,7	32,7%	42,7	4,0%	-160,2	-15,0%
Casco	6 831,7	782,8	11,5%	-4,7	-0,6%	104,8	13,4%
Lakás	6 880,3	573,3	8,3%	23,1	4,0%	55,1	9,6%
Ált. Fel.	393,9	152,4	38,7%	15,9	10,4%	6,5	4,3%

A felhasznált adatainkból a következő korrelációs struktúrát kaphatjuk, az első négy kifutásra:

Correlations

		Kifutás_1	Kifutás_2	Kifutás_3	Kifutás_4
Kifutás_1	Pearson Correlation	1	-,543	-,674	,692
	Sig. (2-tailed)		,164	,067	,057
Kifutás_2	Pearson Correlation	-,543	1	,200	-,296
	Sig. (2-tailed)	,164		,635	,477
Kifutás_3	Pearson Correlation	-,674	,200	1	-,611
	Sig. (2-tailed)	,067	,635		,107
Kifutás_4	Pearson Correlation	,692	-,296	-,611	1
	Sig. (2-tailed)	,057	,477	,107	

10%-os szignifikancia szinten az első, és a harmadik és negyedik kifutás között utasíthatjuk el a korrelálatlanságot. Ez arra utal, hogy vannak olyan kárévek, amikor minden periódusban magasabb, vagy alacsonyabb trendet mutat, a többi kárévez képest a fejlődési hányadok alakulásai.

Ebben a modellben kaptuk a becsült tartalékhoz viszonyított legkisebb becsült hibát, minden kockázati terméken és összességében is. Továbbá ebben a modellben a legkisebb a megképzett tartalék összege, amellett, hogy a bonyolítási eredmény egy nagyon alacsony szintre csökkent. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy ez a modell adja a legstabilabb eredményt a teljes becsült kárráfordításra.

Itt csak egy időszak eredményét vizsgáltam, ezért ebből még nem vonhatóak le végleges következtetések.

6. Konklúzió

A 5. fejezet számítási példáin láthattuk, hogy a különböző kovariancia struktúrák különböző irányban és nagyságban befolyásolhatják a megképzett tartalék összegét és annak hibáját. Mindezek figyelmen kívül hagyása a biztosítói gyakorlatban, csökkentheti a biztonságos tartalékolás meglétét. A fentiekben visszamért mutatók akkor mondanak biztonságosnak egy tartalékolási eljárást, ha a bonyolítási eredmény közel esik a nullához, és a becslés hibája kicsi.

Összefüggés típus	**Teljes becsült kárráfordítás**	**IBNR tartalék**	% Teljes	**MSEP**	% IBNR	**CDR**	%IBNR
	$\sum_n \hat{C}^t_{i,J,n}$	$\sum_n \hat{R}^t_{i,n}$		$msep_{\sum_n C_{i,J,n} \mid F_t}$		$\sum_n CDR^{t+1}_{i,n}$	
Független	**17 442,2**	**2 646,8**	15,2%	**652,4**	24,6%	**166,8**	6,3%
Számviteli	**17 549,3**	**2 753,9**	15,7%	**1 163,3**	42,2%	**102,9**	3,7%
Termék	**17 474,3**	**2 678,9**	15,3%	**523,3**	19,5%	**91,4**	3,4%
Kifutás	**17 370,6**	**2 575,2**	14,8%	**77,1**	3,0%	**6,2**	0,2%

Az eredmények azt mutatják, hogy a kifutásokban feltételezett összefüggések alkalmazása adja a legmegbízhatóbb becslést a gyűjtött adataimon.

Ezt a feltételezést általánosítani véleményem szerint nem lehet, a világ különböző területein nagyon eltérőek lehetnek az egyének kárbejelentési hajlandóságai, vagy az inflációs változások. Emiatt, a legjobban illeszkedő korrelációs struktúra megtalálása egyéni feladatnak kell lennie, amit a biztosítónál dolgozó aktuáriusoknak folyamatosan monitorozniuk kell. Véleményem szerint a jövőben a korrelációs struktúrák változásainak követése és annak alkalmazása a biztosítói tartalékok megképzésénél, feladata kell legyen a Szolvencia II elvei szerint működő biztosítónak.

Irodalomjegyzék

Bánhidi, S. (2011. Július 25). *A svájci szolvencia teszt nem-életbiztosítási szemszögből.* Forrás: Biztosítási Szemle: http://www.biztositasiszemle.hu/files/201107/sst_cikk_25072011-1.pdf

Johnson, R., & Wichern, D. (1988). Applied Multivariate Statistical Analysis. In R. Johnson, & D. Wichern. Pearson Education.

Mack, T. (1993). *Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates*. Forrás: ASTIN BULLETIN: http://www.actuaries.org/LIBRARY/ASTIN/vol23no2/213.pdf

Merz, M., & Wuthrich, M. V. (2007. január). *Prediction Error of the Expected Claims Development Result in the Chain Ladder Method.* Forrás: https://www.google.hu/search?q=Prediction+Error+of+the+Expected+Claims+Development+Result+in+the+Chain+Ladder+Method&oq=prediction+err&aqs=chrome.1.69i57j69i59j0l2.4610j0j4&sourceid=chrome&ie=UTF-8

Merz, M., & Wuthrich, M. V. (2008). Log-normal model for cumulative claims. In M. Merz, & M. V. Wuthrich, *Stochastic claims reserving methods in insurance* (old.: 167-182.). West Sussex, England: John Wiley & Sons Ltd.

Merz, M., & Wüthrich, M. V. (2008). *Modeling the Claims Development Result For Solvency Purposes*. Forrás: Casualty Actuarial Society E-Forum: http://www.casact.org/pubs/forum/08fforum/21Merz_Wuetrich.pdf

Merz, M., Wuthrich, M. V., & Hashorva, E. (2011. December 20.). Dependence Modeling in Multivariate Claims Run-Off Triangles. *Annals of Actuarial Science*, old.: 3-25.