SZAKDOLGOZAT

Két életre szóló járadékok modellezése kopula függvények segítségével

Nánássi Berta

Témavezető: Dr. Kovács Erzsébet
egyetemi tanár
Budapesti Corvinus Egyetem,
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

Konzulens: Gerényi Attila
Aktuárius
MKB Biztosító Zrt.

Eötvös Loránd Tudományegyetem
2014

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Kovács Erzsébetnek és Gerényi Attilának, akik elvállalták a konzulensi feladatokat, valamint szakmai tanácsaikkal segítették a dolgozat elkészítését.

Továbbá köszönettel tartozom a családomnak, valamint Poronyi Balázsnak és Szakál Dánielnek, akik segítettek az elemzéshez nélkülözhetetlen adatbázis összegyűjtésében és digitalizálásában.

1. fejezet

Bevezetés

Az elmúlt évszázad során a születéskor várható élettartam jelentősen megnőtt, köszönhetően a javuló életkörülményeknek, a technikai innovációknak, valamint az orvostudományban lezajlott fejlődésnek. A várható élettartam növekedése, valamint az öregedő társadalom azonban komoly problémákat generál a nyugdíjakkal kapcsolatban.

Mind a várható élettartam változása, mind pedig a demográfiai korfák átalakulása közrejátszik az egyre kevésbé fenntartható nyugdíjrendszerekben. Európa-szerte általános trend a csökkenő születésszám, valamint a várható élettartam növekedése, a társadalom elöregedése.

A fokozatosan növekvő függőségi ráták, azaz a nyugdíjszolgáltatásra jogosultak és aktív dolgozók számának aránya mutatja, hogy egyre kevesebb aktív dolgozó járulékából kell a megnövekedett számú nyugdíjas lakosság számára időskori járadékot fizetni. Ennek következményeként hosszútávon a rendszer fenntarthatatlanná válik, amely kezelésére a nyugdíjrendszert kell radikálisan megváltoztatni vagy pedig más területekről kell átcsoportosítani a folyosításhoz szükséges anyagi forrásokat. [9]

A rendszer további biztonságos és folyamatos működtetéséhez számos opció kínál megoldást. Az elmúlt években néhány európai országban növelték a nyugdíjkorhatárt, egynémelyikben pedig megemelték a nyugdíjjárulékokat. Magyarországon 2013-tól kezdve több lépcsőben növelik meg a nyugdíjkorhatárt 62-ről, férfiakra és nőkre egységesen, 65-re.

A magánnyugdíjpénztárak megszüntetésével a lakosság nagy része kizárólag az állami nyugdíjra számíthat, amely összege nem feltétlenül lesz elengendő a korábbi életszínvonaluk fenntartására. Ennek ellenére az emberek jelentős hányadának nincsen hosszútávú anyagi megtakarítása, mindösszesen 55%-uk

[26] rendelkezik valamilyen öngondoskodási formával, azonban ezek nagy része is csak rövid távra szól. Időskori megtakarításokkal mindössze 20%-uk rendelkezik és sokan nincsenek tisztában azzal, hogy mekkora nyugdíjra lesznek jogosultak. Így kevesen terveznek és takarítanak meg a nyugdíjas éveikre, illetve az alacsony jövedelmek miatt sok esetben az anyagi lehetőség sincsen meg az előgondoskodásra.

Többféle módozata létezik a megtakarítási formáknak, mint például az önkéntes nyugdíjpénztár vagy a járadékra váltható életbiztosítások. Az életbiztosítások közül léteznek olyan változatok, amelyek több életre szólnak. A több életre szóló biztosítások esetében a konstrukciótól függően anyagi biztonságot nyújthat a túlélő fél számára is.

A két életre szóló biztosításoknak – melyeket jellemzően házastársak kötnek – többféle változata létezik. Fontos szempontként kell figyelembevenni, hogy az egyik fél halála esetén a bevételek körülbelül a felére csökkennek, míg a kiadások nem ilyen mértékben változnak, amely a túlélő házastárs anyagi biztonságát veszélyeztetheti.

A biztosítók azzal a feltételezéssel élnek a két életre szóló biztosítások esetében, hogy a házaspárok halála nem függ össze. Ez a feltevés jelentősen megkönnyíti a biztosítás árazását, hiszen a függetlenséget figyelembevéve a túlélési valószínűségek szorzatát kell alkalmazni.

Statisztikai adatok alapján azonban a függetlenség megkérdőjelezhető, több tanulmány is született az elmúlt évtizedek során [7, 10, 11, 16], amelyek modellezték a halandóság közötti összefüggéseket. A szakirodalomban "Broken heart syndrome"-nak, azaz "Összetört szív szindrómának" nevezik azt a jelenséget, amikor a házaspár túlélő tagjának halandósága megnő a társa halálát követően. A halandóság összefüggésének hátterében állhat a közös életvitel és az azonos életszínvonal, valamint a rendkívül erős emocionális kötődés, amely a hosszú együttélés során kialakult.

A túlélő férj, feleség megrövidült várható élettartama miatt azonban a két életre szóló járadékokat túlárazottnak tekinthetjük, hiszen a túlélő fél számára rövidebb ideig kell biztosítani a járadékkifizetést. A függőség igazolásával és figyelembevételével pontosabban meghatározható a díj, amely így alacsonyabb lesz. Ezt kihasználva a biztosító megnövelheti a portfólióját, és az ügyfelek számára is kedvezőbb lenne az olcsóbb díj, amely így hozzájárulna a nagyobb arányú öngondoskodáshoz.

Korábbi szakdolgozatomban [13] már vizsgáltam a fenti témakört, amelyben a felhasznált, több mint 5000 adatot tartalmazó, saját gyűjtésű temetői adatbázis alátámasztotta a halandóság közötti összefüggéseket. Feltételezésem, hogy a halandóság függésének mértékénél szerepet játszik a házaspárok közötti korkülönbség is. Nagyobb adatbázist felhasználva lehetséges pontosabb vizsgálatokat is elvégezni, mint például a korkülönbség figyelembevétele.

A dolgozat "Életjáradékok" fejezetében összefoglalom a számításaimhoz szükséges valószínűségszámítási alapfogalmakat, illetve levezetem a két életre szóló járadékok díjkalkulációját. A díjkalkuláció során kizárólag a nettó díjakat fogom összehasonlítani.

A "Leíró statisztikák" fejezetben bemutatom a számoláshoz használt adatbázist, illetve kiszámolom a következő fejezetben használt függőségi paramétereket. A paramétert a Kendall-τ rangkorreláció segítségével határozom meg az adathalmaz meghatározott részhalmazaira.

A "Kopula függvények" fejezetben ismertetem az arkhimédeszi kopulák családját és a legfontosabb kopulafajtákat. A kopulák segítségével módosítom a járadékszámításhoz használt képleteket, amelyek így már figyelembeveszik a házaspár mortalitása közötti összefüggéseket.

A szakdolgozatom célja a korkülönbséget figyelembe véve egy még pontosabb árazási módszer kidolgozása.

2. fejezet

Életjáradékok

2.1. Valószínűségelméleti bevezető

A két életre szóló járadékok esetében a biztosítók általában azt feltételezik, hogy a házaspárok halálozása független. Ezt az álláspontot cáfolva szükséges vizsgálni a párok élettartama közötti összefüggéseket. A járadékárazáshoz, valamint a túlélési függvények paraméterezéséhez szükséges definiálni az alább található valószínűségelméleti fogalmakat, melyeket a következő fejezetekben használni fogok.

2.1. Definíció.
Legyen X egy nemnegatív valószínűségi változó, amely a megfigyelt egyén hátralévő idejét jelöli, valamint $x \in \mathbb{R}$. Ekkor túlélési függvénynek a következő valószínűséget nevezzük:

$$S(x) = P(X \geq x)$$

2.2. Definíció.
Jelöljük az együttes túlélési függvényt a következő módon:

$$S(x, y) = P(X \geq x, Y \geq y),$$

ahol X és Y a férj és a feleség életkorát jelöli a halálkor.

Az együttes túlélési függvényeknél kiszámolhatjuk azt a feltételes valószínűséget, hogy k év elteltével a házaspár mindkét tagja életben lesz (${}_kp_{xy}$), valamint, hogy kettőjük közül legalább az egyik fél életben lesz a vizsgált időpontban (${}_kp_{\overline{xy}}$). Ekkor rendre:

$${}_kp_{xy} = P(X \geq x + k, Y \geq y + k | X \geq x, Y \geq y),$$

valamint:

$$_kp_{\overline{xy}} = P(\{X \geq x+k\} \cup \{Y \geq y+k\} | X \geq x, Y \geq y).$$

Alapul vesszük azt, hogy a házaspárok mortalitása közötti összefüggés nagyban függ a házastársak közötti korkülönbségtől. Így a vizsgálathoz az együttes túlélési függvény számításakor szükséges figyelembevenni a párok közötti korkülönbséget. Amennyiben kizárólagosan a férfi és a nő halála között eltelt évek számát vizsgáljuk, akkor figyelmen kívül hagyjuk a várható élettartambeli eltérést, kevésbé vesszük figyelembe a közös életvitelt, illetve a túlélő fél mortalitására gyakorolt hatást.

A korkülönbség figyelembevételéhez először a fenti egyenletet kifejezzük az együttes túlélési függvénnyel:

$$_kp_{\overline{xy}} = \frac{S(x+k,y) + S(x,y+k) - S(x+k,y+k)}{S(x,y)} \tag{2.1}$$

A számítások során D-vel jelöljük a házastársak közötti korkülönbséget, amelyet $X - Y$ különbségeként kapunk, ezt felhasználva a következő feltételes együttes eloszlást kapjuk:

$$S_d(x,y) = S(x,y|D = d)$$

Ezt a feltételes valószínűséget behelyettesítve a fenti $_kp_{\overline{xy}}$ kifejezésbe, megkapjuk az előzőleg említett feltételes valószínűséget, amely már a korkülönbséget is beszámítja. A kifejezés alkalmazásával generálható a járadékárazáshoz használható kopulafüggvény.

A kopuláknál rendkivül gyakran használt valószínűségelméleti definíció a peremeloszlás. A következőkben használt eloszlásokra sok esetben használják a marginális eloszlás megnevezést is.

2.3. Definíció. *Amennyiben $f(x,y)$ az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye, akkor az*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

függvény az X valószínűségi változó Y-ra vonatkozó peremeloszlásának sűrűségfüggvénye. Hasonlóképpen

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

jelenti az Y valószínűségi változó X-re vonatkozó peremeloszlásának sűrűségfüggvényét.

2.1.1. Korreláció

A korreláció segítségével meghatározható a valószínűségi változók közötti kapcsolat iránya és nagysága. Gyakran használják a rangkorrelációt is, melyekkel két valószínűségi változó sorozat együttmozgása határozható meg. A dolgozatban abból a feltevésből indulok ki, hogy az életkorok közötti korreláció függ a házaspárok közötti korkülönbségtől, és a különböző korkülönbségekre kiszámolt korrelációk között jelentős eltérés van.

2.4. Definíció. *Lineáris korreláció*

$$R(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X\sigma_Y},$$

ahol E jelöli a várható értéket, σ a szórást és μ pedig az X és Y valószínűségi változó várható értékét.

A továbbiakban a változósorozatokon értelmezett rangkorrelációkat definiálom. Ezek előnye, hogy nem szükséges hozzá ismerni a változók eloszlását, amelynek meghatározása a gyakorlatban nehéz feladat.

2.5. Definíció. *Spearman rangkorreláció*
Tekintsük az $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ mintát. Legyen R_i és S_i az X_i és Y_i mintaelem rangja. Ekkor a két változó közötti kapcsolat korrelációját a Spearman rangkorrelációval a következőképpen írhatjuk le:

$$\rho_n = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)},$$

ahol $d_i = R_i - S_i$. A korreláció értékei a $[-1,1]$ intervallumba esnek, amennyiben az érték közel helyezkedik el 1-hez vagy -1-hez, akkor a kapcsolat szorosnak mondható. Pozitív érték esetén a két sorozat azonos, negatív érték esetén ellentétes irányba mozog.

2.6. Definíció. *Kendall-τ rangkorreláció*
Legyen (X_i,Y_i) és (X_j,Y_j) két mintaelem pár, azt mondjuk, hogy két pár megegyező, ha $R_{X_i} < R_{X_j}$ és $S_{Y_i} < S_{Y_j}$ vagy $R_{X_i} > R_{X_j}$ és $S_{Y_i} > S_{Y_j}$. Két pár pedig nem egyező, ha $R_{X_i} < R_{X_j}$ és $S_{Y_i} > S_{Y_j}$ vagy $R_{X_i} > R_{X_j}$ és $S_{Y_i} < S_{Y_j}$, egyenlőség esetén egyik csoportba sem tartoznak a párok.

Ekkor a Kendall-féle rangkorrelációs együttható a következőféleképpen állapítható meg:

$$\tau = \frac{(\textit{egyező párok száma}) - (\textit{nem egyező párok száma})}{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

ahol $\tau \in [-1, 1]$.

A dolgozatban a férfi és női életkorokra fogom kiszámítani a Kendall-τ értékeket, korkülönbség szerinti részhalmazokra szétbontva. Ezzel a technikával gyakorlatilag többdimenziós kopulák hozhatók létre, amelyek kétdimenziós kopulákból és kétdimenziós összefüggési paraméterekből állnak. Az adathalmaz nagysága lehetővé teszi a részhalmazok szerint vizsgálatot, mivel minden részhalmazban elegendő elemszámú minta szerepel. Ezeket az eredményeket a "Leíró statisztikák" című fejezetben részletesebben fejtem ki.

2.2. Járadékok számítása

2.2.1. Alapvető fogalmak

Életjáradéknak rendszeres kifizetések sorozatát nevezzük, amely kifizetések tarthatnak a biztosított haláláig vagy egy előre meghatározott időpontig. A járadékbiztosítást akár egy, akár több biztosítottra is meg lehet kötni, ekkor a kifizetések kezdete többféleképpen is alakulhat, függően a biztosítottak halálától, illetve életben maradásuktól.

Az egyik lehetőség, angol elnevezéssel *Joint life with last survivor*, amelynél a biztosítás kezdetétől a túlélő fél haláláig tart a járadék kifizetése, illetve a *Joint life with first death*, amelyben pedig csak az első fél halála után kezdődik és szintén a túlélő haláláig tart a járadékfizetés.

2.2.2. A járadékok fajtái és matematikája

A szakdolgozatomban az 1 Ft biztosítási összegre vonatkozó nettó díjakat fogom kiszámolni, amely kifejezéseknél x és y jelöli a férj és feleség belépési életkorát.

A díjak megállapításánál teljesülnie kell az ekvivalencia elvnek, amely szerint:

bevételek várható jelenértéke = kiadások várható jelenértéke.

A díjak meghatározásához feltétlenül szükséges definiálni a következő, aktuáriusi számolásokban használt alapvető jelöléseket:

- l_x, amely az x éves egyének számát jelöli a kiinduló populációban;
- $d_x = l_x - l_{x+1}$, azon egyének száma, akik elérik az x éves kort, de az $x+1$ éveset már nem;
- $\nu = \frac{1}{1+i}$, diszkonttényező, ahol i a technikai kamatláb.

Az **egyszeri díjas életjáradék** tekinthető az egyik legfontosabb járadéktípusnak, hiszen levezethető belőle tulajdonképpen az összes többi járadékfajta. Bevételi oldala $l_x \cdot \ddot{a}_x$, mivel minden biztosított előre befizeti a biztosítás díját. Az első járadéktag már a biztosítás megindulásakor esedékes, ezért az első évben minden biztosított megkapja, így az első kifizetés l_x Ft várható értékű. A következő években már csak $l_{x+1}, l_{x+2}, \ldots$ biztosított van életben, ennél fogva a nekik kifizetendő összeget diszkontálva és összeadva megkapjuk a várható kifizetések jelenértékét [1]:

$$l_x + l_{x+1} \cdot \nu + l_{x+2} \cdot \nu^2 + \ldots + l_\omega \cdot \nu^{\omega - x},$$

ahol ω jelöli a maximális életkort.

A fent bemutatott összefüggéseket felhasználva a nettó díj összege az alábbiak szerint alakul:

$$\ddot{a}_x = \frac{l_x + l_{x+1} \cdot \nu^1 + l_{x+2} \cdot \nu^2 + \ldots + l_\omega \cdot \nu^{\omega - x}}{l_x} = \sum_{j=0}^{\omega - x} \frac{l_{x+j}}{l_x} \cdot \nu^j$$

A fenti életjáradék kiterjeszthető több biztosítottra is, ekkor jelölje $\ddot{a}_{xy}$ a két életre szóló, évi 1 Ft járadéktagú, azonnal induló életjáradék-biztosítás egyszeri díját, x és y belépési korú biztosítottakkal. A biztosítók ebben az esetben is azt feltételezik, hogy a biztosítottak halála egymástól független időpontban következik be, illetve, hogy minden pár vásárol biztosítást. A nettó díj hasonlóképpen fog alakulni, mint ahogy az az egy életre szóló esetben megállapítható:

$$l_x \cdot l_y \cdot \ddot{a}_{xy} = l_x \cdot l_y + l_{x+1} \cdot l_{y+1} \cdot \nu + \ldots.$$

A biztosító azonban csak addig az időpontig vállal fizetési kötelezettséget, ameddig mindkét fél életben van, azonban ez a biztosítási típus a gyakorlatban meglehetősen ritkán fordul elő, mivel az első halál bekövetkeztével megszűnik a kifizetés.

Életszerűbbnek tekinthető ehelyett például az a járadékfajta, amelynél a járadékfizetés az egyik biztosított halála után kezdődik, illetve, amely addig az időpontig fizet, amíg valamelyik fél életben van. Ezeket a példákat tovább általánosítva olyan képletet kaphatunk, amelyből az összes kétszemélyes járadék származtatható. Amennyiben x halála után y-nak "A" járadék, illetve y halálát követően x-nek "B" járadék jár, valamint a közös járadék "C", akkor az általános járadék az alább meghatározott képlettel írható le:

$$A \cdot \ddot{a}_x + B \cdot \ddot{a}_y - (A + B - C) \cdot \ddot{a}_{xy}.$$

A kétszemélyes járadékok egyik fajtája az aszimmetrikus járadék, amely esetben előre meghatározzuk, hogy ki a biztosított és ki a kedvezményezett. Ezt a biztosítást feltételes biztosításnak is nevezik, hiszen a társbiztosított akkor kapja meg a biztosítási összeget, amennyiben túl fogja élni a társát. A továbbiakban két, lényegében eltérő járadékfajtát fogok bemutatni, amelyeknek az *Özvegyi járadék* és *Túlélő társ járadék* elnevezést adtam.

a,

Nevezzük *Özvegyi járadéknak* azokat a járadékfajtákat, amelyek 1 Ft-ot fizetnek minden biztosítási évfordulón, amíg a házaspár mindkét tagja életben van, és $R \in [0,1]$-et, amikor már csak a házastársak egyike él. Általánosabban:

$$\sum_{t=1}^{\omega} [R_1({}_tp_x^m -_t p_{xy}) + R_2({}_tp_y^f -_t p_{xy}) +_t p_{xy}],$$

ahol $({}_tp_x^m -_t p_{xy})$ a valószínűsége, hogy az R_1 járadékot csak a férfi kapja, illetve $({}_tp_y^f -_t p_{xy})$ a valószínűsége, hogy az R_2 járadékot a nő, valamint ${}_tp_{xy}$ a valószínűsége, hogy 1 Ft kerül kifizetésre.
A gyakorlatban általában $R = 1/3, 1/2, 2/3$ szorzótényezőt állapítanak meg a terméktervezéskor. Vegyük észre, hogy az $R = 0$ eset nem egyéb, mint az első biztosított halálának időpontját követően megszűnő járadékbiztosítás. Az R szorzótényezőt célszerű lenne 0.5-nél nagyobb értékre beállítani, hiszen míg a bevételek megközelítőleg a felére csökkennek az egyik fél halála után, addig a kiadások nem csökkennek ugyanilyen mértékben, ennél fogva szükségszerű lenne ezt a bevételkiesést kompenzálni.

b,

A továbbiakban tekintsük a *Túlélő társ járadékát*, amelynél egy előre meghatározott összeg kerül kifizetésre mindaddig, ameddig valamelyik fél még életben van. Ekkor a nettó díj:

$$\sum_{t=1}^{\omega} \nu^t \cdot_t p_{\overline{xy}},$$

ahol ${}_tp_{\overline{xy}}$ a valószínűsége annak, hogy a pár legalább egyik tagja t év múlva is életben lesz. Ezt a valószínűséget a marginális és a két életre szóló túlélési függvényből vezethetjük le:

$$ {}_tp_{\overline{xy}} = {}_t p_x^m + {}_t p_y^f - {}_t p_{xy} = S_x^m(t) + S_y^f(t) - S_{xy}(t,t). \tag{2.2} $$

3. fejezet

Leíró statisztikák

Az aktuáriusi számítások legfontosabb alapja a megfelelő statisztikai adathalmaz, mely reprezentatív a népességre, vagy a vizsgált csoportra nézve. A szakdolgozatban házaspárok adatait használtam fel, melyben a férj és a feleség születési, valamint halálának éve szerepelt. Ilyen formátumú adatokkal sem a KSH, sem pedig az Országos Nyugdíjbiztosítási Főigazgatóság nem rendelkezik.

A társadalombiztosítási nyugellátásról szóló 1997. évi LXXXI. törvény 96. §-a kizárólag az általa meghatározott célból engedi meg adatok gyűjtését, amely nem terjed ki a házastársak nyilvántartására, ezért csak temetői jegyzékek segítségével volt lehetőségem összegyűjteni az elemzéshez szükséges megfelelő adatállományt.

A temetői adatbázisok használata során digitalizált adatok segítségével 1, illetve 2-dimenziós adattáblák készíthetők, melyeket felhasználva elvégezhetők az aktuáriusi számítások. A temetőkben nyugvók halmaza azonban nem egyezik meg a biztosítást vásárlókéval, a járadékosok halandósága jelentősen kisebb, mint a néphalandóság. Mivel temetői adatbázisokat használok fel a vizsgálataim során, ezért a KSH által készített 2009-es néphalandósági táblát fogom alkalmazni.

3.1. Az adathalmaz bemutatása

A szakdolgozatomban 13159 adatpárt elemeztem, amelyekhez különböző forrásokból sikerült hozzájutnom. A feldolgozott adatok közül 5248 mintapár korábbi gyűjtésekből származik, ezek javarészt 2010-2011-es gyűjtésűek, melyek egy részét Takács Viola bocsátotta rendelkezésemre, a másik felét pedig a korábbi szakdolgozatomból használtam fel. További 7911 adatpárt 2012-ben szereztem be különböző internetes forrásokból [24], [25]. A Testamentum.hu [24] honlapról szegedi adatokat, míg az Öröklét.hu [25] oldalról pedig budapesti adatokat sikerült feldolgoznom.

A begyűjtött adatok közül többféle szempont alapján választottam ki a számításokhoz megfelelőeket. Csakis azokat a rekordokat használtam fel a vizsgálatomhoz, amelyeknél mindkét fél 1900 után született, illetve 50 évnél nem voltak fiatalabbak. Ezekre a szűrésekre azért volt feltétlenül szükség, mert olyan adatállományt célszerű vizsgálni, amelynél nem változott szignifikánsan a várható élettartam.

A szegedi adatbázis szűrését követően megközelítőleg 5000 – számomra felhasználható – adat maradt, míg a budapesti minták közül körülbelül 3000 adatpárt tudtam felhasználni.

Az adathalmaz alapstatisztikáit a 3.1 táblázat tartalmazza:

	Férfi	**Nő**	Együttesen	Korkülönbség
Átlag	72.74	74.72	73.73	-
Minimum	50	50	50	-12
Maximum	106	105	106	19
Szórás	9.895	10.193	10.094	4.753

3.1. táblázat. Statisztikai adatok

A Központi Statisztikai Hivatal által 2012-es adatokra végzett elemzése alapján a magyar férfiak születéskor várható élettartama 71.6 év, míg a nők várható élettartama 78.7 év. Ez alapján az általam használt adatbázisban szereplő férfiak átlagos kora 1 évvel magasabb, a nőké pedig 4 évvel alacsonyabb a magyar átlagnál. Az adatbázis elemzése során kapott átlagéletkor megközelíti a teljes lakosságra számított várható életkort, így véleményem szerint megfelelően reprezentálja a magyar lakosságot.

3.1.1. Cenzorálás

A túlélés-analízis egyik rendkívül fontos tulajdonsága a cenzorálás, amely akkor fordul elő, amikor az esetleges meghibásodási idő nem ismert. A leggyakoribb a felülről való levágás, mely a házaspárok túlélés-analízise esetében azt jelenti, hogy nem ismerjük a túlélő személy halálának időpontját. Az adatgyűjtés során sok esetben fordult elő, hogy a tovább élő fél halála még nem következett be. Ez nagy mértékben torzította volna az eredményeket, ennek okán csak a nem cenzorált adatokat tettem bele az elemzésembe.

A megvizsgált adatoknál 579 esetben ugyanabban az évben hunytak el a házaspár tagjai, 4116 esetben a férfi volt a túlélő, a többi, 8463 esetben pedig a nő élt tovább.

A dolgozat alapfeltevése az, hogy a házaspárok halandósága között fellelhető kapcsolat függ a férj és a feleség korkülönbségétől. Ezért a halandóságok közti összefüggések vizsgálatát részhalmazokra bontottam, korkülönbség alapján szétválogatva. A kordifferenciát minden esetben a férfi életkorához viszonyítottam, így amennyiben a feleség volt az idősebb, akkor a korkülönbséget negatív értékkel jelöltem.

Idősebb feleség tekintetében a legnagyobb korkülönbség 12 év volt, a férj esetében pedig 19 évet találtam. Idősebb asszonyoknál a 7 évnél, idősebb férfiaknál pedig a 15 évnél nagyobb korkülönbség ritkán fordult elő az adatsoromban, ezért ezeket az eseteket összevontam. Ezt figyelembe véve a 3.2 táblázatban található esetszámokkal fogok dolgozni.

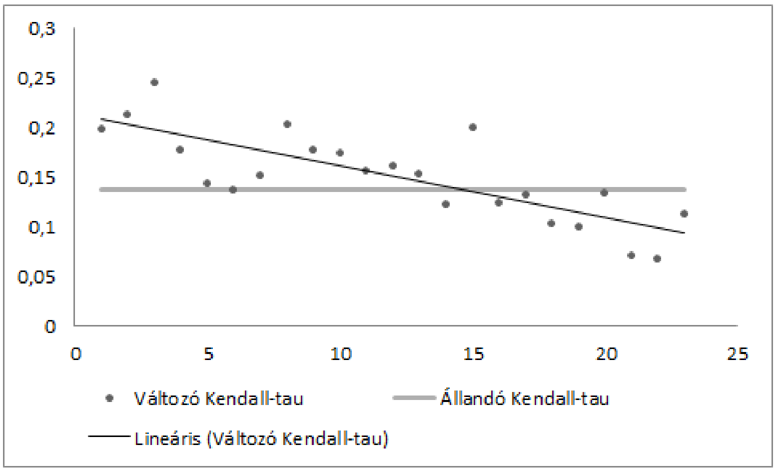
Korkülönbség	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
Házaspárok száma	264	99	166	223	263	413	579	911
Korkülönbség	1	2	3	4	5	6	7	8
Házaspárok száma	1094	1247	1243	1269	1092	834	721	574
Korkülönbség	9	10	11	12	13	14	≥ 15	
Házaspárok száma	442	362	282	203	165	122	258	

3.2. táblázat. Adott korkülönbségek előfordulása

A részhalmazokra külön-külön fogom meghatározni a függőségi paramétert, következésképp az adott korkülönségekhez különböző túlélési függvényt fogok illeszteni, ezáltal kétdimenziós kopulák segítségével lehet modellezni a függést. Ezekhez első lépésben az előző fejezetben definiált Kendall-τ-t kell kiszámolni.

3.2. Kendall-τ

A rangkorreláció meghatározásához az SPSS programot használtam, amely segítségével mind a részhalmazokra, mind a teljes adathalmazra kiszámolható a korreláció értéke. A teljes adathalmazra kapott Kendall-τ értéke 0.138, amely



3.1. ábra. A függőségi paraméter változása a korkülönbség függvényében

99%-os szignifikanciaszinten alátámasztja a valószínűségi változósorok összefüggését.

A 3.3 táblázat tartalmazza az adott részhalmazokra vonatkozó Kendall-τ rangkorrelációt.

Korkülönbség	≤ -7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
Kendall-τ	0.198	0.213	0.246	0.178	0.143	0.137	0.151	0.203
Korkülönbség	1	2	3	4	5	6	7	8
Kendall-τ	0.178	0.174	0.156	0.161	0.153	0.122	0.201	0.125
Korkülönbség	9	10	11	12	13	14	≥ 15	
Kendall-τ	0.133	0.103	0.100	0.134	0.071	0.068	0.113	

3.3. táblázat. Rangkorreláció az adatbázis részhalmazaira

Az eredményekből egyértelműen leolvasható, hogy az egyes korkülönbségeknél jelentősen eltérő lehet a rangkorreláció, mellyel igazoltuk a dolgozat alapfeltevését. Megfigyelhető, hogy azokban az esetekben, amikor a feleség idősebb volt a férjnél, akkor minden esetben magasabb rangkorrelációt kaptunk, mint ha az egész adathalmazt vizsgáltuk volna, azaz a túlélő fél mortalitásának növekedésére nagyobb hatással van a társa halála. Ezekbe a részhalmazokba 2919 pár került, ami a teljes adathalmaz 22%-a. Ha a férj volt idősebb, akkor 5-7 éves korkülönbségig szintén magasabb értékű rangkorrelációt kaptunk, mely összességében már az adathalmaz 52%-át jelentette.

A változó függőségi paraméterekre illesztett trend alapján megállapítható, hogy megközelítőleg lineáris trendet követnek. A 3.1 ábrán látható, hogy a függőségi paraméter csökken a korkülönbség növekedésével.

A rangkorrelációban látszó szignifikáns eltérés miatt tehát célszerű összehasonlítani a korkülönbséget figyelembevevő paraméterekkel és anélkül kapott annuitásokat, mellyel számszerűsíthető a paraméterek eltérésének hatása. A kapott értékeket az "Eredmények" fejezetben vizsgálom majd.

3.3. Alkalmazott eloszlások

A következő fejezetben a számításokhoz alkalmazható eloszlásfüggvényeket mutatom be. A szakirodalomban leggyakrabban a Gompertz- és a Weibull-eloszlást használják, főként az egyszerű alkalmazhatóság miatt.

A túlélési függvény megállapításához az adathalmazra kell illeszteni egy megfelelő függvényt, amellyel kiszámolható a várható élettartam. Ennek leírására alkalmas a Gompertz- és a Weibull-függvény is. Frees, Carriere és Valdez [7] munkája alapján mind a Weibull-, mind a Gompertz-eloszlás megfelelően használható marginális függvényként. A két függvény által generált túlélési függvények között elhanyagolható az eltérés, ezáltal a további számolások eredményei a választott eloszlástól függetlenek lesznek.

A túlélési kopulák generálásához túlélési függvényeket szükséges használni marginális eloszlásként, melyeket az adathalmazból nyert statisztikai jellemzőkkel definiálhatunk.

3.3.1. Gompertz-eloszlás

Benjamin Gompertz 1825-ben publikálta az azóta széles körben alkalmazott függvényét, amely segítségével modellezhető a halálozási intenzitás. Feltételezése az volt, hogy az intenzitás a kor függvényében exponenciális függvénnyel leírható.

$$\mu(x) = Bc^x$$

[7]-hez hasonlóan átparaméterezve vizsgáljuk az intenzitást, ahol legyen $c = e^{\frac{1}{\sigma}}$ és $B = \frac{e^{-\frac{m}{\sigma}}}{\sigma}$

$$\mu(x) = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{x-m}{\sigma}}.$$

Itt m jelöli az adathalmaz móduszát, σ pedig a módusz körüli szórást. Ekkor a kétparaméteres Gompertz-féle túlélési függvény a következőképpen módosul:

$$S(x) = 1 - F(x) = e^{e^{-\frac{m}{\sigma}} - e^{\frac{x-m}{\sigma}}} = e^{e^{-\frac{m}{\sigma}}(1-e^{\frac{x}{\sigma}})}.$$

Felhasználva az adathalmaz móduszát és szórását, a túlélési függvények a férfiakra és a nőkre az alábbiak szerint írható fel:

$$S_M(x) = e^{e^{-\frac{m_M}{\sigma_M}}(1-e^{\frac{x}{\sigma_M}})} = e^{e^{-\frac{72.74}{9.895}}(1-e^{\frac{x}{9.895}})} = e^{0.00642(1-e^{0.101061x})}$$

$$S_F(y) = e^{e^{-\frac{m_F}{\sigma_F}}(1-e^{\frac{y}{\sigma_F}})} = e^{e^{-\frac{74.72}{10.193}}(1-e^{\frac{y}{10.193}})} = e^{0.00655(1-e^{0.0981065y})}$$

3.3.2. Weibull-eloszlás

Az alábbi folytonos eloszlást 1927-ben dolgozta ki Fréchet, azonban részletesebben csak 1951-ben Weibull tárgyalta a publikációjában.

Sűrűségfüggvényének általános alakja a következő:

$$f(x) = \frac{\gamma}{m}(\frac{x-\mu}{m})^{(\gamma-1)} \exp\left(-((x-\mu)/m)^{\gamma}\right) \qquad x \geq \mu; \gamma, m > 0$$

A $\mu = 0$ esetén két paraméteres Weibull-függvényről beszélünk, melynek eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = 1 - exp\Big\{ - \Big(\frac{x}{m}\Big)^{\frac{m}{\sigma}} \Big\},$$

ahol m és σ a két paraméter. Az eloszlás módusza $M = m(1-\sigma/m)^{\sigma/m}$, amely az adathalmaz alapján, férfiak esetén $m = 72.74$ és $\sigma = 9.895$ behelyettesítésével megközelítőleg $M = 71.31$, míg nőknél az $m = 74.72$ és $\sigma = 10.193$ paramétereket alkalmazva $M = 73.24$. Mivel a kapott M értékek kevesebb, mint 2%-kal térnek el az adathalmaz átlagától, ezért az m értékeket tekinthetjük az eloszlás móduszának.

A Weibull-féle túlélési függvény férfiakra és nőkre az alábbi [4, 21]:

$$S_M(x) = exp\Big\{ - \Big(\frac{x}{m_M}\Big)^{\frac{m_M}{\sigma_M}} \Big\},$$

$$S_F(y) = exp\Big\{ - \Big(\frac{y}{m_F}\Big)^{\frac{m_F}{\sigma_F}} \Big\},$$

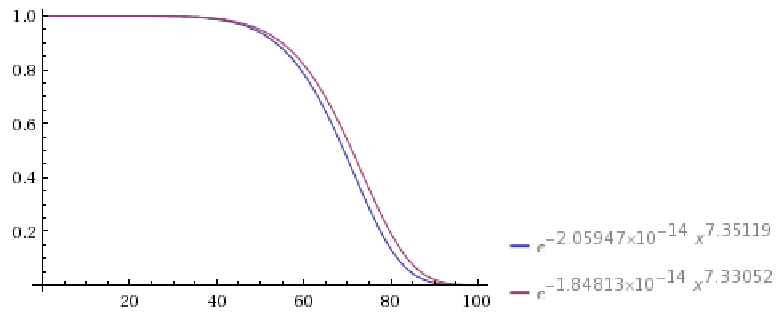
ahol a Gompertz-eloszláshoz hasonlóan $m > 0$ a módusz, a $\sigma > 0$ pedig a módusz körüli szórás.

Az adatsorból kapott statisztikák alapján a következő marginális túlélési függvények adódtak:

$$S_M(x) = exp\Big\{ - \Big(\frac{x}{72.74}\Big)^{\frac{72.74}{9.895}} \Big\} = e^{-2.05947\times 10^{-14}\cdot x^{7.35119}},$$

$$S_F(y) = exp\Big\{ - \Big(\frac{y}{74.72}\Big)^{\frac{74.72}{10.193}} \Big\} = e^{-1.84813\times 10^{-14}\cdot y^{7.33052}}.$$

Ábrázolva a fenti függvényeket külön férfiakra és nőkre, rendre kék és lila színnel jelölve:



3.2. ábra. A Weibull túlélési függvény ábrája férfiak és nők esetében

A további vizsgálataim során a Weibull-eloszlással illesztett túlélési függvényeket fogom használni a kopulafüggvények generálásához.

4. fejezet

A kopula függvények

A kopula függvények széleskörű felhasználhatóságuk miatt igen elterjedtté váltak az elmúlt évtizedek alatt. Alkalmazásukkal együttes eloszlásokat konstruálhatunk, aminek segítségével egyszerűen elemezhetők a különböző valószínűségi változók közötti függések és együttmozgások.

Ilyen felhasználási terület lehet például a pénzügyi kockázatelemzés, statisztikai vizsgálatok és elemzések, valamint nem utolsó sorban a halandósági függések vizsgálata is. Ebben a fejezetben, a számításokhoz szükséges valószínűségszámítási fogalmak és a kopulák mellett, a biztosítási területen kitűnően alkalmazható Arkhimédeszi-kopulák tulajdonságait foglalom össze [8, 10, 12, 14, 20].

4.1. Elméleti bevezető

4.1. Definíció.
Kopulának azokat a $C : I^2 \to I$ kétváltozós függvényeket nevezzük, amelyek teljesítik a következő tulajdonságokat:

- $\forall u, v \in I - re \quad C(u, 0) = C(0, v) = 0$

- $\forall u, v \in I - re \quad C(u, 1) = u$ *és* $C(1, v) = v$

- $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I - re$, *ahol* $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$
$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0,$
ahol I^2 az egységnégyzetet jelöli.

A kopulát definiálhatjuk a következő módon is:

4.2. Definíció. *Legyen F_1 és F_2 $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a $C : I^2 \to I$ függvényt kopulának nevezzük, ha*

$$C(u,v) = P(F_1 < u, F_2 < v)$$

teljesül.

A definíciók egyszerűen kiterjeszthetőek több dimenzióra is, melyekre a dolgozatban nem térek ki.

A kopulák gyakori alkalmazásának egyik indoka, hogy egydimenziós valószínűségi változók eloszlásából, mint marginális függvényekből generálható az együttes eloszlás. Ezt az állítást Sklar bizonyította 1956-ban:

4.1. Tétel (Sklar-tétel).
Legyen H egy együttes eloszlásfüggvény, F és G marginális eloszlásokkal. Ekkor létezik C kopula, amely $\forall u, v \in R$-re teljesíti az alábbi tulajdonságot:

$$H(u,v) = C(F(u), G(v)).$$

Amennyiben F és G folytonos eloszlásúak, akkor az általuk meghatározott C kopula egyértelmű. Hasonlóan a kopula definíciójához, a Sklar-tétel is kiterjeszthető több dimenzióra.

4.2. Tétel. *Legyen $H(x,y)$ kétdimenziós eloszlásfüggvény, F_1, F_2 folytonos peremeloszlásokkal. Ezek egyértelműen reprezentálnak egy kopulafüggvényt, amely a következő:*

$$C(u,v) = H(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v))$$

A kopulafüggvények felhasználásával külön kezelhetők a peremeloszlások, valamint az eloszlások közötti összefüggések. Két dimenziós kopulák esetében meghatározható a kopula alsó és felső korlátja az alábbi módon:

4.3. Tétel. *Legyen C kopula, F_1 és F_2 pedig folytonos peremeloszlások. Ekkor minden $u, v \in I$-re megmutatható, hogy*

$$max(u + v - 1, 0) \leq C(u,v) \leq min(u,v)$$

4.1. Bizonyítás (4.3. tétel). *A kopula definíciójából kapjuk, hogy:*

$$P(F_1 \geq u, F_2 \geq v) = 1 - u - v + C(u,v),$$

Ezt átrendezve a következő kifejezés adódik:

$$C(u,v) = u + v - 1 + P(F_1 \geq u, F_2 \geq v).$$

Felhasználva, hogy egy valószínűség nagyobb vagy egyenlő, mint 0:

$$C(u,v) \geq u + v - 1.$$

Mivel a kopulafüggvény negatív értéket nem vehet fel, ezért az alsó korlát a következő összefüggéssel írható fel:

$$C(u,v) \geq max(0, u + v - 1).$$

A felső korláthoz vegyük észre az alábbiakat:

$$C(u,v) = P(F_1 \leq u, F_2 \leq v) \leq P(F_1 \leq u) = u,$$
$$C(u,v) = P(F_1 \leq u, F_2 \leq v) \leq P(F_2 \leq v) = v,$$

amiből következik, hogy:

$$C(u,v) = P(F_1 \leq u, F_2 \leq v) \leq min(u,v).$$

Amennyiben a marginális eloszlások túlélési függvények, akkor az ezek által generált kopula a valószínűségi változók együttes túlélési függvénye lesz. Ezzel a tulajdonsággal rendelkeznek az Arkhimédeszi kopulák, melyekkel részletesebben a következő fejezetben foglalkozom.

4.2. Arkhimédeszi kopulák

A biztosítási számításokhoz kitűnően alkalmazható a kupolák ezen osztálya, az Arkhimédeszi kopulák [8, 10, 12, 14, 20]. A marginális eloszlások ekkor túlélési függvények, melyek könnyen generálhatóak az előző fejezetben tárgyalt valószínűségelméleti fogalmak segítségével. Ezzel a kopulacsaláddal a többdimenziós eloszlások egydimenziós változói között fennálló kapcsolatot egyszerűen meghatározhatjuk.

4.3. Definíció.
Legyen $\psi : [0,1] \to [0,\infty]$ folytonos, szigorúan csökkenő függvény. Ekkor ψ pszeudo-inverze alatt a következő $\psi^{[-1]}$ függvényt értjük:

$$\psi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \psi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \psi(0) \\ 0 & \psi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Ekkor $\psi^{[-1]}$ folytonos és csökkenő függvény $[0, \infty]$-n és szigorúan csökkenő $[0, \psi(0)]$-n. Valamint, ha $\psi(0) = \infty$, akkor $\psi^{[-1]} = \psi^{-1}$.

4.4. Definíció.
Legyen $\psi : (0, 1] \to [0, \infty)$ *egy konvex, csökkenő függvény, amelyre* $\psi(1) = 0$. *Ekkor a következő függvényt Arkhimédeszi kopulának nevezzük* ψ *generátorfüggvénnyel:*

$$C_\psi(x, y) = \psi^{-1}(\psi(x) + \psi(y)),$$

$\forall x, y \in (0, 1]$*-ra.*

Az Arkhimédeszi kopulák segítségével felírható a "Járadék" fejezetben említett (2.1)-es kifejezés, amennyiben

$$S(x, y) = C(S_M(x), S_F(y)).$$

A Sklar-tétel következményeként láthattuk, hogy folytonos marginálisú eloszlásokból egyértelmű együttes eloszlás generálható. Mivel a Weibull-eloszlás illesztésével folytonos túlélési függvényeket kapunk, ezért az ezekkel generált kopulák egyértelműek lesznek.

1. Állítás.
Legyen C Arkhimédeszi kopula, ψ *generátorfüggvénnyel, ekkor:*

- *C szimmetrikus, azaz* $C(u, v) = C(v, u)$*, minden* $u, v \in [0, 1]$*-re.*
- *C asszociatív, azaz* $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$*, minden* $u, v, w \in [0, 1]$*-re.*
- *Ha* $c > 0$ *konstans, akkor* $c\psi$ *is C generátorfüggvénye.*

Számos Arkhimédeszi kopulát generálhatunk a megfelelő függvények segítségével, a túlélés-analízis során a szakirodalomban leggyakrabban használt kopulafajták a következők:

- Frank-kopula
  Generátorfüggvénye:
  $$\psi^{-1} = -log\Big[\frac{exp(-\alpha u) - 1}{exp(-\alpha) - 1}\Big],$$
  ahol $\alpha \neq 0$, a kopula pedig:
  $$C_F(u, v; \alpha) = -\frac{1}{\alpha} log\Big[1 + \frac{(exp(-\alpha u) - 1)(exp(-\alpha v) - 1)}{exp(-\alpha) - 1}\Big]$$

- Clayton-kopula:
  Generátorfüggvénye:

$$\psi^{-1} = \frac{1 - u^{\alpha}}{\alpha u^{\alpha}},$$

  ahol $\alpha > 0$, a kopula:

$$C_C(u, v; \alpha) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$$

- Gumbel–Hougaard-kopula:
  Generátorfüggvénye:

$$\psi^{-1} = (-logu)^{\alpha},$$

  ahol $\alpha \geq 1$, a kopula pedig:

$$C_{GH}(u, v; \alpha) = exp\Big\{ - [(-logu)^{\alpha} + (-logv)^{\alpha}]^{1/\alpha} \Big\}$$

A paraméterek közötti függés az α paraméter segítségével jellemezhető, melyet egyszerűen kiszámolhatunk likelihood becsléssel vagy akár a Kendall-τ felhasználásával.

Az Arkhimédeszi-kopulák esetében a Kendall-τ egyszerűen leírható a generátorfüggvény segítségével:

4.4. Tétel.

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\psi(t)}{\psi'(t)} dt$$

A tétel bizonyításához felhasználjuk a következő két tételt, amelyeket nem bizonyítunk. A tételek bizonyítását lásd: [12]:

4.5. Tétel. *Legyen C Arkhimédeszi-kopula ψ generátorfüggvénnyel. Jelölje K_C a következő halmaz C-mértékét: $\{(u, v) \in I^2 \,|C(u, v) \leq t\}$. A halmaz felírható az alábbi ekvivalens formában is: $\{(u, v) \in I^2 \,|\psi(u) + \psi(v) \geq \psi(t)\}$. Ekkor minden $t \in I$-re:*

$$K_C(t) = t - \frac{\psi(t)}{\psi'(t)}.$$

4.6. Tétel. *Legyen F_1 és F_2 folytonos valószínűségi változók és C kopula, amelyet a két változó határoz meg. Ekkor a Kendall-τ a következőképpen állapítható meg:*

$$\tau_{X,Y} = 4E(C(F_1, F_2)) - 1.$$

4.2. Bizonyítás (4.4 tétel). *Legyen F_1 és F_2 egyenletes eloszlású a valószínű változó $(0,1)$-en, melyek együttes eloszlását jelölje C, valamint $C(F_1, F_2)$ eloszlását jelölje K_C. Ekkor*

$$\tau_C = 4E(C(F_1, F_2)) - 1 = 4\int_0^1 t dK_C(t) - 1,$$

melyet átalakítva

$$\tau_C = 3 - 4\int_0^1 K_C(t)dt.$$

Mivel

$$K_C = t - \frac{\psi(t)}{\psi'(t)},$$

így

$$\tau_C = 3 - 4\int_0^1 \left[t - \frac{\psi(t)}{\psi'(t)}\right] dt = 1 + 4\int_0^1 \frac{\psi(t)}{\psi'(t)} dt.$$

A dolgozatban a Clayton-, és a Gumbel–Hougaard-kopulák segítségével fogom árazni a járadékokat, így ezen kopulacsaládokra végzem el a τ-ra vonatkozó fenti számítást.

Legyen C_α a Gumbel–Hougaard családból származó kopula α függőségi paraméterrel és ψ generátorfüggvénnyel. Ekkor minden $\alpha \geq 1$-re

$$\frac{\psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{t\,lnt}{\alpha},$$

ekkor az integrálást elvégezve:

$$\tau = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{1-\tau}.$$

Legyen C_α egy Clayton-kopula α függőségi paraméterrel és ψ generátorfüggvénnyel. Ekkor:

$$\frac{\psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{t^{\alpha+1} - t}{\alpha},$$

ahol $\alpha \neq 0$ és

$$\frac{\psi(t)}{\psi'(t)} = t\,lnt,$$

amennyiben $\alpha = 0$. Ha $\alpha \neq 0$ akkor

$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha + 2} \Longrightarrow \alpha = \frac{2\tau}{1-\tau}.$$

4.2.1. Járadékszámítás kopulák segítségével

Az eddigiek alapján már könnyedén felírhatóak a kétéletre szóló járadékok számításához szükséges képletek. Az ekvivalencia elvet szem előtt tartva meghatározható a járadékok bevételi és kiadási oldala.

Tekintsük azt a biztosítást, amelynél a biztosító addig fizet, amíg mindkét fél életben van. Ekkor az ekvivalencia elv alapján a nettó díj a következő:

$$l_x \cdot l_y \cdot \ddot{a}_{xy} = l_x \cdot l_y + l_{x+1} \cdot l_{y+1} \cdot \nu^1 + \dots.$$

Ebből ekvivalens átalakításokkal az alább levezetett eredményt kapjuk:

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{j=0}^{min(\omega-x,\omega-y)} \frac{l_{x+j} l_{y+j}}{l_x l_y} \nu^j,$$

mivel:

$$\frac{l_{x+j} l_{y+j}}{l_x l_y} = P(X \geq x+j, Y \geq y+j | X \geq x, Y \geq y) = \frac{P(X \geq x+j, Y \geq y+j)}{P(X \geq, Y \geq y)} =$$

$$= \frac{C(x+j, y+j)}{C(x,y)}.$$

Tehát a nettó díj:

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{j=0}^{min(\omega-x,\omega-y)} \frac{C(x+j, y+j)}{C(x,y)} \nu^j.$$

Ez a járadékfajta azonban nem teljesen életszerű, hiszen ekkor az első haláleset bekövetkeztével megszűnik a biztosítás. A "Járadék" fejezetben részletesen levezetett *Özvegyi járadék* esetén az első fél halálát követően sem szűnik meg a kifizetés.

Tekintsük a *Túlélő társ járadékát*, amelynél egy előre meghatározott összeg kerül kifizetésre, amely a túlélő fél halálig tart. A 2.2 képletben szereplő közös túlélési függvényt [12] alapján ki tudjuk fejezni kopulák segítségével:

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_t p_x^m + {}_t p_y^f - {}_t p_{xy} = S_x^m(t) + S_y^f(t) - S_{xy}(t,t),$$

valamint

$$S_{xy}(s,t) = S_x^m(s) + S_y^f(t) - 1 + C_{xy}(1 - S_x^m(s), 1 - S_y^f(t)).$$

A két összefüggést egybevéve:

$${}_tp_{\overline{xy}} = 1 - C_{xy}(1 - S_x^m(t), 1 - S_y^f(t)).$$

Független esetben a nettó díj a következőképp határozható meg:

$$\sum_{t=1}^{\omega} \nu^t_t p_{\overline{xy}}$$

A ${}_tp_{\overline{xy}}$ helyébe helyettesítve a kopulákkal kapott kifejezést kapjuk:

$$\sum_{t=1}^{\omega} \nu^t [1 - C_{xy}(1 - S^m_x(s), 1 - S^f_y(t))].$$

5. fejezet

Eredmények

Az annuitások számításához a 2009-es magyar néphalandósági táblát használtam fel, illetve 2.9%-os technikai kamatlábat alkalmaztam, a szükséges számításokat pedig Microsoft Excelben készítettem el. A korkülönbséget minden esetben a $D = X - Y$ képlettel számoltam, ahol X a férfi, Y pedig a női életkort jelöli. A számításhoz felhasznált képletek a 'Függelékben' találhatóak.

A korábbi szakdolgozatomban [13] arra a következtetésre jutottam, hogy a Gumbel-kopula és a Clayton-kopula segítségével számolt annuitások között elhanyagolható a különbség. Ezt az eredményt felhasználva, a mostani elemzések során csak a Gumbel-kopulával számított nettó járadékok közötti differenciákat vizsgálom.

A következő táblázatokban így a Gumbel-kopulával kapott változó és állandó paraméterű annuitások hányadosát fogom bemutatni, külön férfi és külön női járadékos esetén. Az első oszlopban szerepelnek a járadékosok belépési életkorai, az első sorban pedig a D-vel jelölt korkülönbségek. Az elemzés során 5 éves korközökkel vizsgáltam a járadéktagokat. Minden esetben a férfi életkorhoz képest határoztam meg a korkülönbséget.

A korábbi szakdolgozatom alapján is [13] elvégeztem a számításokat, állandó függőségi paraméterrel az új adathalmazra, majd a kapott eredményeket összehasonlítottam a változó paraméterrel számított járadékokkal, melyeket a következő alfejezetekben fogok bemutatni.

Az alábbi fejezetekben azt a járadékfajtát vizsgálom, amelynél 1 Ft kerül kifizetésre, amíg mindkét fél életben van, és a túlélő fél ennek 60 %-ára jogosult a társa halála után.

5.1. Férfi járadékos, női kedvezményezett

Az 5.1 táblázatban a férfit vettem járadékosnak, a nőt pedig a biztosítások kedvezményezettjének. Ebben a táblázatban találhatóak a korkülönbségtől függő paraméterrel számított annuitások értékei. Az 5.2 táblázatban szerepelnek azok a járadékértékek, amelyeket állandó τ függőségi paraméterrel számoltam ki. Az 5.3 táblázatban pedig a változó és az állandó függőségi paraméterű kopulával számított járadékok arányát vizsgáltam.

Az eredményekből egyértelműen látszódik, hogy a korkülönbséget figyelembevéve alacsonyabb járadékot kapunk szinte valamennyi esetben. Amennyiben a feleség legalább 10 évvel idősebb a férjnél, akkor a számított járadék magasabb.

	-10	-5	0	5	10	15
50	15.3265	16.6622	18.0669	-	-	-
55	12.5770	14.0054	15.5428	17.2281	-	-
60	9.6592	11.1333	12.7697	14.6096	16.7620	-
65	6.7434	8.1710	9.8363	11.7761	14.1001	16.3900
70	4.1069	5.3513	6.9247	8.8596	11.2547	13.7154
75	-	2.9806	4.3089	6.0816	8.3854	10.8992
80	-	-	2.2672	3.7107	5.7253	8.1122

5.1. táblázat. Férfi járadékos, korkülönbséggel változó függőségi paraméter

	-10	-5	0	5	10	15
50	15.2809	16.6871	18.1867	-	-	-
55	12.5308	14.032	15.6743	17.4351	-	-
60	9.6179	11.1593	12.9055	14.8304	16.8600	-
65	6.7131	8.1931	9.9631	11.9936	14.2005	16.4610
70	4.0903	5.3665	7.0255	9.0477	11.3467	13.7829
75	-	2.9883	4.3724	6.2156	8.4562	10.9537
80	-	-	2.2963	3.7833	5.7675	8.1467

5.2. táblázat. Férfi járadékos, állandó függőségi paraméter

Az eredményekből láthatjuk, hogy a részhalmazokra meghatározott Kendall-τ segítségével majdnem minden esetben alacsonyabb mértékű járadékot ka-

	-10	-5	0	5	10	15
50	1.00298	0.99851	0.99341	-	-	-
55	1.00369	0.99810	0.99161	0.98813	-	-
60	1.00430	0.99767	0.98948	0.98511	0.99419	-
65	1.00452	0.99730	0.98727	0.98187	0.99293	0.99569
70	1.00405	0.99717	0.98565	0.97921	0.99189	0.99510
75	-	0.99743	0.98548	0.97844	0.99163	0.99502
80	-	-	0.98735	0.98080	0.99268	0.99576

5.3. táblázat. Férfi járadékos, változó és állandó paraméterű járadékok hányadosa

punk. A pozitív függőségi paraméterek következtében a túlélő fél halandósága megnőtt, így a járadékok jelenértéke alacosnyabb.

5.2. Női járadékos, férfi kedvezményezett

A mostani fejezetben a járadékosnak a feleséget vettem, a kedvezményezettnek pedig a férfit. Hasonlóan az előző fejezethez, a túlélő fél a korábbi járadékösszeg 60 %-ára lesz jogosult a haláláig. A számítások arra világítanak rá, hogy szinte mindenkor alacsonyabb a járadék értéke, ha a függőségi paramétert a korkülönbség figyelembevételével határozzuk meg. Abban az esetben, ha a feleség legalább 10 évvel idősebb a férjénél, a számított járadék a női járadékosok esetében is magasabb.

	-10	-5	0	5	10	15
50	-	-	16.4877	14.6366	13.1555	11.8067
55	-	15.9845	13.8528	11.9046	10.4183	9.1339
60	15.6237	13.2903	11.0395	9.0692	7.6481	6.5110
65	12.8971	10.4383	8.1646	6.2881	5.0324	4.1451
70	10.0408	7.5758	5.4297	3.8052	2.8348	-
75	7.2257	4.9338	3.1100	1.8976	-	-
80	4.6881	2.7804	1.4529	-	-	-

5.4. táblázat. Női járadékos, korkülönbséggel változó függőségi paraméter

	-10	-5	0	5	10	15
50	-	-	16.6075	14.8436	13.2535	11.8778
55	-	16.0094	13.9843	12.1254	10.5187	9.2014
60	15.5781	13.3169	11.1754	9.2867	7.7401	6.5655
65	12.8509	10.4643	8.2914	6.4762	5.1032	4.1796
70	9.9994	7.5979	5.5305	3.9391	2.8770	-
75	7.1954	4.9490	3.1734	1.9703	-	-
80	4.6715	2.7880	1.4819	-	-	-

5.5. táblázat. Női járadékos, állandó függőségi paraméter

	-10	-5	0	5	10	15
50	-	-	0.99279	0.98605	0.99261	0.99401
55	-	0.99844%	0.99060	0.98179	0.99046	0.99267
60	1.00293	0.99800	0.98784	0.97658	0.98812	0.99169
65	1.00360	0.99752	0.98471	0.97095	0.98613	0.99174
70	1.00414	0.99709	0.98178	0.96599	0.98533	-
75	1.00422	0.99693	0.98000	0.96313	-	-
80	1.00355	0.99725	0.98040	-	-	-

5.6. táblázat. Női járadékos, változó és állandó paraméterű járadékok hányadosa

Az alábbi táblázatok alapján megállapítható, hogy a változó paraméterű kopulák segítségével árazott annuitások alacsonyabbak, mintha a teljes populációra azonos függőségi paramétert feltételeznánk. A korkülönbséggel változó függőségi paraméter használatának köszönhetően a kapott annuitások jobban reprezentálják az adatsor közti összefüggéseket és pontosabb becslést kaphatunk a várható jövőbeli kifizetésekre.

6. fejezet

Összegzés

A szakdolgozatomban a két életre szóló járadékok árazásával foglalkoztam, amely során azt a feltételezést vizsgáltam, hogy a korkülönbségeknek milyen lehetséges hatása van az árazások tekintetében. Az elemzéshez szükségem volt egy elegendően nagy adatbázisra, amelyben házaspárok születési és halálozási évszámai szerepelnek. Az adathalmazt különböző internetes forrásokból és temetőkből szereztem meg.

Az Életjáradékok fejezetben bemutattam az árazáshoz szükséges valószínűségelméleti és aktuáriusi számításokat. Összefoglaltam a leggyakoribb egy életre szóló járadékfajta díjszámítását, valamint meghatároztam többféle két életre szóló járadékszámítási módszert, attól függően, hogy mit határozunk meg biztosítási eseménynek.

A Leíró statisztikák fejezetben bemutattam a felhasznált adatbázist, amely több mint 13000 adatpárt tartalmaz. Az adatok kezelése és elemzése Excelben és SPSS PASW Statistics 18-ban történt. Kiszámításra került az adathalmaz átlaga és szórása, amelyet később a számításokhoz is felhasználtam. A kapott átlagéletkort összehasonlítottam a KSH által publikált várható élettartammal, ezáltal meggyőződve arról, hogy az adatbázis megfelelő a további számításokhoz.

A statisztikai elemzés alátámasztotta a feltevést, miszerint a függőségi paraméterek szignifikánsan eltérnek a házaspárok közti korkülönbség függvényében. A teljes adatbázisra $\tau = 0.138$ adódott, valamint ezt az értéket kiszámoltam korkülönbség szerinti részhalmazokra is megbontva. Ezen értékek a $[0.068; 0.246]$ intervallumba estek.

Továbbá összefoglaltam a Gompertz- és a Weibull-eloszlás fontosabb jellemzőit és, az utóbbi segítségével túlélési függvényt illesztettem az adatsoromra, amelyet később a kopulák előállításánál használtam fel.

A továbbiakban, a Kopula fejezetben bemutattam a túlélés-analízis során leggyakrabban alkalmazott kopulákat, valamint összefoglaltam a további számításokhoz szükséges tételeket és definíciókat. A korábbi szakdolgozatomban vizsgáltam, hogy szignifikáns eltérés van-e a Gumbel- és a Clayton-kopulák segítségével számított járadékok között. Mivel az eltérés elhanyagolható, ezért a mostani vizsgálataim során csak a Gumbel-kopulák segítségével kapott járadékokat elemeztem.

A vizsgált járadék díjszámítását úgy határoztam meg, hogy egységnyi összeg kerül kifizetésre, amíg a házaspár mindkét tagja életben van, és az első halál bekövetkezte után a túlélő fél a korábbi járadékösszeg 60%-ára lesz jogosult. A járadékok kiszámításához szükségem volt a túlélési kopulákra, amelyeket a Weibull-féle túlélési függvényből és a Gumbel-féle arkhimédeszi kopulából állítottam elő. A nettó díjak meghatározása során a Központi Statisztikai Hivatal által publikált 2009-es néphalandósági táblát alkalmaztam, külön férfi és női járadékosokra.

A járadékok számítását elvégeztem állandó és korkülönbség függvényében változó függőségi paraméterekkel is. Az Eredmények fejezetben vizsgáltam számszerűsítve is a hatást, amelyből látszik, hogy a korkülönbség figyelembevételével alacsonyabb járadékok adódtak. Ezáltal alátámasztottá vált a feltevés, miszerint pontosabb árazás érhető el, ha a korkülönbséget is felhasználjuk a számítások során.

A nettó díjak összehasonlításánál egyértelműen látszik, hogy a korkülönbség figyelembevételével alacsonyabb díjak határozhatóak meg. A bruttó díjak meghatározásánál csak a biztosítón múlik, hogy milyen költségkonstrukciókat használ fel a díj megállapításakor. A várhatóan alacsonyabb bruttó díj lehetőséget ad az időskori megtakarítások ösztönzésére, illetve a biztosítási állomány növelésére.

A témával kapcsolatban további kutatási lehetőség a különböző generációk függőségi paraméterei közötti eltérések vizsgálata. Várhatóan a fiatalabb generációk esetében, a demográfiai és társadalmi változásoknak köszönhetően alacsonyabb függőségi paraméter adódna, mint az idősebb generációk esetében, amelyet szintén figyelembe lehetne venni az árazások során. Ehhez azonban jóval nagyobb adatbázisra lenne szükség.

A demográfiai változások miatt egyre kevésbé lesz fenntartható a jelenlegi állami nyugdíjrendszer, és nem fog a megélhetéshez elegendő nyugdíjszolgáltatást biztosítani. Az egyéni, időskori megtakarítások ösztönzésére 2014 január elsejétől a nyugdíjbiztosítások befektetett biztosítási díjának 20%-ára adókedvezmény vehető igénybe. Ennek hatására sok új nyugdíjbiztosítási termék jelent meg a piacon, szinte az összes életbiztosítással foglalkozó társaság előállt egy új termékkel.

A jövőben várhatóan nőni fog a társadalmon belül a nyugdíjmegtakarítással rendelkezők száma, amelyhez nagyban hozzá fog járulni a fenti adókedvezmény bevezetése. Egy újfajta nyugdíjbiztosítás kidolgozásához pedig megfelelő lenne a dolgozatban bemutatott több életre szóló járadékkonstrukció.

Táblázatok jegyzéke

7. fejezet

Függelék

A nettó díjak kiszámítása Excelben történt, mely számítások alapja a KSH által publikált 2009-es halandósági tábla.
A halandósági táblákat felhasználva a következő függvények kerültek definiálásra, amely a megfelelő korhoz tartozó női és férfi l_x értékeket adja vissza:

Function Pr_no(y As Variant)
Pr_no = Munka1.Cells(y + 2, 2).Value
és
Function Pr_ffi(x As Variant)
Pr_ffi = Munka1.Cells(x + 2, 3).Value

A Gumbel-kopula kiszámításához definiált függvény (férfiak esetében):

Function Rgumbelnettodij_ffi(x As Integer, y As Integer, R As Double)
i = 0.029
v = 1 / (1 + i)
alpha = 1 / (1 - tau)

sffi = Exp(-(x / 72.74) ^(72.74 / 9.895))
sno = Exp(-(y / 74.72) ^(74.72 / 10.193))

gumbel = Exp(-((-Log(1 - sffi)) ^alpha + ((-Log(1 - sno)) ^alpha)) ^(1 / alpha))

gumbelkozosp = Prffi + Prno - 1 - gumbel

sum = 0
For k = 0 To 100
sum = sum + (v ^k) * (Munka1.Cells(x + 2 + k, 3).Value + R * Munka1.Cells(y + 2 + k, 2).Value - R * gumbelkozosp)
Next k

Rgumbelnettodij_ffi = sum
A tau változó attól függően került definiálásra, hogy az állandó vagy változó paraméterű kopulák kerültek kiszámításra.

A Gumbel-kopula kiszámításához definiált függvény a nők esetében megegyezik a férfiakra definiált változattal, a következő résztől eltekintve:

sum = 0
For k = 0 To 100
sum = sum + (v ^k) * (R * Munka1.Cells(x + 2 + k, 3).Value + Munka1.Cells(y + 2 + k, 2).Value - R * gumbelkozosp)
Next k

Rgumbelnettodij_no = sum
A tau változó szintén attól függően került definiálásra, hogy az állandó vagy változó paraméterű kopulák kerültek kiszámításra.

Kor	**Női**	**Férfi**	**Unisex**	Kor	**Női**	**Férfi**	**Unisex**
0	1	1	1	50	0.95656	0.90882	0.93269
1	0.99506	0.9947	0.99488	51	0.95213	0.89841	0.92527
2	0.99468	0.99434	0.99451	52	0.94733	0.88706	0.91719
3	0.99451	0.99418	0.99435	53	0.94216	0.87475	0.90845
4	0.9943	0.99394	0.99412	54	0.9366	0.86149	0.89905
5	0.99422	0.99383	0.99403	55	0.93064	0.84734	0.88899
6	0.99412	0.99369	0.9939	56	0.92426	0.83232	0.87829
7	0.994	0.99354	0.99377	57	0.91744	0.81653	0.86698
8	0.99389	0.9934	0.99364	58	0.91015	0.79999	0.855507
9	0.99379	0.99328	0.99353	59	0.9024	0.78277	0.84258
10	0.99369	0.99317	0.99343	60	0.89416	0.76487	0.82952
11	0.99358	0.99305	0.99331	61	0.88542	0.76632	0.81587
12	0.99345	0.99291	0.99318	62	0.87623	0.72713	0.80168
13	0.9933	0.99273	0.99302	63	0.86661	0.70737	0.78699
14	0.99313	0.9925	0.99282	64	0.85653	0.68705	0.77179
15	0.99296	0.99224	0.9926	65	0.84590	0.66618	0.75604
16	0.99275	0.99191	0.99233	66	0.83458	0.64473	0.73966
17	0.99254	0.99151	0.99202	67	0.82249	0.62274	0.72261
18	0.9923	0.99102	0.99166	68	0.80957	0.60027	0.70492
19	0.99204	0.99043	0.99124	69	0.79573	0.57733	0.68653
20	0.99177	0.98976	0.99076	70	0.78084	0.55387	0.66735
21	0.9915	0.98903	0.99026	71	0.76470	0.52979	0.64724
22	0.99125	0.98828	0.98976	72	0.74725	0.50507	0.62616
23	0.991	0.98903	0.99026	73	0.72848	0.47976	0.60412
24	0.99077	0.98685	0.98881	74	0.70828	0.45388	0.58108
25	0.99056	0.98617	0.98837	75	0.68643	0.42747	0.55695
26	0.99035	0.98548	0.98792	76	0.66263	0.40055	0.53159
27	0.99013	0.98475	0.98744	77	0.63509	0.37241	0.50375
28	0.98988	0.98395	0.98692	78	0.60634	0.34470	0.47552
29	0.9896	0.98308	0.98634	79	0.57624	0.31738	0.44681
30	0.98929	0.98212	0.98571	80	0.54463	0.29041	0.41752

7.1. táblázat. Halandósági tábla - 2009

Kor	**Női**	**Férfi**	**Unisex**	Kor	**Női**	**Férfi**	**Unisex**
31	0.98894	0.98108	0.98501	81	0.51140	0.26379	0.38760
32	0.98853	0.97998	0.98426	82	0.47647	0.23755	0.35701
33	0.98806	0.97883	0.98344	83	0.43981	0.21176	0.32578
34	0.98752	0.9776	0.98256	84	0.40149	0.18651	0.29400
35	0.98689	0.97628	0.98159	85	0.36171	0.16196	0.26184
36	0.98618	0.97481	0.9805	86	0.32078	0.13832	0.22955
37	0.98538	0.97312	0.97925	87	0.27918	0.11583	0.19751
38	0.98451	0.97119	0.97785	88	0.23761	0.09477	0.16619
39	0.98353	0.96898	0.97626	89	0.19691	0.07545	0.12618
40	0.98242	0.96642	0.97442	90	0.15807	0.05817	0.10812
41	0.98114	0.96347	0.97231	91	0.12218	0.04317	0.08267
42	0.97964	0.96006	0.96985	92	0.09026	0.03063	0.06045
43	0.97787	0.95616	0.96701	93	0.0619	0.02062	0.04191
44	0.97580	0.95171	0.96375	94	0.04149	0.01304	0.02727
45	0.97342	0.94664	0.96003	95	0.02524	0.00767	0.01645
46	0.97072	0.94086	0.95579	96	0.01401	0.00413	0.00907
47	0.96769	0.93425	0.95097	97	0.00698	0.00201	0.00450
48	0.96433	0.92674	0.94554	98	0.00305	0.00087	0.00196
49	0.96062	0.91827	0.93944	99	0.00115	0.00033	0.00074

7.2. táblázat. Halandósági tábla - 2009

Irodalomjegyzék

[1] Banyár József: Életbiztosítás, *AULA*, Budapest, 2003

[2] Barabás Béla: Biztosításmatematika - Életbiztosítás, *Egyetemi jegyzet*, Budapest - BME, 2011

[3] Bolla Marianna - Krámli András: Statisztikai következtetések elmélete *TYPOTEX*, Budapest, 2005

[4] Carriere, J. F.: Parametric Models for Life Tables, *Transaction of Society of Actuaries*, Vol. 44, 1992

[5] Carriere, J. F.: A Select and Ultimate Parametric Model, *Transaction of Society of Actuaries*, Vol. 46, 1994

[6] Ferguson, T. S. - Genest, C. - Hallin, M.: Kendall's Tau for Serial Dependence, *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 28, 2000

[7] Frees, E. W. - Carriere, J. F. - Valdez E.: Annuity Valuation with Dependent Mortality, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 63, No. 2, 1996

[8] Frees, E. W. - Valdez, E. A.: Understanding Relationships Using Copulas, *North American Actuarial Journal*, Vol. 2, No. 1, 1998

[9] Kovács Erzsébet: A nyugdíjreform demográfiai korlátai, *Hitelintézeti Szemle*, Vol. 2, 128-149, 2010

[10] Luciano, E. - Spreeuw, J. - Vigna, E. : Modelling Stochastic Mortality for Dependent Lives, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 43, Issue 2, 234-244, 2008

[11] Luciano, E. - Spreeuw, J. - Vigna, E. : Cross-generational comparison of stochastic mortality of coupled lives, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 22, 211-224, 2010

[12] Nelsen, R.: An introduction to copulas, *Springer Series in Statistics*, 2006

[13] Nánássi Berta: Két életre szóló járadékok modellezése. *Szakdolgozat*, Budapest - BME, 2011

[14] Shemyakin, A. - Youn, H.: Copula Models of Joint Survival Analysis, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 22, 211-224, 2006

[15] Spreeuw, J.: Types of Dependence and Time-dependent Associaton Between Two Lifetimes in Single Parameter Copula Models, *Scandinavian Actuarial Journal*, 286-309, 2006

[16] Spreeuw, J. - Xu Wang: Modelling the Short-term Dependence Between Two Remaining Lifetimes *Journal*, 2008

[17] Takács Viola: Két életre szóló biztosítások vizsgálata. *Diplomamunka*, Budapest - BME, 2010

[18] Tárnok Edina: A férj és feleség élettartamának modellezése több életre szóló életbiztosítási szerződéseknél *Szakdolgozat*, Budapest - ELTE, 2011

[19] Youn, H. - Shemyakin, A.: Pricing Practices for Joint Last Survivor, *Actuarial Research Clearing House*, Vol. 2001.1.

[20] Youn, H. and Shemyakin, A.: Statistical Aspects of joint life insurance pricing, *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section of the American Statistical Association*, pp. 34-38, 1999

[21] Weibull, W.: A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, 293-297, 1951

[22] Werneman, O.: Pricing Lifelong Joint Annuity Insurances and Survival Annuity Insurances Using Copula Modeling of Bivariate Survival, , 2005

[23] Wu, F. - Valdez, E. A. - Sherris, M.: Simulating Exchangeable Multivariate Archimedian Copulas and its Applications, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Vol. 36, issue 5, 1019-1034, 2007

[24] www.testamentum.hu

[25] www.oroklet.hu

[26] www.portfolio.hu/befektetesi_alapok/ongondoskodas/kuszobon_a_fordulat_a_megtakarit