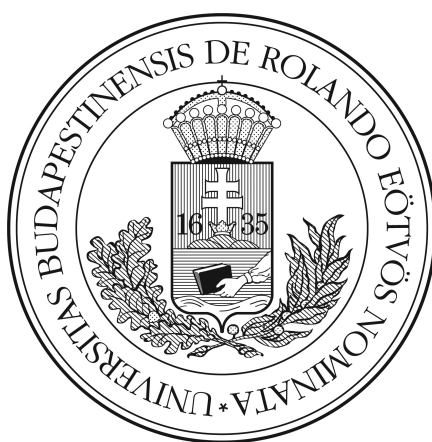


EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Együttes eloszlások szerepe a működési kockázatoknál



Írta:

Stark András

Biztosítás és pénzügyi matematika MSc

Témavezetők:

Medvegyev Péter

Budapesti Corvinus Egyetem Matematika Tanszék

Szilágyi Örs

Budapest Bank Kockázatkezelés

2014.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazon embereknek akik segítettek munkámat, s hozzájárultak ahhoz, hogy ez a dolgozat megszülessen. Különösképp témavezetőmnek Medvegyev Péternek és Szilágyi Örsnek, a szakdolgozatom elkészítésében nyújtott segítségével és útmutató tanácsaiért. Továbbá szeretném megköszönni a szaktársaim támogatását, Árendás Péternek a lektorálást, és Eddardnak az együtt töltött időt. Végül nem utolsó sorban köszönetet mondok Kiripovszky Fruzsínának és családomnak a tanulmányaim során nyújtott szerető támogatásukért.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	1
Ábrák jegyzéke	4
1. Bevezetés	5
1.1. Bevezetés	5
2. Kopulák	8
2.1. Kopulák	8
2.2. A kopulák osztályozása	12
2.3. A kapcsolatszorosság leírása	15
3. Kopulák kalibrálása	20
3.1. Kopula-családok parametrikus becslési módszerei	20
3.1.1. ML módszer	20
3.1.2. IFM módszer	21
3.1.3. CML módszer	23
3.1.4. Kapcsolatszorossági mértékek alapján történő kalibráció	23
3.2. Nem paraméteres módszerek	24
4. Az operációs kockázat és az LDA modell	27
4.1. A pénzügyi szabályozás szerepe	27
4.2. Az operációs kockázat	28
4.3. Veszteségeloszlás-alapú megközelítés (LDA)	30
4.3.1. Egyedi kockázatok vesztesége	30
4.3.2. Tőketartalék, és az együttes eloszlás	32
4.3.3. Egyedi osztályok közti függőség szerepe	34
4.4. Kopulák szerepe LDA esetén	35
5. Szimulációs tanulmány	37
5.1. Szimulációs tanulmány	37
5.1.1. Az adatbázisról	38
5.1.2. Peremeloszlások vizsgálata	41
5.1.3. Kopulakalibrációk vizsgálata	44
5.1.4. Kopulaosztályok hatása a tőketartaléokra	47

<i>Contents</i>	3
-----------------	---

6. Összegzés	50
---------------------	-----------

Függelék	52
-----------------	-----------

Irodalomjegyzék	78
------------------------	-----------

Ábrák jegyzéke

2.1. 2-növő tulajdonság egy 100 elemű két dimenziós Gauss kopulán . . .	10
2.2. Példa három dimenziós kopulákra	14
2.3. Példa két dimenziós kopula sűrűségfüggvényekre	14
2.4. A két dimenziós maximum és minimum kopula szintvonalai	17
2.5. Outlier tartalmazó mintán, a különféle korrelációk	19
3.1. Empirikus kopula és a kopulafrekvencia	26

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Bevezetés

A kockázatkezelés egyik fontos kérdése, hogy az egyedi kockázatokat hogyan aggregáljuk. Ennek a kérdésnek a gyakorlati szempontból az egyik praktikus megközelítése az, hogy feltesszük, hogy az események egymástól független valószínűségű változók. A probléma akkor válik igazán érdekessé, ha szeretnénk modellezni a teljes összefüggőséget anélkül, hogy az események együttes eloszlását ismernénk. Erre vonatkozóan egy klasszikus megoldás az, ha feltételezzük, hogy a kockázatok vektora normális eloszlást követ (egy meghatározott kovarianca mátrixszal). Azonban a kockázati események, mint valószínűségi változók jellemzően nem mindig normális eloszlást követnek - gondoljunk itt a hitelbedőlésből fakadó veszteségeloszlás aszimmetrikus voltára- így pedig az együttes normális eloszlás nem megfelelően írja le az összefüggőségi kapcsolatokat, mint például az eloszlás szélét. Azonkívül, hangsúlyozzuk, hogy nem gyakran áll rendelkezésünkre annyi információ az együttes eloszlásról, mint amennyi az egyedi kockázatokról, azaz a marginális eloszlásokról.

A kockázatok összefüggőségeinek leírására egy nagyon erős és felhasználóbarát eszközt szolgáltatnak a kopulák. Leegyszerűsítve a kopula nem más, mint egy

többdimenziós eloszlás egyenletes marginálisokkal, mely tetszőleges folytonos többdimenziós eloszláshoz egyértelműen megadható. Maga a kopula fogalma 1959-ben Sklar [1] által lett bevezetve, de 1940-es években érintőlegesen már Hoeffding [2] is foglalkozott a kopulákkal. A kockázatok eloszlására vonatkozó egyszerűbb normális feltételezésével szemben, a kopulák segítségével lehetőségünk nyílik gazdagabb és robusztusabb összefüggőségi struktúrák leírására. Segítségükkel szétválasztható az együttes eloszlás vizsgálata a peremeloszlások és az összefüggőségi struktúra vizsgálatára. Érdemes megjegyezni, hogy Skarl tétele 2.2 megteremti a kopulák létezéséhez szükséges feltételeket, viszont mivel számos kopula család létezik, a megfelelő kopula megválasztása nem triviális feladat. Az ehhez szükséges gyakorlati módszertan bemutatására is törekedtem dolgozatom során. A banki gyakorlatban általánosságban jellemző, hogy sokszor módszertanilag praktikusabb, numerikus szempontból kezelhetőbb modelleket választják a kockázatkezelésnél, így a dolgozatom sorát próbáltam erre vonatkozólag hasznosabb észrevételeket tenni (bizonyos esetekben az illesztések túlságosan számolásigényesek, valamint nem áll rendelkezésre kellő mennyiségű és minőségű minta).

A dolgozatom célja, hogy néhány egyszerűbb kopula-alkalmazást mutassak be, melyek jól hasznosíthatóak lehetnek a kockázatkezelés területein, ezen belül is kiemelve a működési kockázatok szerepkörét. A dolgozat első három fejezetében egy alapvető elméleti háttérrel próbálok biztosítani a kopulák bemutatására, a kapcsolatszorossági mértékekre és kalibrációs eszközökre vonatkozólag. Ezek után a negyedik fejezetben a működési kockázathoz szükséges fejlett módszertanhoz (AMA) tartozó egy lehetséges modell bemutatására töreksem a szakirodalmon keresztül, és általános áttekintést adok a bázeli szabályozások által meghatározott operációs veszteségekről. A modell kiterjesztéseként megvizsgáljuk, hogy a tőkeképzés szempontjából milyen jelentősége van a kopula használatnak, azaz alternatív eszközt biztosítunk az együttes eloszlás meghatározásához. Továbbá a dolgozat utolsó

fejezetében egy szimulációs tanulmányon keresztül mutatom be tipikusan kis mintaelemszámok esetén, hogy mely eljárások bizonyulnak a legjobbnak a kalibrációk és peremeloszlások illesztése során. Az ehhez szükséges kódokat R nyelven írtam, melyek függelék megfelelő részeiben megtalálhatóak. A dolgozat során nem céлом bemutatni teljes körűen a banki működési kockázat kezelését és jelenleg érvényes jogszabályi vonzatait, csupán egy lehetséges módszertant szeretnék eszközölni matematikai vonatkozásban, melyek segíthetik a látens kockázatok hatékonyabb vizsgálatát.

2. fejezet

Kopulák

2.1. Kopulák

A kopulák olyan matematikai eszközök, melyek segítségével az együttes eloszlásokat képesek vagyunk modellezni adott marginális eloszlásokra, ezáltal a peremeloszlások közti összefüggőségi struktúrát szolgáltatja. A kopula szót Sklar használta az 1959-es francia nyelvű cikkében (1973-ban jelent meg egy hasonló angol átirat), habár maga a matematikai értelemben vett ötlet alapjait már Hoeffding (1940) lefektette. A szigorúan növekvő transzformációra nézve invariáns függőségi mértékeket tanulmányozta, valamint a kopula leképezésekre adott egy alsó és egy felső korlátot. Maga a *kopula* szó, mint kifejezés (angolul *copula*) a latin *copulare* szóból származik. A szó jelentése összeköt, kapcsol. Minden bizonnyal a Sklar által meghatározott kopulák létezéséhez szükséges alaptétel indukálta ezt a kifejezést, amely az egyenletes marginálisok és azok többdimenziós eloszlásainak kölcsönös kapcsolatára utal.

A következő szekcióban, a Schweizer féle [3] megfogalmazás szerint definiáljuk a kopulát.

2.1.1. Definíció. *Kopulán egy d -dimenziós, egyenletes eloszlású peremekkel rendelkező valószínűségi vektor eloszlásfüggvényét értjük. A $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ d -változós függvény kopulafüggvény, ha igazak a következő tulajdonságok:*

- $C(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \dots, u_d) = 0, \forall u_1, u_2, \dots, u_d \in [0, 1]$
- $C(1, 1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k, \forall u_k \in [0, 1],$ ahol $k = 1, \dots, d$
- A kopula d -növény: $\Delta_a^b C(\mathbf{u}) = \Delta_{a_1}^{b_1} \dots \Delta_{a_d}^{b_d} C(\mathbf{u}) \geq 0, \forall \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \in [0, 1]^d,$

ahol a $\Delta_{a_k}^{b_k} C(\mathbf{u}) = C(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, b_k, u_{k+1}, \dots, u_d) - C(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, a_k, u_{k+1}, \dots, u_d)$ differencia, és ha $\forall k$ esetén az $a_k \leq b_k$, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, ahol $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d)$ és $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_d)$.

2.1. Megjegyzés. *Az első két tulajdonság biztosítja, hogy a peremeloszlások egyenletesek. Míg a harmadik tulajdonság miatt lesz a kopula eloszlásfüggvény.*

Azaz $C(u_1, u_2, \dots, u_d) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_d \leq u_d)$, ahol U_i -k a $[0, 1]$ -en egyenletesek $\forall i \geq 2$ -re.

2.1. Tétel. *Legyenek μ_1, \dots, μ_d folytonos valószínűségi változók és a hozzájuk tartozó kopula $C_\mu(\mathbf{u})$. Legyenek $h_1(\mu), \dots, h_d(\mu)$ szigorúan monotonon növekvő függvények a megfelelő μ_i valószínűségi változó értékkészletén. Ekkor a kopulák a szigorú monoton növény transzformációra nézve invariánsak:*

$$C_{h(\mu)}(\mathbf{u}) = C_\mu(\mathbf{u})$$

2.1.2. Definíció. *2-dimenziós kopula*

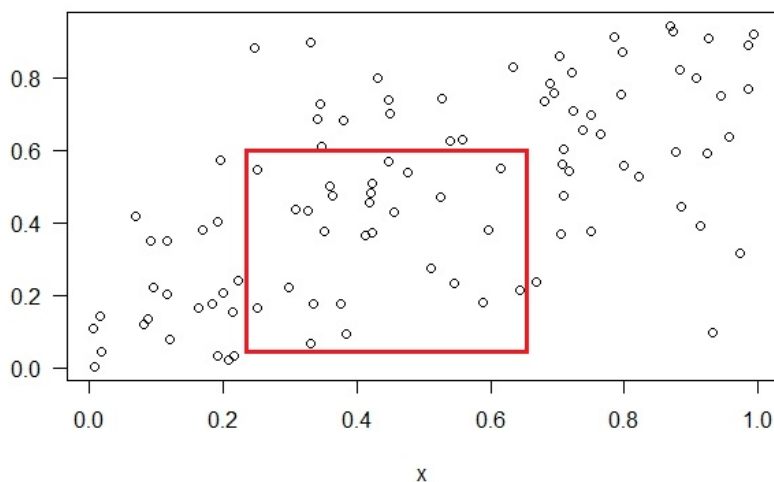
A fenti speciális eseteként kapjuk meg a 2-dimenziós kopulát, ami a pénzügyi szakirodalomban gyakran fordul elő az alkalmazások kapcsán.

1. $C(0, y) = 0$ és $C(x, 0) = 0, \forall x, y \in [0, 1]$
2. $C(1, y) = y$ és $C(x, 1) = x, \forall x, y \in [0, 1]$

3. *C* 2-növő azaz: $\forall x_1 \leq x_2$ és $y_1 \leq y_2 \in [0, 1]$ esetén

$$C(x_2, y_2) - C(x_1, y_2) - C(x_2, y_1) + C(x_1, y_1) \geq 0$$

A 2-növő tulajdonságot, grafikusan is interpretálhatjuk: annak a valószínűsége, hogy az (x, y) véletlen vektor a $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_2, y_1)$ téglalapba esik, pozitív.



2.1. ÁBRA. 2-növő tulajdonság egy 100 elemű két dimenziós Gauss kopulán

A kopula fontos szerepet játszik a nem szimmetrikus eloszlásokra épülő modellek megalkotásában is. A fogalmára építve a normális eloszlást is újra definiálhatjuk, mint egydimenziós normális eloszlások kombinációját. A következő tétel biztosítja, hogy a kopulák nem csak egyenletes peremeloszlásokra illeszthetők.

2.2. Tétel. Sklar

Legyen H egy d -dimenziós eloszlásfüggvény az $F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$ peremeloszlásokkal.

Ekkor létezik egy olyan d -dimenziós C kopula, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, hogy

$$H(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)).$$

Megfordítva, ha C egy d -dimenziós kopula és $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)$ eloszlásfüggvények, akkor H egy d -dimenziós eloszlásfüggvény az $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)$ peremekkel.

2.1. Következmény. Ha H folytonos d -dimenziós eloszlás $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)$ peremeloszlásokkal és $F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_d^{-1}(u_d)$ kvantilisfüggvényekkel, akkor

$$C(u_1, \dots, u_d) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))$$

kopula egyértelmű.

Sklar tételének köszönhetően egy alternatív eljárást kapunk az együttes eloszlások vizsgálatára. Tulajdonképpen a kopulamodellezés lényege abban áll, hogy az együtteseloszlást felbontjuk a marginális eloszlásokra, illetve az ezeket kombináló kovarianciastruktúrára. Természetesen az elmélet általánosabb abban az értelemben, hogy a kapcsolatszorosságot nem csak a kovarianciastruktúrával lehet leírni, hanem általánosabb fogalmakkal is, mint majd látjuk a 2.3-as ponttól kezdve.

2.3. Tétel. Fréchet-Hoeffding határ

Tetszőleges d -dimenziós $C(u)$ kopulára teljesül, hogy

$$W(\mathbf{u}) = \max \left\{ \sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right\} \leq C(\mathbf{u}) \leq \min(u_1, \dots, u_d) = M(\mathbf{u})$$

Az állításnak köszönhetően, mindig meg tudunk adni, egy szigorú alsó és felső korlátot a kopulákra. Ezeket a határokat Fréchet-határoknak is hívják. A felső határra mindig igaz, hogy eloszlásfüggvényt definiál, míg ez az alsó határra $d = 2$ esetén ($d > 2$ -nél pedig

esetleges plusz feltételek esetén) teljesül [2]. A felső határt szokás komonoton kopulának, míg az alsó határt amonoton kopulának is hívni. Ezek speciális típusait határozzák meg az adott kopuláknak, a tökéletesen pozitívan összefüggő és a független eseteket.

2.2. A kopulák osztályozása

Röviden definiáljuk az ismertebb kopula osztályokat. Alapvetően a kopulákat gyakorlati szempontból két fő osztályba szokás sorolni. Az archimedeszi kopulák és az elliptikus kopulák osztályába. Az előbbiekről kapták nevüket, hogy elliptikus eloszlásból származtathatóak, ilyen például a normális és a Student t-eloszlás is. A dolgozat során elliptikus kopulákon keresztül fogjuk vizsgálni az operációs kockázatokat. Erre gyakorlati szempontból volt szükség, mivel elliptikus kopulák esetén a tőkeképzés szempontjából szükséges mérőszámoknak (lásd később pl. VaR, ES) szép tulajdonságai lehetnek. Az ehhez kapcsolódó további gondolatmenetet a 4. fejezetben ismertetjük. Mindezek ellenére más modellek esetében az archimedeszi kopulák szerepe is igen jelentős, emiatt definiálásra kerülnek.

2.2.1. Definíció. *Elliptikus eloszlás*

Azt mondjuk, hogy $(X_1, \dots, X_d)^T$ véletlen vektor elliptikus eloszlás követ $(\mu, \Sigma, \Psi(\cdot))$ paraméterekkel azaz $\mathbf{X} \sim E(\mu, \Sigma, \Psi(\cdot))$, ha a karakterisztikus függvénye a következő alakú:

$$t \rightarrow \varphi_{\mathbf{X}}(t) = E[\exp(it^T \mathbf{X})] = \exp(it^T \mu) \Psi(t^T \Sigma t),$$

ahol $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ pozitív definit szimmetrikus mátrix, $\mu \in \mathbb{R}^{1 \times d}$, $t \in \mathbb{R}^d$, $\Psi(\cdot)$ egy skalár függvény, és i a képzetes számot jelöli.

2.2.2. Definíció. *Gauss-kopula*

A *Gauss-kopula* a többdimenziós normális eloszlás segítségével definiálható:

$$C_{\Sigma}(\mathbf{u}) = \Phi_{\Sigma,d}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)),$$

ahol $\Phi_{\Sigma,d}$ egy d dimenziós normális eloszlásfüggvény Σ korrelációs mátrixal, $z \in [0, 1]$ és $\Phi^{-1}(z)$ a sztender normális eloszlásfüggvény inverze.

2.2.3. Definíció. *A Student t-kopula*

A *Student t-kopula* a többdimenziós Student t -eloszlás segítségével határozható meg:

$$C_{\Sigma,v}(\mathbf{u}) = t_{\Sigma,v,d}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)),$$

ahol $t_{\Sigma,v,d}$ egy d dimenziós v szabadságfokú Student t -eloszlásfüggvény Σ korrelációs mátrixal, míg $t_v^{-1}(z)$, $z \in [0, 1]$ pedig a Student t -eloszlásfüggvény inverze v szabadságfokkal.

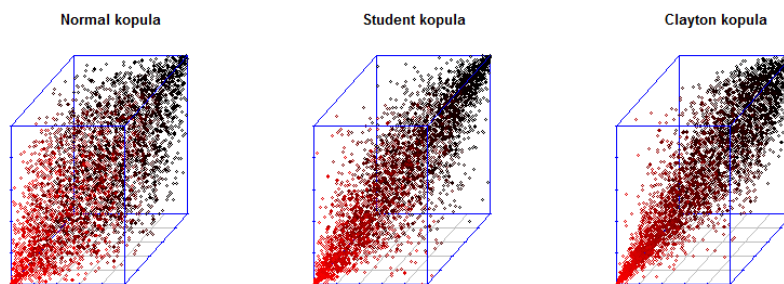
2.2.4. Definíció. *Archimedeszi kopulák*

Genest és MacKay (1986) [5] a következőképpen definiálták az Archimedeszi kopulát:

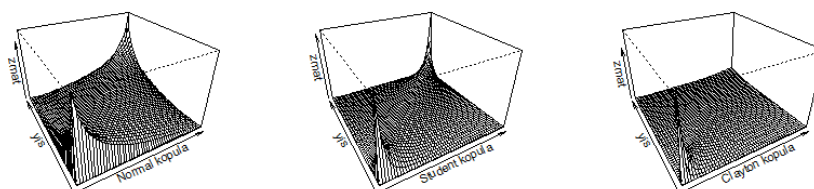
$$C(u_1, \dots, u_n, \dots, u_d) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n), \dots, \phi(u_d)),$$

ahol $\phi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ egy szigorúan monoton csökkenő függvény a kopula generátorfüggvénye és $\phi(\cdot)^{-1}$ az általánosított inverze. Továbbá az alábbi tulajdonságok teljesülnek még a generátor függvényre:

- $\sum_{n=1}^d \phi(u_n) \leq \phi(0)$
- $\phi(\cdot) \in C^2(0, 1)$ függvény
- $\phi(1) = 0$
- $\phi'(u) < 0$ és $\phi''(u) > 0 \quad \forall u \in [0, 1]$



2.2. ÁBRA. Példa három dimenziós kopulákra



2.3. ÁBRA. Példa két dimenziós kopula sűrűségfüggvényekre

2.2. Megjegyzés. Az ábrákon megfigyelhető, hogy a Student t -kopula és a Gauss kopula szimmetrikus kopulák. Ezek a tulajdonságok az elliptikus jellegükből fakadnak, ugyanakkor a Student t -kopulákra jellemző, hogy a felső és alsó széleken erősebb az összefüggőség, mint a gaussi esetben. A Clayton kopula az archimedeszi kopulák osztályába tartozik, erre a kopula osztályra az extrém szélek jellemzőek.

2.3. A kapcsolatszorosság leírása

A kopula tehát egy többváltozós eloszlásfüggvény, melynek marginálisai egyenletes eloszlásúak. Tulajdonságainak köszönhetően leírható a peremek és az együttes eloszlás közti kapcsolat, függőségi struktúra. Az alkalmazások során ez az egyik fontos tulajdonsága, ami miatt előszeretettel használják a kopulákat. Ezen függőség leírásának egy lehetséges módja az, ha különböző kvantitatív és kvalitatív kopula alapú mértékeket használunk. A lineáris korreláció mellett lehetőségünk van alternatív kapcsolatszorossági mértékek használatára is. A következőkben ennek a függőségnek leírására alkalmas mérőszámokat definiálok.

2.3.1. Definíció. Konkordancia

Legyen (x, y) és (\hat{x}, \hat{y}) két megfigyelés az (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozóból. Azt mondjuk, hogy (x, y) és (\hat{x}, \hat{y}) konkordánsak, ha $(x - \hat{x})(y - \hat{y}) > 0$ és diszkonkordánsak ha $(x - \hat{x})(y - \hat{y}) < 0$.

A következő tétel Nelsenhez (1999) [4] fűződik.

2.4. Tétel. Legyenek (X, Y) és (X_k, Y_k) független folytonos valószínűségi vektorváltozók, valamint H és H_k a hozzájuk tartozó együttes eloszlásfüggvények, továbbá a marginális eloszlásfüggvények F (X és X_k -nak egyaránt) és G (Y és Y_k -nak egyaránt). Legyenek C és C_k az (X, Y) és (X_k, Y_k) -hoz tartozó kopulafüggvények., azaz teljesül, hogy $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ és $H_k(x, y) = C_k(F(x), G(y))$. Q pedig jelölje a valószínűségeknek azt a különbségét, hogy az (X, Y) és (X_k, Y_k) párok konkordánsak, illetve diszkonkordánsak, azaz $Q = P\{(X - X_k)(Y - Y_k) > 0\} - P\{(X - X_k)(Y - Y_k) < 0\}$. Ekkor

$$Q = Q(C, C_k) = 4 \int \int_{[0,1]^2} C_k(u, v) dC(u, v) - 1$$

2.2. Következmény. Legyenek C, C_k, Q adottak, az előző tétel szerint definiáltak. Ekkor teljesül, hogy

- Q szimmetrikus: $Q(C, C_k) = Q(C_k, C)$

- Q nem csökkenő: ha $C \prec C'$ akkor $Q(C, C_k) \leq Q(C', C_k)$
- A kopulák a túlélési kopuláikra nézve invariánsak: $Q(C, C_k) = Q(\hat{C}, \hat{C}_k)$

2.3. Megjegyzés. $C \prec C'$ jelentése: $\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, C(u_1, u_2) \leq C'(u_1, u_2)$. A \hat{C} túlélési kopula ha $\hat{C}(u_1, u_2) = \hat{H}(\hat{F}_1^{-1}(u_1), \hat{G}_2^{-1}(u_2)) = \hat{H}(F_1^{-1}(1 - u_1), G_2^{-1}(1 - u_2))$

2.3.2. Definíció. Kendall-tau

Az (X, Y) valószínűségi vektorváltozóra vonatkozó Kendall-féle tau:

$$\tau(X, Y) = P\{(X - X_k)(Y - Y_k) > 0\} - P\{(X - X_k)(Y - Y_k) < 0\},$$

ahol (X, Y) és (X_k, Y_k) független azonos eloszlású véletlen vektorok.

2.4. Megjegyzés. A Kendall-féle tau tehát a konkordáns változók valószínűségének és diszkonkordáns változók valószínűségének különbsége.

2.5. Tétel. Ha (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozók a C kopulával, akkor az (X, Y) -ra vonatkozó Kendall-féle tau:

$$\tau(X, Y) = Q(C, C) = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

2.5. Megjegyzés. A fenti integrál a $C(U, V)$ véletlen változó várható értéke, ahol $U, V \sim U(0, 1)$ ekkor: $\tau(X, Y) = 4E(C(U, V)) - 1$

2.3.3. Definíció. Spearman-ró

Az (X, Y) valószínűségi vektorra vonatkozó Spearman-ró:

$$\rho_S(X, Y) = 3 \left(P\{(X - X_k)(Y - Y') > 0\} - P\{(X - X_k)(Y - Y') < 0\} \right),$$

ahol $(X_k, Y_k), (X', Y')$ független másolatai (X, Y) -nek.

2.6. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy X_k és Y' tagok is függetlenek. A 2.3 tétel következményének első pontjából és a 2.4 tételből következik a soron következő állítás.

2.6. Tétel. Legyen (X, Y) egy folytonos valószínűségi vektor, a C kopulával. Ekkor az (X, Y) -ra vonatkozó Spearman-ró a kopulából származtatható.

$$\rho_S = 3Q(C, C) = 12 \int \int_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3 = 12 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dudv - 3.$$

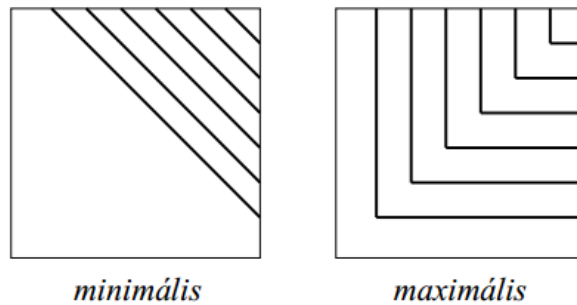
2.7. Megjegyzés. A Kendall-féle tau és a Spearman-ró konkordáns mértékek Nelsen (1999) [4] (itt most nem definiáljuk, a hivatkozásban megtalálható).

2.7. Tétel. Legyen X és Y folytonos valószínűségi változók a C kopulával, és κ reprezentálja a Spearman-ró vagy a Kendall-féle tau mértéket. Ekkor a következők igazak:

$$\kappa(X, Y) = 1 \Leftrightarrow C(\mathbf{u}) = M(\mathbf{u})$$

$$\kappa(X, Y) = -1 \Leftrightarrow C(\mathbf{u}) = W(\mathbf{u}),$$

ahol $M(\mathbf{u})$ és $W(\mathbf{u})$ a maximum- (komonoton) és minimum- (amonoton) kopula.



2.4. ÁBRA. A két dimenziós maximum és minimum kopula szintvonalai

2.3.4. Definíció. *Pozitívan kvadratikus összefüggés PQD*

Az X és Y valószínűségi változók pozitívan kvadratikusán összefüggnek (PQD) ha $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

vagy ezzel ekvivalensen,

$$P(X > x, Y > y) \geq P(X > x)P(Y > y).$$

2.8. Megjegyzés. *Az X és Y PQD szemléletes jelentése az, hogy a valószínűsége annak, hogy (X, Y) pár kellően kis értékű (vagy kellően nagy értékű) legalább akkora, mint a független esetben. Ennek a tulajdonságnak a kopula szerinti megfogalmazása:*

$$C(u, v) \geq uv, \forall(u, v) \in [0, 1]^2$$

2.3.5. Definíció. *Felső szélfüggségi index*

Legyen (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó F és G marginális eloszlásfüggvényekkel.

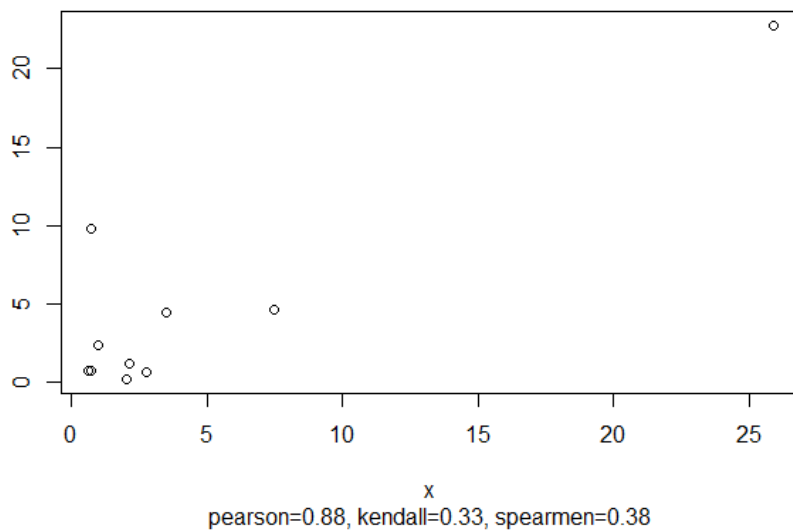
Az (X, Y) eloszlás felső szélfüggségi indexe a

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} P\{Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u)\}$$

kifejezés (az U az angol *up* szóra utal). Ha $\lambda \in (0, 1]$ akkor X és Y aszimptotikusan összefüggnek a felső széleken, míg $\lambda_U = 0$ esetén X és Y aszimptotikusan függetlenek.

2.9. Megjegyzés. *Analóg módon értelmezhető az alsó szélfüggségi index. Ezeknek az indexek egy tulajdonsága, hogy függetlenek a marginálisoktól, csak a kopula alakjától függenek. Például 2-dimenzió esetén: $\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1-2u-C(u,u)}{1-u}$.*

Ismertettük a fontosabb kapcsolati indexeket a kopulák kapcsán és ezek néhány tulajdonságát. Felmerül a kérdés, miért van szükség ezek használatára, mi volt az oka, hogy ezek elterjedtek? Miért nem használható inkább a lineáris korreláció? Könnyen kezelhető és numerikus szempontból is jól viselkedik, könnyebben meghatározható a korábbi mérőszámokhoz képest. Erre vonatkozólag nézzünk egy egyszerű grafikus példát:



2.5. ÁBRA. Outlier tartalmazó mintán, a különféle korrelációk

Az ábra alapján is jól látszik, hogy a céltól függően van értelme más és más mértékek szerint vizsgálni az összefüggőséget. Ha sok a kiugró érték a pearson korreláció érzékenyen reagál, így érdemes lehet más alternatíva után nézni. Extrém összefüggéseket például a szélfüggőségi indexek jobban képesek leírni. A korábbi mértékek melletti érvként, zárásként röviden felsorolnám a lineáris korreláció főbb hátrányait, amely miatt nem feltétlen mindig az optimális választás, a kapcsolatszorosságot leírására:

- A korreláció csak akkor értelmezett, ha a kockázatok varianciái végesek, így nem megfelelő függőségi mérték például az olyan nagyon erős szélű kockázatokra amelyeknek a varianciái nem végesek.
- A korreláció nem invariáns a kockázatok transzfomációival szemben.
- Lineáris kapcsolatokat tud jól leírni.

A következő szekcióban a kopula paraméter becslési módszereiről lesz szó.

3. fejezet

Kopulák kalibrálása

3.1. Kopula-családok parametrikus becslési módszerei

3.1.1. ML módszer

Legyen C kopula és az F_n peremeloszlásai folytonosak. Ekkor az F együttes eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényére teljesül

$$f(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n), \dots, F_N(x_N)) \prod_{n=1}^N f_n(x_n)$$

ahol f_n a megfelelő F_n marginálisok, c pedig a kopula sűrűségfüggvénye

$$c(u_1, \dots, u_n, \dots, u_N) = \frac{\partial C(u_1, \dots, u_n, \dots, u_N)}{\partial u_1 \dots \partial u_n \dots \partial u_N}$$

Legyen $\chi = \{(x_1^t, \dots, x_n^t)\}_{t=1}^T$ minta és $\theta \in \Theta$ a kopula $1 \times K$ dimenziós paramétervektora.

Ekkor a loglikelihood függvény [6] a következő alakú:

$$\ell(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t), \dots, F_n(x_n^t), \dots, F_N(x_N^t)) + \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N \ln f_n(x_n^t)$$

Legyen $\hat{\theta}_{ML}$ a θ paraméter maximumlikelihood becslése azaz $\hat{\theta}_{ML} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_K) \in \operatorname{argmax} \{l(\theta) : \theta \in \Theta\}$. Ekkor megfelelő regularitási feltételek mellett teljesül az aszimptotikus normalitás tulajdonsága azaz (Davidson és MacKinnon (1993) [7]) a becslés hibája aszimptotikusan a normális eloszláshoz tart (kellően gyorsan: $\frac{1}{\sqrt{n}}$), ahol az aszimptotikus kovariancia mátrix $\mathcal{J}(\theta_0)$ a Fisher féle információs mátrix inverze.

$$\sqrt{T} \left(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0 \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, \mathcal{J}^{-1}(\theta_0) \right)$$

Ha a peremeloszlások diszkréték akkor a sűrűségfüggvény: $P \{ (X_1, \dots, X_N) = (x_1, \dots, x_N) \} = (-1)^N \sum_{i_1=0}^1 \dots \sum_{i_N=0}^1 (-1)^{i_1 + \dots + i_N} C(F_1(x_1 - i_1), \dots, F_N(x_N - i_N))$ határozza meg, ebből pedig számolható a loglikelihood függvény:

$$\ell(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln P \{ (X_1, \dots, X_N) = (x_1^t, \dots, x_N^t) \}$$

Ezek után a θ kopula-paraméter maximalizálása révén, valamilyen numerikus algoritmus például Newton-Raphsod iteráció vagy konjugált gradiens módszer segítségével $\hat{\theta}_{ML}$ meghatározható.

3.1.2. IFM módszer

A ML becsléssel az a probléma, hogy már viszonylag nem túl nagy dimenziószámnál is nagy a számításigénye a paraméterbecslésnek, ugyanis egyszerre kell megbecsülni az együttes eloszlás peremeit és a kopula-család paramétereit (azaz a függőségi struktúrát). Ennek kiküszöbölésére adott meg (Joe és Xu [1996] [8]) a ML-el tulajdonképp ekvivalens módszert, amely numerikus szempontból kevésbé mohó. A módszer alapelve az, hogy a paraméterbecslést két lépésben végezzük, szétválasztjuk a függőségi struktúra és a marginális eloszlások becslését. Az ML loglikelihood egyenlethez hasonlóan fel tudjuk írni a loglikelihood függvényt [6] a Joe és Xu fajta megközelítésben:

$$\ell(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \theta_1), \dots, F_n(x_n^t; \theta_n), \dots, F_N(x_N^t; \theta_N); \alpha) + \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N \ln f_n(x_n^t; \theta_n),$$

ahol $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N, \alpha)$ és α az F_n peremeloszlás függvények C kopulájához tartozó paramétervektora.

Első lépésben az egyváltozós peremeloszlásokat becsüljük:

$$\hat{\theta}_n = \arg \max \ell^n(\theta_n) := \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f_n(x_n; \theta_n).$$

Ezt követően pedig az α paramétervektort, melynek megoldását a következő optimumfeladat szolgáltatja:

$$\hat{\alpha} = \arg \max \ell^c(\alpha) := \arg \max_{\sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \hat{\theta}_1), \dots, F_n(x_n^t; \hat{\theta}_n), \dots, F_N(x_N^t; \hat{\theta}_N); \alpha).$$

Ezt a kétlépéses módszert szokás hívni IFM módszernek (Inference function for margins).

Az ML becsléshez hasonlóan, az $\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_N, \hat{\alpha})$ is teljesül az aszimptotikus normalitási tulajdonság:

$$\sqrt{T} \left(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0 \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, \mathcal{V}^{-1}(\theta_0) \right),$$

ahol $\mathcal{V}(\theta_0) = D^{-1}M(D^{-1})^T$ a Godambe-féle információs mátrix [8] $D = E[\partial g(\theta)^T / \partial \theta]$ és $M = E[g(\theta)^T g(\theta)]$.

3.1. Megjegyzés. *Az információs mátrix becslése során a deriváltak meghatározása nagyon számolásigényes az IFM módszernél, így a szerzők alternatív módszereket ajánlanak a kovarianciamátrix becslésére [6].*

3.1.3. CML módszer

Az előző módszerek általánosításaként alakult ki a pszeudó maximum-likelihood módszer, vagy CML (Canonical Maximum Likelihood). Abban más, mint az IFM, hogy függetleníti magát a peremeloszlások típusától.

Első lépésben a módszer során a (x_1^t, \dots, x_N^t) mintát eltranszformáljuk egyenletes eloszlású valószínűségi változóba $(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_N^t)$ felhasználva az empirikus eloszlásfüggvényt majd az eltranszformált peremekre vonatkozólag végezzük az α paraméter becslését [6]:

$$\hat{\alpha} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_n^t, \dots, \hat{u}_N^t; \alpha)$$

Az $\hat{\alpha}$ paramétervektorra úgy is gondolhatunk, mint a megfigyelt marginálisokból származtatott ML becslés (anélkül, hogy bármilyen paramteres alakot feltételeztünk volna a peremeloszlásokra). A CML elnevezés onnan származik, hogy az empirikus eloszlások becslésén alapszik a módszer.

3.2. Megjegyzés. *Az IFM módszer a CML módszer speciális esete az $\hat{u}_n^t = F_n(x_n^t; \hat{\theta}_n)$ -re. A peremtranszformációt pedig a $\hat{u}_i^t = \frac{1}{N+1} \text{rang}(x_i^t)$ $i = 1 \dots N$ [hivatkozás] összefüggés alapján végezzük.*

3.1.4. Kapcsolatszorossági mértékek alapján történő kalibráció

Bizonyos esetekben úgy is tudunk kopulát illeszteni, hogy a kopula függőségi struktúráját becsüljük meg különböző kapcsolatszorossági mértékekkel pl. Kendall-tau, Spearmanró, alsó-felső összefüggőségi index. E mértékek mindegyike a megfelelő kopulához kapcsolható, mivel az együttes eloszlásfüggvénynek a peremeloszlásokkal történő összekapcsolásban a változók közötti összefüggés bizonyos szempontjait ragadja meg. Legyen $\mathcal{L}(\theta)$ egy veszteségfüggvény, ekkor a $\hat{\theta}$ paraméter pontbecslését szolgáltassa a következő feladat (Lehmann és Casella [1998] [10]):

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}(\theta),$$

ahol Θ a paraméterter és a veszteségfüggvény általában kvadratikus alakú

$$\mathcal{L}(\theta) = [\hat{g} - g(\theta)]^T W [\hat{g} - g(\theta)],$$

ahol W súlymátrix, g pedig a kritériumfüggvény.

3.3. Megjegyzés. *Egyparaméteres 2-dimenziós kopulák esetén egy kapcsolatszorossági mértékkel is el tudjuk végezni a paraméterbecslést. Néhány esetben létezik analitikus megoldás is.*

	Spearman ρ	Kendal τ	Tail λ
Gauss	$\theta = 2\sin(\frac{\pi}{6}\rho)$	$\theta = \sin(\frac{\pi}{2}\tau)$	✓
Gumbel	numerikus megoldás	$\theta = (1 - \tau)^{-1}$	$\theta = \ln 2 \ln(2 - \lambda)^{-1}$
FGM	$\theta = 3\rho$	$\theta = \frac{9}{2}\tau$	✓

3.4. Megjegyzés. *A fenti θ paraméterek a kétváltozós Gauss, Gumbel és FGM kopulák paraméterei.*

3.2. Nem paraméteres módszerek

Az empirikus kopulát először Deheuvels [11] vezette be 1979-ben. Legyen

$X^t = (X_1^t, \dots, X_N^t) \in \mathbb{R}^n$ egy független azonos eloszlású sorozat F együtteseloszlással és F_n peremeloszlásokkal. Tegyük fel, hogy F folytonos, így a kopula egyértelműen létezik F -hez.

Legyen δ_u az $u \in \mathbb{R}^N$ vonatkozó Dirac mérték, és $\hat{\mu}(\cdot) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta_{X^t}$. Ekkor az X mintához tartozó tapasztalati eloszlás $\hat{F}(x_1, \dots, x_N) = \hat{\mu}(\prod_{n=1}^N]-\infty, x_n])$. Jelölje továbbá, az $\{x_1^t, \dots, x_N^t\}$ a minta rend statisztikáját és $\{r_1^t, \dots, r_N^t\}$ a minta rang statisztikáját, melyek között az összefüggést a $x_n^{(r_n^t)} = x_n^t$ írja le.

Ekkor a tapasztalati eloszlásból származó empirikus kopula fogalma Deheuvels (1981) [11] szerint a következő:

3.2.1. Definíció. Bármilyen $\hat{C} \in \mathcal{C}$, mely a következő rácshálón van értelmezve

$$\aleph = \left\{ \left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_N}{T} \right) : 1 \leq n \leq N, t_n = 0, \dots, T \right\},$$

és teljesül rá hogy

$$\hat{C} \left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_N}{T} \right) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \prod_{n=1}^N \mathbf{1}_{[r_n^t \leq t_n]}$$

empirikus kopulának nevezzük.

\hat{C}_T -vel jelöljük azt a kopulát, melyet T elemszámú mintából származtatunk. Ekkor a kopulát T rendűnek is szokták hívni.

Deheuvel [11] a következő tulajdonságokat fogalmazta meg az empirikus kopulára:

1. Az \hat{F} empirikus eloszlásfüggvényt egyértelműen meghatározza a
 - Az \hat{F}_n koordináták $\hat{\mu}$ mértékei
 - Az \aleph halmazon vett empirikus kopula \hat{C} értékei.
2. Az \aleph -en értelmezett \hat{C} kopula független F peremeitől.
3. Ha \hat{C}_T egy T rendű empirikus kopula, akkor a \mathcal{C} topológiával $\hat{C}_T \rightarrow C$ (például egyenletes konvergencia)

3.2.2. Definíció. Radon Nikodym derivált empirikus kopulára (Nelsen 1998)

$$\hat{c} \left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T}, \dots, \frac{t_N}{T} \right) = \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_N=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_N} \hat{C} \left(\frac{t_1 - i_1 + 1}{T}, \dots, \frac{t_n - i_n + 1}{T}, \dots, \frac{t_N - i_N + 1}{T} \right)$$

,ahol \hat{c} az empirikus kopulafrekvencia és az empirikus kopulával a kapcsolat:

$$\hat{C} \left(\frac{i_1}{T}, \dots, \frac{i_n}{T}, \dots, \frac{i_N}{T} \right) = \sum_{t_1=1}^{i_1} \dots \sum_{t_N=1}^{i_N} \hat{c} \left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T}, \dots, \frac{t_N}{T} \right)$$

Egy megfelelő finomságú rácshálón értelmezve a mintára illesztett empirikus kopula kellően nagy mintára közelíti az elméleti kopulát. Ezek alapján a függőségi indexek kalkulálhatók, és ezen keresztül bizonyos esetben a paraméterek is becsülhetőek.

3.1. Példa.

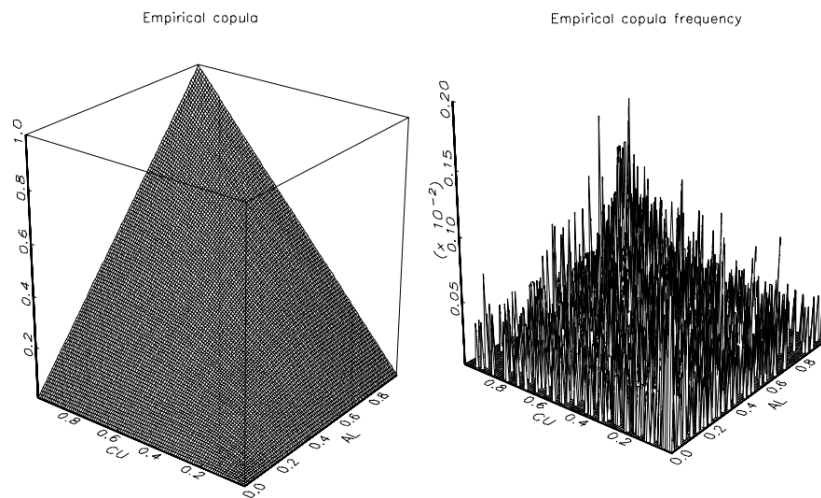
$$\hat{\rho}_S = \frac{12}{T^2 - 1} \sum_{t_1=1}^T \sum_{t_2=1}^T \left(\hat{C} \left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T} \right) - \frac{t_1 t_2}{T^2} \right)$$

$$\hat{\tau}_K = \frac{2}{T-1} \sum_{t_1=1}^T \sum_{t_2=1}^T \sum_{i_1=1}^{t_1-1} \sum_{i_2=1}^{t_2-1} \left(\hat{c} \left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T} \right) \hat{c} \left(\frac{i_1}{T}, \frac{i_2}{T} \right) - \hat{c} \left(\frac{t_1}{T}, \frac{i_2}{T} \right) \hat{c} \left(\frac{i_1}{T}, \frac{t_2}{T} \right) \right)$$

$$\lambda(u) = \frac{\bar{C}(u, u)}{1-u} \quad \lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \lambda(u),$$

ahol \bar{C} a túlélési kopula.

A következő kép Durrleman (2000) [6] cikke alapján:



3.1. ÁBRA. Empirikus kopula és a kopulafrekvencia

4. fejezet

Az operációs kockázat és az LDA modell

4.1. A pénzügyi szabályozás szerepe

A pénzügyi intézmények esetén a bázeli irányelvek kikényszerítik, hogy kellő nagyságú fedezet álljon rendelkezésre a várt és nem várt kockázatokból fakadó veszteségekre. Ennek az irányelvnek a fő célja az, hogy növelje és fenntartsa a nemzetközi pénzügyi rendszerekben a stabilitást. A Bázeli III [12] jelenleg három pillér alapján szabályozza a pénzintézetek működését. A részletes felépítésre a dolgozat folyamán nem térünk ki, csak röviden ismertetjük a pilléreket:

- Az I. pillér legfőbb szabályozói célja a minimális tőkekövetelmények biztosítása piaci, hitel- és operációs kockázatokra vonatkozóan.
- A II. pillér szerepe a tőkemegfeleltetés felügyeletére vonatkozik: a kockázatkezelésre vonatkozó belső eljárások ellenőrzése, a felügyelet tevékenységi kör stb.

- A III. pillér központi szerepe a piaci fegyelemre irányul. Új előírások a tőkeáttételi mutatóra, kontraciklikus tőkepufferképzés vizsgálata, minimum likviditási szten-derdek bevezetése (rövid és hosszú távú likviditási mutatók alkalmazása, moni-toring és likviditási kockázatmérés kapcsán).

A dolgozat szempontjából, az operációs kockázathoz kapcsolódó előírások és a mérési módszertan az érdekes. A vizsgálat és modellek lehetséges alapjait megadó fontosabb keretrendszert a következő szekció készíti elő.

4.2. Az operációs kockázat

4.2.1. Definíció. *Operációs kockázat*

A működési kockázat belső folyamatok, rendszerek, emberek nem megfelelően összehangolt működése avagy meghibásodása, illetve valamilyen külső esemény hatására bekövetkező veszteség kockázata.

4.1. Megjegyzés. *Ez egy jogszabályi alapon felépített, viszonylag általános definícióját adja meg az operációs kockázatnak. A definícióba beleértendő a jogi kockázat is, viszont a stratégiai és a "jó hírnév" kockázat például kívül esik a szabályozói definíción.*

A pénzügyintézetben az operációs kockázat számításához először részekre kell osztani az operációs kockázathoz tartozó tevékenységek és folyamatok egészét. Ezeket a részeket elsősorban a szabályozó által ajánlott veszteségekategóriák szerint - 7 kategóriát szokás kialakítani -, továbbá, ha lehetőség adódik rá, üzletágak szerint szükséges tovább bon-tani.

A szabályozó által előírt hét operációs veszteségkategóriák a következők:

1. Belső csalás, pl. üzleti titkok megsértése, adócsalás, vesztegetés
2. Külső csalás, pl. adatlopás, hamisítás, komputertámadásból fakadó károk
3. Foglalkoztatás, munkahelyi védelem pl. előnyben részesítés, dolgozói kompenzáció, munkahelyi baleset
4. Kliensek, termékek, üzleti gyakorlat pl. piaci manipuláció, termékhibák, téves kereskedés
5. Eszközökben okozott károk, pl. terrorizmus, vandalizmus
6. Rendszer hibák, pl. szoftver és hardver hibák
7. Teljesítés, szállítás, folyamatkezelés pl. adathozzáférési hiba, számviteli eljárás során felépő hibák

Érdemes megemlíteni a bázeli szabályozás által rendelkezésre álló mérési módszerek típusait is.

- A legegyszerűbb módszer az alapmutató módszere (BIA). Ez az úgynevezett irányadó mutató, mely a bruttó átlagjövedelem 15% százalékában határozza meg a tőkekövetelményt az elmúlt 3 év alapján.
- A sztenderdizált módszer (TSA) a bank műveleteit 8 tevékenységi csoportba sorolja, így ennek keretében üzletáganként számított és súlyozott irányadó mutatók aggregátuma a működési kockázat tőkeszükséglete. A kategóriánkénti tőkét az elért nettó jövedelmek 12% – 18% közötti súlyokkal való beszorzásával számítják ki.
- Az alternatív sztenderd módszer (ASA) a folyósított hitelek százalékában határozza meg a szükséges tőke nagyságát.
- A fejlett mérési módszer (AMA) a hitelintézetek belső modellek alapján meghatározott kockázati kitettségre alapozva írja elő a tőkeallokációt.

A Bazel II szerinti fejlett módszerek bevezetésének jelentős mind az anyagi, mind az egyéb erőforrásigénye, de hosszabb távon a szabályozói tőkekövetelmény csökkenése révén minden bizonnyal profitábilis befektetés lehet a bankok számára. A dolgozatomban az AMA kereteibe illeszkedő statisztikai módszertan, a kockázat veszteségeloszlás-alapú megközelítésében (Loss Distribution Approach) mutatjuk be a működési kockázatok tőkeképzésének egy lehetséges modellezését, kiegészítve a kopulák eszköztárával.

4.3. Veszteségeloszlás-alapú megközelítés (LDA)

Az LDA módszer [13] egy aktuáriusi szemléleten alapuló eljárás arra vonatkozólag, hogy több kockázati osztály esetén meghatározzuk a várt és nem várt veszteségek fedezéséhez szükséges tőkekövetelményt hitelintézeti vonatkozásban.

A tőkekövetelmény meghatározásának tipizált módja az, hogy adott szignifikancia szint mellett, különféle kockázati mértékek szerint vizsgáljuk az együttes illetve a marginális veszteségeloszlásokat. A bázeli szabályok szerint bankok esetén 99.9%, míg biztosítók esetén 99.5%-os kvantilisre szokás képezni a tőkét.

Az együtteseloszlás meghatározása előtti lépés során a veszteségeinket különféle kockázati osztályokba soroljuk, például valamilyen osztályozó eljárással (döntési fa, klaszteres stb.). Operációs kockázatok esetén ezek gyakran előre meghatározottak és a korábban említett csoportok szerint szeparáltak, a 4.2-es szerint. Ezek után minden egyes egyedi kockázati osztályt megvizsgálunk s majd ezen egyedi osztályokat aggregálva képezzük meg a szükséges szavatoló tőkét.

4.3.1. Egyedi kockázatok vesztesége

Minden ilyen egyedi kockázati osztályhoz tartozik egy összetett kockázati modell, mely matematikailag a következő:

Legyenek r_i a különféle egyedi kockázatok, és mindegyikhez tartozzon a veszteségeknek egy homogén csoportja. Legyen továbbá L_{r_i} az ezen csoportokhoz tartozó meghatározott időszakra vonatkozó (tipikusan és a mi esetünkben is egy éves) veszteségeloszlás. Ekkor a különböző osztályokhoz tartozó éves veszteségeloszlások a kockázatok két további jellemzői alapján határozhatóak meg:

- N_{r_i} nem negatív véletlen változó reprezentálja az r_i kockázat osztályához tartozó veszteségesemények számát egy év alatt, így szokás kárszámeloszlásoknak vagy gyakorisági eloszlásnak is nevezni.
- X_{r_i} reprezentálja az r_i kockázat osztályához tartozó káreloszlást; Ez az a pénzmenyiség amennyit elvesztünk egy káreset során. Ezek alapján X_{r_i} -t az r_i kockázathoz tartozó káreloszlásnak vagy egységnyi veszteségeloszlásnak hívjuk.

Az r_i kockázathoz tartozó aggregált éves veszteségeloszlás így:

$$L_{r_i} = \sum_{j=1}^{N_{r_i}} X_{r_i,j}$$

Teljesülnek továbbá a következő feltételek miszerint:

1. N_{r_i} és $(X_{r_i,1}, X_{r_i,2}, \dots, X_{r_i,N_{r_i}})$ minden i -re független valószínűségi változók
2. $X_{r_i,1}, X_{r_i,2}, \dots, X_{r_i,N_{r_i}}$ FAE azaz független azonos eloszlású valószínűségi változók.

Ahogy hangsúlyoztuk, a fentiekben leírt modell nem a pénzügyi teljes kockázatára, hanem csak egy rögzített osztály kockázatára vonatkozik. Az adott osztályhoz tartozó veszteségek tehát függetlenek és azonos eloszlásúak, nem negatív értékűek. Ezek nem túlzottan szűkítő feltételezések, hiszen ezek értelmében a vizsgált időszakban bekövetkező veszteségek egymástól függetlenek, és azok azonos eloszlását azért indokolt feltételeznünk, mert ugyanazon rögzített veszteségkategória és üzletág veszteségei, tehát azonos típusúak.

4.2. Megjegyzés. *Szélső esetekben az egyes események akár negatív veszteséggel is járhatnak. A következőkben ezektől az esetektől eltekintünk.*

Általánosságban elmondható, hogy a gyakoriságeloszlások jellemzően az $(a, b, 0)$ eloszláscsaládból származó eloszlások (Poisson, binomiális, illetve negatív binomiális), míg a káreloszlások a stilizált tények alapján gamma, Pareto, és exponenciális eloszlást követnek. Esetenként lognormálist és a Pareto helyett más extrémérték eloszlásokat is ajánlanak a szakirodalomban, de végső soron mindig az adott mintára vonatkozó szakértői álláspont a meghatározó. Másik jellemzője a veszteségeloszlásoknak a normális eloszlásokhoz képest a vastagabb szélek, ebből kifolyólag kritikus pont az együttes eloszlás meghatározása során a megfelelő eloszláscsalád meghatározása. Ha pontatlanul tudjuk leírni az "eloszlás szélét", akkor hatványozottan romlanak a tőkekövetelmény meghatározásához szükséges kvantilis alapú becslések.

Speciálisan, ha a gyakoriságeloszlás Poisson-eloszlást követ, akkor L_{r_i} eloszlása összetett Poisson-eloszlást eredményez, melyet a pénzügyi matematikában számos helyen alkalmaznak:

$$P(L_{r_i} \leq x) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^n X_{r,j} \leq x\right)P(N_{r_i} = n)$$

4.3. Megjegyzés. *Ennek az analitikus megoldása nem lehetséges, így gyakran Monte Carlo szimulációval vagy egyéb rekurzív közelítő eljárással határozzák meg.*

4.3.2. Tőketartalék, és az együttes eloszlás

Korábban említettük, hogy a tőketartalék meghatározásához szükségünk van a veszteségek együttes eloszlásfüggvényére. Ha már sikerült az egyedi kockázati osztályokra vonatkozóan a veszteségeloszlásokat megbecsülni, akkor már nincs más dolgunk, mint L_{r_i} eloszláshoz tartozó valószínűségi változókat aggregálni, minden $(r_i)_{1 \leq i \leq m}$ egyedi kockázati osztályra.

$$G = \sum_{i=1}^m L_{r_i} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{N_{r_i}} X_{r_i,j}$$

Ezek után valamilyen kockázati mértéket alapul véve a tőketartalék kalkulálható. A bázeli szabályozás a VaR-t ajánlja:

4.3.1. Definíció. Value at Risk

A kockázatotott érték az i . veszteséeloszlás α kvantilise:

$$VaR_\alpha(L_{r_i}) := \inf \{x \in \mathbb{R} : P(L_{r_i} \geq x) \leq 1 - \alpha\},$$

ahol $1 - \alpha$ a konfidencia szint.

A VaR-nak ugyanakkor számos hibája létezik, ami miatt sokan kritizálják. Például el-
lentmondó eredményeket adhat eltérő konfidenciaszintek mellett, és mivel nem konvex
mérték gátolja a diverzifikációt. Nem veszi figyelembe a VaR-t meghaladó veszteségeket,
nem alkalmazható optimalizációs problémákon. Nagyon szigorú feltételek esetén szub-
baditív, csak elliptikus eloszlásokra vonatkozólag, ha igaz, hogy a kockázatok komono-
tonok. Ez pedig csak akkor teljesül, ha a különböző osztályok között tökéletes pozitív
korreláció áll fent, mindazonáltal ekkor igaz, hogy

$$VaR_\alpha\left(\sum_{i=1}^m L_{r_i}\right) \leq \sum_{i=1}^m VaR_\alpha(L_{r_i}),$$

ahol a felső határ a tökéletesen összefüggő eset. Tehát a VaR nem szubbaditív így
mégcsak nem is koherens kockázati mérték. A VaR-nál jobb alternatívát nyújthat
Acerbi [14] szerint az ES (Expected Shortfall), mely már koherens kockázati mérték
lesz.

4.4. Megjegyzés. Azt mondjuk, hogy egy kockázati mérték koherens [15] ha kielégíti
a szubbaditivitást, a transláció invariancia, a monotonitás és az elsőfokú homogenitás
elvét.

4.3.2. Definíció. Expected Shortfall

Az Expected Shortfall az i . osztályhoz tartozó VaR-t meghaladó átlagos meghaladások az
 α kvantilis mellett:

$$ES_\alpha(L_{r_i}) = E[L_{r_i} | L_{r_i} \geq VaR_\alpha(L_{r_i})]$$

4.5. Megjegyzés. *A fenti definíció valójában a feltételes várható extrém érték (TCE Tail conditional expectation), csak ez folytonos eloszlások esetén ekvivalens az ES-el.*

A tőketartalék tehát:

4.3.3. Definíció. *Tőketartalék*

$$EC = VaR_{\alpha}(G),$$

4.6. Megjegyzés. *Az $\alpha = 0,01\%$ a bankok, míg $\alpha = 0,05\%$ a biztosítók esetében.*

Az összes veszteséghez szükséges tőkekövetelmény alatt tehát egy előre meghatározott konfidencia szinthez tartozó kockázatotott értéket értünk. Szokás az *ES*-en és *VaR*-on kívül számos más alternatív kockázati mértékeket is használni.

4.7. Megjegyzés. *Bizonyos esetekben a szabályozó lehetőséget nyújt arra is, hogy a hitelintézet által képzett tőke csupán a nem várt veszteségekre nyújtson fedezetet. Erre tipikusan akkor van lehetőség, ha a bank bizonyítja a felügyeletnek, hogy a belső üzletviteli eljárások során ezt más módon már figyelembe vette (pl. termékek árazása, céltartalékképzés). Ilyen esetben a kockázatotott tőkét csökkenteni kell a várható veszteségekkel. A szimulációk során mi nem élünk ilyen feltételezésekkel.*

4.3.3. Egyedi osztályok közti függőség szerepe

A működési kockázati tőketartalék képzése során a *VaR* esetén fontos, hogy úgy határozzuk meg a különböző kockázati faktorainkat, hogy minél inkább diverzifikáltabbak legyenek (ha lehetséges), mivel ekkor az egyedi kockázatok kvázi függetlenek lesznek a korábbi feltétel szerint. A gyakorlatban például a belső csalás és a tárgyi eszközöket ért károk, mint egyedi osztályok az extrém esetektől eltekintve valóban függetlennek mondhatóak, azonban egyáltalán nem jellemző minden veszteségosztályra a korrelálatlanság. Ez alapján a bázeli szabályok szerint hivatalos másik alternatívája a tőkeképzésnek:

$$EC = \sum_{i=1}^m VaR_{\alpha}(L_{r_i})$$

Ez pont a tökéletes korreláltság esete. A korábbi esettel szemben elliptikus eloszlások esetén ez egy jóval konzervatív felső becslést eredményez.

A veszteségosztályok közti korreláció mértéke tehát bizonyos feltételek mellett, ténylegesen befolyásolja a tőketartalékot, így természetes gondolatként adódott a függőségi struktúra kopulákkal történő vizsgálata.

Nézzük, most az alternatív LDA modellt, amikor az egyedi kockázatok között megengedünk korrelációt. Ekkor legyen az egyedi kockázatokhoz tartozó aggregált veszteségeloszlás H , egy C kopula és L_{r_i} marginálisokkal definiált,

$$H(x_1, x_2, \dots, x_m) = C(L_{r_1}(x_1), L_{r_2}(x_2), \dots, L_{r_m}(x_m)).$$

Legyenek továbbá $(H_i)_{1 \leq i \leq m}$ a H peremei, ekkor az operációs tőketartalék:

$$EC = VaR_{\alpha}\left(\sum_{i=1}^m H_i\right)$$

4.4. Kopulák szerepe LDA esetén

A következő szekciót előkészítve, röviden ismertetni szeretném gyakorlati szempontból a kopulák jelentőségét. A korábbi feltételezéseinkkel élve, tehát vegyük figyelembe a különböző kockázati osztályok közötti függőségeket. Ez a feltételezés egyrészt életszerű, másrészt praktikus is lehet hitelintézeti szemszögből nézve, mivel egy eszközt szolgáltathat arra, hogy csökkenjen a kockázatosított érték, mely segítheti a felügyeletnek való megfelelést. A tőketartalék meghatározásánál ezek után a cél az együttes veszteségeloszlás becslése.

Erre különféle módszerek léteznek, talán a legkézenfekvőbb az, ha vesszük a tapasztalati eloszlás kvantilisét, vagy pedig feltételezünk egy eloszláscsaládot (például többdimenziós

normális eloszlás) és valamilyen paraméterbecslési módszerrel (momentum módszer, ML becslés) specifikáljuk a keresett eloszlást.

Általánosságban viszont elmondható, hogy ez az operációs kockázatok estében nem járható út, mert a teljes veszteségadatok száma nagyon kevés, általában pár évre korlátozódik. Ráadásul magas kvantilis mellett történik a tőkeképzés, ami miatt hatványozottan érvényesül a pontatlan becslésből eredő hiba.

Éppen ezért ajánlja a szakirodalom az LDA-hoz hasonló megközelítést, hogy először becsüljük külön a veszteség- és a gyakoriságeloszlásokat majd ezekből határozzuk meg az együtteseloszlást. Erre a célra is léteznek különféle módszerek, a leginkább használt és ismert a Panjer rekurzió (1981) [16], mely egy rekurzív összefüggést szolgáltat a teljes eloszlásra, ha teljesül, hogy a gyakoriságok $(a, b, 0)$ eloszlások, illetve a veszteségeloszlás egész értékű (folytonos esetben ez áthidalható, ha diszkrétizáljuk az eloszlást). A Panjer módszer alkalmazásának veszélye, hogy numerikus hibák léphetnek fel a rekurzió alkalmazása során (Panjer és Wilmot (1986) [17]).

Végül egy alternatív lehetőség a kopulák használata. A minta adataihoz egy empirikus kopulát lehet illeszteni 3.2-es definíció, majd ezek után ki lehet választani, hogy melyik elméleti kopula illeszkedik legjobban az empirikus kopulára. Ezt követően (vagy megelőzően) megbecsüljük a peremekre leginkább illeszkedő eloszlásokat, majd a kopula és a peremek segítségével az együttes eloszlás Sklar tétele alapján megadható.

A kopula módszernek a legfőbb előnye a többi módszerrel szemben az, hogy csak a kopulaosztályra van előzetes feltételezésünk, az együtteseloszlásra vonatkozólag nincs. Egymástól elhatárolva történik továbbá a peremeloszlás és a függőségi struktúra vizsgálata.

4.8. Megjegyzés. *Ha az együttes eloszlásra valamely kitévelt teszünk, akkor az bizonyos esetekben a marginálisokra is feltételt szab (például több dimenziós normálisok peremei is normálisok). Kopulák esetében nézhetünk teljesen különböző peremeket is (például exponenciális eloszlású peremekre illeszthetünk az összefüggést leíró Gauss-kopulát), továbbá a korreláció helyett más mértékeket is használhatunk a kapcsolatok leírására.*

5. fejezet

Szimulációs tanulmány

5.1. Szimulációs tanulmány

Ebben a fejezetben egy gyakorlati példán keresztül szeretném bemutatni az LDA által nyújtott módszertant a kopulák vonatkozásában. A szekció célja, hogy a szakirodalommal összhangban egy általános keretet nyújtsak a téma iránt érdeklődők számára, ennek érdekében a dolgozat során felhasznált programkódok és adatsorok a függelék megfelelő részeiben elérhetőek. A programkódokat az R statisztikai programban írtam. Ez egy nyílt forráskódú programcsomag, így bárki számára elérhető. Bankbiztonsági okokból kifolyólag nem állt rendelkezésemre operációs veszteségadatbázis, így a szimulációk során különféle feltételezésekkel éltünk. Ezeknek a feltételezéseknek köszönhetően a szimuláció célja nem az optimális kopula melletti tőketartalék meghatározása, hanem annak vizsgálata, hogy van-e kardinális szerepe a megfelelő kopulaosztály megválasztásának, illetve ajánlást teszünk a peremeloszlások és kopulák becslésére. A szimulációs tanulmány három részből tevődik össze.

1. A peremeloszlások becslésének vizsgálata.
2. A kopulakalibrációk közötti választás.
3. Tőketartalék számítása különféle kopulák mellett, ezek összevetése a sztenderd LDA eredményeivel.

5.1. Megjegyzés. *Csak a 3. eset során van szükségünk ténylegesen a banki veszteségadatokra, az első esetnél elegendő az elméleti paraméterek ismerete.*

5.1.1. Az adatbázisról

A stilizált tények alapján egy fiktív adatbázist hoztunk létre, melynek alapjait a Giudici, Fantazzini és Valle cikke [18] szolgáltatta. A cikkben egy anonim bank 6 éves operációs veszteségadatsorát vizsgálták, melynek időtávja 1999 januárjától egészen 2004 decemberéig bezáróan tartott. A veszteségek gyakorisága és eloszlása havi bontásban került rögzítésre összesen 72 hónapra vonatkozólag. A bázeli irányelvek által korábban meghatározott veszteségkategóriái közül négyet kiválasztva és két ágazat szerint, tehát összesen nyolc különféle kategóriában. A bank anonimitása érdekében a kategóriákat nem pontosították.

A rendelkezésükre álló idősor alapján, a cikkben ML módszerrel megbecsülték több különböző gyakoriság és veszteségeloszlásokra vonatkozóan a peremeloszlások paramétereit, és közzé tették a Gauss-kopula struktúrája alapján a korrelációs mátrixot. Az ezek által nyújtott információk ismeretében lehetőség nyílt egy stilizált tényen alapuló adatbázis létrehozására. A veszteségkategóriák eloszlásának meghatározásához szükséges paraméterek a következők:

A gyakoriság eloszlásokra becsült paraméterek		
Poisson (λ) Negatív Binomiális (p, θ)		
Osztályok	λ	(p, θ)
r_1 . kategória	1.4	(0.59,2.01)
r_2 . kategória	2.19	(0.4,1.49)
r_3 . kategória	0.08	(0.8,0.33)
r_4 . kategória	0.46	(0.92,5.26)
r_5 . kategória	0.1	(0.84,0.52)
r_6 . kategória	0.63	(0.33,0.31)
r_7 . kategória	0.68	(0.42,0.49)
r_8 . kategória	0.11	(0.88,0.8)

A káreloszlásokra becsült paraméterek			
Gamma (α, θ) Exponenciális λ Pareto (α, θ)			
Osztályok	(α, θ)	λ	(α, θ)
r_1 . kategória	(0.15,64848)	9844	(2.36,13368)
r_2 . kategória	(0.2,109321)	21721	(2.5,32494)
r_3 . kategória	(0.2,759717)	153304	(2.51,230817)
r_4 . kategória	(0.11,1827627)	206162	(2.25,258588)
r_5 . kategória	(0.2,495701)	96873	(2.49,143933)
r_6 . kategória	(0.38,19734)	7596	(3.25,17105)
r_7 . kategória	(0.06,211098)	12623	(2.13,14229)
r_8 . kategória	(0.26,135643)	35678	(2,71,61146)

A korrelációs struktúra gaussi kopula esetén								
Osztályok	$r_1.$	$r_2.$	$r_3.$	$r_4.$	$r_5.$	$r_6.$	$r_7.$	$r_8.$
$r_1.$	1	-0.05	-0.142	0.051	-0.204	0.252	0.140	-0.155
$r_2.$	-0.05	1	-0.009	0.055	0.023	0.115	0.061	0.048
$r_3.$	-0.142	-0.009	1	0.139	-0.082	-0.187	-0.193	-0.090
$r_4.$	0.051	0.055	0.139	1	-0.008	0.004	-0.073	-0.045
$r_5.$	-0.204	0.023	-0.082	-0.008	1	0.118	-0.102	-0.099
$r_6.$	0.252	0.115	-0.187	0.004	0.118	1	-0.043	0.078
$r_7.$	0.140	0.061	-0.193	-0.073	-0.102	-0.043	1	-0.035
$r_8.$	-0.155	0.048	-0.090	-0.045	-0.099	0.078	-0.035	1

5.2. Megjegyzés. Mivel a fenti gyakoriság és káreloszlások nevezetes eloszlások, a dolgozat keretein belül most nem definiáljuk őket. A megfelelő paraméterezés értelmezése (például a Pareto eloszlások különféle típusai) a függelék Monte Carlo kódrészletei és hozzá tartozó URL címek alapján vagy Giudici [18] cikke segítségével meghatározható.

A szimuláció során fontos leszögezni, hogy erőteljes feltételezés az, hogy egy gaussi struktúrából szimulált együttes veszteségeloszlás írná le jól a tényleges banki veszteségadatokat, így ebből a szempontból nincs értelme a legjobban illeszkedő kopulát megtalálni, mert már előre definiált. Mint már korábban említettük, nem állnak rendelkezésre adataink, így egy generált adatsoron fogunk vizsgálni, de mivel Gauss-kopulából generáljuk az adatsort, elveszíti számos érdekes jellemzőjét az empirikushoz idősorhoz képest.

Így a vizsgálat célja az utolsó részszekcióban nem a legjobban illeszkedő kopula melletti tőketartalék meghatározása lesz, hanem inkább azt vizsgálni, hogy van-e szignifikáns hatása annak, ha különféle kopulaosztályt választunk a tőketartalék képzése során ezen a generált adatsoron. Ezek eredményeit hasonlítjuk össze az LDA modell tökéletesen összefüggő esetével.

A következőkben megvizsgáljuk, hogy a mintaelemszám nagyságának függvényében a peremeloszlásokra mely eloszláscsaládokat érdemes illeszteni.

5.1.2. Peremeloszlások vizsgálata

Az operációs veszteségekhez tartozó mintákra jellemző, hogy nagyon kevés elemszámúak, a rendelkezésre álló adatsorok nagyon rövidek. Így kulcsfontosságú, hogy a peremekre illeszkedő eloszlás minél kisebb hibával írja le az adatsort. A bázeli irányelvek alapján ráadásul hét különféle veszteségkategóriát különböztetünk meg, és azokat tovább osztályozhatjuk nyolc különböző üzleti kategóriába. Ha ágazatonkénti teljeskörű vizsgálatot szeretnénk tehát, akkor 56 kategóriára lenne szükségünk, ami gyakorlati szempontból kivitelezhetetlen kis mintára. Mi a szimuláció során ezért megmaradunk a fenti 8 kategóriánál, sőt, azon belül is most kiemelünk egy konkrét veszteségkategóriát, a fenti r_3 -as scenáriót.

A kopulaillesztés első lépése az, hogy megbecsüljük a marginálisokat. Így természetesnek adódik, hogy érdemes megvizsgálni a mintaelemszám függvényében mely eloszláscsaládot érdemes illeszteni a peremekre.

Ezek alapján Monte Carlo szimulációt végeztünk négy forgatókönyv esetén különböző nagyságú mintaméretekre: $T = 72$, $T = 500$, $T = 1000$, $T = 2000$. A Giudici cikk [18] által meghatározott paramétereket feltételeztük a valós paramétereknek. Majd $N = 10000$ replikáció mellett legeneráltuk a négy forgatókönyvet és megnéztük, hogy az ML szerinti becült paraméterek várható értéke mennyiben tér el a valós paramétertől a különféle eloszlások esetén.

Az eltérés méréséhez használt indikátorok a következők:

$$MSE(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \theta_0),$$

$$VC(\Theta) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \hat{\theta})^2}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i)},$$

ahol θ_0 a valós paraméter, θ_i az i . Monte Carlo replikáció, MSE az átlagtól való négyzetes eltérés, a VC pedig a variációs koefficiens, mely a szórás százalékos aránya az átlaghoz viszonyítva. Mérés szempontjából ez nem más, mint a relatív hiba.

Ez alapján adódott a következő táblázat a káreloszlásokra:

Kismintás becslések exponenciális eloszlás			
$\lambda_0 = 153304$	Mean($\hat{\lambda}$)	MSE($\hat{\lambda}$)	VC($\hat{\lambda}$)
$T = 72$	153332.7	330490614	0.11856166
$T = 500$	153393.6	47533667	0.04494244
$T = 1000$	153289.0	23540115	0.03165127
$T = 2000$	153291.2	11739289	0.02235119

Kismintás becslések gamma eloszlás						
$(\alpha_0 = 0.2, \theta_0 = 759717)$	Mean($\hat{\alpha}$)	MSE($\hat{\alpha}$)	VC($\hat{\alpha}$)	Mean($\hat{\theta}$)	MSE($\hat{\theta}$)	VC($\hat{\theta}$)
$T = 72$	0.2055	0.0013175	0.1744	780847	$1.90 \cdot 10^{10}$	0.174
$T = 500$	0.2009	0.0001679	0.0643	763416	$2.42 \cdot 10^9$	0.064
$T = 1000$	0.2004	0.0000813	0.0449	761320	$1.17 \cdot 10^9$	0.044
$T = 2000$	0.2001	0.0000396	0.0314	760131	$5.71 \cdot 10^8$	0.031

Kismintás becslések Pareto eloszlás						
$(\alpha_0 = 2.51, \theta_0 = 230817)$	Mean($\hat{\alpha}$)	MSE($\hat{\alpha}$)	VC($\hat{\alpha}$)	Mean($\hat{\theta}$)	MSE($\hat{\theta}$)	VC($\hat{\theta}$)
$T = 72$	645749	$2.61 \cdot 10^{14}$	24.2433	6.0145	23500	25.3277
$T = 500$	311431	$2.08 \cdot 10^{11}$	0.3106	3.1567	9.030	0.1867
$T = 1000$	298654	$2.23 \cdot 10^{11}$	0.1876	2.8459	7.913	0.1456
$T = 2000$	281462	$2.34 \cdot 10^{11}$	0.1564	2.7941	7.123	0.1134

Illetve a gyakoriság eloszlásokra:

Kismintás becslések Poisson eloszlás			
$\lambda_0 = 0.08$	Mean($\hat{\lambda}$)	MSE($\hat{\lambda}$)	VC($\hat{\lambda}$)
$T = 72$	0.07942917	0.0010831736	0.41428928
$T = 500$	0.07998840	0.0001616192	0.15893490
$T = 1000$	0.07997690	0.0000814937	0.11287455
$T = 2000$	0.07991160	0.0000392457	0.0783868

Kismintás becslések negatív binomiális eloszlás						
$(p_0 = 0.8, \theta_0 = 0.33)$	Mean(\hat{p})	MSE(\hat{p})	VC(\hat{p})	Mean($\hat{\theta}$)	MSE($\hat{\theta}$)	VC($\hat{\theta}$)
$T = 72$	0.08607	0.03146	0.18881	-	-	-
$T = 500$	0.08194	0.01154	0.11782	3.62178	310.800	4.782
$T = 1000$	0.08076	0.00512	0.0887	0.74543	30.318	7.365
$T = 2000$	0.08044	0.00278	0.0645	0.36724	0.022	0.397

5.1. Következmény. A gyakoriságeloszlások közül egyértelműen a Poisson eloszlás a legmegfelelőbb választás. Már 72 elemszám mellett is konzisztens becslést ad, és a variációs koefficiens (relatív hiba) is megfelelően kicsi. Ráadásul a negatív binomiális illesztésekor nincsen zárt alak a paraméterekre, mindenképp valamilyen iterációval kell élnünk a maximum likelihood optimalizálása során. Ezáltal a szélső érték keresése során gyakran előfordulhatnak negatív értékek a paraméterre kevés elemszámnál. Ezért nem tudtuk megbecsülni $T = 72$ mellett a binomiális másik paraméterét. Az esetek több mint felében negatív érték jött ki a paraméterre. Emiatt körültekintően kell eljárni negatív binomiális eloszlás család illesztésekor kis elemszámnál. Ha a veszteségeloszlásokat vizsgáljuk, akkor pedig az tapasztaljuk, hogy az exponenciális és gamma eloszlások teljesítenek a legjobban a kis mintán. Az exponenciális eloszlás picivel jobb, mint a gamma, de ez várható is, mivel az exponenciális eloszlás a gamma speciális eseteként áll elő.

A következőkben ajánlást teszünk arra vonatkozóan, hogy mely kopula kalibrációs módszerek élveznek előnyt praktikussági szempontból (futásidő, konvergencia sebesség stb.).

5.1.3. Kopulakalibrációk vizsgálata

Ebben a részben az R programhoz telepített copula csomag segítségével, ismert paraméterek mellett szimulálunk Gauss, Student t- és Gumbel kopulát. Ezek után az R-ben ismeretes kalibrációs módszerekkel visszamérjük a paramétereinket, a mintaelemszám függvényében. Legyen θ_0 az általunk meghatározott keresendő elméleti paraméter, θ_{est} a kalibrációs módszerrel meghatározott becsült paraméter, DoF pedig a Student t-kopula esetén a szabadságfok. Gauss-kopula generálásakor $\theta_0 = 0.5$, Student t-kopula esetén $(\theta_0, DoF) = (0.8, 3)$, míg Gumbel kopula esetén $\theta_0 = 3$ feltételezéssel élünk. Első lépésben a különféle kopulák esetén, illetve rögzített seed mellett (fixált véletlentábla mellett generált változók esetén) vizsgáljuk, a futási idejét a becsléseknek különböző méretű kopulákra. Itt még nem a becslés pontosságának a vizsgálata a cél, hanem az, hogy összehasonlítsuk a módszereket a futási idő és konvergencia szempontjából. Az R csomaghoz tartozó egyéb információk a függelék megfelelő részében megtalálhatóak. Az inverz-tau és inverz-ró eljárások esetén Student t-kopulánál a szabadságfok fixálására kényszerít minket a program, így nincs lehetőség a DoF becslésére ezekenél a módszereknél. Az ML a maximum likelihood míg az MPL a maximum pszeudó likelihood módszer rövidítésére szolgál, mely analóg a korábban definiált CML eljárással. Más programcsomagokban (Matlab, SAS) ilyen kontextusban szeretik használni.

$T = 1000$ mintára

Gauss-kopula:	θ_{est}	DoF	Futási idő (sec)
ML	0.4940108	-	0.6500000
MPL	0.4950348	-	0.5700000
Inverz Tau	0.4812576	-	0.3300000
Inverz Ró	0.477193	-	0.00673
Student t-kopula:	θ_{est}	DoF	Futási idő (sec)
ML	0.8004042	2.882353	2.6100000
MPL	0.8003766	2.874138	1.8800000
Inverz Tau	0.8027725	-	0.3100000
Inverz Ró	0.7825261	-	0.0100000
Gumbel-kopula:	θ_{est}	DoF	Futási idő (sec)
ML	3.025631	-	1.150000
MPL	3.023557	-	1.020000
Inverz Tau	3.023315	-	0.310000
Inverz Ró	3.024166	-	0.020000

$T = 10000$ mintára

Gauss-kopula:	θ_{est}	DoF	Futási idő (sec)
ML	0.5006196	-	18.7500000
MPL	0.5004138	-	18.0300000
Inverz Tau	0.4940343	-	27.9700000
Inverz Ró	0.4940676	-	0.05000
Student t-kopula:	θ_{est}	DoF	Futási idő (sec)
ML	0.8022442	3.232483	43.4500000
MPL	0.8016293	3.213461	36.7400000
Inverz Tau	0.7992014	-	28.4600000
Inverz Ró	0.7830042	-	0.0500000
Gumbel-kopula:	θ_{est}	DoF	Futási idő (sec)
ML	3.026284	-	29.390000
MPL	3.021235	-	27.690000
Inverz Tau	3.054963	-	28.480000
Inverz Ró	3.066341	-	0.050000

$T = 100000$ mintára

Gauss-kopula:	θ_{est}	DoF	Futási idő (sec)
ML	0.500716	-	1454.780000
CML	0.500702	-	1416.91000
Inverz Tau	0.4983077	-	1209.7900000
Inverz Ró	0.4983981	-	0.5600000
Student t-kopula:	θ_{est}	DoF	Futási idő (sec)
ML	0.8000928	3.0342	1066.1600000
MPL	0.8000857	3.0362	639.7200000
Inverz Tau	0.8016154	-	1233.3500000
Inverz Ró	0.7836084	-	0.8700000
Gumbel-kopula:	θ_{est}	DoF	Futási idő (sec)
ML	2.993301	-	1528.000000
CML	2.998273	-	1399.520000
Inverz Tau	2.981054	-	2901.620000
Inverz Ró	2.989356	-	0.570000

A fenti táblázatokból már egy futtatás során is ránézésre látszik, hogy a mintaelemszám növelésével az ML és MPL-t módszerek nagyon mohók, viszont az inverz-ró és -tau eljárásokhoz képest elmondható, hogy a paraméteres eljárások cserébe jobban konvergálnak. Magasabb dimenzióban tovább romlik a becslés és nő a futási idő. A szimuláció során már 100000-es mintaelemszámnál is a futási idő sokszor több, mint negyed óra volt egy-egy módszernél. A számítógép konfigurációja az 5.3-as megjegyzésben megtalálható.

Ahhoz, hogy érdembeni következtetéseket vonjunk le, mindenképp meg kell vizsgálnunk a becslések pontosságát. A szűkös erőforrások miatt a paramétereket csupán kis mintaelemszámú (1000 eset) kopulákon becsültük. Ennek érdekében $N = 200$ replikációra nézve a becsült paraméterek várható értékére és szórására a következők adódtak:

Kismintás becslések Gauss kopula				
	ML	MPL	Inverz-tau	Inverz-ró
$mean(\theta)$	0.4971766	0.4979930	0.4982783	0.4963169
$sd(\theta)$	0.02406617	0.02198601	0.02714847	0.02806238

Kismintás becslések Student t-kopula				
	ML	MPL	Inverz-tau	Inverz-ró
$mean(\theta)$	0.7989028	0.8009906	0.8018967	0.7826166
$sd(\theta)$	0.01248378	0.01343160	0.01513323	0.01701898
$mean(DoF)$	3.039613	3.076128	-	-
$sd(DoF)$	0.4906708	0.3966812	-	-

Kismintás becslések Gumbel kopula				
	ML	MPL	Inverz-tau	Inverz-ró
$mean(\theta)$	2.996130	2.997000	2.996382	3.011227
$sd(\theta)$	0.07953028	0.01343160	0.01513323	0.01701898

5.2. Következmény. Ezek alapján elmondható, hogy nagy minták esetén, ha az erőforrásunk engedi, használjuk az MPL algoritmust, mivel gyorsabb az ML-nél és pontosabb becslés a többi módszerhez képest. Abban az esetben, ha csupán egy gyors ellenőrzésre lenne szükségünk, és nincs olyan nagy hangsúly a pontos becslésen, akkor érdekesebb az Inverz-ró eljárást használni, mivel mintaelemszámtól függetlenül gyorsan lefut. Kopula családtól függetlenül elmondható, hogy az MPL esetében adódik a legkisebb eltérés.

5.3. Megjegyzés. A szimuláció futási idejére nagy hatással van, hogy milyen platformon dolgozunk. A mi esetünkben Windows7 alatt az R 3.03-as verzióját használtuk. CPU: Intel Core i3-2100, RAM: Kingston 4096 1333 MB DDR3, VGA: GeForce GTS 450 512 MB, többszálásítás nem történt.

5.1.4. Kopulaosztályok hatása a tőketartalékra

A szimuláció utolsó részében Giudici [18] cikke alapján generálunk egy együttes veszteségeloszlás függvényt a fejezetben megadott marginálisokkal és a Gauss-kopula által meghatározott korreláció segítségével. Majd erre a mintára megbecsüljük a tőketartalékot tökéletesen összefüggő LDA, Gauss- és Student t-kopulával meghatározott együttes eloszlás esetén.

Adott Σ korreláció mátrix esetén a gaussi kopulából származtatható minta generálásához a következő algoritmust használtuk (Embrecht [19]) :

5.1. Algoritmus.

1. Mivel Σ pozitív definit, így a $\Sigma = L \cdot L^T$ Cholesky felbontásából származó L alsóháromszög mátrix meghatározható.
2. Generálunk egy n dimenziós sztenderd normális peremekkel rendelkező $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ vektort
3. $X = Z^T L$
4. Számoljuk ki $U = \Phi(X)$ -t, ahol $(\Phi(\cdot))$: n -dimenziós sztenderd normális eloszlás-függvény).
5. Ekkor $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású peremekkel rendelkezik, a korrelációmátrixa pedig a keresett alakú.
6. Vegyük az L_{r_i} veszteségosztályok marginális eloszlásainak az általánosított inverzét, és helyettesítsük be U elemeit. Fantazzini [18]

Így már rendelkezésre áll az adatsorunk. Habár megjegyezzük, hogy továbbra is csak egy szimulált adathalmaz kaptunk, és így csak egy durva vázát szolgáltatja az eredeti adatsornak. Mivel elliptikus eloszlások esetén szubbaditív a VaR, Gauss- és Student t-kopulákkal próbálkoztunk az illesztésnél. Természetesen gyakorlati szempontból érdemes lehetne nem elliptikus, tipikusan extrém összefüggőségi struktúrát leíró Gumbel-kopula illesztésekkel is próbálkozni. A VaR és ES által meghatározott tőketartalékok a következők lettek:

Globális VaR, és ES különféle marginálisokra, kopulákra					
Osztályok		VaR 95	VaR 99	ES 95	ES 99
Poisson, Exponenciális	konz. LDA	1399500	2369100	2082842	3227667
Poisson, Exponenciális	t-kopula	592664	737472	695593	791754
Poisson, Exponenciális	normal-kopula	586593	715364	663041	770111

5.3. Következmény. *A táblázat visszaigazolja, hogy a bázeli szabályozás által meghatározott tőkeképzés valóban túlzottan konzervatív. Ha már figyelembe vesszük a veszteség osztályok közti összefüggéseket jelentős mértékben csökkenthető a tőketartalék. Ugyanakkor a VaR mellett az ES értékeit is feltüntettük. Az ES definíciójából következik, hogy eredendően nagyobb mint a VaR, így magasabb tőketartalék is tartozik hozzá. Gyakorlati szempontból az ES jobb választás lehet, mint a VaR mivel koherens kockázati mérték, így teljesül rá a szubadditivitás, amely a "portfóliók" kockázatának mérése szempontjából kényelmes tulajdonság. Emelett még mindig kisebb tőkeképzést eredményez kopulák esetén, mint a konzervatív LDA melletti VaR. Ha csak a két kopula osztály szemszögéből nézzük, van e lényeges hatása a tőkeképzésre a kopula osztály megválasztása, azt mondhatjuk, hogy ilyen gyenge összefüggőségi struktúra mellett kicsi a hatása.*

6. fejezet

Összegzés

A dolgozat során törekedtem egy átfogó, tömör elméleti bevezetést nyújtani a kopulák legfontosabb tulajdonságairól és mindennapi szerepükről annak érdekében, hogy egy lehetséges eszközt nyújtsanak hitelintézeti szempontból a kockázatkezelés számára. Továbbá a szakirodalmon keresztül ismertettük az operációs kockázatok veszteségeloszlás-alapú modellezésének alapjait majd a modellt kiterjesztettük a többdimenziós eloszlásokra vonatkozóan, kopula elméleti megközelítésben. Felhívtuk a figyelmet arra, hogy a bázeli szabályozás által meghatározott tőkeképzési szabály túl konzervatív, így bizonyos esetekben a fejlett mérési módszertan keretein belül lehetőség nyílna a tőketartalék csökkentésére a kockázati faktorok összefüggőségének figyelembe vételével. Erre szolgáltatnak egy lehetséges eszközt a kopulák. Az érdeklődők segítése érdekében több gyakorlati példát is megnéztünk és a hozzá tartozó kódokat ismertettük a függelék megfelelő részeiben. Szimulációs példákon keresztül bemutattunk és megvizsgáltunk több lényeges lépést, mely a tőkeképzésre komoly hatással lehet. A szakdolgozat legfontosabb üzenete az volt, hogy a kopulák használata igenis hatásos eljárás lehet a tőkeképzés csökkentésére a konzervatív modellel szemben. Tipikusan gyenge összefüggőségi struktúra mellett az elliptikus kopula osztályok közti választás kis mértékben, (s bár nem vizsgáltuk) a nem megfelelő kopula család erős összefüggőség esetén drasztikusabb mértékben hathat

a tőkeképzésre. Ugyanakkor a modellezés kapcsán vizsgált három lépés közül (kopula kalibrációk, marginálisok vizsgálata, kopula osztályok) akkor tudunk a legnagyobb hibázni, ha a peremeloszlásoknak nem megfelelő a kalibrációja. Ennek okozója az operációs kockázatokra jellemző kis elemszám. A dolgozat során számos más kontextusban lehetne vizsgálni a modellt. Egy érdekes kiterjesztése lehetne a feladatnak az, hogy az együttes veszteségeloszlás függvényt nem a peremeloszlások és a hozzájuk tartozó kopula segítségével építjük fel, hanem a peremekhez tartozó "tail integrálok" [hivatkozás] segítségével. Erre rendelkezésre állnak különféle eszköztárak ilyen például az elmúlt években bevezetett Lévy kopulák [20] fogalma is. Megmutatták, hogy Sklar tétele erre a speciális esetre is működik. Sajnos erre vonatkozólag nem állt rendelkezésemre nyílt forráskódú módszertan amely segítené ezek implementációját, így ezek vizsgálata a dolgozat folyamán nem történt meg. Továbbá a dolgozat keretei ezt nem tették lehetővé de egy későbbi téma alapjait szolgáltathatja.

Függelék

CRAN csomagok

A kódolás során az R program 3.0.3-as verziószámú változatát használtam. Számos kód esetében az alapvető strukturákat, (idősorok, mátrix-osztály, kopula osztályok stb.) valamint széles körben elterjedt eljárásokat (inverz-Tau, GoF tesztek stb.) nem programoztam le. Ennek oka egyrészt az, hogy tetemes plusz munkát igényelt volna, másrészt a módszerek optimalizáltsága végett célszerűbbnek láttam felhasználni az R beépített környezetét. A dolgozat során felhasznált csomagok a következők:

Név	Cím	Verzió	Dátum
stats4	Alapvető statisztikai tesztek (beépített)	2.15.3	2014-03-06
VGAM	Általánosított MLE becsléshez	0.9-3	2013-11-11
copula	Többváltozós függőség, kopulák	0.999-9	2014-05-05
ggplot2	Grafikai implementációk	0.9.3	2012-12-05
evd	Extrém érték eloszlások szimulációjához	2.3-0	2012-08-30
POT	Ált. Pareto eloszlás generálás,POT	1.1-3	2012-11-06
plot3D	Térbeli adatok kezelése interaktívan	1.0-1	2014-01-07
Scatterplot3d	3D kopula ábrázolás	0.3-35	2014-02-11
MASS	Neg. bin. el. par. becsléséhez	7.3-33	2014-05-05

Implementált forráskódok

Az alfejezetekhez tartozó numerikus kísérletek eredményeihez és a generált képekhez tartozó forráskódokat tartalmazza a függelék ezen része.

```
##Monte-Carlo szimuláció exponenciális eloszlásra+paraméterbecslések
##
M2 _par<-mean (M2 [, 1])
M2 _m1<-MSE (M2 [, 1], 153304)
M2 _vc1<-VC (M2 [, 1], 153304)

#-----Scenariók-----
M3<-mc _exp (1000, 10000)

M3 _par<-mean (M3 [, 1])
M3 _m1<-MSE (M3 [, 1], 153304)
M3 _vc1<-VC (M3 [, 1], 153304)

#-----Scenariók-----
M4<-mc _exp (2000, 10000)

M4 _par<-mean (M4 [, 1])
M4 _m1<-MSE (M4 [, 1], 153304)
M4 _vc1<-VC (M4 [, 1], 153304)

#Output Mátrix
##options(scipen = 8)
Z<-matrix(c(72, 500, 1000, 2000, M1 _par, M2 _par, M3 _par, M4 _par, M1 _m1, M2 _m1,
           M3 _m1, M4 _m1, M1 _vc1, M2 _vc1, M3 _vc1, M4 _vc1), nrow=4, ncol=4)
```

```
##MLE és Momumentum becslés Gamma eloszlásra
#Gamma eloszlás:
#Momentum becslés
```

```

x.gam<-rgamma(72,rate=0.5,shape=3.5)
med.gam<-mean(x.gam) ## sample mean
var.gam<-var(x.gam) ## sample variance
l.est<-med.gam/var.gam ## lambda estimate (corresponds to rate)
a.est<-((med.gam)^2)/var.gam ## alfa estimate
c(l.est,a.est)

#Maximum-Likelihood becslés

x.gam<-rgamma(72,rate=0.5,shape=3.5)
library(stats4) ## loading package stats4
ll<-function(lambda,alfa)
  {n<-72
  x<-x.gam
  -n*alfa*log(lambda)+n*log(gamma(alfa))-(alfa-1)*sum(log(x))+lambda
  *sum(x)} ## -log-likelihood function

est<-mle(minuslog=ll, start=list(lambda=2,alfa=1))
summary(est)

#Mgj:R-es segédanyag: http://cran.r-project.org/doc/contrib/Ricci-distributions-en.pdf
#Mgj: Érzékeny a kezdőérték megválasztására.

```

```

##Gamma eloszlásra vonatkozó MC szimuláció és par. becslés:
##Functions_need##
library(stats4) ## loading package stats4

#MSE(theta,theta_0)
#theta_0 1 dim
#theta n dim (n=10000 because of the Monte Carlo simulation)

MSE<-function(theta,theta_0)

```

```

{sum((theta-rep(theta_0,length(theta)))^2)/length(theta)}

#VC(theta,theta_0) CV (RMSD)
VC<-function(theta,theta_0)
{sqrt(sum((theta-rep(mean(theta),length(theta)))^2)/length(theta))/
  mean(theta)}

#Gamma_MLE
Gamma.MLE <- function(X)
{
  n <- length(X)
  med<-mean(X) ## sample mean
  var<-var(X) ## sample variance
  l.est<-med/var## lambda estimate (corresponds to rate)
  a.est<-((med)^2)/var ## alfa estimate
  return( c(l.est,a.est) )
}

#Alternatív
#Gamma.MLE <- function(X)
#{
# ll<-function(lambda,alfa)
#{n<-length(X)
# x<-X
# -n*alfa*log(lambda)+n*log(gamma(alfa))-(alfa-1)*sum(log(x))+
  lambda*sum(x)} ## -log-likelihood function
#
#est<-mle(minuslog=ll, start=list(lambda=820000,alfa=0.218))
#return(c(summary(est)@coef[1],summary(est)@coef[2]))
#}

#example

```



```
#set.seed(1)
X<-rgamma(72,rate=0.5,shape=3.5)
Gamma.MLE(X)
#Mgj:R-es segédanyag a becsléshez: http://cran.r-project.org/doc/contrib/Ricci-distributions-en.pdf
#Mgj: A MLE érzékeny a kezdőérték megválasztására.

##Gamma_Monte_carlo##

#n minta elemszám
#N replikátumok száma
#method

mc_gamma<-function(n,N)
{
  #incializálunk egy null vektort
  M<-matrix(0,nrow = N,ncol = 2)

  for (j in seq(1,N,by=1))
  {
    z<-rgamma(n,rate=0.2,shape=759717)
    est<-Gamma.MLE(z)
    M[j,1]=est[1]
    M[j,2]=est[2]
  }
  return(M)
}

#-----Scenariók-----
M1<-mc_gamma(72,10000)

M1_rat<-mean(M1[,1])
M1_sha<-mean(M1[,2])
```

```
M1_m1<-MSE (M1 [, 1], 0.2)
M1_m2<-MSE (M1 [, 2], 759717)
M1_vc1<-VC (M1 [, 1], 0.2)
M1_vc2<-VC (M1 [, 2], 759717)
#-----Scenariók-----
M2<-mc_gamma (500, 10000)

M2_rat<-mean (M2 [, 1])
M2_sha<-mean (M2 [, 2])
M2_m1<-MSE (M2 [, 1], 0.2)
M2_m2<-MSE (M2 [, 2], 759717)
M2_vc1<-VC (M2 [, 1], 0.2)
M2_vc2<-VC (M2 [, 2], 759717)
#-----Scenariók-----
M3<-mc_gamma (1000, 10000)

M3_rat<-mean (M3 [, 1])
M3_sha<-mean (M3 [, 2])
M3_m1<-MSE (M3 [, 1], 0.2)
M3_m2<-MSE (M3 [, 2], 759717)
M3_vc1<-VC (M3 [, 1], 0.2)
M3_vc2<-VC (M3 [, 2], 759717)

#-----Scenariók-----
M4<-mc_gamma (2000, 10000)

M4_rat<-mean (M4 [, 1])
M4_sha<-mean (M4 [, 2])
M4_m1<-MSE (M4 [, 1], 0.2)
M4_m2<-MSE (M4 [, 2], 759717)
M4_vc1<-VC (M4 [, 1], 0.2)
M4_vc2<-VC (M4 [, 2], 759717)

#Output Mátrix
```

```

options(scipen = 8)
Z<-matrix(c(72,500,1000,2000,M1_rat,M2_rat,M3_rat,M4_rat,M1_m1,M2_m1,
           M3_m1,M4_m1,M1_vc1,M2_vc1,M3_vc1,M4_vc1,M1_sha,M2_sha,M3_sha,M4_
           sha,M1_m2,M2_m2,M3_m2,M4_m2,M1_vc2,M2_vc2,M3_vc2,M4_vc2),nrow=4,
          ncol=7)
round(Z,2)
Z

```

```

#Kopula becslések különböző marginálisok esetén

#Függvények
#VaR
VaR <- function(m, prob=.95,notional=1, digits=8)
{
  ans <- quantile(m, prob) * notional
  signif(ans, digits=digits)
  return(ans)
}
#example
#VaR(m,prob=.01,notional=1,digits=8)

#ES
ES <- function(m, prob=.95, notional=1, digits=8)
{
  v <- quantile(m, prob)
  ans <- mean(m[m >= v]) * notional
  signif(ans, digits=digits)
  return(ans)
}

create<- function(q,u)
{
  z<-rep(0,72)
  for(j in seq(1,72,by=1))

```

```
{
  z[j]<-q[if(round(u[j],2)*100==0){0}
        else{round(u[j],2)*100}]
}
return(z)
}

n<-72
p1<-0.95
p2<-0.99

#a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8 adottak, legeneráltuk

#Konzervatív LDA
ECV1<-(VaR(a1,prob=p1)+VaR(a2,prob=p1)+VaR(a3,prob=p1)+VaR(a4,prob=p1)
       )+VaR(a5,prob=p1)+VaR(a6,prob=p1)+VaR(a7,prob=p1)+VaR(a8,prob=p1)
ECV2<-(VaR(a1,prob=p2)+VaR(a2,prob=p2)+VaR(a3,prob=p2)+VaR(a4,prob=p2)
       )+VaR(a5,prob=p2)+VaR(a6,prob=p2)+VaR(a7,prob=p2)+VaR(a8,prob=p2)

ECS1<-(ES(a1,prob=p1)+ES(a2,prob=p1)+ES(a3,prob=p1)+ES(a4,prob=p1)+ES
       (a5,prob=p1)+ES(a6,prob=p1)+ES(a7,prob=p1)+ES(a8,prob=p1))
ECS2<-(ES(a1,prob=p2)+ES(a2,prob=p2)+ES(a3,prob=p2)+ES(a4,prob=p2)+ES
       (a5,prob=p2)+ES(a6,prob=p2)+ES(a7,prob=p2)+ES(a8,prob=p2))

u1=rank(a1)/(length(a1)+1)
u2=rank(a2)/(length(a2)+1)
u3=rank(a3)/(length(a1)+1)
u4=rank(a4)/(length(a2)+1)
u5=rank(a5)/(length(a1)+1)
u6=rank(a6)/(length(a2)+1)
u7=rank(a7)/(length(a1)+1)
u8=rank(a8)/(length(a2)+1)
```

```
g=matrix(c(u1,u2,u3,u4,u5,u6,u7,u8),nc=8)

normal.cop=normalCopula(0.9,dim=8)
fit.cop=fitCopula(normal.cop,g,method="mpl")

t.cop=tCopula(0.3,df=5,dim=8)
fitt.cop=fitCopula(t.cop,g,method="itau",estimate.variance=FALSE)

norm= normalCopula(fit.cop@estimate,dim=8)
t_mpl= tCopula(param=fitt.cop@estimate[1],df=fitt.cop@estimate[2],dim
=8)

q1<-quantile(a1, probs=seq(0.01,0.99,by=0.01))
q2<-quantile(a1, probs=seq(0.01,0.99,by=0.01))
q3<-quantile(a1, probs=seq(0.01,0.99,by=0.01))
q4<-quantile(a1, probs=seq(0.01,0.99,by=0.01))
q5<-quantile(a1, probs=seq(0.01,0.99,by=0.01))
q6<-quantile(a1, probs=seq(0.01,0.99,by=0.01))
q7<-quantile(a1, probs=seq(0.01,0.99,by=0.01))
q8<-quantile(a1, probs=seq(0.01,0.99,by=0.01))

sim=rCopula(72,norm)

z1<-create(q1,sim[,1])
z2<-create(q2,sim[,2])
z3<-create(q3,sim[,3])
z4<-create(q4,sim[,4])
z5<-create(q5,sim[,5])
z6<-create(q6,sim[,6])
z7<-create(q7,sim[,7])
z8<-create(q8,sim[,8])

gg=matrix(c(z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7,z8),nc=8)
```

```
gg[is.na(gg)] <- 0

ECVG1<-(VaR(gg[,1],prob=p1)+VaR(gg[,2],prob=p1)+VaR(gg[,3],prob=p1)+
  VaR(gg[,4],prob=p1)+VaR(gg[,5],prob=p1)+VaR(gg[,6],prob=p1)+VaR(gg
  [,7],prob=p1)+VaR(gg[,8],prob=p1))
ECVG2<-(VaR(gg[,1],prob=p2)+VaR(gg[,2],prob=p2)+VaR(gg[,3],prob=p2)+
  VaR(gg[,4],prob=p2)+VaR(gg[,5],prob=p2)+VaR(gg[,6],prob=p2)+VaR(gg
  [,7],prob=p2)+VaR(gg[,8],prob=p2))

ECSG1<-(ES(gg[,1],prob=p1)+ES(gg[,2],prob=p1)+ES(gg[,3],prob=p1)+ES(
  gg[,4],prob=p1)+ES(gg[,5],prob=p1)+ES(gg[,6],prob=p1)+ES(gg[,7],
  prob=p1)+ES(gg[,8],prob=p1))
ECSG2<-(ES(gg[,1],prob=p2)+ES(gg[,2],prob=p2)+ES(gg[,3],prob=p2)+ES(
  gg[,4],prob=p2)+ES(gg[,5],prob=p2)+ES(gg[,6],prob=p2)+ES(gg[,7],
  prob=p2)+ES(gg[,8],prob=p2))

sim2 = rCopula(72,t_mpl)

z21<-create(q1,sim2[,1])
z22<-create(q2,sim2[,2])
z23<-create(q3,sim2[,3])
z24<-create(q4,sim2[,4])
z25<-create(q5,sim2[,5])
z26<-create(q6,sim2[,6])
z27<-create(q7,sim2[,7])
z28<-create(q8,sim2[,8])

gg2=matrix(c(z21,z22,z23,z24,z25,z26,z27,z28),nc=8)
gg2[is.na(gg2)] <- 0

ECVT1<-(VaR(gg2[,1],prob=p1)+VaR(gg2[,2],prob=p1)+VaR(gg2[,3],prob=p1)
  )+VaR(gg2[,4],prob=p1)+VaR(gg2[,5],prob=p1)+VaR(gg2[,6],prob=p1)+
  VaR(gg2[,7],prob=p1)+VaR(gg2[,8],prob=p1))
```

```

ECVT2<- (VaR (gg2 [, 1], prob=p2) + VaR (gg2 [, 2], prob=p2) + VaR (gg2 [, 3], prob=p2)
) + VaR (gg2 [, 4], prob=p2) + VaR (gg2 [, 5], prob=p2) + VaR (gg2 [, 6], prob=p2) +
VaR (gg2 [, 7], prob=p2) + VaR (gg2 [, 8], prob=p2) )

ECST1<- (ES (gg2 [, 1], prob=p1) + ES (gg2 [, 2], prob=p1) + ES (gg2 [, 3], prob=p1) +
ES (gg2 [, 4], prob=p1) + ES (gg2 [, 5], prob=p1) + ES (gg2 [, 6], prob=p1) + ES (gg2
[, 7], prob=p1) + ES (gg2 [, 8], prob=p1) )

ECST2<- (ES (gg2 [, 1], prob=p2) + ES (gg2 [, 2], prob=p2) + ES (gg2 [, 3], prob=p2) +
ES (gg2 [, 4], prob=p2) + ES (gg2 [, 5], prob=p2) + ES (gg2 [, 6], prob=p2) + ES (gg2
[, 7], prob=p2) + ES (gg2 [, 8], prob=p2) )

solution<-c (ECV1, ECV2, ECS1, ECS2, ECVG1, ECVG2, ECSG1, ECSG2, ECVT1, ECVT2,
ECST1, ECST2)

```

```

##Szimulált adatsor, a stilizált tények alapján ##
library (VGAM)

#Szimuláljuk az anonim banki adatokat, a cikk által meghatározott
paraméterekre, 72 hónapra

#Első lépésben a peremeloszlások kelleneek:

set.seed (1)

n<-72

#Frequency

Ipo1<-rpois (n, 1.40)
Ipo2<-rpois (n, 2.19)
Ipo3<-rpois (n, 0.08)
Ipo4<-rpois (n, 0.46)
Ipo5<-rpois (n, 0.10)
Ipo6<-rpois (n, 0.63)
Ipo7<-rpois (n, 0.68)
Ipo8<-rpois (n, 0.11)

Inb1<-rnbinom (n=n, size=2.01, p=0.59)
Inb2<-rnbinom (n=n, size=1.49, p=0.4)
Inb3<-rnbinom (n=n, size=0.33, p=0.8)

```

```
Inb4<-rnbinom(n=n, size=5.26, p=0.92)
Inb5<-rnbinom(n=n, size=0.52, p=0.84)
Inb6<-rnbinom(n=n, size=0.31, p=0.33)
Inb7<-rnbinom(n=n, size=0.49, p=0.42)
Inb8<-rnbinom(n=n, size=0.80, p=0.88)

#Severity
Ig1<-rgamma(n, rate=0.15, shape=64848)
Ig2<-rgamma(n, rate=0.2, shape=109321)
Ig3<-rgamma(n, rate=0.2, shape=759717)
Ig4<-rgamma(n, rate=0.11, shape=1827627)
Ig5<-rgamma(n, rate=0.2, shape=495701)
Ig6<-rgamma(n, rate=0.38, shape=19734)
Ig7<-rgamma(n, rate=0.06, shape=211098)
Ig8<-rgamma(n, rate=0.26, shape=135643)

Ie1<-rexp(n, 1/9844)
Ie2<-rexp(n, 1/21721)
Ie3<-rexp(n, 1/153304)
Ie4<-rexp(n, 1/206162)
Ie5<-rexp(n, 1/96873)
Ie6<-rexp(n, 1/7596)
Ie7<-rexp(n, 1/12623)
Ie8<-rexp(n, 1/35678)

Ip1<-rpareto(n=n, shape=2.36, loc=13368)
Ip2<-rpareto(n=n, shape=2.50, loc=32494)
Ip3<-rpareto(n=n, shape=2.51, loc=230817)
Ip4<-rpareto(n=n, shape=2.25, loc=258588)
Ip5<-rpareto(n=n, shape=2.49, loc=143933)
Ip6<-rpareto(n=n, shape=3.25, loc=17105)
Ip7<-rpareto(n=n, shape=2.13, loc=14229)
Ip8<-rpareto(n=n, shape=2.71, loc=61146)
```


#Ezt követően pedig adott korreláci mátrix mellett gaussi kovariancia struktúrából veszünk egyenletes mintát:

```
## Initialization and parameters
set.seed(123)
P <- matrix(c(1, 0.1, 0.8,
              0.1, 1, 0.4,
              0.8, 0.4, 1), nrow = 3)
# Correlation matrix

d <- nrow(P)
# Dimension

n <- 200
# Number of samples

## Simulation (non-vectorized version)
A <- t(chol(P))
U <- matrix(nrow = n, ncol = d)
for (i in 1:n){
  Z <- rnorm(d)
  X <- A%*%Z
  U[i, ] <- pnorm(X)
}

## Ábra
pairs(U, pch = 16,
      labels = sapply(1:d, function(i) {as.expression(substitute(U[k],
list(k = i)))}))
```

#Kopula kalibrációk:

#A kalibrációs függvény több kopula esetén:

```
library(copula)
calibration<-function(n, dim, meth) {
#methods: "ml", "mpl", "ita", "irho"
#Simulations:

# Start the clock: ptm <- proc.time()
```

```
# Stop the clock: time<-(proc.time() - ptm)

set.seed(1000)

normal.cop=normalCopula(0.5,dim=dim)
r1=rCopula(n,normal.cop)

ptm <- proc.time()
fit1.cop=fitCopula(normal.cop,r1,method=meth)
time1<-(proc.time() - ptm)

t.cop=tCopula(0.8,df=3,dim=dim)
r2=rCopula(n,t.cop)

ptm <- proc.time()
fit2.cop=fitCopula(t.cop,r2,method=meth)
time2<-(proc.time() - ptm)

t10.cop=tCopula(0.8,df=6,dim=dim)
r3=rCopula(n,t10.cop)

ptm <- proc.time()
fit3.cop=fitCopula(t10.cop,r3,method=meth)
time3<-(proc.time() - ptm)

gumbel.cop=gumbelCopula(3,dim=dim)
r4=rCopula(n,gumbel.cop)

ptm <- proc.time()
fit4.cop=fitCopula(gumbel.cop,r4,method=meth)
time4<-(proc.time() - ptm)
```

```
Out<-matrix(0,nrow = 2,ncol = 4)

if (meth=="ml" | meth=="mpl") {
Out[1,]<-c(fit1.cop@estimate,fit2.cop@estimate[1],fit3.cop@estimate
  [1],fit4.cop@estimate)
Out[2,]<-c(time1[3],time2[3],time3[3],time4[3])
}
else {
Out[1,]<-c(fit1.cop@estimate,fit2.cop@estimate,fit3.cop@estimate,fit4
  .cop@estimate)
Out[2,]<-c(time1[3],time2[3],time3[3],time4[3])
}

return(Out)
}

#A kopulás táblázatok elkészítéséhez a fenti függvénnyel:

n<-200

c1<-array(0, dim=c(n,2,6))
c2<-array(0, dim=c(n,2,6))
c3<-array(0, dim=c(n,2,4))
c4<-array(0, dim=c(n,2,4))

for (i in 1:n )
{
c1[i,,]<-calibration(1000,2,"ml")
c2[i,,]<-calibration(1000,2,"mpl")
c3[i,,]<-calibration(1000,2,"ita")
c4[i,,]<-calibration(1000,2,"irho")
}
```

```

#Gaussi kopula esetén
c(mean(c1[,1,1]),mean(c2[,1,1]),mean(c3[,1,1]),mean(c4[,1,1]))
c(sd(c1[,1,1]),sd(c2[,1,1]),sd(c3[,1,1]),sd(c4[,1,1]))

#Student kopula esetén
c(mean(c1[,1,2]),mean(c2[,1,2]),mean(c3[,1,2]),mean(c4[,1,2]))
c(sd(c1[,1,2]),sd(c2[,1,2]),sd(c3[,1,2]),sd(c4[,1,2]))

#DoF
c(mean(c1[,1,3]),mean(c2[,1,3]))
c(sd(c1[,1,3]),sd(c2[,1,3]))

#Gumbel kopula esetén
c(mean(c1[,1,6]),mean(c2[,1,6]),mean(c3[,1,4]),mean(c4[,1,4]))
c(sd(c1[,1,6]),sd(c2[,1,2]),sd(c3[,1,2]),sd(c4[,1,2]))

```

```

#Itt az MSE és VC statisztikák találhatóak, a peremeloszlások
vizsgálatánál használtuk.
#MSE(theta,theta_0)
#theta_0 1 dim
#theta n dim (n=10000)

MSE<-function(theta,theta_0)
{sum((theta-rep(theta_0,length(theta)))^2)/length(theta)}

#VC(theta,theta_0) CV (RMSD)
VC<-function(theta,theta_0)
{sqrt(sum((theta-rep(mean(theta),length(theta)))^2)/length(theta))/
  mean(theta)}

```

```

#Negatív binomiális eloszlás paraméter becsléséhez. Erre nincs zárt
alak, iteratív így kell a MASS package.
library(MASS)

```

```
x4 <- rnegbin(500, mu = 0.0825, theta = 0.33)
ff <- fitdistr(x4, "Negative Binomial")
ff2 <- fitdistr(x4, "Poisson")

x1<-rnbinom(n=500,size=0.33,p=0.8) #mu=0.0825
mu=(size-p*size)/p
```

```
##Negatív bin. Monte Carlo szimulációja##

##Functions_need##
#MSE(theta,theta_0)
#theta_0 1 dim
#theta n dim (n=10000 because of the Monte Carlo simulation)

MSE<-function(theta,theta_0)
{sum((theta-rep(theta_0,length(theta)))^2)/length(theta)}

#VC(theta,theta_0) CV (RMSD)

VC<-function(theta,theta_0)
{MSE(theta,theta_0)/(sum(theta)/length(theta))}

# example
library(MASS)
x4 <- rnegbin(500, mu = 0.0825, theta = 0.33) #Ez a theta=0.33,p=0.8
  paraméterekre van, de csak alternatíván lehet paraméterezni ezt a
  függvényt mű-vel,
#mu=(theta-p*theta)/p, theta-t szokás size-nak is
ff <- fitdistr(x4, "Negative Binomial") #Most nem írtuk meg az MLE-t.
  Ezt a beépített függvényt használjuk. (Bonyolult az
  optimalizálás kell hozzá Newton Raphsod, + kezdőérték beállítás
  stb.)

#Alternatív paraméterezés miatt van itt ez a segítség
#x1<-rnbinom(n=500,size=0.33,p=0.8) #mu=0.0825
```

```

#mu=(theta-p*theta)/p ekvivalens p=teta/(mu+teta)

##Negative_Binomial_monte_carlo##

#n minta elemszám
#N replikátumok száma
#method

mc_negbin<-function(n,N)
{
  #incializálunk egy null vektort
  M<-matrix(0,nrow = N,ncol = 2)

  for (j in seq(1,N,by=1))
  {
    z<-rnegbin(n, mu = 0.0825, theta =0.33)# avagy size=0.33 és p=0.8
    ff<-fitdistr(z, "Negative Binomial")
    M[j,1]=(ff[1]$est[1]/(ff[1]$est[2]+ff[1]$est[1])) #a mu helyett a
    p paraméterezésre váltjuk át a p=theta/(mu+theta) alapján
    M[j,2]=ff[1]$est[1] #size vagy theta
  }
  return (M)
}

#-----Scenariók-----
M1<-mc_negbin(72,10000)

M1_p<-mean(M1[,1])
M1_theta<-mean(M1[,2])
M1_m1<-MSE(M1[,1],0.8)
M1_m2<-MSE(M1[,2],0.33)
M1_vc1<-VC(M1[,1],0.8)
M1_vc2<-VC(M1[,2],0.33)

```

```
#-----Scenariók-----  
M2<-mc_negbin(500,10000)  
  
M2_p<-mean(M2[,1])  
M2_theta<-mean(M2[,2])  
M2_m1<-MSE(M2[,1],0.8)  
M2_m2<-MSE(M2[,2],0.33)  
M2_vc1<-VC(M2[,1],0.8)  
M2_vc2<-VC(M2[,2],0.33)  
  
#-----Scenariók-----  
M3<-mc_negbin(1000,10000)  
  
M3_p<-mean(M3[,1])  
M3_theta<-mean(M3[,2])  
M3_m1<-MSE(M3[,1],0.8)  
M3_m2<-MSE(M3[,2],0.33)  
M3_vc1<-VC(M3[,1],0.8)  
M3_vc2<-VC(M3[,2],0.33)  
  
#-----Scenariók-----  
M4<-mc_negbin(2000,10000)  
  
M4_p<-mean(M4[,1])  
M4_theta<-mean(M4[,2])  
M4_m1<-MSE(M4[,1],0.8)  
M4_m2<-MSE(M4[,2],0.33)  
M4_vc1<-VC(M4[,1],0.8)  
M4_vc2<-VC(M4[,2],0.33)  
  
#Output Mátrix  
options(scipen = 8)
```

```
Z<-matrix(c(72,500,1000,2000,M1_p,M2_p,M3_p,M4_p,M1_m1,M2_m1,M3_m1,M4
_m1,M1_vc1,M2_vc1,M3_vc1,M4_vc1,M1_theta,M2_theta,M3_theta,M4_
theta,M1_m2,M2_m2,M3_m2,M4_m2,M1_vc2,M2_vc2,M3_vc2,M4_vc2),nrow=4,
ncol=7)
round(Z,2)
```

```
###Pareto MLE becslése+Veszteségadatok Monte Carlo szimulációja##
##Functions_need##
#MSE(theta,theta_0)
#theta_0 1 dim
#theta n dim (n=10000 because of the Monte Carlo simulation)

MSE<-function(theta,theta_0)
{sum((theta-rep(theta_0,length(theta)))^2)/length(theta)}

#VC(theta,theta_0) CV (RMSD)
VC<-function(theta,theta_0)
{sqrt(sum((theta-rep(mean(theta),length(theta)))^2)/length(theta))/
mean(theta)}

#Pareto_MLE
pareto.MLE <- function(X)
{
n <- length(X)
m <- min(X)
a <- n/sum(log(X)-log(m))
return(c(m,a))
}

# example.
library(VGAM)
#set.seed(1)
z = rpareto(72, 230817, 2.51)
xpl<-rpareto(n=72,shape=2.51,loc=230817)
pareto.MLE(z)
```



```
#Egy kis help, a maximum likelihood estimation-ból a kapott formula a
  lenti link alapján elérhető:
#Mgj:http://stats.stackexchange.com/questions/27426/how-do-i-fit-a-
  set-of-data-to-a-pareto-distribution-in-r

##Pareto_monte_carlo##

#n minta elemszám
#N replikátumok száma
#method

mc_pareto<-function(n,N)
{
  library(VGAM)
  #inicializálunk egy null vektort
  M<-matrix(0,nrow = N,ncol = 2)

  for (j in seq(1,N,by=1))
  {
    z<-rpareto(n,loc=230817,shape=2.51)
    est<-pareto.MLE(z)
    M[j,1]=est[1]
    M[j,2]=est[2]
  }
  return(M)
}

#-----Scenariók-----
M1<-mc_pareto(72,10000)

M1_loc<-mean(M1[,1])
M1_sha<-mean(M1[,2])
```

```
M1_m1<-MSE (M1 [, 1], 230817)
```

```
M1_m2<-MSE (M1 [, 2], 2.51)
```

```
M1_vc1<-VC (M1 [, 1], 230817)
```

```
M1_vc2<-VC (M1 [, 2], 2.51)
```

```
#-----Scenariók-----
```

```
M2<-mc_pareto (500, 10000)
```

```
M2_loc<-mean (M2 [, 1])
```

```
M2_sha<-mean (M2 [, 2])
```

```
M2_m1<-MSE (M2 [, 1], 230817)
```

```
M2_m2<-MSE (M2 [, 2], 2.51)
```

```
M2_vc1<-VC (M2 [, 1], 230817)
```

```
M2_vc2<-VC (M2 [, 2], 2.51)
```

```
#-----Scenariók-----
```

```
M3<-mc_pareto (1000, 10000)
```

```
M3_loc<-mean (M3 [, 1])
```

```
M3_sha<-mean (M3 [, 2])
```

```
M3_m1<-MSE (M3 [, 1], 230817)
```

```
M3_m2<-MSE (M3 [, 2], 2.51)
```

```
M3_vc1<-VC (M3 [, 1], 230817)
```

```
M3_vc2<-VC (M3 [, 2], 2.51)
```

```
#-----Scenariók-----
```

```
M4<-mc_pareto (2000, 10000)
```

```
M4_loc<-mean (M4 [, 1])
```

```
M4_sha<-mean (M4 [, 2])
```

```
M4_m1<-MSE (M4 [, 1], 230817)
```

```
M4_m2<-MSE (M4 [, 2], 2.51)
```

```
M4_vc1<-VC (M4 [, 1], 230817)
```

```
M4_vc2<-VC (M4 [, 2], 2.51)
```

```

#Output Mátrix
options(scipen = 8)
Z<-matrix(c(72,500,1000,2000,M1_loc,M2_loc,M3_loc,M4_loc,M1_m1,M2_m1,
           M3_m1,M4_m1,M1_vc1,M2_vc1,M3_vc1,M4_vc1,M1_sha,M2_sha,M3_sha,M4_
           sha,M1_m2,M2_m2,M3_m2,M4_m2,M1_vc2,M2_vc2,M3_vc2,M4_vc2),nrow=4,
          ncol=7)
round(Z,2)

```

```

##Functions_need##
#MSE(theta,theta_0)
#theta_0 1 dim
#theta n dim (n=10000)

MSE<-function(theta,theta_0)
{sum((theta-rep(theta_0,length(theta)))^2)/length(theta)}

#VC(theta,theta_0) CV (RMSD)
VC<-function(theta,theta_0)
{sqrt(sum((theta-rep(mean(theta),length(theta)))^2)/length(theta))/
  mean(theta)}

#Poisson parameter estimate from MLE
poisson.MLE<-function(X)
{
n <- length(X)
return (sum(X)/n) #mean(X) is jó
}

# example.
#set.seed(1)
x1<-rpois(72,0.08)
poisson.MLE(x1)

```

```
##Poisson_monte_carlo##

##Poisson változók Monte Carlo szimulációja+paraméterbecslések##
#n minta elemszám
#N replikátumok száma
#method

mc_poisson<-function(n,N)
{
  #inicializálunk egy null vektort
  M<-matrix(0,nrow = N,ncol = 1)

  for (j in seq(1,N,by=1))
  {
    z<-rpois(n,0.08)
    est<-poisson.MLE(z)
    M[j,1]=est[1]
  }
  return(M)
}

#-----Scenariók-----
M1<-mc_poisson(72,10000)

M1_par<-mean(M1[,1])
M1_m1<-MSE(M1[,1],0.08)
M1_vc1<-VC(M1[,1],0.08)

#-----Scenariók-----
M2<-mc_poisson(500,10000)

M2_par<-mean(M2[,1])
M2_m1<-MSE(M2[,1],0.08)
M2_vc1<-VC(M2[,1],0.08)
```

```
#-----Scenariók-----
M3<-mc_poisson(1000,10000)

M3_par<-mean(M3[,1])
M3_m1<-MSE(M3[,1],0.08)
M3_vc1<-VC(M3[,1],0.08)

#-----Scenariók-----
M4<-mc_poisson(2000,10000)

M4_par<-mean(M4[,1])
M4_m1<-MSE(M4[,1],0.08)
M4_vc1<-VC(M4[,1],0.08)

#Output Mátrix
##options(scipen = 8)
Z<-matrix(c(72,500,1000,2000,M1_par,M2_par,M3_par,M4_par,M1_m1,M2_m1,
           M3_m1,M4_m1,M1_vc1,M2_vc1,M3_vc1,M4_vc1),nrow=4,ncol=4)
Z
```

```
##MLE becslés tetszőleges eloszlásra Optim függvényel##

#set.seed(1001)
N <- 100
x <- rnorm(N, mean = 3, sd = 2)
mean(x)
sd(x)

LL <- function(mu, sigma) {
  R = dnorm(x, mu, sigma)
  -sum(log(R))
}

library(stats4)
mle(minuslogl = LL, start = list(mu = 1, sigma=1))

#Warningot kapunk ha szórásra negatív érték jön ki az iteráció során.
```

```
#Ha ekkor nem akarunk NAN-t a következõt ajánlják az R-fórumon:  
,  
#This works because mle() calls optim(), which has a number of  
optimisation methods. The default method is BFGS. An alternative,  
the L-BFGS-B method, allows box constraints.  
mle(minuslogl = LL, start = list(mu = 1, sigma = 1), method = "L-BFGS  
-B",  
  lower = c(-Inf, 0), upper = c(Inf, Inf))  
  
#Lehet ignorálni is a túl sok negatív értéket az optimalizáció során,  
csak ha túl sok eset fordul elő akkor megbízhatatlanná válik kis  
mintánál az ML becslés. Ezért opcionális ez a paraméterbecslés a  
szimulációban. Így tehát előnyben részesítettem inkább az  
eloszlásspecifikusan meghatározott momentumbecsléseket.
```

Irodalomjegyzék

- [1] Sklar, 1959, A 1959 Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges, Pul Inst Statist Univ Paris, 229-231.
- [2] W. Hoeffding, 1940, Masstabinvariante Korrelationtheorie, Schriften Math. Inst. Univ. Berlin 5
- [3] B. Schweizer, 1991, 'Thirty years of copulas', in G. Dall'Aglio, S. Kotz and G. Salinetti (eds), Advances in Probability Distributions with Given Marginals. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 13-50.
- [4] R.B. Nelsen, 1999, An Introduction to Copulas, Lectures Notes in Statistics 139, Springer Verlag, New York
- [5] C. Genest and J. MacKay, 1986, Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. Canad. J. Statist. 14, pp. 145-159
- [6] V. Durrleman, A. Nikeghbali and T. Roncalli, 2000, Which copula is the right one?, Groupe de Recherche Opérationnelle Crédit Lyonnais, France
- [7] R. Davidson, and J. MacKinnon, 1993, Estimation and Inference in Econometrics, Oxford University Press, Oxford
- [8] Joe H., J.J. Xu, 1996, The estimation method of inference function for margins for multivariate models, Department of Statistics, University of British Columbia, Technical Report, 166
- [10] Joe H., 1997, Multivariate Models and Dependence Concepts, Monographs on Statistics and Applied Probability, 73, Chapman and Hall, London

-
- [10] Lehmann, E.L. and G. Casella, 1998, Theory of Point Estimation, second edition, Springer Verlag, New York
- [11] P. Deheuvels, 1981, A non parametric test for independence, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 26, 29-50
- [12] Tajti Zsuzsanna, 2011, A bázei ajánlások és a tőke megfelelési direktíva (CRD) formálódása, Budapest
- [13] Gáll József, Nagy Gábor, 2008, A működési kockázat veszteségeloszlás-alapú modellezése, Hitelintézeti Szemle, Budapest
- [14] Carlo Acerbi, Dirk Tasche, 2002, On the coherence of Expected Shortfall
- [15] Carlo Acerbi, 2002 Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion
- [16] Panjer H., 1981, Recursive evaluation of compound distributions, Astin Bulletin, 12., 22-26. o.
- [17] Panjer H., Willmot G., 1986, Computational Aspect of Recursive Evaluation of Compound Distributions, Insurance: Mathematics and Economics, 5, 113-116. o.
- [18] Luciana Dalla Valle, Dean Fantazzini, Paolo Giudici, 2006, Copulae and Operational Risks, University of Pavia and University of Milano-Bicocca
- [19] Paul Embrechts, Filip Lindsko and Alexander McNeil, 2001 Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, Department of Mathematics, Switzerland, Zürich
- [20] K. Böcker, C. Klüppelberg, 2010 Modelling and Measuring Multivariate Operational Risk with Lévy Copulas, Quantitative Finance, Volume 10, Issue 8