CDS index opciók árazása

Szakdolgozat

Készítette: Szikszai Mónika
Témavezető: Dr. Molnár-Sáska Gábor

Matematika M.Sc., Biztosítási és pénzügyi matematika szakirány

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2014

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A CDS opciók élénk kereskedése a 2000-es évek elején kezdődött. Ekkor sok bank csak azért szállt be ebbe az üzletágba, mert mindenki más is ezt tette. Először a kereskedők és a dealerek használták ezeket a termékeket, mert így amellett, hogy egy vállalat kockázatára fogadhattak, időközben még pénzt is kereshettek.

Például, ha arra akarunk fogadni, hogy egy vállalat CDS spreadje csökkenni fog, mert a piac kevésbé kockázatosnak ítéli, mint korábban, akkor egy out-of-the money, tehát a mostani környezetben olcsónak számító CDS opciót kiírva, a spread csökkenéséig beszedhetjük a biztosításért a prémiumot.

Hamarosan azonban, látva az alacsony spreadeket, más szereplők - például hedge fundok - is beszálltak a CDS opciók kereskedésébe. Őket követték a bankok kockázatkezelői, akik rájöttek, hogy CDS opciókkal olcsóbban tudnak fedezni, mintha közvetlenül biztosításokat vennének (ez az opciók magasabb tőkeáttétele miatt van így).

A fő kérdés azonban minden szereplő számára az, hogy hogyan kell ezeket a termékeket árazni.

Szakdolgozatom témájául a CDS indexekre szóló opciók árazását választottam. Ennek egyik oka, hogy a válság után ezek likviditása nagyon gyorsan visszaépült, sokkal gyorsabban, mint a egyedi CDS-ek likviditása, és azóta is nagy méretben kereskednek velük. Ez tulajdonképpen azt bizonyította, hogy nagyon fontos a szerepük a piacon. A másik ok pedig, hogy az árazásuk több érdekes elméleti kérdést is felvet, amelyek megoldása máig sem egyértelmű.

A CDS index opciók árazásakor első közelítésként a Black-modellhez nyúlhatunk.

Egyszerűsítve a problémát, egy olyan opció árát szeretnénk meghatározni, aminek az alapterméke a CDS spread, majd ehhez hozzáadjuk a front end protectiont. Ennek a próbálkozásnak, mint látni fogjuk, sok hibája van:

- Nem veszi figyelembe, hogy a front end protection befolyásolja az opció tulajdonosának döntését a lehíváskor
- Az árazási formula nem minden állapotban definiált
- A természetesen adódó numeraire folyamat (aminek segítségével meghatározzuk az új mértéket, amely szerint a termék ára martingál lesz) nem szigorúan pozitív

A szakdolgozat célja, hogy a témában az utóbbi években megszaporodott elméleti cikkek megoldási javaslatait bemutassa. Emellett egy-egy állítást a gyakorlatban is megvalósított modellel ellenőriztem.

Az implementáláshoz és az ábrák elkészítéséhez a MATLAB matematikai programcsomagot használtam.

Az árazáshoz felhasznált adatsor egy 125 CDS-ből álló index adatait tartalmazza.

Az adatok 2010. november 17-ei árak, 1, 2, 3, 4 , 5, 7 és 10 éves éves lejáratokra. A lejáratok standardizáltak, 2010. november 17-én az CDS indexek lejáratai rendre: 2011. december 20., 2012. december 20., ..., 2020. december 20. Az indexben azonos névértékkel szerepel minden CDS, amelyek névértéke eredetileg az index névértékének 0,8%-a volt. A jegyzés dátumáig 4 csődesemény történt.

Az árazásokhoz felhasználtam még a Bloomberg S23-as számú diszkontgörbéjének 2010. november 17-ei historikus értékeit.

1.1. A szakdolgozat felépítése

A dolgozatomat a felhasznált fogalmak részletes bemutatásával kezdem. A 2. fejezetben összefoglalom, mit érdemes tudni a CDS-ekről, illetve a CDS-ekből képzett indexekről és az ezekre az indexekre szóló opciókról. Arról is szó lesz, hogy milyen alapvető egyszerűsítésekre és feltételezésekre van szükség az árazáshoz.

A 3.fejezetben kiderül, hogy az árazáshoz szükséges numeraire folyamat a forward CDS index. Itt ennek az árazását is bemutatom.

A 4-7. fejezetben különböző módszereket ismertetek a CDS index opciók árazására. Elsőként bemutatom a standard piaci árazás módszerét, azzal a javítással, hogy a front end protectiont már helyesen veszi figyelembe a formula. Ennek a módszernek azonban még számos hátulütője van, amelyek hatása főleg piaci körülmények között erős félreárazásokhoz vezet. A továbbiakban ezekről a hibákról lesz szó. A második fő módszer a Schönbucher-féle úgynevezett T-túlélés mérték (*T-survival measure*) alkalmazása. A harmadik módszer a Brigo-Morini-féle *no-armageddon* árazás.

Ezeket követően az Árazás szimulációval című fejezetben a gyakorlatban is megvizsgálok néhány módszert valódi piaci adatokkal. Azt is illusztrálom, hogy hogyan függ a CDS index opció ára a paraméterekre tett feltételezésektől, de nem úgy, hogy a Black-modellbe helyettesítek, hanem Monte-Carlo szimulációt használok.

A 8. fejezetben arról lesz szó, hogy milyen problémák merülnek fel a korábban tárgyalt módszerek megvalósításakor, illetve, hogy milyen kritikákat lehet megfogalmazni a no-armageddon árazás elméleti hátteréről, ami eddig úgy tűnt, hogy minden problémát orvosolt.

2. fejezet

Előkészületek

Az első CDS-eket a 90-es évek elején kötötték, de csak 2003 után kezdtek nagyobb tételben kereskedni velük, a 2007-es év végén a teljes CDS kitettség 62,2 ezer milliárd dollár volt (ez az outstanding notional, vagyis a megállapodás alapjául szolgáló névérték). A pénzügyi válság kitörése visszavetette a forgalmukat, ami 2012 elején 25,5 ezer milliárd dolláros kitettséget eredményezett.

2.1. A CDS

A Credit Default Swap *(CDS)* egy olyan pénzügyi termék, amely során a vevő lényegében biztosítást köt egy vállalatot *(reference entity)* érintő kockázati eseményre. A CDS kiírója prémiumért *(spread)* cserébe vállalja, hogy a reference entity fizetésképtelensége vagy csődje esetén a vevő által birtokolt névértéket megfizesse. Ez a gyakorlatban kétféleképpen valósulhat meg. Vagy úgy történik, hogy a vevő leszállítja az általa birtokolt kötvényt a CDS kiírójának vagy pedig, ha ilyen nincs a birtokában *(naked CDS)* , akkor csak elszámolás *(cash settlement)* történik. Amennyiben két prémiumfizetés között csődesemény következik be, akkor a vevő csak az utolsó kifizetés és a csőd közötti időre, időarányosan fizet prémiumot.

A CDS-ekkel a leginkább az OTC piacokon kereskednek, az ISDA Masteragreement előírásai alapján. Ezek tehát bilaterális szerződések, ahol a paraméterek a partnerekre szabottak.

2.2. A CDS indexek

Az egyedi CDS-ek a fentiek miatt nagyon speciálisak lehetnek, ezért nem minden típust tekinthetünk likvidnek. Például az összes kereskedett CDS több mint a fele 5 év lejáratú, tehát a többi lejárat esetében nehéz jegyzett árat találni. Emiatt igen elterjedt a CDS-ek indexben történő kereskedése, amiben általában körülbelül 125, valamilyen szempont szerint összeválogatott vállalat CDS-ét gyűjtik össze, esetleg különböző %-os részvétellel. A nagyobb likviditás mellett a CDS indexek másik előnye, hogy néhány vállalat csődje még nem jelenti a szerződés lezárulását. Ilyenkor a névérték csökken a becsődölt vállalatok névérték százalékával arányosan, vagyis a vevő arányosan kevesebb prémiumot fizet a csődöket követően, az eladó pedig megfizeti a csődök után járó névértéket. Az indexek kibocsátása félévente történik és fizetési napjai negyedévesek, minden évben március, június, szeptember és december 20-ára esnek, illetve az ezeket követő első munkanapra. A fizetéskor alkalmazott *Day Count Fraction* az Act/360 szabályt követi.

2.2.1. Jelentős indexek

A CDS indexek két nagyobb csoportja az iTraxx és a CDX index családok. Ezek mellett számtalan féle CDS index létzik, hiszen az OTC kereskedés keretin belül a szerződő felek bármilyen paramétereket használhatnak a kötéshez (*bespoke indeces*).

Az Markit iTraxx indexei az európai és ázsiai piacokat, illetve a fejlődő gazdaságokat fedik le. A legfontosabb ezek közül az iTraxx Europe, ami az elmúlt 6 hónapban a 125 legaktívabban kereskedett névre vonatkozik. Szintén benchmark iTraxx index az Europe HiVol index, ami a legnagyobb spreaddel rendelkező, tehát legkockázatosabb nem pénzügyi szektorbeli 30 névre vonatkozik, továbbá a Europe Crossover, ami a befektetésre nem javasolt (*Sub-investment grade*) 40 nevet tartalmazza.

Az észak-amerikai piacokat és a fejlődő gazdaságokat a CDX indexek fedik le, amelyek 2007 óta szintén a Markit tulajdonában vannak. A CDX indexek közül a legfontosabb a CDX.NA.IG, ami a legfontosabb 125 befektetésre javasolt (*Investment grade*) nevet fedi le. Az iTraxx-hez hasonlóan létezik 30 észak-amerikai vállalatra vonatkozó HiVol index, továbbá 100 névre vonatkozó magas kamatokat fizető (*High Yield*) index, ami nagy CDS spreaddel rendelkező, tehát kockázatos nevekre szól.

A fejlődő piacokat (*emerging markets*) a CDX.EM, CDX.CEEMEA és a CDX.LATAM indexek fedik le. Míg az első a fejlődő piacok adósságpiacát fedi le, addig a második 25, Közép- és Kelet-Európai, valamint Közel-Keleti országokat, a harmadik pedig a Latin-Amerikai országokat fedi le.

Az alábbi táblázat a 2014. május 22-ei spreadeket és a napi változásokat mutatja a benchmark indexekre, 5 éves lejáratra. Az adatok a Markit honlapján találhatóak.

Index	Spread (bps)	Daily Change (bps)
Markit iTraxx Europe Crossover	272	(4)
Markit iTraxx Europe	70	(1)
Markit iTraxx Europe HiVol	84	(1)
Markit iTraxx Japan	83	(1)
Markit CDX Emerging Markets	266	(1)
Markit CDX North American Investment Grade	64	(1)
Markit CDX North American HiVol	135	(2)

2.2.2. Kereskedés

2011-et megelőzően a CDS indexek kereskedése főként telefonon bonyolódott. 2011-től terjedt el az e-trading felületek használata, aminek következtében megnőtt az átláthatóság, hiszen így a market makerek követhetik az indexek napi forgalmát. Az ez irányú fejlődésnek azonban megvannak a hátulütői is. Például látható, hogy az e-trading további terjedésével nagyon felgyorsulhat a kereskedés és esetleg túl gyorsan nőhet a CDS indexek kereskedése. Ekkor akár egyetlen tizedes jegy elütés felboríthatja az egész piacot, mert akár az is elképzelhető, hogy az algoritmikusan kereskedő gépek hirtelen nagy tételben kezdik megjátszani az így kialakuló inkonzisztenciát az árakban.

Korábban a CDS indexekkel szinte kizárólag bilaterális szerződések keretében kereskedtek. Ennek azonban két hátránya is volt. Egyrészt a szerződő feleknek a partnerkockázatot is vállalniuk kellett a tranzakció megkötésekor (ennek fedezésére az ISDA Master Agreement szabályozása szerint tőkét kell tartalékolniuk). Másrészt az *over-the-counter (OTC)* derivatívák kereskedése a felügyeletek számára kevésbe volt átlátható, ezt pedig sokan a 2007-2008-as válság egyik okának látják.

Ennek következtében az utóbbi években elterjedt az OTC kötések, ideértve a CDS-ek és a CDS indexek központi elszámolása is. Ez az úgynevezett *central counterparty clearing facilities (CCPs)* keretében történik, mint az ICE Trust vagy az ICE Clear Europe, amik az Intercontinental Exchange csoport tagjai.

2013-ban becslések szerint az OTC derivatívák több mint 70 százalékát számolták el. Konkrétan CDS ügyleteket 2012-ben egy hónapban 26 ezer milliárd dollár értékben számoltak el.

Ezzel szemben meg kell említeni, hogy a megkötött CDS indexek 60 százaléka csupán öt fő indexre korlátozódik, ami miatt elkerülhetetlen és a piac számára fontos is, hogy valamilyen mértékben megmaradjon a kisebb indexek bilaterális formában történő kereskedése (lásd: ISDA: Non-Cleared OTC Derivatives: Their Importance to the

Global Economy).

2.3. A CDS indexekekre szóló opciók

A CDS index opciók lehetőséget nyújtanak a befektetőnek, hogy egyedi CDS-ek egy portfóliójának teljesítményére fogadjanak. A long opciót szokás a receiver oldalnak nevezni, ami lehetőséget nyújt, hogy long pozíciót vegyünk fel a hitelkockázatra. Tehát long opcióval arra fogadunk, hogy a spreadek nőni fognak. A put opció tehát a payer oldal, amivel shortolhatjuk a hitelkockázatot.

A legelterjedtebb CDS index opciók általában rövid lejáratúak, kötés után fél-egy év után van lehetőség lehívni őket. A swap lejárata szinte kizárólag öt év.

A következőkben bemutatom, hogy milyen elméleti modellek léteznek a CDS index opciók árazására:

- Egyrészt, mint látni fogjuk, lehet egyszerűen piaci standard módszerrel Black-formulával árazni a CDS indexekre szóló opciókat
- A Black-modell feltételezéseivel szimulációs árazást is végezhetünk, ugyanolyan feltételezések mellett
- A no-armageddon árazással kiküszöbölhetjük a piaci árazás hibáit

2.4. A piac, egyszerűsítések

Az ügyletkötéskor a felek megállapodnak a T_0 és T_M időintervallumban ($T_0 \leq T_M$) lezajló swap K kuponjáról *(strike)*. [1] Tehát a prémiumfizetés T_0 időpontban indul, ha előtte csődbe megy a reference entity, akkor egy egyszerű CDS opció esetén nem történik kifizetés.

Az indexekre vonatkozó opció esetén azonban - azért, hogy a befektetőknek kedvezőbb legyen ilyen terméket vásárolni- a kiíró vállalja, hogy T_0 időpontban megtéríti az ügyletkötés óta az indexben bekövetkezett veszteségeket. Ez az úgynevezett *Front End Protection.*

A modell felállításához tekintsük a $(\Omega, (\mathcal{F}_{(t\geq 0)}), P)$ filtrált valószínűségi mezőt. Az arbitrázsmentességi feltétel kimondja, hogy léteznie kell P-vel ekvivalens árazó mértéknek, ezt jelöljük Q-val. Q martingál mérték. Azt is feltételezzük, hogy létezik folytonosan kamatozó bankbetét, amit így jelölünk: $b(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$, ahol r a kockázatmentes kamatláb.

[1] $T_0 \geq t$ és amennyiben $T_0 = t$ akkor egy egyszerű spot CDS-t kell csak beáraznunk

Jelölje τ a csőd időpontját, ami megállási idő.

Egy vállalat csődjekor a kötvényesek a befektetett névérték és felhalmozott kamat R százalékát kaphatják vissza. Ezt nevezzük *recovery rate*-nek. Egy CDS esetében a kiíró fél a névérték $1 - R$ százalékát fogja csak megtéríteni a vevőnek.

Ezt a számot nagyon nehéz megbecsülni a mindenki számára elérhető piaci információk alapján. Nagyobb pénzügyi cégeknek ugyan vannak nagyon értékes adatbázisaik, de a becsléskor ők is csak a piaci információkra támaszkodhatnak, hiszen, ha más részlegek által megszerzett tudást használnának a vállalat CDS-ével való kereskedéshez, az bennfentes kereskedésnek minősülne. Például elképzelhetjük, hogy egy bank mergers and acquisitions ága kapcsolatban áll egy vállalattal és ezáltal fontos bizalmas információk birtokában van a vállalat eszközeinek értékét illetően. Ugyanekkor elképzelhető, hogy ennek a vállalatnak a CDS spreadjére az egyik desk fogadni szeretne.

A továbbiakban feltesszük, hogy az R konstans, bár ezt akár sztochasztikusan is modellezhetnénk. Ennek az egyszerűsítésnek az indoklását lásd: Hull, White (2003). A 7. fejezetben megnéztem azt is, hogy milyen hatással van a recovery rate változtatása a CDS index opció árára.

Szintén az előbb említett cikk foglalkozik részletesen a csődvalószínűség (*default probability*) megválasztásával, amire az opció ára nagyon érzékeny. A piaci standard ennek a kérdésnek a megoldására a lépcsős csődintenzitás függvény (*hazard rate*) választása, amit a következőképpen fogok jelölni:

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \chi_{t \in (T_{i-1}, T_i]}$$

Itt a T_i jelöli az i. kifizetés időpontját.

Mivel az árazáshoz szükség lesz a csődintenzitásokra, ezért ezeket bootstrap módszerrel kalibráltam a piacon megfigyelhető CDS spreadekhez. Először a legrövidebb lejáratú megfigyelt CDS árból a következőkben bemutatott fair ár használatából kiszámítottam a T_0 és T_1 időpontok közötti λ_1-et. [2] Ezt követően az első időintervallumra λ_1-et felhasználva a második időintervallumra már meg tudtam határozni a λ_2-t és így tovább lépésenként az előző λ_i-ket használva haladtam.

Ezen kívül más módszerekkel is lehet csődvalószínűséget számolni. Egyrészt historikus adatok felhasználásával becsülhetünk csődvalószínűséget, ami viszont nem lehet pontos előrejelzés a jövőre nézve. A múltbeli események nem mondanak semmit az árazás szempontjából a jövőre nézve. Ezért a múltbeli árfolyamokat csak ritkán használ-

[2] Erre közelítőleg teljesül a következő összefüggés: $\lambda_1 = K/(1-R)$, ahol K-val jelölöm a prémiumot. Ez az egyenlőség az exponenciális függvény elsőrendű közelítéséből jön ki.

ják, ha mindenképp szükséges, például, ha egy folyamat dinamikáját kell meghatározni. Másrészt szokás próbálkozni bonyolultabb elméleti modellek építésével, mint például a Merton-modell.

Az előbbiekből látható, hogy a csődintenzitások kalibrálásához szükség van piaci CDS spreadekre. Sajnos azonban a legtöbb elérhető CDS ár az öt éves lejáratú CDS-ekre szól. További gondot okoz, hogy nagyon sok a bespoke CDS, ami a felek egymás közötti megállapodásából születik, így a piacon ezekről nem érhető el információ. Ezeknek a problémáknak a kiküszöbölésére három elterjedtebb megoldási javaslat van:

- Feltehetjük, hogy minden lejáratra ugyanakkora a spread, mint az ötéves lejáratra
- A lejárat lineáris függvényeként képzelhetjük el a spreadeket, aminek a meredekségének meghatározásához az öt évesen kívül más lejáratra is szükségünk lehet
- Kiindulhatunk abból is, hogy a CDS spreadek közötti különbségek az azonos lejáratú kötvények spreadjeinek különbségével függ össze

A későbbiekben ez a probléma nem lesz nagyon fontos, mert az index esetén azzal a közelítéssel fogok élni, hogy minden vállalat ugyanolyan súllyal és default intenzitással szerepel az indexben, ezért nem lesz szükség a vállalatok egyedi spreadjeire sok lejáratra. Ebben az irányban tehát lehetne finomítani a modellt.

3. fejezet

Numeraire választás és a forward CDS index árazása

Ahhoz, hogy CDS opciók árát meghatározzuk, a legfontosabb, hogy megfelelő numeraire folyamatot válasszunk. Tudjuk, hogy bármilyen pozitív értékű kereskedett $N(t)$ termék segítségével kifejezhetjük bármelyik termék árát $N(t)$ egységekben. A numeraire folyamat általában folytonosan kamatozó bankbetét, de lehet akár zéró-kupon kötvény vagy külföldi fizetőeszköz. Kamatswapok esetén például az egy bázispontra eső kifizetéseket szokás választani.

Bármely martingálmérték esetén Radon-Nikodym deriválttal definiálhatunk egy olyan ekvivalens mértéket, ami szerint az árfolyamatok martingálok lesznek. Legyen például az eredeti martingálmérték Q, ekkor az $N(t)$ numeraire folyamathoz így határozhatjuk meg a Q^N-mértéket:

$$\frac{dQ^N}{dQ}(t) = \frac{N(t)}{b(t)}\frac{b(0)}{N(0)}$$

Ahol emlékeztetésképpen $b(t)$ a folytonosan kamatozó bankbetét:

$$b(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$$

CDS opciók árazása esetén a természetesen adódó numeraire folyamat a forward CDS egy bázispontra eső prémium kifizetése lenne, ezért ebben a fejezetben a forward CDS árazását mutatom be.

Numeraire folyamatként a fenti folyamat hibája az lesz, hogy csőd esetén (index opció árazáskor az összes vállalat csődjekor) ennek az értéke 0 lesz, amit nem engedhetünk meg. Erre többféle megoldás született, az egy CDS-re szóló opció esetén a leghíresebb a Schönbucher-féle *T-forward survival mesure.* Ezt alakítja át indexekre szóló opció esetén Brigo és Morini. Ezekről később részletesebben is esik majd szó az 5. és 6. fejezetekben.

Egy CDS fair árának meghatározásakor a premium és protection lábak jelenértékét (PV) egyenlővé kell tennünk. Az árazáshoz a kockázatsemleges mértéket használjuk.

A CDS-ek árazásakor és a későbbiekben is az eszközárazás első alaptételére fogunk támaszkodni, mely kimondja, hogy a piac pontosan akkor arbitrázsmentes, ha létezik kockázatsemleges mérték. [1]

A forward CDS index árazásához feltesszük, hogy mind az n név $\frac{1}{n}$ részt tesz ki a névértékből és mindegyik esetén ugyanakkora R, a recovery rate. Ekkor ha az i. vállalat csődjének időpontját τ_i-vel jelöljük, akkor t időpontban a csődökből származó veszteségeket a következőképpen írhatjuk fel:

$$L(t) = \frac{(1-R)}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_{\{\tau_i < t\}}$$

Hiszen $\mathbb{E}(\chi_{\{\tau_i<t\}})$ valószínűséggel megy csődbe egy vállalat a t időpontig az indexben, és ez a befektetőnek a névérték (amit kezdetben 1-nek feltételezünk) $\frac{(1-R)}{n}$ részének elvesztését jelenti. Ebből következik, hogy az idő előrehaladtával a névérték így változik:

$$N(t) = 1 - \frac{L(t)}{(1-R)}$$

(Mivel a névérték nem csak a befektető egy vállalatra jutó veszteségével csökken, hanem a recovery résszel is.)

Ezek ismeretében kell kiszámolnunk a premium és protection lábak jelenértékét, mert ezeket egyenlővé téve megkaphatjuk a forward CDS index fair árát. Az árazásnál figyelembe kell vennünk, hogy a forward index spreadekkel nem kereskednek a piacon, csak az azonnali indexekkel. Ezt a homogentitásfeltételekkel fogjuk megkerülni:

- a kamatlábak függetlenek a csődöktől
- minden névnek ugyaz a csődkockázata (homogén portfólió)

Elsőként nézzük a **protection láb** jelenértékét t időpillanatban!

[1] A CDS opciók árazásakor a későbbiekben látni fogjuk, hogy az eszközárazás második alaptételének feltétele már nem mindig teljesül. Eszerint a kockázatsemleges mérték egyértelműsége esetén a piac teljes és fordítva.

A CDS vevője T_0 időpont után negyedévente, a T_j-vel jelölt fizetés napokon fizeti a díjat a megmaradt nevek névértéke után ($N(T_j)$). Az index pedig: $j = 1, \dots, M$. Jelöljük a t és T közötti diszkont faktort $D(t,T)$-vel.

$$Protection^{T_0,T_M}(t) = \int_{T_0}^{T_M} D(t,s)dL(s) \approx \sum_{j=1}^{M} D(t,T_j)(L(T_j) - L(T_{j-1}))$$

A forward CDS index protection lábának értékét a kockázatsemleges mérték szerinti feltételes várható érték [2] segítségével fejezzük ki, és az előbb látott módon helyettesítünk be az L helyére:

$$\mathbb{E}(Protection^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t)) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{n} \frac{(1-R)}{n} \mathbb{E}(D(t,T_j)\chi_{\{T_{j-1}<\tau_i<T_j\}}|\mathcal{F}_t)$$

Most tegyük fel, hogy a kamatlábak függetlenek a csődöktől, és jelölje $P(t,T_j)$ a kockázatmentes kötvény árát, ekkor:

$$\mathbb{E}(Protection^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t)) = \sum_{j=1}^{M} \frac{(1-R)}{n} \sum_{i=1}^{n} (P(t,T_j)Q(T_{j-1} < \tau_i < T_j|\mathcal{F}_t))$$

Annak a valószínűsége, hogy a reference entity túlél egy t időpontig (vagy másképp fogalmazva, hogy a csőd időpontja, τ a t után következik):

$$P(\tau > t) = e^{-\int_t^t \lambda_s ds}$$

A megvalósításkor feltettem, hogy a hazard ratek fixek (nem változnak az időben). Feltéve, hogy minden névnek ugyanaz a csődkockázata:

$$\mathbb{E}(Protection^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t)) = N(t)(1-R)\sum_{j=1}^{M} P(t,T_j)(e^{-\int_t^{T_{j-1}} \lambda_s ds} - e^{-\int_t^{T_j} \lambda_s ds})$$

Most nézzük a **premium láb** jelenértékét t időpillanatban!

$$Premium^{T_0,T_M}(t) = K \cdot \sum_{j=1}^{M} D(t,T_j) \int_{T_{j-1}}^{T_j} N(s)ds \approx K \cdot \sum_{j=1}^{M} D(t,T_j)\alpha_j \Big(1 - \frac{L(t)}{(1-R)}\Big)$$

A közelítésben α_j az intervallum hosszát jelöli, az $N(t)$-t pedig a veszteségek segít-

[2] A feltételes várható értékre használt jelölés elsőre furcsának tűnhet. Az $\mathbb{E}(Protection^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t))$ kifejezésben azért szerepel mindkét oldalon t, mert a különböző időpontban történő kifizetéseknek a t-re diszkontált értékének veszem a feltételes várható értékét.

ségével fejeztük ki.

A premium lábhoz kapcsolódóan vezessük be az egy bázispontra jutó díj (*Index Defaultable Present Value per Basis Point*) jelölésére a *premium* jelölést!

$$premium^{T_0,T_M}(t) = \sum_{j=1}^{M} D(t,T_j) \int_{T_{j-1}}^{T_j} N(t)dt$$

A protection lábhoz hasonlóan a premium láb feltételes várható értéke:

$$\mathbb{E}(Premium^{T_0,T_M}(t))|\mathcal{F}_t) = K \cdot \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \alpha_j \mathbb{E}(D(t,T_j)\chi_{\{T_j<\tau_i\}}|\mathcal{F}_t)$$

Feltéve, hogy a kamatlábak függetlenek a csődöktől:

$$\mathbb{E}(Premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t)) = K \cdot \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_j P(t,T_j) Q(T_j < \tau_i|\mathcal{F}_t)$$

Feltéve, hogy minden névnek ugyaz a csődkockázata:

$$\mathbb{E}(Protection^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t)) = K \cdot N(t) \cdot \sum_{j=1}^{M} \alpha_j P(t,T_j) e^{-\int_t^{T_j} \lambda_s ds}$$

Ezek után a forward CDS index diszkontált kifizetése a vevő számára:

$$V(t) = Protection^{T_0,T_M}(t) - Premium^{T_0,T_M}(t)$$

Az ára pedig:

$$\mathbb{E}(V(t)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(Protection^{T_0,T_M}(t) - Premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t)$$

4. fejezet

A CDS index opciók standard piaci árazása

Az előzőeket felhasználva, a CDS index opcióra úgy tekintünk, mint egy opció az index spreadre, amit K-val jelölünk. Az index spread fair értéke az az S_t, amire teljesül:

$$\mathbb{E}\Big(V(t)|\mathcal{F}_t\Big) = \mathbb{E}\Big(Protection^{T_0,T_M}(t) - Premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big) = 0$$

Tehát:

$$S_t = \frac{\mathbb{E}\Big(Protection^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big)}{\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big)}$$

Ebből az index értéke így írható fel:

$$\mathbb{E}\Big(V(t)|\mathcal{F}_t\Big) = \mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big) \cdot \Big(S_t - K\Big)$$

Ezt a felírást alkalmazva az index opció árát felírhatjuk úgy, mint a szokásos opció kifizetés $\max(S_t - K, 0)$ feltételes várható értékének jelenértéke és a front end protection összege:

$$c_t = \mathbb{E}\Big[D(t,T_0) \cdot \mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(T_0)|\mathcal{F}_{T_0}\Big) \cdot \Big(S_t - K\Big)^+ |\mathcal{F}_t\Big] + \mathbb{E}\Big(F_t|\mathcal{F}_t\Big)$$

Ekkor azonban vegyük észre, hogy túlárazzuk az out-of-the-money opciókat, hiszen a front end protectiont csak akkor vesszük figyelembe, ha már lehívtuk az opciót. A front end protection a valóságban befolyásolja az opció vevőjének döntését lehíváskor, mert nyereségessé teheti egy egyébként belső értékkel nem rendelkező opció lehívását (lásd: Pedersen [8]).

Emiatt helyesebb, ha az opció kifizetésfüggvénye $\Big(\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big)\cdot\Big(S_t - K\Big) + F_t^{T_0}\Big)^+$ lesz, amiből:

$$c_t^* = \mathbb{E}\Big[(D(t,T_0)\cdot\Big(\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big)\cdot\Big(S_t - K\Big) + F_t^{T_0}\Big)^+|\mathcal{F}_t\Big]$$

Az újonnan választott kifizetésfüggvényhez azonban más fair spread tartozik (ami 0-vá teszi az index értékét kiinduláskor):

$$S_t^* = \frac{\mathbb{E}\Big(Protection^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big) + \mathbb{E}\Big(F_t^{T_0}|\mathcal{F}_t\Big)}{\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big)} \tag{4.1}$$

Ezek után c_t^* meghatározására alkalmazhatjuk a Black-formulát [2]! Jelölje σ a forward spread volatilitását. Ekkor:

$$c_t^* = \mathbb{E}\Big[(D(t,T_0)\cdot\Big(\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(T_0)|\mathcal{F}_{T_0}\Big)\cdot\Big(S_t - K\Big) + F_t\Big)^+|\mathcal{F}_t\Big]$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t^*}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma},\ d_2 = \frac{\ln(\frac{S_t^*}{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$$

Erre a formulára az irodalomban *Market Credit Index Option Formula-ként* hivatkoznak.

5. fejezet

A CDS opciók árazása T-survival measure segítségével

Mi történik azonban, ha bekövetkezik az armageddon-esemény, azaz minden az indexben szereplő entitás csődbe megy? Ekkor a numeraire folyamat, $premium^{T_0,T_M}(t)$ értéke 0 lesz, ami az árazásnál 0-val való osztást eredményez. Ezzel a problémával foglalkozik, egy entitásra vonatkozó CDS opció esetében Schönbucher [10], majd ezt gondolja tovább Morini és Brigo [7] indexek esetére.

Tekintsük először az egy entitásra vonatkozó CDS opció esetét! Ha a vállalat becsődöl, akkor a

$$\widehat{X}(t) = \frac{X(t)}{premium^{T_0,T_M}(t)}$$

vagyis az $X(t)$ folyamat *premium* egységekben kifejezett ára nem értelmezhető. Viszont a Radon-Nikodym derivált definíciója mindaddig jó, amíg $premium(0) > 0$:

$$\frac{dQ^{premium}}{dQ}(t) = \frac{premium^{T_0,T_M}(t)}{b(t)} \frac{b(0)}{premium(0)}$$

Az előző gondolatmenetből kiindulva definiáljuk a $Q^{\bar{N}}$ mértéket (ezt fogjuk *T-survival* mértéknek hívni) az $\bar{N}$ ármércéhez a következőképpen:

Legyen $\bar{N}$ egy kockázatos eszköz árfolyamata, amelynek recovery-je 0. Definiáljuk $T > t$-re $N'(T)$ kifizetését a következőképpen:

$$N'(T) = \bar{N}(T) \cdot \mathbf{1}_{\{T<\tau\}}$$

Ehhez a kockázatmentes termék:

$$N(t) := \mathbb{E}_Q\Big[\frac{b(t)N'(T)}{b(T)}\Big]$$

Ez biztosan $N'(T)$-t fizet a T időpillanatban. Tehát definiáltunk két új mértéket, Q^N-et és $Q^{\bar{N}}$-et, úgy hogy $Q^{\bar{N}}$ az a mérték, amit akkor érünk el, ha Q^N-et a T-ig való túléléstől tesszük függővé.

A T-túlélés-mérték tulajdonságai:

- Nem ekvivalens az eredeti martingálmértékkel (Q)
- Abszolút folytonos Q-ra nézve
- Minden olyan eseményhez 0 valószínűséget rendel, amiben a csőd T időpont előtt következik be

Az eddigiekből tehát, ha csak azt feltételezzük, hogy nem lehet arbitrázs, az CDS opció értékére (egy entitás esetében) ezt kapjuk:

$$c_t^{**} = \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} \cdot \mathbb{E}_Q\Big[(D(t,T_0) \cdot \Big(\mathbf{1}_{\{T_0<\tau\}} \cdot \mathbb{E}_Q\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big) \cdot \Big(S_t - K\Big) + F_t^{T_0}\Big)^+ |\mathcal{F}_t\Big] =$$

$$= \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}_Q\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big) \cdot D(t,T_0) \cdot \mathbb{E}_{Q^{\bar{p}remium}}\Big[\Big(S_t - K + F_t^{T_0}\Big)^+ |\mathcal{F}_t\Big]$$

Ennek a modellnek a megvalósításához szükségünk lesz S eloszlására a T_0 időpontban az új $Q^{\bar{p}remium}$ mellett. Azt már tudjuk, hogy S_t martingál $Q^{\bar{p}remium}$ szerint. Ezért S_t dinamikájaként választhatunk **Brown-mozgás**t:

$$dS_t = S_t \sigma dW(t)$$

Itt σ-t konstansnak feltételezzük, W pedig Brown-mozgás $Q^{\bar{p}remium}$ mellett. Erre pedig már fel tudjuk írni a Black-formulát:

$$c_t^* = \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} \cdot \mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big) \cdot \Big(S_t^* \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)\Big)$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t^*}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}, \; d_2 = \frac{\ln(\frac{S_t^*}{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$$

Egy másik lehetséges választás az S_t dinamikájának meghatározására a **rating**re alapuló átmenetvalószínűségek bevezetése [1]: $p_i(T)$ $(i \leq M)$ legyen az új mérték szerinti valószínűsége annak, hogy az i-edik értékelési osztályt elérjük T-ben. Ekkor mellőzve a szükséges feltételezések ismertetését:

$$c_t = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \mathbb{E}_Q\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big) \sum_{i=1}^{M} p_i(T) \cdot (S_i - K)^+$$

[1] Ezzel a modellezési lehetőséggel azonban nem foglalkoztam mélyebben, mert a rating információk nem könnyen hozzáférhetőek.

6. fejezet

No-armageddon árazás

A következő fejezetben a következő három problémára adott megoldási javaslat vázlatát szeretném bemutatni, főképpen [12], [13] és [7] cikkekre támaszkodva:

- A (4.1) -es S^* definíció nem értelmezhető mindenhol, csak ha $\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big)$ nem egyenlő 0-val. Ezt azonban nem tudjuk garantálni, pozitív valószínűséggel vehet fel 0 értéket, mert egy kockázatos termék ára.
- Ha $\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big) = 0$, akkor az árazó formulát sem tudjuk definiálni, pedig ebben az esetben is van ára a CDS index opciónak.
- Ha így definiáljuk az új mértéket, amivel árazni akarunk, akkor az nem lesz ekvivalens a kockázatsemleges mértékkel ($\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big)$ nem szigorúan pozitív).

A korábbiakhoz hasonlóan először nézzük az egy névre vonatkozó esetet! A T_0 és T_M között élő CDS ára, mint láttuk:

$$\mathbb{E}\Big(CDS_t^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{F}_t\Big) =$$

$$(1-R)\sum_{i=1}^{M}\mathbb{E}\Big(D(t,T_i)\mathbf{1}_{\{T_{i-1}<\tau\leq T_i\}}|\mathcal{F}_t\Big) - K\cdot\sum_{i=1}^{M}\mathbb{E}\Big(D(t,T_i)\alpha_i\mathbf{1}_{\{T_i<\tau\}}|\mathcal{F}_t\Big) \qquad (6.1)$$

A következőkben új szubfiltráció struktúrát kell bevezetnünk. $\mathcal{F}_t$ filtrációt úgy osztjuk fel, hogy $\mathcal{H}_t$-vel jelöljük azt a szubfiltrációját, amiben minden információ szerepel t-ig, ami nem kapcsolatos a csődökkel. Formálisan:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{I}_t \vee \mathcal{H}_t$$

$$\mathcal{I}_t = \sigma(\{\tau > u\}, u \leq t)$$

Most láthatjuk, hogy a $\mathbb{Q}\Big(\tau > t|\mathcal{H}_t\Big)$ bármikor pozitív. Tehát alkalmazhatjuk Jeanblanc és Rutkowski által megfogalmazott formulát a kockázatos termékek kifizetésére. Ehhez legyen a T-ben lejáró, t-re diszkontált kockázatos termékünk X_t^T! Ekkor:

$$X_t^T = \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} X_t^T$$

A Jeanblanc és Rutkowski formula pedig:

$$\mathbb{E}\Big(X_t^T|\mathcal{F}_t\Big) = \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}\Big(\tau > t|\mathcal{H}_t\Big)} \mathbb{E}\Big(X_t^T|\mathcal{H}_t\Big) \tag{6.2}$$

Mivel a CDS is egy kockázatos termék, ezért alkalmazható rá a formula:

$$\mathbb{E}\Big(CDS_t^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{F}_t\Big) = \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}\Big(\tau > t|\mathcal{H}_t\Big)} \mathbb{E}\Big(CDS_t^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{H}_t\Big) \tag{6.3}$$

A (6.1) egyenlőség segítségével a (6.3)-t a következő $K_t^{T_0,T_M}$ teszi nullává:

$$K_t^{T_0,T_M} = (1-R)\frac{\sum_{i=1}^M \mathbb{E}\Big(D(t,T_i)\mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \le T_i\}}|\mathcal{H}_t\Big)}{\sum_{i=1}^M \mathbb{E}\Big(D(t,T_i)\alpha_i \mathbf{1}_{\{T_i < \tau\}}|\mathcal{H}_t\Big)}$$

Most már alkalmazhatjuk a Black-formulát:

$$\frac{\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}}{\mathbb{Q}\Big(\tau > t|\mathcal{H}_t\Big)} \Big[\sum_{i=1}^M \mathbb{E}\Big(D(t,T_i)\alpha_i \mathbf{1}_{\{T_i < \tau\}}|\mathcal{H}_t\Big)\Big] Black\Big(K_t^{T_0,T_M}, K, \sigma_{T_0,T_M}, \sqrt{T_0 - t}\Big)$$

Tehát ebben az esetben elég, ha csak a $\mathcal{H}_t$ szubfiltráción határozzuk meg a dinamikát a $\{\tau > t\}$ esetben. A $\{\tau \le t\}$ esetben ugyanis a kifizetés 0 lesz, mert egy egy névre szóló CDS opcióról volt szó.

Most nézzük az index esetét!

Intuitív módon először így definiálhatjuk a szubfiltrációkat több névből álló CDS index esetén:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{I}_t^i \vee \mathcal{H}_t^i$$

$$\mathcal{I}_t^i = \sigma(\{\tau_i > u\}, u \le t)$$

Ahol τ_i az i. név csődjének időpontját jelenti, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Ahhoz, hogy a fentebb leírt három problémát elkerüljük, elég lenne, ha csak egy névre is tudnánk, hogy biztosan nem fog csődbe menni. (Ekkor ugyanis $\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big) \neq 0$.)

Azonban nem választhatunk találomra egy ilyen nevet, ráadásul akkor nem alkalmazhatnánk a fentieket, mert a Jeanblanc és Rutkowski formulához nem teljesül, hogy csőd esetén a kockázatos eszköz értéke 0 (jelen esetben amikor az összes név becsődöl, tehát armageddon esemény áll elő.)

Ezért egy olyan szubfiltrációt definiálunk, ami csak azt az információt nem tartalmazza, amikor $\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big) = 0$. Ehhez legyen $\hat{\tau}$ megállási idő:

$$\hat{\tau} = \max(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$$

Az új filtrációk pedig:

$$\mathcal{F}_t = \hat{\mathcal{I}}_t \vee \hat{\mathcal{H}}_t$$

$$\hat{\mathcal{I}}_t = \sigma(\{\hat{\tau} > u\}, u \leq t)$$

Mivel $\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau} > t|\hat{\mathcal{H}}_t\Big) > 0$ majdnem mindenütt:

$$\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\mathcal{F}_t\Big) = \frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau} > t|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big) \tag{6.4}$$

A következőkben a *Loss Adjusted Index Spread*-et próbáljuk beárazni. Ezt így rövidítjük:

$$I_t^{T_0,T_M} = Protection^{T_0,T_M}(t) - Premium^{T_0,T_M}(t) + F_t^{T_0}$$

Erre a folyamatra azonban nem írhatjuk fel egyből az eredeti Jeanblanc és Rutkowski formulát, hiszen a front end protection miatt:

$$I_t^{T_0,T_M} \neq \mathbf{1}_{\{}\hat{\tau} > T_0\} I_t^{T_0,T_M}$$

Ehelyett be kell vezetnünk az általánosított Jeanblanc és Rutkowski formulát:

$$X_t^T = \mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}} X_t^T + \mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}} X_t^T$$

$$\mathbb{E}\Big(X_t^T|\mathcal{F}_t\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}} X_t^T|\mathcal{F}_t\Big) + \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}} X_t^T|\mathcal{F}_t\Big)$$

Itt az első tagra (6.2)-t alkalmazhatjuk, a másodikban pedig átalakítjuk a feltételt:

$$\mathbb{E}\Big(X_t^T|\mathcal{F}_t\Big) = \frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau} > t|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}} X_t^T|\hat{\mathcal{H}}_t\Big) + \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}} X_t^T|\hat{\mathcal{I}}_t \vee \hat{\mathcal{H}}_t\Big) =$$

$$= \frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau} > t|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}X_t^T|\hat{\mathcal{H}}_t\Big) + \mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}\mathbb{E}\Big(X_t^T|\sigma(\hat{\tau}) \vee \hat{\mathcal{H}}_t\Big)$$

Ezt alkalmazzuk a *Loss Adjusted Index Spread*-re:

$$\mathbb{E}\Big(I_t^{T_0,T_M}|\mathcal{F}_t\Big) = \frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau} > t|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}Protection^{T_0,T_M}(t) - \mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}Premium^{T_0,T_M}(t)+$$

$$+\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}F_t^{T_0}|\hat{\mathcal{H}}_t\Big) + \mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}\mathbb{E}\Big(Protection^{T_0,T_M}(t) - Premium^{T_0,T_M}(t) + F_t^{T_0}|\sigma(\hat{\tau}) \vee \hat{\mathcal{H}}_t\Big)$$

Ahhoz, hogy ezt tovább tudjuk alakítani, figyeljük meg, hogy az első tagban:

$$\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}Protection^{T_0,T_M}(t) = Protection^{T_0,T_M}(t)$$

$$\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}Premium^{T_0,T_M}(t) = Premium^{T_0,T_M}(t)$$

Továbbá:

$$\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}F_t^{T_0}|\hat{\mathcal{H}}_t\Big) = (1-R)\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{t<\hat{\tau}\leq T_0\}}D(t,T_0)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big) + \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>T_0\}}F_t^{T_0}|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)$$

A második tagban:

$$\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}\mathbb{E}\Big(Protection^{T_0,T_M}(t)|\sigma(\hat{\tau}) \vee \hat{\mathcal{H}}_t\Big) = 0$$

$$\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}\mathbb{E}\Big(Premium^{T_0,T_M}(t)|\sigma(\hat{\tau}) \vee \hat{\mathcal{H}}_t\Big) = 0$$

$$\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}\mathbb{E}\Big(F_t^{T_0}|\sigma(\hat{\tau}) \vee \hat{\mathcal{H}}_t\Big) = \mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}(1-R)P(t,T_A)$$

Tehát:

$$\mathbb{E}\Big(I_t^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{F}_t\Big) =$$

$$= \frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau} > t|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}\mathbb{E}\Big(Protection^{T_0,T_M}(t) - Premium^{T_0,T_M}(t) + \mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>T_0\}}F_t^{T_0}|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)+$$

$$+\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau} > t|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}(1-R)\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{t<\hat{\tau}\leq T_0\}}D(t,T_0)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)+$$

$$+\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}(1-R)P(t,T_0)$$

Innen láthatjuk, hogy az utolsó tag értéke nem lehet 0, amikor $\{\hat{\tau} \leq t\}$. Ebből az következik, hogy nem tudunk olyan K-t találni, ami mellett a fenti várható érték mindig 0 lenne (ez lenne a fair ár). Emiatt csak annak van értelme, ha az index spread értékét ott állítjuk 0-ra megfelelő K választással, amikor még vannak olyan nevek, amik nem csődöltek be.

A fenti összeg első tagját, az ún. *Armageddon Knock-Out-Tradable Asset*-et viszont már érdemes 0-ra állítani:

$$\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau}>t|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}Protection^{T_0,T_M}(t)-\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}Premium^{T_0,T_M}(t)+\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>T_0\}}F_t^{T_0}|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)$$

Amiből a fair spread:

$$S_t^{T_0,T_M}=\frac{\mathbb{E}\Big(Protection^{T_0,T_M}(t)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)+\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>T_0\}}F_t^{T_0}|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}{\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}$$

Ez a definíció pedig értelmes, mert $\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)$ már nem lehet 0.

Mostmár vizsgálhatjuk a CDS index opció kifizetését úgy, hogy áttérünk az új mértékre. Az index opció:

$$D(t,T_0)\mathbb{E}\Big(I_t^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{F}_t\Big)^+$$

Alakítsuk először $\mathbb{E}\Big(I_t^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{F}_t\Big)$-t felhasználva $S_t^{T_0,T_M}$-et!

$$\mathbb{E}\Big(I_{T_0}^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{F}_t\Big)=\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>T_0\}}}{\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau}>T_0|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\Big)}\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(T_0)|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\Big)\Big(S_t^{T_0,T_M}-K\Big)+$$

$$+\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq T_0\}}(1-R)$$

$$\mathbb{E}\Big(I_{T_0}^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{F}_t\Big)^+=\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>T_0\}}}{\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau}>T_0|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\Big)}\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(T_0)|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\Big)\Big(S_t^{T_0,T_M}-K\Big)^++$$

$$+\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq T_0\}}(1-R)$$

A CDS index opció értéke pedig az általánosított Jeanblanc és Rutkowski formulával:

$$\mathbb{E}\Big(D(t,T_0)\mathbb{E}\Big(I_{T_0}^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{F}_t\Big)^+|\mathcal{F}_t\Big)=$$

$$=\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau}>t|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}(D(t,T_0)\mathbb{E}\Big(I_{T_0}^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{F}_t\Big)^+|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)+$$

$$+\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}\mathbb{E}\Big(D(t,T_0)\mathbb{E}\Big(I_{T_0}^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{F}_t\Big)^+|\sigma(\hat{\tau})\vee\hat{\mathcal{H}}_t\Big)$$

Ebből az első tag:

$$\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\left(\hat{\tau}>t|\hat{\mathcal{H}}_t\right)}\mathbb{E}\left(D(t,T_0)\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>T_0\}}}{\mathbb{Q}\left(\hat{\tau}>T_0|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\right)}\mathbb{E}\left(premium^{T_0,T_M}(T_0)|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\right)\left(S_{T_0}^{T_0,T_M}-K\right)^+|\hat{\mathcal{H}}_t\right)+$$

$$+\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\left(\hat{\tau}>t|\hat{\mathcal{H}}_t\right)}\mathbb{E}\left(D(t,T_0)\mathbf{1}_{\{t<\hat{\tau}\leq T_0\}}(1-R)|\hat{\mathcal{H}}_t\right)$$

A második tag pedig $\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\geq T_0\}}=0$ és $\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq T_0\}}=\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}$ miatt:

$$\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq T_0\}}\mathbb{E}\left(D(t,T_0)(1-R)|\sigma(\hat{\tau})\vee\hat{\mathcal{H}}_t\right)=$$

$$=\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}(1-R)P(t,T_0)$$

Tehát az opció értéke az alábbi három, szemléletesen is értelmezhető tag összegéből áll:

$$\mathbb{E}\left(D(t,T_0)\mathbb{E}\left(I_{T_0}^{T_0,T_M}(K)|\mathcal{F}_t\right)^+|\mathcal{F}_t\right)=$$

$$=\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\left(\hat{\tau}>t|\hat{\mathcal{H}}_t\right)}\mathbb{E}\left(D(t,T_0)\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>T_0\}}}{\mathbb{Q}\left(\hat{\tau}>T_0|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\right)}\mathbb{E}\left(premium^{T_0,T_M}(T_0)|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\right)\left(S_{T_0}^{T_0,T_M}-K\right)^+|\hat{\mathcal{H}}_t\right)+$$
$$+\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\left(\hat{\tau}>t|\hat{\mathcal{H}}_t\right)}\mathbb{E}\left(D(t,T_0)\mathbf{1}_{\{t<\hat{\tau}\leq T_0\}}(1-R)|\hat{\mathcal{H}}_t\right)+$$
$$+\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}(1-R)P(t,T_0)$$

Az összeg tagjainak jelentése:

1. A standard piaci árazásnál csak ezt vettük figyelembe, csak ez tartalmaz opcionalitást

2. Az opció jelenértéke abban az esetben, amikor minden név becsődöl t időpont és az opció lejárata (T_0) között

3. Az opció jelenértéke abban az esetben, amikor minden név becsődöl t időpont előtt

Most az 1. tagot kell beáraznunk az új mérték szerint. Most már választhatjuk a numeraire-nek $\mathbb{E}\left(premium^{T_0,T_M}(T_0)|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\right)>0$ folyamatot, és segítségével definiálhatjuk az új $\hat{\mathbb{Q}}^{T_0,T_M}$ mértéket. Ez az ún. *No-Armageddon Pricing Measure*. A Radon-

Nykodim derivált pedig:

$$Z_{T_0} = \frac{d\hat{\mathbb{Q}}^{T_0,T_M}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\Big|\hat{\mathcal{H}}_{T_0} = \frac{B_0\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(T_0)|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\Big)}{B_{T_0}\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(0)|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\Big)}$$

Z_t-t, ha $t \leq T_0$ akkor $\hat{\mathcal{H}}_t$ martingálként definiáljuk:

$$Z_t = \mathbb{E}\Big(\frac{d\hat{\mathbb{Q}}^{T_0,T_M}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\Big|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)$$

Ezután Bayes-féle mértékcserét alkalmazva belátjuk, hogy az új mértékre $S_{T_0}^{T_0,T_M}$ martingál lesz (az új mérék szerinti várható érték $\hat{\mathbb{E}}$):
(A részletesebb levezetésért lásd [7].)

$$\hat{\mathbb{E}}\Big(S_{T_0}^{T_0,T_M})|\hat{\mathcal{H}}_t\Big) = \mathbb{E}\Big(S_{T_0}^{T_0,T_M}\frac{B_t\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(T_0)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}{B_{T_0}\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}|\hat{\mathcal{H}}_t\Big) =$$

$$= \frac{\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(Protection^{T_0,T_M}(T_0) + D(t,T_0)L(T_0)\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>T_0\}}|\hat{\mathcal{H}}_{T_0}\Big)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}{\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)} =$$

$$= \frac{\mathbb{E}\Big(Protection^{T_0,T_M}(t) + D(t,T_0)L(T_0)\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>T_0\}}|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}{\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)} =$$

$$= \frac{\mathbb{E}\Big(Protection^{T_0,T_M}(t)\Big) + \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>T_0\}}F_t^{T_0}\Big)}{\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)} =$$

$$= S_t^{T_0,T_M}$$

Ezután fel kell tennünk $S_t^{T_0,T_M}$-re valamilyen dinamikát. Legyen W Brown-mozgás, egy lehetséges dinamika:

$$dS_t^{T_0,T_M} = \hat{\sigma}^{T_0,T_M}S_t^{T_0,T_M}dW^{T_0,T_M}, t \leq T_0$$

Ehhez pedig az új árazó formula:

$$\frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\tau}>t\}}}{\mathbb{Q}\Big(\hat{\tau} > t|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)}\mathbb{E}\Big(D(t,T_0)(1-R)\mathbf{1}_{\{t<\hat{\tau}\leq T_0\}}|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)+$$

$$+\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)Black\Big(S_t^{T_0,T_M}, K, \sigma_{T_0,T_M}, \sqrt{T_0-t}\Big) + \mathbf{1}_{\{\hat{\tau}\leq t\}}(1-R)P(t,T_0)$$

7. fejezet

Árazás szimulációval

Ebben a fejezetben szeretném bemutatni, hogy ha hasonlóan az összes eddig látott modellhez most is élek a Black-modell feltevésével és a forward CDS index spread dinamikájának Brown-mozgást választok, akkor hogyan lehet szimulációval árazni az indexre vonatkozó opciót.

A programommal 2010.november 17-én, az aznap látott CDS index spreadek és forward kamatok segítségével határoztam meg olyan opció árát, amiben 2011. március 20-án van lehetőség belépni egy 2016. március 20-áig tartó CDS ügyletbe. Azért választottam példaként ezeket a paramétereket, mert a legtöbb kereskedett CDS index opció 5 éves swapra szól, maximum fél-2 éves opció lejárattal.

Az index spreadek az aktuális on-the-run indexek (lejáratok: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10 év) árai , tehát amiket 2010. szeptember 20-án bocsátottak ki. Szokásos módon az 1 éves CDS index lejárata 2011. december 20., a 2 évesé 2012. december 20., stb. A portfólióban a megjelenés óta már történtek csődök, de ezek nem befolyásolják közvetlenül az opció árát, mert nem számítanak bele a front end protectionbe.

A forward kamatokhoz a Bloomberg S23-as számú diszkontgörbéjének 2010. november 17-ei historikus értékeit használtam.

A program bemenete:

- A felek által megállapított strike spread, ami az opció lehívása esetén a biztosítás ára lesz.
- A CDS index spread volatilitása, amit most fixnek feltételeztem.
- A swap kezdetének és lejáratának időpontja.
- A jegyzett CDS spreadek és lejáratuk.

7.1. ábra. A lépcsős hazard rate függvény

Első lépésként interpolálással minden napra számoltam kamatokat, amikből aztán diszkontfaktorokat számoltam.

Ezután a csődintenzitás meghatározásához a 2. fejezetben bemutatott hazard rate függvényemet használtam (7.1. ábra). Időben fix hazard rate függvényt feltételeztem. A korábbi jelöléssel élve a csődintenzitás függvény:

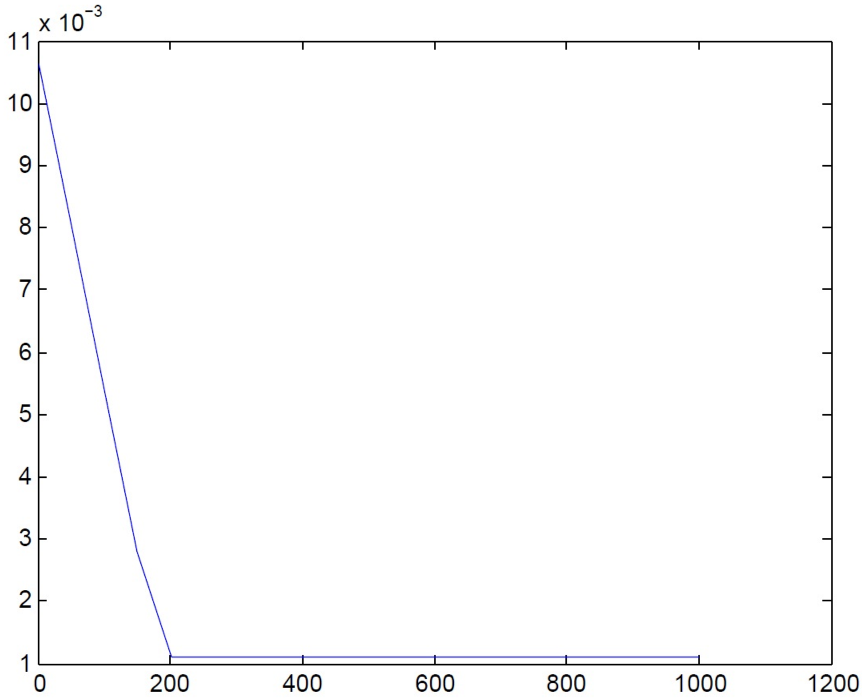
$$\lambda_s = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \chi_{t \in (T_{i-1}, T_i]}$$

A λ-kat kiterjesztettem, hogy minden napra értelmezni tudjam.

Minden napon 10000 trajektórián szimuláltam a forward index spreadet. Ezt egy olyan kezdeti fair spread értékből indítottam, amit a hazard rate-ek segítségével határoztam meg a 3. fejezetben látott módon.

Végül mind a 10000 trajektórián megnézem, hogy érdemes lenne-e rajta lehívni az opciót, ha figyelembe vesszük a front end protectiont is. Ezeknek az értékeknek a diszkontált átlaga adja meg az opció árát:

$$c_t = \mathbb{E}\Big[D(t,T_0) \cdot \mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(T_0)|\mathcal{F}_{T_0}\Big) \cdot \Big(S_t - K\Big)^+ |\mathcal{F}_t\Big] + \mathbb{E}\Big(F_t|\mathcal{F}_t\Big)$$



7.2. ábra. Az opció ára a strike függvényében a standard piaci árazás szerint

A 7.2. ábrán látjuk, hogy a strike hogyan befolyásolja az opció árát. Mikor a strike meghaladja a forward CDS index opció fair spreadjét, utána már az értéke csak a front end protection értékével lesz egyenlő a standard piaci árazás szerint. Ez azért nem helyes, mert egy idő után 0 kellene, hogy legyen az opció értéke, amikor a kezdeti front end protection már nem kárpótol a magas strike-ért.

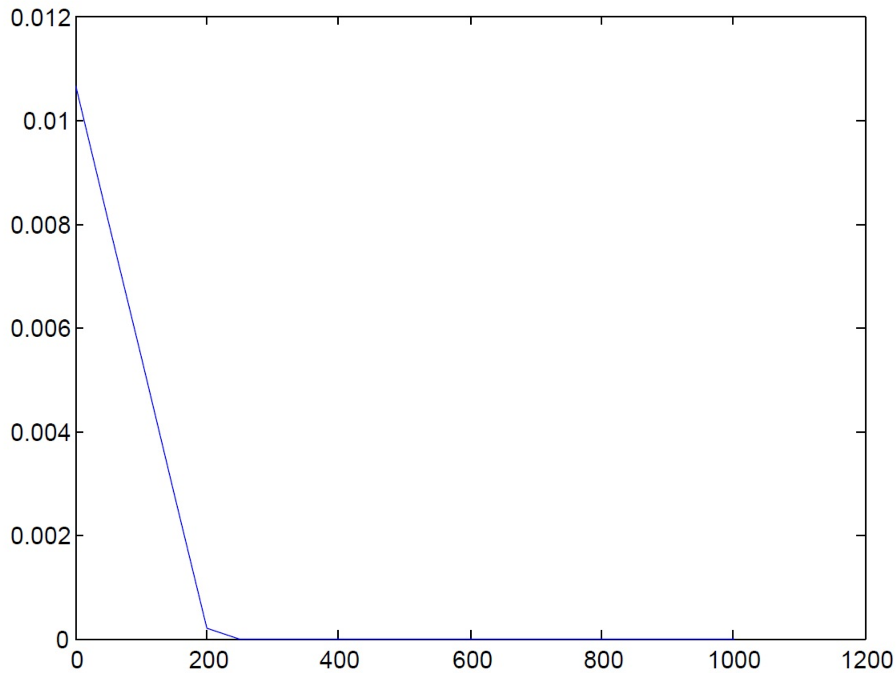
Továbbá, mivel a front end protection a valóságban befolyásolja az opció vevőjének döntését lehíváskor, ezért összehasonlításként azt is megnéztem, hogy milyen opció árat kapok a módosított kifizetésfüggvénnyel:

$$c_t^* = \mathbb{E}\Big[(D(t,T_0)\cdot\Big(\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(T_0)|\mathcal{F}_{T_0}\Big)\cdot\Big(S_t - K\Big) + F_t\Big)^+|\mathcal{F}_t\Big]$$

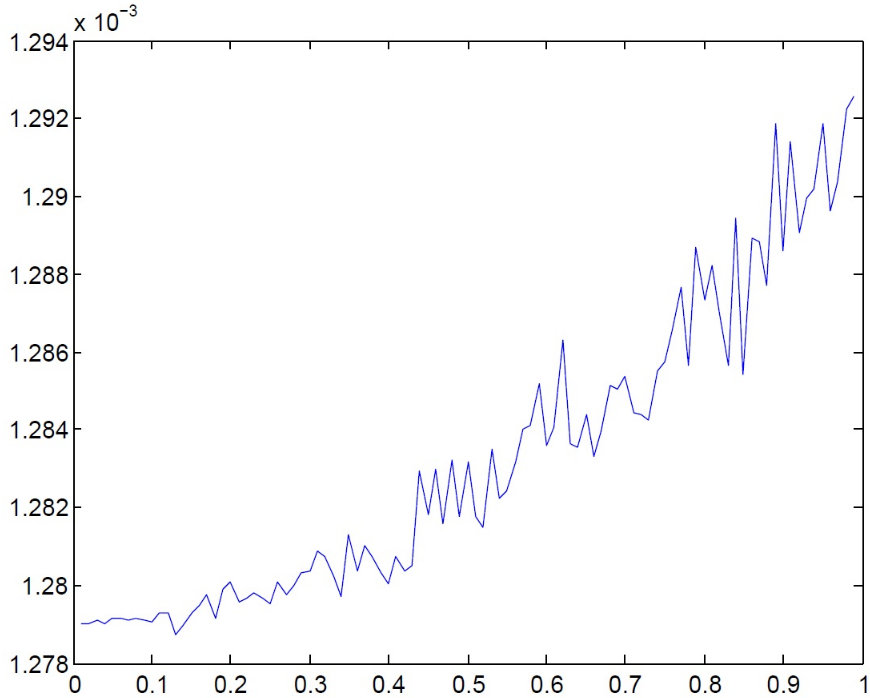
Ekkor a 7.3. ábrán már látszik, hogy ha túl magas prémiummal lehet csak lehívni az opciót, amiért már nem kompenzál a front end protection, akkor az értéke 0 lesz.

Továbbra is a módosított kifizetésfüggvényt használva megnéztem hogyan függ az opció ára a volatilitástól. A volatilitás értékét 0.01-től 0.99-ig néztem. A 7.4. ábrán látszik a felfelé mutató trend, tehát az opció ára nő a volatilitás növelésével. A zaj az árban a szimuláció miatt ilyen szembetűnő.

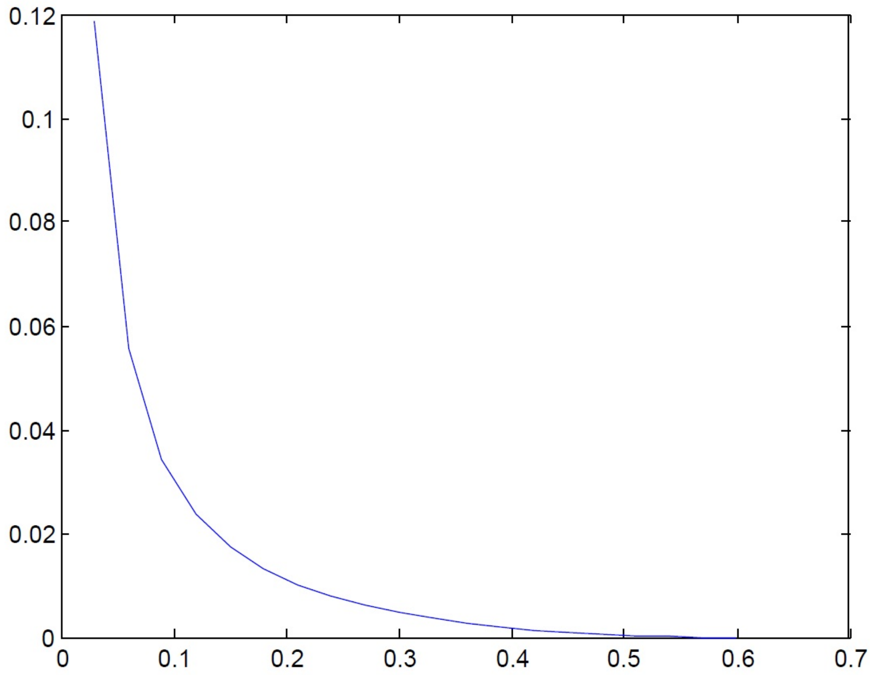
A 7.5. ábrán az opció árának a recovery rate-től való függését láthatjuk. Mint várható volt, az opció ára csökken, ha a recovery rate növekszik, hiszen ha többet kapunk



7.3. ábra. Az opció ára a strike függvényében a módosított standard piaci árazás szerint



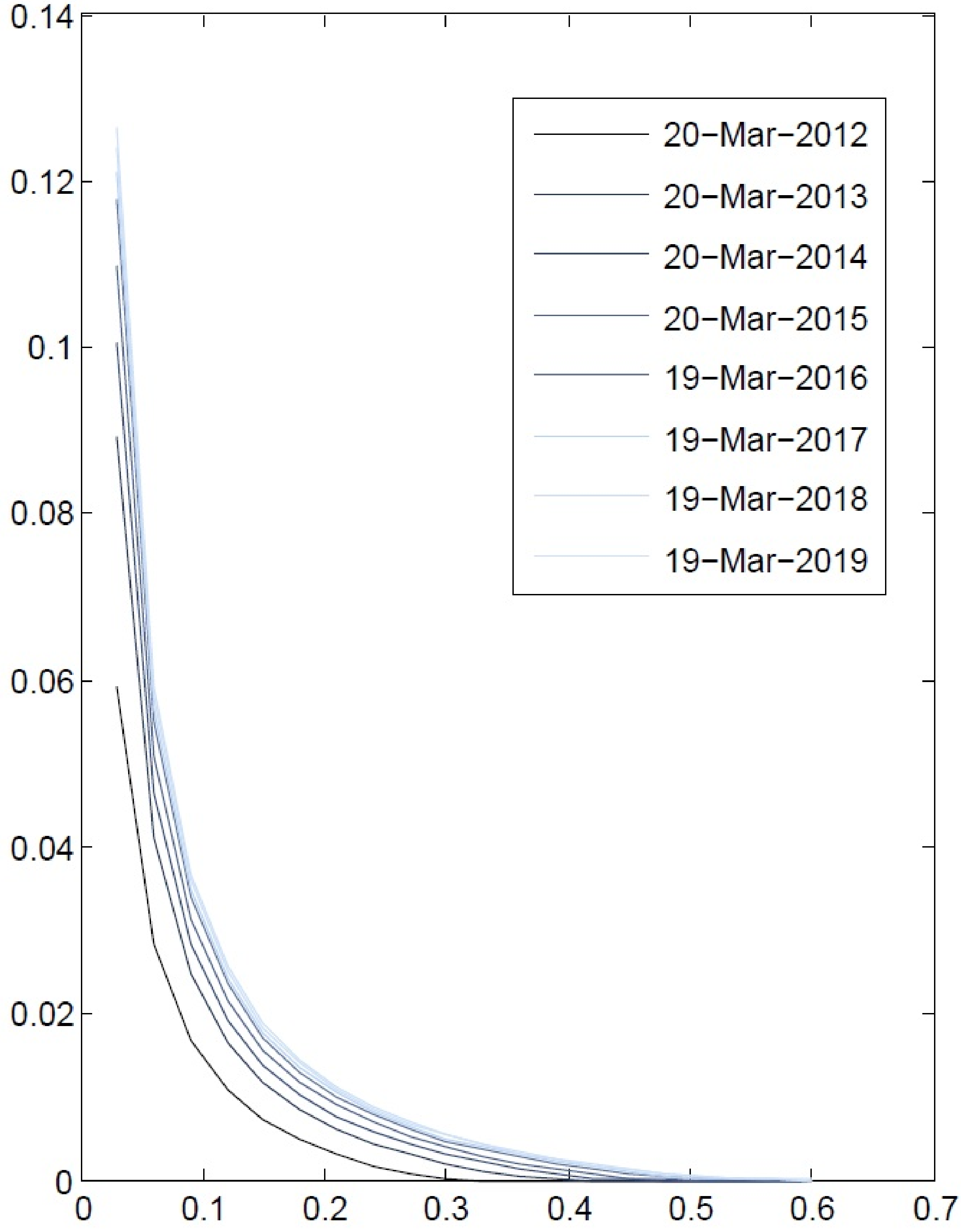
7.4. ábra. Az opció ára a volatilitás függvényében a módosított standard piaci árazás szerint



7.5. ábra. Az opció ára a recovery rate függvényében a módosított standard piaci árazás szerint

vissza a befektetésünkből egy cég csődjekor, akkor kevésbé éri meg biztosítást kötni a csődre.

Végül a 7.6. ábrán azt vizsgáltam, hogy hogyan függ a swap élethosszától, hogy mekkora hatása van a recovery rate-nek az árra. Azt látjuk, hogy a távolabbi lejáratú CDS-ekre vonatkozó opciók árát jobban befolyásolja a recovery rate változása.



7.6. ábra. Az opció ára a recovery rate függvényében különböző lejáratokra

8. fejezet

A gyakorlati megvalósításkor felmerülő problémák

8.1. Fedezés

Ha a spread dinamikájának a Brown-mozgást választjuk, akkor a forward CDS-re teljes lesz a piac, emiatt jó választásnak tűnik. Emellett (elméletileg legalábbis) dinamikus hedge is felállítható a CDS opcióra. Ez a szokásos Black-Scholes világban a következő lenne: $t < T$, $t < \tau$ időpontban, amennyiben a spread S_t, tartsunk a forward CDS-ből

$$\delta_1(t) = N(d_1)$$

egységet és a *premium* eszközből

$$\delta_2(t) = \frac{c_t}{premium^{T_0,T_M}(t)}$$

egységet. Ezzel fedezzük a forward CDS árváltozását.

A valóságban azonban általában nem kereskedettek a forward CDS indexek. Ezt úgy tudjuk kiküszöbölni, hogy ha például a T_1 és T_2 időpont között élő forward CDS indexekre lenne szükségünk, akkor veszünk egy T_2 lejáratú CDS-t és eladunk egy T_1 lejáratú CDS-t.

Ez a módszer azonban csak közelítőleg replikálja a forward CDS-t, ráadásul nem biztos, hogy tudunk találni megfelelő lejáratú kereskedett CDS indexet. További probléma, hogy csak akkor működik a stratégia, ha a két replikáláshoz használt termék díjai megegyeznek, máskülönben folyamatos pénzáramlást idézünk elő. A tapasztalat azt mutatja, hogy ez a különbség elhanyagolható nagyságrendű.

A legnagyobb problémát megvalósításkor a likviditás hiánya okozza. Emiatt nagy bid-ask spreadekkel is számolni kell, következésképpen nem igazíthatjuk ki a hedget túl sűrű időközönként. A Black-Scholes elmélet klasszikus változata szerint még a diszkrét fedezés is jelentősen tudja csökkenteni a kockázatot.

További aggodalomra ad okot, hogy egyedi CDS-ek volatilitása nagyon magas (lásd: Hull és White [6]). Azonban nekünk a fedezéskor a forward CDS-ek volatilitását kell figyelembe vennünk, amik jelentősen alacsonyabbak.

8.2. A no-armageddon árazással felmerülő problémák

A no-armageddon árazásnál bevezetett új mértéket csak a $\hat{\mathcal{H}}_t$ filtráción értelmeztük, ezért ha modellt más termékre is használni akarjuk, akkor ki kell terjeszteni $\mathcal{F}_t$-re.

Azt is figyelembe kell venni, hogy $\mathbb{E}\Big(premium^{T_0,T_M}(t)|\hat{\mathcal{H}}_t\Big)$ nem kereskedett termék, aminek pedig teljesülnie kell a Radon-Nikodym derivált definíciójához.

Ezekkel a kérdésekkel [12] foglalkozik részletesebben.

A Brigo és Morini féle no-armageddon árazással felmerülő komolyabb problémákat R. Martin 2012-es cikke [9] foglalja össze:

- a no-armageddon fő erénye éppen az lenne, hogy szélsőséges piaci helyzetben a standard piaci árazásnál valóságosabb eredményt ad, ugyanakkor ilyen körülmények között nem számolhatunk a Gauss-kopula modellel
- vannak olyan indexek, amire az egyes tranche-ok nem is kereskedettek, ezeket nem szabadna ilyen modellel árazni
- a CDS indexre nem szabadna úgy tekinteni, mint egyes nevek portfóliójára

9. fejezet

Összefoglalás

Mint láttuk, a CDS index opciók árazása nem egyértelmű kérdés sem az akadémiai, sem a gyakorlati piaci életben sem. Egy olyan termékről van szó, amit bár elég nagy tételben kereskednek, mégsem gondolhatja egyetlen piaci szereplő sem, hogy ha a saját árazása szerint arbitrázst talált, akkor azt biztosan pénzzé is tudja tenni. Hiszen egyrészt az árazáshoz olyan információkra lenne szükség, amelyek nem nyilvánosak mindenki számára. Másrészt főként OTC megállapodásokról van szó, tehát egy-egy speciális ügyletből nehéz egy másikra következtetni.

Bár az adathozzáférési és likviditási problémák miatt különösen nehéz árazni ezeket a termékeket, a bankok mégis rá vannak szorulva. Számukra ugyanis nem csak a CDS index opció értéke a fontos, hanem kockázatkezelés miatt is modelleket kell, hogy építsenek.

Ha követjük az irodalomjegyzékben megjelölt cikkek hivatkozásait, akkor láthatjuk, hogy a bemutatott módszerek célja nem csak az, hogy ennek a terméknek az árát meghatározzuk. Mind a T-survival measure, mind a kibővített no-armageddon mérték alkalmas más termékek árazására is. Általánosabban pedig a Black-formula használata elterjedt a kamatláb derivatívák piaci standard árazáskor, például swap opciók esetében.

Összefoglalásként elmondhatjuk, hogy bár a témában megjelent cikkekben ádáz vita folyik az árazásról, a tapasztalat csak a jövőben tudja majd igazolni egy-egy módszer helyességét, amikor a CDS index opciók piaca még hatékonyabbá válik.

Irodalomjegyzék

[1] Patel, Navroz (2003). Default swaptions: the next frontier

[2] Black, Fischer (1976). The pricing of commodity contracts, Journal of Financial Economics, 3, 167-179.

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/$Credit\_default\_swap$

[4] http://www.isdacdsmarketplace.com/

[5] ISDA:Non-Cleared OTC Derivatives: Their Importance to the Global Economy (2013)

[6] Hull, John and Alan White (2003). The Valuation of Credit Default Swap Options

[7] Massimo Morini, Damiano Brigo (2007). Arbitrage-free pricing of Credit Index Options. The no-armageddon pricing measure and the role of correlation after the subprime crisis

[8] Pedersen, Claus M. (2003). Valuation of Portfolio Credit Default Swaptions, *Lehman Brothers Fixed Income Quantitative Credit Research*

[9] R. Martin (2012). A CDS Option Miscellany

[10] Schönbucher, Philipp (2003). A note on survival measures and the pricing of options on credit default swaps

[11] Schönbucher, Philipp (2000). A Libor Market Model with Default Risk *Bonn Econ Discussion Papers 15/2001*

[12] Jamshidian, Farshid (2004). Valuation of credit default swaps and swaptions *Finance and Stochastics August 2004, Volume 8, Issue 3, pp 343-371*

[13] Jeanblanc, Monique and Rutkowski, Marek.Default Risk and Hazard Process *Mathematical Finance — Bachelier Congress 2000 Springer Finance 2002, pp 281-312*

A dolgozatban szereplő vélemények és következtetések kizárólag a szerző sajátjai, és nem tükrözik a Morgan Stanley vagy dolgozói jelen dolgozatban vizsgált kérdésekkel kapcsolatos álláspontját. A dolgozatban szereplő vélemények és következtetések pontosságára és helyességére vonatkozóan a Morgan Stanley nem vállal semmilyen garanciát.