Megtakarítások Átváltása Életjáradékra

MSc szakdolgozat

Írta: Tóth Beáta

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc
Aktuárius szakirány

Témavezető:

Ágoston Kolos Csaba, adjunktus
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

2014

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni azon emberek segítségét, akik valamilyen formában elősegítették a szakdolgozatom elkészítését. Köszönöm Ágoston Kolosnak, hogy elvállalta a konzulensi teendőket, és hogy irányított a szakdolgozat felépítésének megalkotásában.

Köszönettel tartozom évfolyamtársaimnak is, akik folyamatosan motiváltak és segítettek.

Szeretném megköszönni a családom támogatását is, melyet a tanulmányaim során kaptam tőlük.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

1. fejezet

Bevezetés

Ha az emberek előre gondolkodnak, akkor ésszerű, ha nem csak a nyugdíjra támaszkodnak időskorban, hanem járadékot vesznek. A dolgozat fő témája ez, hogy hogyan lehetne a felhalmozott tőkét átváltani életjáradékra, ehhez először bemutatom Stanley Fischer modelljét.

Ha ezt a kérdést úgy vizsgáljuk, hogy egy biztosító járadékbiztosításokat ad el, akkor ez a modell jó, ha a biztosítottak csoportja homogén. Azonban tudjuk, hogy a biztosítottak csoportja heterogén, azaz vannak köztük magasabb és alacsonyabb halandóságúak, ekkor jelenik meg az antiszelekció. Optimális lenne, ha ezek a csoportok különböző típusú járadékot vásárolnának.

Mi is az az antiszelekció pontosan? Antiszelekció bekövetkeztekor a biztosítottak nem a kockázatuknak megfelelő áron jutnak biztosítási fedezethez. Elsődleges kiváltó oka az információs aszimmetria a biztosító és a biztosított között, jelesül, hogy a biztosított a számára nem előnyös adatokat eltitkolja a biztosító elől, így jutva kedvezőbb biztosítási ajánlathoz.

Összegbiztosítások esetén az antiszelekció úgy lép fel, hogy a magasabb kockázatú ügyfél köt teljes biztosítást, míg a kevésbé kockázatos ügyfél magasabb megtartást vállal. A dolgozat második részében röviden összefoglalom az antiszelekciós modelleket az összegbiztosítások piacán.

Öregedő népességben a nyugdíjrendszer kérdése nagyon fontos és fontossága növekvő. A társadalombiztosítás - kötelező biztosítás területén is fontos figyelembe venni az antiszelekció jelenségét. Az egyik legfontosabb kérdés, hogy mikor legyen az általános korhatár és ehhez képest aki előbb vagy utóbb megy nyugdíjba, az mennyi nyugdíjat fog kapni. Eső Péter és Simonovits András vizsgálta ezt a témát. Legfőbb eredménye az, hogy mivel a hosszabb várható élettartamúak később mennek nyugdíjba, a nyugdíjszámításnál nem szabad eltekinteni a kontraszelekciótól. A dolgozat harmadik részében Eső és Simonovits eredményeit szeretném bemutatni.

A dolgozat utolsó fejezetében szeretnék felírni egy modellt, hogy hogyan lehet átváltani a tőkét életjáradékra úgy, hogy eközben figyelembe vesszük hogy antiszelekció van. Feltető, hogy optimális esetben az lesz, hogy az alacsonyabb halandóságú egyének, akik a biztosító szempontjából magasabb kockázatúak azok azonnal induló járadékot vennének, az alacsonyabb kockázatúak pedig halasztott járadékot. Itt lehet arra gondolni, hogy a nők a magasabb kockázatúak, hiszen bizonyított, hogy a nők tovább élnek. A gender direktíva miatt nem lehet különböző típusú biztosításokat ajánlani a nőknek és a férfiaknak, ezért úgy kell beárazni ezeket a termékeket, hogy az ügyfelek maguktól válasszák a nekik megfelelőt, hiszen nekik tudomásuk van a saját halandóságukról. A modell tovább fejesztése az lehetne, hogy az alacsonyabb kockázatúak csökkentett tagú járadékot vennének, hiszen nekik nem számít annyira, hogy a magasabb életkorban kevesebb a járadék, hiszen valószínűleg azt meg sem élik.

2. fejezet

Tőke átváltása életjáradékra

Ebben a részben szeretném összefoglalni Stanley Fischer életciklus modelljét, amit az életjáradékok megvásárlásával kapcsolatban fogalmazott meg. [Fischer, 1973]

Egy diszkrét idejű modellt ír le, ahol bizonytalan az élethossz. Megvizsgálja az életciklus modelljét a fogyasztásra, megtakarításokra és az életbiztosítás (életjáradék) vásárlásokra. Feltételezi, hogy csak két eszköz van, egy kötvény és egy életbiztosítási eszköz. Az élettartam T periódusra van felbontva. Az egyén maximalizálja a várható hasznosságát.

2.1. A modell és speciális feltevések

Az egyén maximum T periódusig él. Annak a valószínűsége, hogy a t-edik periódus elején meghal: $\tilde{\pi}_t^d$, $t = 2, \dots T+1$, az életben maradás valószínűsége $\tilde{\pi}_t^a$. A feltételes valószínűség azzal a feltétellel, hogy életben van $t-1$-ben: π_t^d és π_t^a. Ha életben van akkor C_t nagyságú fogyasztása van, ha meghal, akkor G_t nagyságú hagyatéka. A következő nagyságú várható hasznosságot maximalizálja:

$$E_1[U(C_1, \dots, C_T, G_2, \dots, G_{T+1})] = E\Big[\sum_{t=1}^{T}[\tilde{\pi}_t^a U_t(C_t) + \tilde{\pi}_{t+1}^d V_{t+1}(G_{t+1})]\Big] \qquad (2.1)$$

A hasznosságfüggvények a következő alakúak:

$$U_t(C_t) = \frac{C_t^{1-\beta}}{1-\beta}\frac{1}{(1+\rho)^{t-1}} \tag{2.2}$$

$$V_t(G_t) = \hat{b}_t \frac{G_t^{1-\beta}}{1-\beta} \qquad \beta > 0.$$

A cikk nagy részében egy periódusú biztosítással foglalkoznak. A biztosítási díj I_t, ha az egyén meghal a t-edik periódus végén, akkor az örököse $Q_t I_t$ nagyságú összeget kap, ha meghal akkor semmit. R_t a kötvények hozama és $R_t < Q_t$.

„Fair” biztosítás: $\pi_{t+1}^d Q_t = R_t$ és a biztosíó várható profitja 0.

A biztosítónak profitja van, ha $p\pi_{t+1}^d Q_t = R_t$, $p > 1$ - loading - a várható profit rátája $\frac{p-1}{p}$.

2.2. Kötvények és egyperiódusú biztosítások

Az utolsó periódus fogyasztási függvénye (ahol már nem vásárolnak biztosítást):

$$C_T = \frac{R_T(R_T\hat{b}_{T+1})^{-1/\beta}}{1 + R_T(R_T\hat{b}_{T+1})^{-1/\beta}} W_T = k_T W_T = \hat{\gamma}_T^{-1/\beta} W_T, \tag{2.3}$$

ahol W_T a fogyasztó vagyona a T-edik periódus elején. Ezt felhasználva megkapható az indirekt hasznossági függvény:

$$J_1[W_T] = \hat{\gamma}_T \frac{W_T^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad \hat{\gamma}_T > 1. \tag{2.4}$$

Ennek segítségével megtalálható az optimális fogyasztás és biztosítási döntések az életpálya utolsó előtti periódusában. Formálisan ezt kapták az előző részben lévő feltevésekből:

$$\begin{aligned} J_2[W_{T-1}] \quad = \quad & \max_{C_{T-1}, w_{T-1}^I} \frac{C_{T-1}^{1-\beta}}{1-\beta} + \frac{\pi_T^a \hat{\gamma}_T}{1+\rho} \frac{(W_{T-1} - C_{T-1})^{1-\beta}}{1-\beta} [(1 - w_{T-1}^I) R_{T-1}]^{1-\beta} \\ & + \pi_T^d \hat{b}_T \frac{(W_{T-1} - C_{T-1})^{1-\beta}}{1-\beta} [(1 - w_{T-1}^I) R_{T-1} + Q_{T-1} w_{T-1}^I]^{1-\beta}. \end{aligned}$$

w_{T-1}^I a $(W_{T-1} - C_{T-1})$ megtakarítás arányát jelenti, amelyik a biztosítási díj kifizetésére van szánva. A megtakarítás maradéka kötvények formájában jelenik meg.

Felírható, hogy:

$$\hat{b}_t \pi_t^d \equiv b_t \text{ és } \frac{\hat{\gamma}_t \pi_t^a}{1+\rho} = \gamma_t$$

Az első rendű feltételek egy belső maximumra:

$$C_{T-1}^{-\beta} = (W_{T-1} - C_{T-1})^{-\beta}[\gamma_T[(1-w^I)R]^{1-\beta} + b_T[R + (Q-R)w^I]^{1-\beta}] \quad (2.5)$$

$$0 = -R\gamma_T[(1-w^I)R]^{-\beta} + (Q-R)b_T[R + (Q-R)w^I]^{-\beta}] \quad (2.6)$$

C_{T-1}-re megoldva a következőt kapták:

$$C_{T-1} = \frac{\hat{k}_{T-1}}{1+\hat{k}_{T-1}} W_{T-1} \quad (2.7)$$

ahol

$$\hat{k}_{T-1} = \frac{Q_{T-1}}{(b_T Q_{T-1})^{1/\beta} + (\gamma_T Q_{T-1})^{1/\beta}\left(\frac{Q_{T-1}-R_{T-1}}{R_{T-1}}\right)^{(\beta-1)/\beta}}.$$

A fogyasztási függvény a következőképpen írható fel:

$$C_{T-1} = k_{T-1}(Q_{T-1}, R_{T-1}, \hat{\gamma}_T, \hat{\beta}_T, \pi_T^d) W_{T-1} \quad (2.8)$$

ahol k_{T-1} a fogyasztásra való hajlam a vagyonon kívül a $T-1$-edik periódusban. Tulajdonságai:

$$(1-\beta)w^I \frac{\partial k_{T-1}}{\partial Q_{T-1}} < 0, \quad (1-\beta)w^I \frac{\partial k_{T-1}}{\partial R_{T-1}} < 0, \quad \frac{\partial k_{T-1}}{\partial \hat{\gamma}_T} < 0,$$

$$\frac{\partial k_{T-1}}{\partial \hat{b}_T} < 0, \quad \frac{\partial k_{T-1}}{\partial \pi_T^d} \neq 0,$$

$k_{T-1} > k_T$-hez megkövetelhető, hogy $\hat{k}_{T-1} > \hat{k}_T$. Feltételezve, hogy $R_T = R_{T-1}$, és hogy a biztosítás aktuáriusilag „fair”:

$$\hat{k_{T-1}} > \hat{k_T} \Leftrightarrow \hat{b}_{T+1}^{1/\beta}[1 - \pi_T^a R^{(1-\beta)/\beta}(1+\rho)^{-1/\beta}] > [\pi_T^a(1+\rho)^{-1/\beta} + \pi_T^d \hat{b}_T^{1/\beta}]. \quad (2.9)$$

Érdekes a halálozás feltételes valószínűségének a hatása a fogyasztási függvényre. Az előjel nem egyértelmű, de különböző faktorokon múlik.

$$\frac{\partial k_{T-1}}{\partial \pi_T^d} \sim \frac{\hat{\gamma}_T}{(1+\rho)\hat{b}_T}[\pi_T^a R]^{1-\beta} - [\pi_T^d(Q_{T-1} - R)]^{1-\beta} \quad (2.10)$$

$\sim$ jel azt jelenti, hogy ugyanaz az előjelük. Minél inkább érvényesül az „eszem-iszom” filozófia - az alacsony $\hat{b}$ formájában - annál valószínűbb, hogy a halálozás valószínűségének növekedése növeli a jelenlegi fogyasztást. Hasonlóan, ha nagyobb súly van a származtatott hasznossági függvényen, annál valószínűbb, hogy a halálozás valószínűségének növekedése növeli a jelenlegi fogyasztást.

Azt is meg lehet mutatni, hogy ha a biztosítás aktuáriusilag fair, vagy loadingot alkalmaz, és meg van vásárolva, akkor a halálozás valószínűségének növekedése csökkenti a fogyasztást.

A biztosítás iránti kereslethez megoldották (2.6)-ot $w^I - re$:

$$w^I = \frac{R(1-\alpha)}{R+\alpha(Q-R)} \quad \text{ahol} \quad \alpha = \Big(\frac{Q-R}{R}\frac{b}{\gamma}\Big)^{-1/\beta} \tag{2.11}$$

$$w^I > 0 \Leftrightarrow R\Big(\frac{\hat{\gamma}\pi^a}{1+\rho} + \hat{b}\pi^d\Big) < Q\hat{b}\pi^d \tag{2.12}$$

Ez azt jelenti, hogy egy kockázatos eszközt csak akkor vesznek meg, ha az átlagos hozama meghaladja a biztos eszköz hozamát, amíg figyelembe veszik a hasznossági függvények különbözőségét. A jobb oldal a hagyaték függvénnyel súlyozott biztosítás várható hozama, a bal pedig a totális hasznossági függvénnyel súlyozott kötvények hozama.

Átírva (2.12)-t úgy, hogy a biztosítás aktuáriusilag fair, akkor azt kapták, hogy $w^I > 0$-ből következik $\hat{b} > \frac{\hat{\gamma}}{1+\rho}$. Mivel $\gamma > 1$, nem vesznek biztosítást, amíg a hagyaték függvény súlyozása nagyobb mint a diszkontfaktor ellentettje. Vagyis egy kötvény akkor is fizet, ha az egyén halott vagy élő, viszont egy biztosítási eszköz csak akkor, ha halott. Ha a biztosítási eszköz várható hozama egyenlő a kötvényével, akkor senki nem fog biztosítási eszközt venni.

A biztosítás keresleti függvénynek a következő tulajdonságai vannak:

$$I_t = w_t^I(Q_t, R_t, \hat{\gamma}_{t+1}, \hat{b}_{t+1}, \pi_{t+1}^d)(1-k_t)W_t \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial w_t^I}{\partial Q_t} \neq 0, \frac{\partial w_t^I}{\partial R_t} \neq 0, \frac{\partial w_t^I}{\partial \hat{\gamma}_{t+1}} < 0, \frac{\partial w_t^I}{\partial \hat{b}_{t+1}} > 0, \frac{\partial w_t^I}{\partial \pi_{t+1}^d} > 0,$$

$$\frac{\hat{\gamma}_{t+1}}{w_t}\frac{\partial w_t^I}{\partial \hat{\gamma}_{t+1}} = -\frac{\hat{b}_{t+1}}{w_t}\frac{\partial w_t^I}{\partial \hat{b}_{t+1}}$$

Ennek a keresleti függvénynek meglepő tulajdonsága, hogy a biztosítás megtérülési rátájának (Q_t) növekedésenek különféle hatásai lehetnek a biztosítás megvásárlására. De igaz, hogy $\frac{\partial(Qw^I)}{\partial Q} > 0$ vagy a kereslet rugalmassága mindig meghaladja -1-et. Így mikor a biztosítás megtérülési rátája növekszik, az egyén úgy rendezi át a portfolióját, hogy a biztosítási kifizetés a halála pillanatában nagyobb lesz.

A kötvény keresleti függvény, ha tudjuk, hogy: $w_t^B = 1 - w_t^I$.

$$B_t = w_t^B(Q_t, R_t, \hat{\gamma}_{t+1}, \hat{b}_{t+1}, \pi_{t+1}^d)(1 - k_t)W_t \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial w_t^B}{\partial Q_t} \neq 0, \frac{\partial w_I^B}{\partial R_t} \neq 0, \frac{\partial w_t^B}{\partial \hat{\gamma}_{t+1}} > 0, \frac{\partial w_t^B}{\partial \hat{b}_{t+1}} < 0, \frac{\partial w_t^B}{\partial \pi_{t+1}^d} < 0.$$

A következő lépés az, hogy megoldották k_t-re a rekurziós összefüggéséket, a keresleti függvény többi argumentuma exogén.

$$C_t = \left(\frac{\hat{k}_t}{1 + \hat{k}_t}\right) W_t = k_t W_t \tag{2.15}$$

ahol

$$k_t = \hat{\gamma}_t^{-1/\beta} = \frac{1}{\frac{1}{k_T}[\prod_{i=t}^{T-1} \xi_i] + \sum_{j=t}^{T-1} \eta_j \prod_{i=t}^{j-1} \xi_i}, \quad t = 1, \ldots, T-1 \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \xi_t &= \left(\frac{\pi_{t+1}^a}{1+\rho}\right)^{1/\beta} \left(\frac{Q_t - R_t}{Q_t R_t}\right)^{(\beta-1)/\beta}, \\ \eta_t &= 1 + (\hat{b}_{t+1}\pi_{t+1}^d)^{1/\beta} Q_t^{(1-\beta)/\beta}. \end{aligned}$$

A biztosítás keresleti függvény a $T-1$ periódusig:

$$w_t^I = \frac{R_t(1 - \alpha_t)}{R_t + \alpha_t(Q_t - R_t)} \tag{2.17}$$

A biztosítás vásárlásának feltétele, adott $Q_t > R_t$ mellett, $\alpha_t < 1$.

A modellt szimulálták numerikusan a szerzők. A szimulációból az jött ki, hogy az egyén soha nem vesz biztosítást, de mindig próbálja eladni és mindig több biztosítást próbál eladni, minél öregebb. A fogyasztásra való hajlam monotonan nő. A biztosítás eladások nagyobbak azoknál a futásoknál, ahol nagyobb a loading. Ezekből az eredményekből az következik, hogy ha nincs tőke, akkor a családfenntartó halálának nincs hatása a bevétel csökkenésére. Valószínű, hogy a potenciális bevételcsökkenés a legfőbb faktor az életbiztosítás vásárlásánál.

2.3. Hosszú távú biztosítás és kockázatos eszköz

A_t a méltányosság értéke, amit a t-edik periódusban vettek, X_{t+1} a méltányosság véletlen hozama, w_t^A a portfolió megosztása, amelyik méltányosságból áll, $Z_t = X_t - R_t$. Az utolsó előtti periódus származtatott hasznossági függvénye:

$$J_1[W_T] = \left(\frac{\hat{k}_t}{1+\hat{k}_t}\right)^{-\beta} \frac{W_T^{1-\beta}}{1-\beta} = \hat{\gamma}_T \frac{W_T^{1-\beta}}{1-\beta} \tag{2.18}$$

$$\hat{k}_T^{-\beta} = b_{T+1} E[(w_T^A X + w_T^B R)^{1-\beta}]. \tag{2.19}$$

Minden korábbi periódusban az elsőrendű feltételei a maximumnak:

$$\begin{aligned} 0 &= C_t^{-\beta} - (W_t - C_t)^{-\beta}\{\gamma_{t+1} E[(w_t^A Z + (1-w_t^I)R)^{1-\beta}] && (2.20) \\ &\quad + b_{t+1} E[(w_t^A Z + R + (Q_t - R)w_t^I)^{1-\beta}]\} \\ 0 &= \gamma_{t+1} E[(w_t^A Z + (1-w_t^I)R)^{-\beta} Z] && (2.21) \\ &\quad + b_{t+1} E[(w_t^A Z + R + (Q_t - R)w_t^{I-\beta})Z] \\ 0 &= -R\gamma_{t+1} E[(w_t^A Z + (1-w_t^I)R)^{-\beta}] && (2.22) \\ &\quad + (Q_t - R) b_{t+1} E[(w_t^A Z + R + (Q_t - R)w_t^I)^{-\beta}] \end{aligned}$$

Ebben a modellben, ahol két kockázatos eszköz van, méltányosságot akkor és csak akkor tartanak, ha az átlagos hozama nagyobb mint a kamatláb.

A kockázatos eszköz keresleti függvénye:

$$A_{T-1} = w_{T-1}^A(Q_{T-1}, R_{T-1}, \hat{\gamma}_T, \hat{b}_T, \pi_T^d, f(Z_T))(1 - k_{T-1})W_{T-1} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial w_{T-1}^A}{\partial Q_{T-1}} \neq 0, \frac{\partial w_{T-1}^A}{\partial R_{T-1}} \neq 0, \frac{\partial w_{T-1}^A}{\partial \hat{b}_T} < 0, \frac{\partial w_{T-1}^A}{\partial \hat{\gamma}_T} > 0, \frac{\partial w_{T-1}^A}{\partial \pi_T^d} < 0.$$

2.4. Munkajövedelem

Feltették, hogy ha az egyén él a t-edik periódus elején, akkor a jövedeleme Y_t, ha meghal a periódus elején, akkor nincs jövedelem. Az utolsó előtti periódusban:

$$\begin{aligned} C_{T-1} &= k_{T-1}W_{T-1} + \frac{V_{T-1}(Q_{T-1} - R_{T-1})}{\alpha_{T-1}(Q_{T-1} - R_{T-1}) + R_{T-1}(V_{T-1}Q_{T-1} + 1)} Y_T && (2.24) \\ &= k_{T-1}W_{T-1} + \frac{V_{T-1}(Q_{T-1} - R_{T-1})}{g_{T-1}} Y_T \end{aligned}$$

ahol $V_{T-1} = (Q_{T-1} b_T)^{-1/\beta}$. Ez átírható a következő alakba:

$$C_{T-1} = k_{T-1} W_{T-1} + k_{T-1} \left(\frac{Q_{T-1} - R_{T-1}}{Q_{T-1} R_{T-1}} \right) Y_T. \tag{2.25}$$

Fair biztosítással:

$$C_{T-1} = k_{T-1} \Big[W_{T-1} + \frac{\pi_T^a Y_T}{R_{T-1}} \Big]. \tag{2.26}$$

A biztosítás iránti keresleti függvény:

$$\begin{aligned} I_{T-1} &= \frac{1}{g_{T-1}} \Big[(1 - \alpha_{T-1}) R_{T-1} + (1 + V_{T-1} R_{T-1}) \frac{Y_T}{W_{T-1}} \Big] W_{T-1} && (2.27) \\ &= w_{T-1}^I (1 - k_{T-1}) W_{T-1} + \frac{1 + V_{T-1} R_{T-1}}{g_{T-1}} Y_T && (2.28) \end{aligned}$$

A biztosítási kereslet a következő periódus munkajövedelmének növekvő függvénye. Annál valószínűbb, hogy biztosítást veszünk, minél makasabb a jövőbeli bevétel és minél nagyobb a hagyaték függvény súlya.

$$I_{T-1} = w_{T-1}^I (1 - k_{T-1}) W_{T-1} + y_{T-1}^1 (Q_{T-1}, R_{T-1}, \hat{\gamma}_T, \hat{b}_T, \pi_T^d) Y_T \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial y_{T-1}^1}{\partial Q_{T-1}} \neq 0, \frac{\partial y_{T-1}^1}{\partial R_{T-1}} \neq 0, \frac{\partial y_{T-1}^1}{\partial \hat{b}_T} > 0, \frac{\partial y_{T-1}^1}{\partial \hat{\gamma}_T} < 0, \frac{\partial y_{T-1}^1}{\partial \pi_T^d} > 0.$$

A kötvények iránti kereslet a jelenlegi vagyon növekvő függvénye és a várható bevétel csökkenő függvénye:

$$\begin{aligned} B_{T-1} &= \frac{1}{g_{T-1}} [\alpha_{T-1} Q_{T-1} W_{T-1} - (1 + V_{T-1} Q_{T-1}) Y_T] && (2.30) \\ &= w_{T-1}^B (1 - k_{T-1}) W_{T-1} - y_{T-1}^B Y_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2[W_{T-1}, Y_T] &= \frac{k_{T-1}^{-\beta}}{1-\beta} \left[W_{T-1} + \left(\frac{Q_{T-1} - R_{T-1}}{Q_{T-1} R_{T-1}} \right) Y_T \right]^{1-\beta} && (2.31) \\ &= \frac{k_{T-1}^{-\beta}}{1-\beta} [W_{T-1} + p_T Y_T]^{1-\beta} \end{aligned}$$

A következő feltételekkel:

$$\frac{\partial J_2}{\partial W_{T-1}} = U'(C_{T-1}) \text{ és } \frac{\partial J_2}{\partial Y_T} = U'(C_{T-1}) \frac{\partial C_{T-1}}{\partial Y_T}.$$

A korábbi periódusok keresleti függvényei ugyanazok, mint az előbb, úgy hogy $T-1$ helyett t van, és $\frac{Q_t - R_t}{Q_t R_t} = P_t$, kivéve, hogy Y_t helyett $Y_{t+1} + \sum_{j=2}^{T+1} (Y_{t+j} \prod_{i=1}^{j-1} P_{t+i})$ van, ami a jövőbeli bevétel jelenértéke és $k_t = \gamma_t^{-1/\beta}$.

A fair biztosítás speciális esetében a keresleti függvények a korábbi periódusokban hasonlóak az utolsó előtti perióduséhoz, de a bevételi változó egy járadék bevétel, ami nem a biztos rátával van diszkontálva, hanem egy magasabbon: π^a_{t+1}/R_t.

Ezt a modellt is tesztelték numerikusan a szerzők.

Az összes megoldásnak vannak olyan szakaszai, amikor az egyén a saját életén akar biztosítást eladni. Felmerül eközben a kérdés, hogy milyen intézményi korlátok előzik meg ezt. A biztosító szempontjából a legnagyobb nehézség, hogy amikor az egyén saját életén ad el biztosítást, akkor kap kifizetéseket amíg életben van és a biztosítónak a kifizetéseit a vagyonából kell összegyűjtenie. Csőd estén a biztosító nem szüntetheti meg a szerződést, csak akkor ha az egyén elmulasztja a díjfizetést. Az egyénnek soha nincs negatív biztosítási birtoka, de a biztosítási fedezete leesik idős korban, és idős korban olyan kifeztéseket kap a biztosítótól, amilyet akkor kapna, ha életbiztosítást adna el. Természetesen, ezekért a járadékokért korábban már fizetett. Mivel a vagyonból való kifezétesek gyűjtésének vannak lehetséges nehézségei, ez lehet a második legjobb megoldás az élettartam biztositási birtokok elrendezésére.

Az életbiztosítás vásárlásának legfőbb oka a humán tőke létezése.

2.5. Két periódusos modell

Gyakorlatban az életbiztosítást vásárló egyén sokféle típusú időszakos biztosítást vehet és nagy választéka van megtakarítási terveknek. A szerzők két periódusú modellt figyeltek meg.

Az egyén minden t peridódus eljén M díjért vehet biztosítást, és $t+1$-ben is M-ért, ha életben van, ha meghal ennek a periódusnak az elején, akkor mM a kifizetés, és ugyanennyit kap, ha a $t+2$-ik periódus elején hal meg. Ahogy korábban is, egy periódusú szerződést I_t díjért tud vásárolni, amelyik Q_tI_t összeget fizet ki, ha meghal a $t+1$-edik periódus elején és hasonlóan a $t+1$-edik periódusban. Még tud venni a t-edik periódusban kötvényt, aminek a kifizetése R_t a $t+1$-ben, függetlenül attól, hogy életben van, vagy meghalt.

$$
[\mathrm{Z}] = \begin{array}{lcccc}
 & B_t & M_t & I_t & I_{t+1} \\
t & -1 & -1 & -1 & 0 \\
t+1-\text{élő} & R_t & -1 & 0 & -1 \\
t+1-\text{halott} & R_t & m & Q_t & 0 \\
t+2-\text{halott} & 0 & m & 0 & Q_{t+1}
\end{array}
$$

Ez a mátrix mutatja egy egységnyi pénz hozamát mindegyik eszközből mindegyik állapotra. Ha ez a mátrix szinguláris akkor létezik arbitrázs.

$A = [B_t \quad M_t \quad I_t \quad I_{t+1}]^T$, ha Z szinguláris, ezért $ZA = e_1$, ahol $e_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$-nak van megoldása. Ebből következik, hogy ha az egyénnek olyan portfoliója van, hogy nincs neki nettó kifizetése az utolsó három periódusban, akkor ő kifizetést kap a t-edik periódusban.

Z szingularitásának feltétele:

$$
(Q_t - m)Q_{t+1} = \frac{Q_t - R_t}{R_t}(m - Q_{t+1}). \tag{2.32}
$$

Ez a feltétel akkor valósul meg, ha mindkét típusú biztosítás fair.

A bizonytalan élethossz és életjáradék kapcsolatával foglalkozó témakört vizsgálta Yaari is folytonos modellben. A fogyasztás és megtakarítás optimális útjait két differenciálegyenlettel jellemezte, de nem foglalkozott részleteiben a biztosítás és fogyasztás iránti kereslettel. [Yaari, 1965]

Mi van ha a biztosítottak csoportja nem homogén, hanem különböző kockázatúak? Ekkor jelenik meg az antiszelekció. A dolgozat legfőbb célja az, hogy egyfajta modellt mutasson be, ami a tőke átváltása életjáradékra témakörrel foglalkozik antiszelekció esetén. Ezért a következő fejezetben röviden bemutatom az antiszelekcióról ismert állításokat.

3. fejezet

Antiszelekciós modellek

Ebben a fejezetben az információs asszimmetria hatására történő ellentétes kiválasztódás modelljeit vizsgálom meg.

3.1. A Rothschild és Stiglitz modell

Az antiszelekciós modell alap modelljét Rotschild és Stiglitz írták le. Ez a modell alapul és kiindulópontként szolgál számos további modellezésnek.[Rothschild-Stiglitz, 1976]

3.1.1. Tökéletesen versenyző biztosítási piac

Tekintsünk egy kétszereplős leegyszerűsített modellt, ahol a szereplők a döntéshozó (azaz biztosított) és a biztosító. A döntéshozó p valószínűséggel kárt szenved, $1-p$ valószínűséggel pedig nem szenved el kárt. Ha kárt szenved el, akkor a kár nagysága L. A biztosító egy (π, I) biztosítási szerződést ajánl fel neki: a döntéshozó π nagyságú biztosítási díjat fizet be, kár esetén pedig a biztosító I nagyságú biztosítási összeget fizet neki. A döntéshozó kezdeti vagyona w, az u függvény jelöli a döntéshozó vagyon iránti hasznosságfüggvényét.

Ebben a modellben a döntéshozó várható hasznossága:

$$(1-p)u(w-\pi)+pu(w-\pi-l+I). \tag{3.1}$$

Itt a döntéshozónak nincs lehetősége arányos biztosításra, vagy teljes biztosítást választ, vagy nem köt biztosítást.

Tökéletes biztosítási piacot tételezünk fel, és a biztosító kockázatsemleges, ezért a biztosító várható profitja 0, azaz:

$$\pi = pI \tag{3.2}$$

Ebben az esetben a döntéshozó a teljes biztosítást preferálja, azaz:

$$I = L \tag{3.3}$$

Elemezzük a helyzetet mikroökonómiailag. A fogyasztó kiinduló helyzetben a $(w, w-L)$ pontban van. A fogyaszó költségvetési egyenesének meredeksége $\frac{1-p}{p}$, azaz ha egységnyi vagyont feláldoz a kedvező világállapotban, akkor $\frac{1-p}{p}$ egységnyi vagyonra tehet szert a kedvező világállapot esetén.

Nézzük meg most a helyettesítési határrátát. Egy (w_1, w_2) vagyoni állapotban a helyettesítési határráta:

$$MRS_{w_1,w_2} = \frac{\frac{\partial Eu}{\partial w_1}}{\frac{\partial Eu}{\partial w_2}} = \frac{(1-p)u'(w_1)}{pu'(w_2)}, \tag{3.4}$$

ahol Eu a fogyasztó várható hasznossága a (w_1, w_2) pontban. A helyettesítési határráta egy közömbösségi görbe mentén:

$$(1-p)u(w_1)+pu[w_2(w_1)] = \bar{u} \tag{3.5}$$

$$(1-p)u'(w_1)+pu'(w_2)\frac{dw_2}{dw_1} = 0, \tag{3.6}$$

ahol értelemszerűen $\frac{dw_2}{dw_1}$ a helyettesítési határráta -1-szerese, tehát a helyettesítési határráta mindig pozitív,

$$(1-p)u''(w_1)+pu''(w_2)\Big(\frac{dw_2}{dw_1}\Big)^2+pu'(w_2)\Big(\frac{dw_2}{dw_1}\Big)' = 0, \tag{3.7}$$

amiből

$$\Big(\frac{dw_2}{dw_1}\Big)' = \frac{(1-p)u''(w_1)+pu''(w_2)\big(\frac{dw_2}{dw_1}\big)^2}{-pu'(w_2)}. \tag{3.8}$$

Könnyen láthatató, hogy ez pozitív kockázatkerülő döntéshozó esetén, ami azt jelenti, hogy a helyettesítési határráta a közömbösségi görbe mellett csökken (ha w_1 növekszik), tehát a közömbösségi görbék konvexek. Tekintsük költségvetési korlátnak a w és L pontok közötti részt. Ezen pontok mindegyikében látható, hogy a ponton átmenő közömbösségi görbe meredeksége kisebb, mint a költségvetési korlát meredeksége, tehát a költségvetési korláton a diagonális egyenes felé szeretne elmozdulni a döntéshozó, és mivel a biztosítók számára ez jövedelmező, meg is tudja tenni. Egészen addig, míg a el nem ér az L pontba, ahol a közömbösségi görbe meredeksége megegyezik a költségvetési korlát meredekségével.

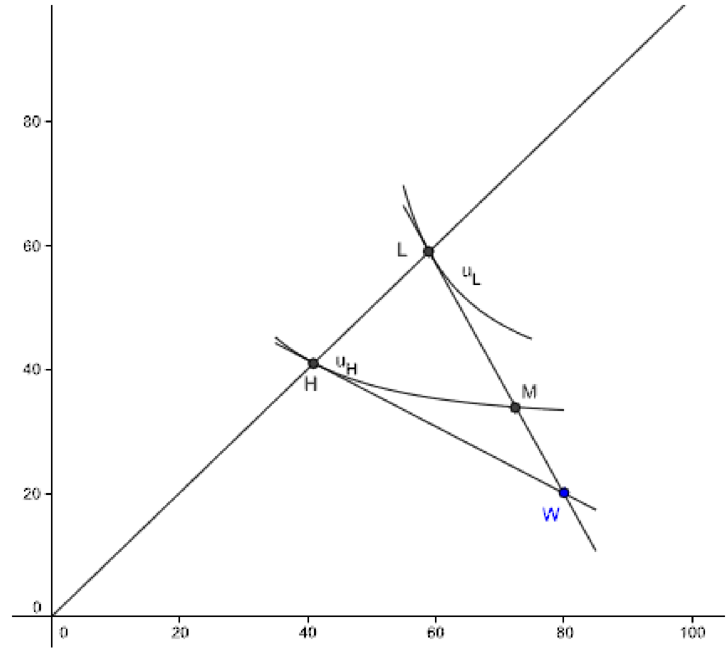
Ezen a ponton bevezetjük, hogy a döntéshozók csoportja nem homogén, azaz a döntéshozókon belül két csoportot nézünk, itt lép életbe az antiszelekció. Legyen ez a két csoport az alacsony kárbekövetkezési valószínűségűek, és a magas kárbekövetkezési valószínűségűek. Ezek a valószínűségek legyenek rendre: p^L és p^H. Ebből következik, hogy: $p^L < p < p^H$. A magas kockázatú döntéshozók aránya λ. Ekkor:

$$\lambda p^H + (1-\lambda)p^L = p \tag{3.9}$$

Ebben az esetben az alacsony kockázatú döntéshozók költségvetési egyenese meredekebb, mint a magasabb kockázatú döntéshozóké. A 3.1. ábrán A wL szakasz reprezentálja az alacsony kockázatú döntéshozók költségvetési korlátját, a wH szakasz pedig a magas kockázatúakét. Amennyiben a biztosító az alacsony kockázatú ügyfeleket meg tudja különböztetni a magas kockázatú ügyfelektől, akkor mindkét típus teljes biztosítást kap: az alacsony kockázatúak esetében ez a pont az L pont lesz, a magas kockázatúak esetében pedig a w pont.

Amennyiben a biztosító nem mondhatja meg, hogy melyik ügyfél milyen biztosítást kapjon, mivel nem tudja, hogy milyen kockázatú a biztosított, akkor ez az eset nem megvalósítható, hiszen a magas kockázatúak is az L szerződést választják. Olyan szerződésmenüt kialakítani, ahol minden típus a neki felkínált szerződmenüt választja, azaz teljesülnek az ösztönzési korlátok. Jelölje $(w_1^{\widehat{H}}, w_2^{\widehat{H}})$ a magas kockázatúaknak, $(w_1^{\widehat{L}}, w_2^{\widehat{L}})$ pedig az alacsony kockázatúaknak felajánlott szerződést. Tehát a létrejövő egyensúlynak a következő korlátokat kell teljesíteni: Költségvetési korlát:

$$\lambda[(1-p^H)w_1^{\widehat{H}} + p^H w_2^{\widehat{H}}] + (1-\lambda)[(1-p^L)w_1^{\widehat{L}} + p^L w_2^{\widehat{L}}] \geq pw_1 + (1-pw_2) \tag{3.10}$$



3.1. ábra. Költségvetési korlátok antiszelekció esetén

Ösztönzési korlátok:

$$(1-p^L)u(w_1^{\widehat{L}}) + p^L u(w_2^{\widehat{L}}) \geq (1-p^L)u(w_1^{\widehat{H}}) + p^L u(w_2^{\widehat{H}}), \tag{3.11}$$

és

$$(1-p^H)u(w_1^{\widehat{H}}) + p^H u(w_2^{\widehat{H}}) \geq (1-p^H)u(w_1^{\widehat{L}}) + p^H u(w_2^{\widehat{L}}). \tag{3.12}$$

Az egyensúlyban nem lehet kereszetfinanszírozás, azaz nem fordulhat elő, hogy egy szerződésmenü esetében az egyik típus többet fizet, mint amennyit a kockázata indokolna a másik pedig kevesebbet. Hogy miért nem fordulhat elő, az nagyon egyszerű: tekintsük azt a típust aki többet fizet. Ez azt jelenti, hogy ezen felkínált szerződés kis környezetének minden pontja profitábilis a (konkurens) biztosítónak. Ez a teljes környezet nem lehet preferált a másik típus számára: ebben az esetben a többet fizető számára felkínált szerződés szigorúan preferált lenne, és akkor nyílván azt választaná. Ha viszont a két típus ugyanazt a szerződést választja, akkor nem lehet a teljes környezet preferált. Ha a teljes környezet diszpreferált a másik típus számára, akkor a vizsgált típusnak lehet olcsóbban adni a szerződést. Mivel a biztosítók részéről tökéletes versenyt tételezünk fel, ezért lesz olyan biztosító, aki ezt meg fogja lépni, pozitív profitra fog szert tenni, a másik biztosító pedig ott marad a rossz szerződésállománnyal.

Egyetlen eset marad csak hátra: a másik típus közömbösségi görbéje átmegy a a vizsgált típus számára felkínált szerződésen. Ebben a helyzetben viszont megállapíthatjuk, hogy a helyettesítési határráták különböznek, tehát a környezetnek kell lennie olyan pontjának, ami csak a vizsgált típus számára vonzó, a másik számára nem vonzó. Ezt a szerződést kínálva viszont a jó ügyfelek leválogathatók, pozitív profit mellett. Tehát a költségvetési korlátok:

$$(1-p^H)w_1^{\widehat{H}} + p^H w_2^{\widehat{H}} \leq (1-p^H)w_1 + p^H w_2, \tag{3.13}$$

és

$$(1-p^L)w_1^{\widehat{L}} + p^L w_2^{\widehat{L}} \leq (1-p^L)w_1 + p^L w_2, \tag{3.14}$$

Megállapítható, hogy az ösztönzési korlátok közül pontosan csak az egyik fog egyenlőség formájában teljesülni. Nettó díjon a diagonális felé elmozdulni mindkét típusnak megéri, és ez a biztosítónak is jövedelmező. Ezt teljesen elérni viszont nem tudjuk, mert akkor a magas kockázatú típusra felírt ösztönzési korlát sérülne. Nézzük a másik esetet, amikor mindkét ösztönzési korlát egyenlőség formájában teljesül. Ekkor az ösztönzési korlátok átrendezéséből kapjuk, hogy:

$$-\frac{p^H}{1-p^H} = -\frac{p^L}{1-p^L}, \tag{3.15}$$

amiből következik, hogy $p^H = p^L$, ez pedig ellentmondás. Egyetlen kivétel, ha $w^{\widehat{H}} = w^{\widehat{L}}$.

Tegyük fel, hogy a magas kockázatú fél szigorúan preferálja a számára felkínált szerződést, az alacsony kockázatú pedig közömbös a kettő között. Tekintsük először azt az esetet, amikor a magas kockázatú fél számára felkínált szerződés a diagonálisnak a kiinduló állapot felőli oldalán van. Ekkor a magas kockázatú típus esetén nettó díjon közeledjünk a diagonális felé. Ezt az új szerződést vagy preferálni fogja az alacsony kockázatú, ami a biztosító számára profitot eredményez, vagy nem, akkor viszont az új szerződésmenü jobb, mert a magas kockázatú jobban fogja szeretni. Nézzük most azt az esetet, amikor a diagonális túlsó oldalán vagyunk. Ekkor megint a magas kockázatú fél számára felkínált szerződésből közeledjünk a diagonális felé, de most az alacsony kockázati típusra vonatkozó nettó díj mentén. Ez a közeledés vagy preferált lesz a magas kockázatú számára, ami megint csak pozitív profitot jelent a biztosító számára, vagy nem, ekkor viszont egy jobb szerződésmenü kínálható.

Tehát összességében a magas kockázatú fél részére felírt korlát fog egyenlőség formájában teljesülni, az alacsony kockázatú fél számára felírt pedig egyenlőtlenségként.

Következő megjegyzésként megállapíthatjuk, hogy a magas kockázatú fél számára felkínált szerződés a diagonálison lesz. A diagonális felé (nettó díjon) való elmozdulás mindig kedvező, és ebben nem is korlátoz semmi.

Innen két dolog történhet:

1. a piaci verseny miatt 0 lesz a profit, vagyis a magas kockázatú fél teljes biztosítást kap nettó áron, az alacsony kockázatú fél számára felkínált szerződést a magas kockázatú fél közömbösségi görbéje metszi ki az alacsony kockázatú fél költségvetési egyenesébõl.
2. a piacon nem alakul ki egyensúly. A (H, M) szerződésmenüt lehet egy keresztülfinanszírozott szerződésmenüvel dominálni, de ez nem lehet optimum.

Tekintsük a Lagrange feladatot. Egyensúly esetén a magas kockázatú fél a H pontba kerül, azaz a hasznossága:

$$u[(1-p^H)w_1 + p^H w_2] = u(w - p^H L). \tag{3.16}$$

Kérdés, hogy ennél nagyobb hasznosság elérhető-e számára

$$\max_{\pi^L, I^L, \pi^H} (1-p^L)u(w-\pi^L) + p^L u(w - \pi^L - L + I^L) \tag{3.17}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned}
&\lambda(\pi^H - p^H L) + (1-\lambda)(\pi^L - p^L I^L) = 0,\\
&u(w-\pi^H) = (1-p^H)u(w-\pi^L) + p^H u(w-\pi^L - L + I^L)\\
&u(w-\pi^H) \geq u(w - \pi^H L)
\end{aligned}$$

Ha a harmadik korlát egyenlőség formájában teljesül, akkor létrejön az egyensúly. A Lagrange szorzók legyenek rendre μ_1, μ_2 és μ_3 (a harmadik korlátot $u(w - p^H L) - u(w - \pi^H) \leq 0$ formában írjuk fel).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi^L} = &-(1-p^L)u'(w-\pi^L) - p^L u'(w-\pi^L - L + I^L)\\
&-\mu_1(1-\lambda)\\
&-\mu_2[(1-p^H)u'(w-\pi^L) + p^H u'(w - \pi^L - L + I^L)] = 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I^L} =& p^L u'(w - \pi^L - L + I^L) \\ &+ \mu_1(1-\lambda)p^L \\ &+ \mu_2[p^H u'(w - \pi^L - L + I^L)] = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi^H} = -\mu_1\lambda + \mu_2 u'(w - \pi^H). \tag{3.20}$$

A harmadik korlát vagy egyenlőség formájában teljesül, és akkor $\pi^H < p^H L$ vagy pozitív a derivált és $\pi^H = p^H L$. Ha a második korlátot átrendezzük:

$$u'(w - \pi^L - L + I^L)\Big(1 + \mu_2 \frac{p^H}{p^L}\Big) = -\mu_1(1-\lambda) \tag{3.21}$$

Ha összeadjuk a π^L és I^L szerinti parciális deriváltat, akkor átrendezés után ezt kapjuk:

$$u'(w - \pi^L)\Big(1 + \mu_2 \frac{1-p^H}{1-p^L}\Big) = -\mu_1(1-\lambda) \tag{3.22}$$

Az ösztönzési korlátból megkapjuk, hogy $I^L < L$. Ekkor viszont $u'(w-\pi^L-L+I^L) > u'(w-\pi^L)$. Másik oldalról $\frac{p^H}{p^L}(1 >)\frac{1-p^H}{1-p^L}$. Tehát az utolsó egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\mu_2 < 0$. Az is látszik, hogy a két egyenes μ_2-ben lineáris. Az első egyenesnek $\mu_2 = -\frac{p^L}{p^H}$-ban van a nullhelye, de ebben a pontban a második egyenlet bal oldala pozitív, hiszen: $1 - \frac{p^L}{p^H}\frac{1-p^H}{1-p^L}$ 1-nél kisebb a kárbekövetkezési valószínűségekre tett feltevéseink miatt. Tehat a $\mu_2 = 0$ pontban mindkét egyenlet bal oldala pozitív, és az első egyenlet bal oldala a nagyobb. A $\mu_2 = -\frac{p^L}{p^H}$ pontban az első egyenlet bal oldala 0, a második egyenlet bal oldala pozitív. Ebből következik, hogy ha az első és második egyenlet bal oldala megegyezik, akkor mindkettőnek pozitívnak kell lenni, ami azt is jelenti, hogy μ_1 negatív. A (3.21) és (3.22) egyenletekből megállapítható μ_2 értéke is:

$$\mu_2 = -\frac{u'(w - \pi^L - L + I^L) - u'(w - \pi^L)}{\frac{p^H}{p^L}u'(w - \pi^L - L + I^L) - \frac{1-p^H}{1-p^L}u'(w - \pi^L)} \tag{3.23}$$

Ha a harmadik korlátot vizsgáljuk, akkor az ösztönzési korlátból látjuk, hogy $w - \pi^L < w - \pi^H < w - \pi^L - L + I^H$. A (3.22) korlátból fejezzük ki μ_1 értékét, és helyettesítsük be a π^H szerinti deriváltba. Tegyük fel, hogy a korlát egyenlőség formájában teljesül, ami azt jelenti, hogy a deriváltnak pozitívnak kell lennie.

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}u'(w - \pi^L)\left(1 + \mu_2 \frac{1-p^H}{1-p^L}\right) + \mu_2 u'(w - \pi^H) > 0 \tag{3.24}$$

Átrendezés után:

$$\frac{1-p^H}{1-p^L} + \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{u'(w-\pi^H)}{u'(w-\pi^L)} < -\frac{1}{\mu_2} \tag{3.25}$$

Ha μ_2-t behelyettesítjük a (3.25)-be és beszorozzuk $p^L(1-p^L)$-lel ezt kapjuk átrendezés után:

$$(1-p^H)p^L + \frac{(1-\lambda)p^L(1-p^L)}{\lambda}\frac{u'(w-\pi^H)}{u'(w-\pi^L)} < \frac{p^H(1-p^L)u'(w-\pi^L-L+I^L) - p^L(1-p^H)u'(w-\pi^L)}{u'(w-\pi^L-L+I^L) - u'(w-\pi^L)} \tag{3.26}$$

További átalakítások után:

$$(1-p^H)p^L + \frac{(1-\lambda)p^L(1-p^L)}{\lambda}\frac{u'(w-\pi^H)}{u'(w-\pi^L)} < -p^Hp^L + \frac{p^Hu'(w-\pi^L-L+I^L) - p^Lu'(w-\pi^L)}{u'(w-\pi^L-L+I^L) - u'(w-\pi^L)} \tag{3.27}$$

Folytatva az átalakításokat:

$$p^L + \frac{(1-\lambda)p^L(1-p^L)}{\lambda}\frac{u'(w-\pi^H)}{u'(w-\pi^L)} < p^L + \frac{(p^H-p^L)u'(w-\pi^L-L+I^L)}{u'(w-\pi^L-L+I^L) - u'(w-\pi^L)} \tag{3.28}$$

Amiből:

$$\frac{(1-\lambda)p^L(1-p^L)}{\lambda(p^H-p^L)} < \frac{u'(w-\pi^L)u'(w-\pi^L-L+I^L)}{u'(w-\pi^H)[u'(w-\pi^L-L+I^L) - u'(w-\pi^L)]}, \tag{3.29}$$

másképpen felírva:

$$\frac{\lambda(p^H-p^L)}{(1-\lambda)p^L(1-p^L)} > \frac{u'(w-\pi^H)[u'(w-\pi^L-L+I^L) - u'(w-\pi^L)]}{u'(w-\pi^L)u'(w-\pi^L-L+I^L)}, \tag{3.30}$$

Ha a korlát egyenlőtlenség formájában teljesül, akkor $\pi^H = p^HL$ tehát konstansként viselkedik. A költségvetési korlátból tudjuk, hogy $\pi^L = p^LI^L$. Beírva ezt az összefüggést az ösztönzési korlátba kapjuk, hogy

$$u(w-p^HL) = (1-p^H)u(w-p^LL) + p^Hu(w-p^LI^L-L+I^L) \tag{3.31}$$

Itt már csak I^L az egyetlen függő változó, amely így egyértelműen meghatározható. Tehát (3.30) összefüggés jobb oldala konstans. Amennyiben λ - val tartunk a 0-ba, ez egyenlőtlenség előbb-utóbb nem teljesülhet. Tehát biztosan létezik olyan eset, amikor $\pi^H < p^HL$, tehát az alacsony kockázatú ügyfélnek megéri támogatni a magas kockázatú ügyfelet, hogy nagyobb hasznosságszintre kerüljön.

Másik oldalról tegyük fel, hogy a 3. korlát egyenlőség formájában teljesül. Ekkor hasonlóan mint az előbbiekben:

$$\frac{\lambda(p^H - p^L)}{(1-\lambda)p^L(1-p^L)} = \frac{u'(w-\pi^H)[u'(w-\pi^L-L+I^L) - u'(w-\pi^L)]}{u'(w-\pi^L)u'(w-\pi^L-L+I^L)}, \tag{3.32}$$

könnyen látható, hogy (3.32) kifejezés jobb oldala nem lehet nagyobb, mint

$$\frac{u'(w-L)[u'(w-L) - u'(w)]}{u'(w)u'(w)}, \tag{3.33}$$

így (3.32) nyilvánvalóan nem teljesülhet, ha λ kellően nagy.

Ezekből megállapíthatjuk, hogy ha λ kellően nagy, akkor biztos, hogy létrejön az egyensúly a piacon, ha λ kellően kicsi, akkor viszont egy keresztfinanszírozott szerződésmenü az optimális.

3.2. Antiszelekció a járadékok piacán

Egy átlagos ügyfél járadék kifizetéséből származó várható jelenérték alacsonyabb, mint az aktuáriusi számítások eredményéből adódó díj. Ez a különbség részben abból származtatható, hogy a biztosítottak halandósága alacsonyabb, mint a néphalandóság. A kutatások azt igazolják, hogy kockázatelutasító döntéshozó számára előnyös életjáradékot váltani a halálozási kockázat miatti bizonytalan életpálya kiigazítására, ennek ellenére csak a népesség kis hányada vált önként biztosítást.

Ennek a jelenségnek az oka az lehet, hogy az egyéneknek van elképzelésük arról, hogy mennyi a várható élettartamuk, viszont ezt a biztosító nem tudja, így a néphalandóságból számol. Azoknak érdemes inkább járadékot vásárolni, akik tovább élnek, ez tovább növeli a járadékok díját, ez csak elrettenti a vásárlástól a magasabb halandóságúakat. A kialalkuló egyensúlyban végül csak a jelentősen alacsony halálozási valószínűséggel rendelkező szereplők lépnek a piacra. [Dushi-Webb, 2006]

Az egyik megközelítés az, hogy különböző járadékkonstrukciókat állítunk össze úgy, hogy a különböző kockázatú csoportok a nekik megfelelő konstrukciót válasszák, azaz teljesüljenek az ösztönzési korlátok. Például a férfiak halandósága rosszabb, mint a nőké, ezért célszerű lenne a nőknek és a férfiaknak különböző járadékot eladni. Egy feltevés az, hogy a nők kapjanak végig azonos összegű járadékot, a férfiak pedig halasztott vagy csökkénő járadékot, mivel ők ugyis korábban halnak mint a nők, ezért magasabb életkorokban nem számítana, ha ők kevesebb összeget kapnának. Ez a fajta megkülönböztetés viszont így nem lehetséges. Olyan portfoliót kell összeállítani, hogy a biztosítottak maguktól válasszák a nekik megfelelő járadékkonstrukciót.

3.2.1. Egy modell

Az aszimmetrikus információ okozta jóléti veszteség csökkenthető kötelező biztosítással. Ezzel a kérdéskörrel foglalkozik Németh Henrietta munkája [Németh, 2013], amiből sok ötletet merítettem ennek az alfejezetnek az írása során. A munka többek között Eckstein, Eichenbaum és Peled 1983-as cikkét [Eckstein-Eichenbaum-Peled, 1985] dolgozza fel.

Ecksteinék cikke a következőképpen épül fel:

1. Definiálnak egy alapmodellt, ahol az egyedi halálozási valószínűségekre vonatkozó belső információk befolyásolhatják a piac hatékonyságát.
2. Ezután bevezetnek egy társadalombiztosítási programot a modellbe, és összehasonlítják ennek hatását az aszimmetrikus és a teljes információs piacon.

Most csak a magánbiztosításról leírt állításaikat szeretném kifejteni, mivel ez a dolgozat fő témája.

Az elemzés Samuelson Overlapping Generations [Samuelson, 1958] modelljére épít, és a következő feltételezésekkel él:

- Minden szerződő legfeljebb két periódusig él. Az első periódusban 0 az elhalálozás valószínűsége, míg a második periódusban pozitív, kohorszonként eltérő.
- Amennyiben a halálozási valószínűségek köztudottak, Pareto-optimális allokációban mindkét periódusban azonos fogyasztási szint tartozik az életben maradt döntéshozókhoz.

- Amennyiben a halálozási valószínűségek nem köztudottak, magas túlélési valószínűségű ügyfelek - akik életjáradék kifizetése szempontjából nagyobb kockázatot jelentenek a biztosítónak - negatív externáliát jelentenek a másik csoportra nézve, anélkül, hogy ezen bármiféle nyereségük lenne.

A döntéshozókon belül két csoportot különböztetnek meg: a magas kockázatúak, ezek azok, akiknek kisebb a halálozási valószínűségük és az alacsony kockázatúak akiknek halálozási valószínűsége magasabb. Halálozás a második periódus elején következik be $0 < q^i < 1$ valószínűséggel. Ezzel $p^i = 1-q^i$ a túlélési valószínűségek, melyek egyben a biztosító számára a kockázat mértékét fejezik ki. 1 L-típusúra γ H-típusú jut, ahol $\gamma > 0$. Minden fogyasztó w induló vagyonnal rendelkezik, és készletezés és termelés hiányában dönt a (w_1^i, w_1^i) életpálya-fogyasztásáról.

Asszimetrikus információ állami beavatkozás nélkül

A szerződéseket az (s, R) számpár írja le, ahol R a biztosítási kötvény hozama, s a vásárolt mennyiség. Ezzel a fogyasztói kosár $(w - s, Rs)$, ha a biztosított megéli a második periódust, $(w-s, 0)$, ha nem. Az egyes szereplők indirekt hasznosság-függvénye ezáltal $U^i(R, s) = u(w - s) + p^i u(Rs)$ alakú.

A Rothschild - Siglitz modell egyensúlyának (E1) feltételei, hogy a szereplők várható hasznosságának maximalizálása közben semmilyen egyensúlyi szerződésre nem képződhet negatív profit, és nincs olyan szerződés az egyensúlyon kívül, amivel nemnegatív profitot lehetne elérni.

Ha ez az egyensúly létezik, akkor ez szeparáló egyensúly. H két periódusbeli vagyona egyenlő $w_1^H = w_2^H = w/(1 + p^H)$, az általa választott szerződés a $(\frac{p^H}{1+p^H}, 1/p^H)$ számpárral jellemezhető. Az L által választott szerződés $(s_1, 1/p^L)$, ahol s_1 maximumhelye a $\max u(w - s) + p^L u(s/p^L)$ feladatnak az $(1 + p^H)u(\frac{w}{1+p^L}) \geq u(w - s) + p^H u(\frac{s}{p^L})$ öszönzési korlát mellett.

A Wilson-modell [Wilson, 1977] egyensúlya (E2) hasonló az előzőhöz azzal a különbséggel, hogy a biztosítók várakozásait befolyásolja, hogy meg tudják állapítani, mely versenytársak lesznek inprofitábilisek az adott biztosító kínálatának megváltoztatásának hatására. Wilson belátta, hogy ha E1 egyensúly létezik, akkor E2 is egyensúly.

Ecksteinék bemutatták, hogy ha E1 létezik, E2 is egyensúly, és megegyeznek. Ha E1 egyensúly nem létezik, E2 elegyítő egyensúly $(\bar{s}, \bar{S})$ egyensúlyi szerződéssel, ahol

$$\bar{R} = \frac{1+\gamma}{p_L + \gamma p_H} \tag{3.34}$$

$$\bar{s} = \arg\max u(w-s) + p_L u(\bar{R}s) \tag{3.35}$$

4. fejezet

Optimális járadékfüggvény a társadalombiztosításban

Ebben a részben Eső Péter és Simonovits András cikkét [Eső-Simonovits, 2003] mutatom be, hogy lássunk egy modellt, ahol szimulációval tervezték meg az optimális járadékfüggvényt antiszelekció mellett. Fontos hangsúlyozni, hogy itt társadalombiztosításról - azaz kötelező biztosításról van szó. A szerzők a mechanizmuztervezést alkalmazzák a rugalmas nyugdíjrendszer optimális járadékfüggvényének kiszámítására. Felteszik, hogy a fogyasztók tudják várható halandóságukat. A cél egy olyan nyugdíjmechanizmus, amely maximalizál egy társadalmi jóléti függvényt, és kielégít egy társadalmi költségvetési korlátot.

Ha biztosítónak (itt most a társadalombiztosítás) és a biztosítottaknak megegyezik az információuk a halandóságról, akkor az asszimmetrikus információ csak az egyéni munkaáldozatra vonatkozik. Ebben az esetben az optimális járadékfüggvény az aktuáriusilag méltányos változat, azaz

$$b^F(R) = \frac{\tau R}{m - R}, \tag{4.1}$$

ahol R a szolgálati idő, τ a járulékkulcs, m az egyének közös várható élettartama, és $b^F(R)$ az R éves szolgálati idővel nyugdíjba vonuló egyén évi nyugdíja. Ilyen járadékfüggvény mellett azok az egyének, akik korábban szeretnének nyugdíjba menni kisebb életpálya-járulékkal arányos és hozzabb hátralévő élettartamukkal fordítottan arányos életjáradékot kapnak. Az életpálya során a befizetések és kifizetések megegyeznek.

Ha az egyén tudja, hogy várható élettartama hosszabb, mint az átlag, akkor később mehet nyugdíjba, mint az átlag, és aránytalanul nagy életjáradékot kaphat.

Tudjuk, hogy az élethossz, és a munkával eltöltött idő között pozitív korreláció van, azaz aki tovább él, az tovább is dolgozik. Példa ilyenre az egyetemi tanárok. Az emberek képesek előre jelezni a várható élethosszukat, ezt alátámasztja az a tény, hogy a magánéletjáradékot vásárlók korspecifikus halálozási rátája jóval kisebb, mint a teljes népességé.

A cikk legfontosabb hozzájárulása a nyugdíjösztönzési irodalomhoz, az hogy felteszik, hogy az embereknek információjuk van arról hogy várhatóan meddig élnek. Analitikusan levezetik azokat az egyenleteket, amelyek meghatározzák a máodik legjobb optimális járadékfüggvényt. Ez nagyon különbözik az aktuáriusilag méltányostól - ez akkor lenne optimális, ha az egyének csak a munkaáldozatukban különböznének. A társadalmilag optimális járadékrendszer a várhatóan rövidebb életűektől a hosszabb életűekhez csoportosít át. Az optimális járadékfüggvény tulajdonságai a társadalmi jóléti függvény alakjától függnek: egyenlősítőbb társadalmi célok rugalmasabb járadékszabályhoz vezetnek.

4.1. A modell

Létezik az egyéneknek egy sokasága, amelyek egyoldalúan ismerik a saját várható élethosszukat. Mindenki nulla évesen lép be a munkapiacra, és egységnyi terméket termel évente. Feltesszük, hogy a dolgozók nem takaríthatnak meg öregkorukra. A nyugdíjrendszer összetevői:

- $\tau < 1$ járulékkulcs, amelyet a dolgozók fizetnek, ezt a kormányzat alakítja ki,
- R évesen megy nyugdíjba, többé nem fizet járulékot,
- $b > 0$ járadékot kap az egyén, a $b(R)$ járadékfüggvényt az állam alakítja ki.

A rendszer pénzügyi egyensúlyban van, azaz a várható járadékok nem lehetnek nagyobbak a várható járulékoknál. A járadék ebben az esetben nem szünhet meg, és nem is csökkenhet az életkor előrehaladtával. Járadék helyett nem lehet egy összeget fizetni nyugdíjba vonuláskor. Ezek a dolgok ellentmondanának a társadalombiztosítás céljának, hiszen az utóbbi esetben a fogyasztó kénytelen lenne magánjáradékot venni, amely megoldás ugyanúgy szenvedne az antiszelekciós hatástól.

Az életpálya-hasznosságfüggvény: v a dolgozói és nyugdíjas szakasz összege. Ha a t típusú egyén R évet dolgozik, akkor $u(1-\tau)$ hasznossághoz jut R éven keresztül, és $w(b)$ hasznossághoz vezet $t-R$ éven keresztül, tehát az életpálya-hasznosságfüggvény

$$v = Ru(1-\tau) + (t-R)w(b). \tag{4.2}$$

Az egyén szabadidő-preferenciáját az $u(.)$ és $w(.)$ éves hasznosságfüggvények különbözősége tükrözi. Feltesszük, hogy $u(x) = w(x) - \epsilon, \epsilon > 0$, ahol ϵ a munka határáldozata. u-ra és v-re a következő megszorítást tesszük:

$$w(0) - w'(0)\tau < u(1-\tau) < w(1) - w'(1)(\tau+1). \tag{4.3}$$

Az állam egy optimális $(b(R), \tau)$ nyugdíjrendsezrt tervez, amely maximalizál egy additív konkáv társadalmi jóléti függvényt:

$$\sum_t \psi(v_t) f_t, \tag{4.4}$$

ahol f_t a t várható élettartamú egyének relatív gyakorisága.

Az állam feladatát két részfeladatra bonthatjuk: a tervező először adott τ járulékkulcs esetén optimalizálja a társadalmi jóléti függvényt a $b(R)$ járadékfüggvény szerint, majd a parametrikus maximális társadalmi jóléti függvényt optimalizálja τ szerint. Ebben a modellben a járulékkulcs független az életkortól, ezért a járadékfüggvény osztályozza az embereket az élettartamuk szerint. Mivel az állam nem figyeli meg az egyének magáninformációit, ezért a nyugdíjrendszernek (bayesi) ösztönzési kompatibilisnek kell lennie. Részvételi korlát nem kell, mivel a részvétel kötelező, ehelyett keresztmetszeti költségvetési korlát van, ahogy az optimális jövedelemadóztatásban.

4.2. Az első legjobb megoldás

Itt az egyéneknek nincs magáninformációjuk a saját élettartamukról. Azt teszik fel, hogy minden dolgozó várható élettartama mindenki által megfigyelhető.

A teljes információ miatt a mechanizmustervező képes első legjobb nyugdíjtervet készíteni, a t típusú dolgozóknak R_t szolgálati időt és b_t éves nyugdíjat rendelve. Feltehő, hogy $R_t \leq t$. Mivel az első lépésben τ adott, legyen $\bar{u} = u(1-\tau)$. Legyen v_t a t várható élettartamó egyén életpálya-hasznosságfüggvénye:

$$v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t. \tag{4.5}$$

A típusok S-től T-ig terjednek, mindkettő egész szám.

Ekkor az állam az egyéni hasznosságok növekvő és konkáv ψ függvényének súlyozott összegét maximalizálja, azaz

$$\max_{(b_t,R_t)_t} \sum_{t=S}^{T} \psi(v_t) f_t, \tag{4.6}$$

feltéve, hogy teljesül

$$v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t,$$

$$0 \leq \sum_{t=S}^{T} [(\tau + b_t)R_t - tb_t] f_t.$$

Ezt a feladatot hívjuk az első legjobb optimum feladatának. Írjuk fel a Lagrange-függvényt úgy, hogy λ-t rendeljük a költségvetési korláthoz szorzónak:

$$L^* = \sum_{t=S}^{T} \psi\{[\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t\} f_t + \lambda \sum_{t=S}^{T} \{(\tau + b_t)R_t - tb_t\} f_t. \tag{4.7}$$

Az elsőrendű feltételek a következők:

$$w'_b = \psi'(v_t)w'(b_t)(t - R_t) + \lambda(R_t - t) = 0 \leftrightarrow \psi'(v_t)w'(b_t) = \lambda,$$

$$w'_R = \psi'(v_t)[\bar{u} - w'(b_t)] + \lambda(\tau + b_t) = 0.$$

Az elsőrendű szükséges feltételekből következik:

1. Tétel. *Az első legjobb megoldásban, $(b_t^*, R_t^*)_{t=S}^T$, a nyugdíj független a várható élettartamtól: $b_t^* \equiv b_*$, és kielégíti az*

$$\bar{u} - w(b^*) + w'(b^*)(\tau + b^*) = 0 \tag{4.8}$$

egyenletet.

A (4.3) feltevés miatt a (4.8) egyenletnek van megoldása. Vegyük észre, hogy $\bar{u} < w(b^*)$, és a megoldás egyértelmű, hiszen a bal oldali kifejezés deriváltja negatív. Ha $\psi' \equiv 1$ (haszonelvűség), akkor sok olyan R_t^* megoldás lehetséges, amely kielégíti az aggregált költségvetési korlátot, feltéve, hogy $b_t^* \equiv b^*$. Egy különleges első legjobb megoldás az autarkia. Az autarkia egy olyan gazdasági helyzet, amelyben nincsen kereskedelmi kapcsolat a külvilággal - zárt gazdaságnak is nevezik. Ebben a költségvetési feltétel minden típusra egyenként teljesül, azaz

$$R_t^A = \frac{b^*}{\tau + b^*}t, \qquad t = S, \ldots, T.$$

Ha ψ szigorúan konkáv, akkor $b_t^* \equiv b^*$, és R_t^* minden $t = S, \ldots, T$ értékre meghatározható az elsőrendű feltételekből:

$$\psi'(v_t) = \frac{\lambda}{w'(v_s)} = \psi'(v_s), \qquad v_t = [\bar{u} - w(b^*)]R_t + w(b^*)t, \qquad s, t \in \{S, \ldots, T\}$$

és az aggregált korlátból. $s < t$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $R_s^* < R_t^*$ is áll. Tipikusan az első legjobb megoldás különbözik az autarktól.

Ha ψ szigorúan konkáv, akkor sem az autarkia, sem az első legjobb megoldás nem elégíti ki az érdekeltségi feltételt. Vagyis a tervező nem képes megvalósítani ezeket a szabályokat, tudván az emberek várható élettartamát és így különböző szolgálati időt írva elő nekik. Azért van így, mert R_t^A (vagy R_t^*) szigorúan nő t-vel, míg b_t^* állandó. Formálisan: R_t^* csak akkor elégíti ki az érdekeltségi feltételt állandó b_t^*-nál, ha R_t^* is állandó.

4.3. Optimalitás asszimetrikus információ esetén

Ebben az esetben az állam nem ismeri a várható egyéni élettartamokat. Ekkor keressük a második legjobb megoldást, ezért bevezetjük az érdekeltségi feltételeket.

A $(b_t, R_t)_{t=S}^T$ szabály érdekeltségi feltétele azt jelenti, hogy a t típus (b_t, R_t)-t választja a lehetőségekből. A szomszédos érdekeltségi feltételek a következők:

$$v_t \geq [\bar{u} - w(b_{t+1})]R_{t+1} + w(b_{t+1})t = v_{t+1} - w(b_{t+1}),$$

$$v_{t+1} \geq [\bar{u} - w(b_t)]R_{t+1} + w(b_t)(t+1) = v_t + w(b_t),$$

$$t = S, \ldots, T-1,$$

azaz

$$v_t + w(b_t) \leq v_{t+1} \leq v_t + w(b_{t+1}), \qquad \text{ahol} \quad t = S, \ldots, T-1. \tag{4.9}$$

A $w(.)$ monotonitásából következik $b_t \leq b_{t+1}$ (ahonnan következik $R_t \leq R_{t+1}$). Emellett a nem szomszédos korlátok elhagyhatók. A mechanizmustervező feladata a következő:

$$\max_{(b_t, R_t)_t} \sum_{t=S}^{T} \psi(v_t) f_t, \tag{4.10}$$

feltéve, hogy teljesül

$$v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t,$$
$$0 \leq \sum_{t=S}^{T} [(\tau + b_t)R_t - tb_t] f_t.$$

,

$$v_t + w(b_t) \leq v_{t+1} \leq v_t + w(b_{t+1}).$$

A t várható élettartamok ismeretlenek az állam előtt.

Ezt a feladatot hívjuk a második legjobb megoldás feladatának.

4.3.1. Haszonelvű megoldás

Feltesszük, hogy a társadalmi jóléti függvény haszonelvű, azaz $\psi' \equiv 1$. Feltesszük még, hogy

$$R^* = \frac{b^*}{\tau + b^*} \sum_{t=s}^{T} t f_t < S, \tag{4.11}$$

azaz az átlagos élettartamú dolgozó első legjobb szolgálati ideje rövidebb, mint a legrövidebb várható élettartam.

2. Tétel. *Ha a társadalmi jóléti függvény haszonelvű, és (4.11) érvényes, akkor a társadalmilag optimális járadékszabály teljesen merev:*

$$b(R) = \begin{cases} 0, & \text{ha } R < R^*, \\ b^*, & \text{ha } R \geq R^*. \end{cases}$$

Sőt a második legjobb szabály megvalósítja az első legjobb kimenetelt.

Paradox módon a rugalmas nyugdíjazásra kapott második legjobb megoldás meglehetősen merev: mindenki ugyanannyi ideig dolgozik. Ez a haszonelvű társadalmi jóléti függvény következménye, ezért a továbbiakban elvetjük ezt az esetet.

4.3.2. Optimalitás szigorúan konkáv ψ esetén

Az optimális haszonelvű szabály továbbra is megengedett és kielégíti az érdekeltségi feltételeket, de társadalmilag már nem optimális. Akármilyen szigorúan konkáv társadalmi jóléti függvényt mérlegelünk, a haszonelvű otpimum túlságosan sokat csoportosít át a várhatóan rövid életűektől a hosszú életűeknek. Másképp megfogalmazva: ez a fajta elosztás, amelyik mindenkit ugyanannyi szolgálati idővel és nyugdíjjal küld nyugdíjba, méltánytalannak tűnik egy olyan társadalomban, ahol a várhatóan rövidebb élettartamú egyének haszna nagyobb súlyt kap.

A szolgálati idő:

$$R(v_t, b_t, t) = \frac{w(b_t)t - v_t}{w(b_t) - \bar{u}},$$

és az életpálya nettó járuléka:

$$z(v_t, b_t, t) = (\tau + b_t)R(v_t, b_t, t) - tb_t.$$

Egyelőre szorítkozzunk csak a lefelé mutató érdekeltségi korlátokra. A feladat a következő:

$$\max_{(b_t, v_t)_t} \sum_{t=S}^{T} \psi(v_t) f_t \tag{4.12}$$

feltéve, hogy teljesül

$$\sum_{t=S}^{T} z(v_t, b_t, t) f_t \geq 0,$$

$$v_{t+1} - v_t - w(b_t) \geq 0, \qquad t = S, \ldots, T-1.$$

Rendeljük λ-t az első korláthoz, és μ_t-t a korlátok második csoportjához. Ekkor a Lagrange függvény:

$$L = \sum_{t=S}^{T} [\psi(v_t) + \lambda z(v_t, b_t, t)] f_t + \sum_{t=S}^{T-1} \mu_t [v_{t+1} - v_t - w(b_t)].$$

3. Tétel. *A második legjobb feladat elsőrendű szükséges feltételei $t = S, \ldots, T$, esetén,*

$$L'_b = \lambda z'_b(v_t, b_t, t) f_t - \mu_t w'(b_t) = 0, \tag{4.13}$$

$$L'_v = [\psi'(v_t) + \lambda z'_v(v_t, b_t, t)] f_t - \mu_t + \mu_{t-1} = 0, \qquad t < T \tag{4.14}$$

$$L'_\mu = v_{t+1} - v_t - w(b_t) \geq 0, \qquad \mu_t \geq 0, \qquad \textit{(komplementaritással)}, \tag{4.15}$$

$$L'_\lambda = \sum_{t=S}^{T} z(v_t, b_t, t) f_t \geq 0, \qquad \lambda \geq 0, \qquad \textit{(komplementaritással)}, \tag{4.16}$$

ahol $\mu_{S-1} = 0$ és $\mu_T = 0$.

A $z(v_t, b_t, t)$ definíciója szerint az elsőrendű feltételekben megjelenő parciális deriváltak

$$z'_v(v_t, b_t, t) = -\frac{\tau + b_t}{w(b_t) - \bar{u}},$$
$$z'_b(v_t, b_t, t) = -\frac{v_t - t\bar{u}}{[w(b_t) - \bar{u}]^2}\{(\tau + b_t) w'(b_t) - [w(b_t) - \bar{u}]\}.$$

A valószínűtlen sarokmegoldásoktól eltekintve, a 3. tételből adódik a

Következmény:*A második legjobb optimumban a leghosszabb várható élettartamú egyének járadéka első legjobb: $b_T = b^*$. Ha ψ szigorúan konkáv, akkor $b_t < b^*$ minden $t < T$-re, azaz a leghosszabb várható élettartamú egyénektől eltekintve, mindenki kevesebbet kap, mint amekkora az első legjobb járadék.*

Megjegyzések:

- Diszkrét idejű modellt választottak, így nem várható sima járadékfüggvény.
- Normális körülmények között $\mu_t > 0$, tehát $v_{t+1} = v_t + w(b_t)$. Figyelembe véve, hogy $b_t \leq b_{t+1}$, teljesül az érdekeltségi feltételek elhanyagolt csoportja is: $v_{t+1} \leq v_t + w(b_{t+1})$.
- Azt sejtik, hogy az egyéni egyenleg a várható élettartam csökkenő függvénye: $z_t \geq z_{t+1}$

4.4. A második legjobb megoldás numerikus meghatározása

Mivel a 3. tétel nemlineáris egyenletrendszerének megoldása nehéz, ezért numerikus szimulációval próbálkoztak a szerzők.

Rekurzív módszert alkalmaztak. Feltették, hogy az $\bar{u}$, τ és $(f_t)_{t=S}^T$ paraméter adott.

1. Venni kell egy olyan λ értéket, hogy az eljárás végén (4.16) teljesüljön.
2. A számítást v_T alkalmas értékével kezdik (például a statikus optimalizálásából adódóval), és vették $\mu_T = 0$-t. A (4.13)-ból $b_T = b^*$.
3. Ciklus: minden t-re, ha $(v_{t+1}, b_{t+1}, \mu_{t+1})$ adott, akkor (v_t, b_t, μ_t) a következőképpen számítható ki: kiszámítják μ_t-t a (4.14)-ből $(t+1)$-re. Ekkor (b_t, v_t) kiszámítható a (4.13)-ból és a (4.15)-ből.
4. Most megvan a $(v_T, b_T, \mu_T), \dots, (v_S, b_S, \mu_S)$ sorozat és μ_{S-1} a (4.14)-ből $t = S$-nél. Kiválasztják v_T-t úgy, és ismételik a 3. lépést addig, amíg nem teljesül $\mu_{S-1} = 0$.
5. Végül kiválasztják λ-t és ismételik a 2-4. lépéseket addig, ameddig (4.16) költségvetési feltétel nem teljesül.

A gyakorlatban célszerűbb v_T-t rendelni a (4.16)-hoz és λ-t a $\mu_{S-1} = 0$-hoz.

A τ változtatásával és az optimális pálya újraszámolásával meghatározhatjuk az optimális járulékkulcsot is. Ha τ kicsi, akkor b_t szintén kicsi, és R_t nagy, másrészt ha τ nagy, akkor b_t elfogadható, de R_t kicsi.

4.5. Szimuláció

A nyugdíjas pillanatnyi hasznosságfüggvénye CRRA alakú (*Constant Relative Risk Aversion,* azaz állandó relatív kockázatkerülési együtthatójú), $w(x) = \theta - \frac{x^\sigma}{\sigma}, 1 - \sigma$ lévén a relatív kockázatkerülési együttható és ϵ a munkaáldozat.

Definiálják a társadalmi jóléti függvények CRRA típusú családját: $\psi(v) = \frac{v^\rho}{\rho}, \rho \leq 1$, és ρ a *társadalmi jólét egyenlőtlenségi indexe*. Minél kisebb az index, annál nagyobb súlyt kapnak a kisebb hasznosságok, azaz annál egyenlősítőbb a rendszer.

Simonovitsék több futást mutattak be.

1. futás:$S = 49$ és $T = 59$. Felteszik, hogy az állam szempontjából az emberek várható élettartama 49 és 59 év között egyenletesen oszlik el: $f_t \equiv 1$. A következő paraméterértékeket veszik: $\theta = 4,1$, $\sigma = -0,5$ és $\epsilon = 1,398$. Az első legjobb esetben az optimális járulékkulcsnál a dolgozó fogyasztása azonos a nyugdíjaséval (ez annak a feltevésnek a mellékhatása, hogy a dolgozó pillanatnyi hasznosságfüggvénye csupán egy additív állandóban különbözik a nyugdíjasétól). Legyen $\tau = 0,2$. Ekkor $\bar{u} = 4,1 - 0,8^{-0,5} - 1,368 = 0,466$, és az első legjobb nyugdíj $b^* = 0,8$. Kiszámítható, hogy 0,8 dolgozói fogyasztás hasznossága megegyezik 0,303 nyugdíjéval. A különbség a nyugdíjas megnövekedett szabadidejéből fakad. Megfigyelhető, hogy a leghosszabb élettartamú egyénnek $R_T = \frac{Tb^*}{(\tau+b^*)} = 47,2$ évet kell dogloznia.

Amint a 2. tételben igazolták, ha a társadalmi jóléti függvény haszonelvű, akkor az optimális érdekeltségi rendszer mindenkit 43,2 év szolgálat után küld nyugdíjba - egyforma első nyugdíjakkal. Ezt teljes információ esetén sem lehet felülmúlni, abban tér el az autark optimumtól, hogy a várhatóan hosszabb ideig élő egyéneket támogatják a a várhatóan rövidebb ideig élő egyének.

2. futás: Most $\rho = -1$ a társadalmi jóléti index. A várható élettartam 10 többletéve majdnem 3 többlet szolgálati évet és 17% többletjáradékot ad, amely relatív skálán 21%-ot jelent. Megfigyelhető, hogy az életpálya-egyenleg a 49 éves várható élettartamú egyén 3,1 egységéről az 59 éves esetében -3,5 egységre csökken. Látható, hogy az optimális járadékfüggvény enyhén nemlineáris.

3. futás: A σ kitevőt -0,45-re növelve, a három legrövidebb várható élettartamú típusnak azonos - törvény által előírt - minimális életkorban kell nyugdíjba mennie: $R_m = 41,9$ év, $b_m = 0,69$ nyugdíjjal (ez a torlódás jellemző az optimális mechanizmustervezésre). A megmaradó nyolc típusra érvényes az érdekeltségi feltétel: minél tovább él valaki, annál később megy nyugdíjba. A σ-t -0,55-re csökkentve, közelítőleg lineáris járadékfüggvényt kapunk. Tovább csökkentve σ-t -0,6-ra, a járadékfüggvény konvexszé válik.

4. futás: A számításokat leegyszerűsítve, összepréselték a 11 típust 3-ra: 51, 54 és 57 éves élettartammal, az egyenletes eloszlást megtartva. A járadékfüggvény nemlinearitását a járadékfüggvény meredekségével mérjük: $\alpha_t = \frac{b_{t+1}-b_t}{R_{t+1}-R_t}, \quad t = S, \ldots, T-1$

Ennek a futásnak a jellmezőit a következő táblázat tartalmazza:

Élettartam (év)	Járadék b_t	Szolgálati idő R_t (év)	Egyenleg z_t	Meredekség α_t
51	0,666	41,437	1,916	0,060
54	0,733	42,539	0,109	0,065
57	0,800	43,573	-2,024	0,000

Ez a modell nagyon durván közelíti az eredeti modellt: például a konkáv járadékfüggvény konvexszé válik.

5. futás: Idáig a járulékkulcs rögzítve volt. Ennek a kulcsnak az optimális kiválasztása központi szerepet játszik a cikkben, ezért megkísérlik meghatározni az optimumát az összenyomott modellben. a ábra mutatja, hogy a társadalmi jóléti függvény meglehetősen lapos az autark optimum (20%) közelében. Bemutatják az optimális járadékot és szolgálati időt mindhátrom típusra a járulékkulcs függvényében. A járadékok gyengén nőnek vagy stagnálnak, de a szolgálati idők meredeken csökkennek, ahogy a járulékkulcs emelkedik.

5. fejezet

A modell numerikus szimulációja

A fentiek alapján szerettem volna megnézni, hogy Ecksteinék modellje milyen érzékeny bemeneti paraméterekre, illetve számszerűen ellenőrizhető-e az elmélet. Itt azt a modellt néztem, ahol csak magánbiztosítás van, hiszen ez a dolgozat fő témája, és csak a Rothschild-Stiglitz egyensúlyét.

Az alapfeladat:

- Két típusú ügyfelünk van - magas (p^H) és alacsony (p^L) kockázatú ügyfél. $p^L < p^H$
- Minden fogyasztó w induló vagyonnal rendelkezik, és készletezés és termelés hiányában dönt a (w_1^i, w_1^i) életpálya-fogyasztásáról.
- A szerződéseket az (s, R) számpár írja le, ahol R a biztosítási kötvény hozama, s a vásárolt mennyiség. Ezzel a fogyasztói kosár $(w-s, Rs)$, ha a biztosított megéli a második periódust, $(w-s, 0)$, ha nem.
- Az egyes szereplők indirekt hasznosság-függvénye $U^i(R, s) = u(w-s) + p^i u(Rs)$ alakú.

A Rothschild - Siglitz modell egyensúlyának feltételei, hogy a szereplők várható hasznosságának maximalizálása közben semmilyen egyensúlyi szerződésre nem képződhet negatív profit, és nincs olyan szerződés az egyensúlyon kívül, amivel nemnegatív profitot lehetne elérni.

Ha ez az egyensúly létezik, akkor ez szeparáló egyensúly. H két periódusbeli vagyona egyenlő $w_1^H = w_2^H = w/(1+p^H)$, az általa választott szerződés a $(\frac{p^H}{1+p^H}, 1/p^H)$ számpárral jellemezhető. Az L által választott szerződés $(s_1, 1/p^L)$, ahol s_1 megoldása a következő feladatnak:

$$\max_s u(w-s) + p^L u(s/p^L)$$

feltéve, hogy:

$$(1+p^H)u\Big(\frac{w}{1+p^L}\Big) \geq u(w-s) + p^H u\Big(\frac{s}{p^L}\Big)$$

A Lagrange szorzó legyen λ. A korlátot $u(w-s) + p^H u\big(\frac{s}{p^L}\big) - (1+p^H)u\big(\frac{w}{1+p^L}\big) \leq 0$ formájában írjuk fel.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -u'(w-s) + u'\Big(\frac{s}{p^L}\Big) - \lambda\Big[-u'(w-s) + \frac{p^H}{p^L}u'\Big(\frac{s}{p^L}\Big)\Big] = 0 \qquad (5.1)$$

Átrendezve az egyenletet:

$$\lambda = \frac{(p^H/p^L - 1)u'(s/p^L)}{u'(w-s)} + 1 \qquad (5.2)$$

Ha a korlát egyenlőség formájában teljesül, akkor a következőt kapjuk:

$$(1+p^H)u\Big(\frac{w}{1+p^L}\Big) = u(w-s) + p^H u\Big(\frac{s}{p^L}\Big) \qquad (5.3)$$

Ha megadunk egy w kezdeti vagyont és egy $u(\cdot)$ hasznosságfüggvényt, akkor s ebből könnyen kiszámolható, hiszen a valószínűségek ismertek.

5.1. Eredmények

2009-es néphalandósági adatokból indultam ki (Statisztikai módszerek a biztosításban c. tárgy keretén belül használt KSH-s adatok) és végignéztem a modell eredményeit 30-tól 80 éves korig 5 évenkénti ugrásban. Az „alacsony” halálozási valószínűségeket a néphalandóság 0,75-szeresének vettem, míg a „magasat” az 1/0,75-szeresének. Kiinduló jövedelemnek 10 egységet adtam meg (ennek a paraméternek nem volt különösebb jelentősége), hasznossági függvénynek az $u(x) = \log(1+x)$ függvényt választottam.

A számításokat Excel-ben végeztem el, a maximalizálást az Excel Solverének segítségével csináltam.

	s^H	R^H	w_1^H	w_2^H	u(w_1^H)	u(w_2^H)	U
30	4,9980	1,0008	5,0020	5,0020	1,7921	1,7921	3,5828
35	4,9972	1,0011	5,0028	5,0028	1,7922	1,7922	3,5824
40	4,9943	1,0023	5,0057	5,0057	1,7927	1,7927	3,5813
45	4,9885	1,0046	5,0115	5,0115	1,7937	1,7937	3,5791
50	4,9784	1,0087	5,0216	5,0216	1,7953	1,7953	3,5753
55	4,9666	1,0135	5,0334	5,0334	1,7973	1,7973	3,5708
60	4,9541	1,0185	5,0459	5,0459	1,7994	1,7994	3,5660
65	4,9389	1,0247	5,0611	5,0611	1,8019	1,8019	3,5603
70	4,9171	1,0337	5,0829	5,0829	1,8055	1,8055	3,5521
75	4,8790	1,0496	5,1210	5,1210	1,8117	1,8117	3,5378
80	4,8220	1,0738	5,1780	5,1780	1,8210	1,8210	3,5168

5.1. ábra. Magas kockázatú fél eredményei.

A magas kockázatú egyénekre a következő eredmények jöttek ki:

Ez az az eset, amikor a két periódusbeli vagyon megegyezik, tehát ezeknek a hasznossága is megegyezik az egyes periódusokban. Nyilvánvaló, hogy az indirekt hasznosság a kor előre haladtával csökken, ez látható az eredményekből is. Viszont külön-külön az egyes periódusok hasznossága növekszik. Az is nyilvánvaló hogy az egyén minél öregebb, annál kevesebb biztosítási kötvényt vásárol, a kötvények hozama viszont nő.

Az alacsony kockázatú egyénekre a következő eredmények jöttek ki:

	s^L	R^L	w_1^L	w_2^L	u(w_1^L)	u(w_2^L)	U	U_1	U_2
30	4,8622	1,0014	5,1378	4,8691	1,8145	1,7697	3,5817	3,5828	3,5828
35	4,8351	1,0020	5,1649	4,8448	1,8189	1,7656	3,5809	3,5824	3,5824
40	4,7636	1,0041	5,2364	4,7832	1,8304	1,7550	3,5782	3,5813	3,5813
45	4,6631	1,0082	5,3369	4,7014	1,8464	1,7407	3,5729	3,5791	3,5791
50	4,5335	1,0155	5,4665	4,6038	1,8666	1,7234	3,5638	3,5753	3,5753
55	4,4136	1,0242	5,5864	4,5204	1,8850	1,7084	3,5531	3,5708	3,5708
60	4,3076	1,0334	5,6924	4,4516	1,9010	1,6959	3,5420	3,5660	3,5660
65	4,1947	1,0449	5,8053	4,3828	1,9177	1,6832	3,5287	3,5603	3,5603
70	4,0532	1,0615	5,9468	4,3026	1,9383	1,6682	3,5098	3,5521	3,5521
75	3,8403	1,0917	6,1597	4,1924	1,9685	1,6472	3,4773	3,5378	3,5378
80	3,5710	1,1392	6,4290	4,0682	2,0054	1,6230	3,4300	3,5168	3,5168

5.2. ábra. Alacsony kockázatú fél eredményei.

A kötvények hozama itt is nő, a kötvényvásárlások száma itt csökken. Az első periódus hasznossága növekszik, a második periódus hasznossága viszont csökken, és az első periódusbeli hasnosság mindig magasabb, mint a második peródusbeli, ami alátámasztja azt a feltevést, hogy a magasabb halálozási valószínűséggel rendelkező egyénnek kevésbe fontos, hogy mi lesz egy későbbi időpontban, és a kor előrehaladtával ez a fontosság csak egyre csökken, és annál fontosabb, hogy mi van jelenleg. Az indirekt hasznosság itt is csökken. Az utolsó két oszlop a korlátot jelöli, azaz U_1-nek kell nagyobbnak lennie U_2-nél. Látható, hogy 4 tizedesjegynyi pontosságnál a korlát egyenlőség formájában teljesül.

Ha összehasonlítjuk a különböző kockázatú egyéneket, akkor a következőkre jutunk:

	s^H	s^L	R^H	R^L	u(w_1^H)	u(w_1^L)	u(w_2^L)
30	4,9980	4,8622	1,0008	1,0014	1,7921	1,8145	1,7697
35	4,9972	4,8351	1,0011	1,0020	1,7922	1,8189	1,7656
40	4,9943	4,7636	1,0023	1,0041	1,7927	1,8304	1,7550
45	4,9885	4,6631	1,0046	1,0082	1,7937	1,8464	1,7407
50	4,9784	4,5335	1,0087	1,0155	1,7953	1,8666	1,7234
55	4,9666	4,4136	1,0135	1,0242	1,7973	1,8850	1,7084
60	4,9541	4,3076	1,0185	1,0334	1,7994	1,9010	1,6959
65	4,9389	4,1947	1,0247	1,0449	1,8019	1,9177	1,6832
70	4,9171	4,0532	1,0337	1,0615	1,8055	1,9383	1,6682
75	4,8790	3,8403	1,0496	1,0917	1,8117	1,9685	1,6472
80	4,8220	3,5710	1,0738	1,1392	1,8210	2,0054	1,6230

5.3. ábra. Összehasonlítás.

Látható, hogy a magasabb kockázatú fél mindig több biztosítási kötvényt vesz, ez alátámasztja azt a feltételezést, hogy a magasabb kockázatú fél teljes járadékot vesz. Az alacsonyabb kockázatú fél kötvényeinek hozama magasabb. Mivel a magasabb kockázatú fél életpálya hasznossága azonos a két periódusban, ezért itt csak az elsőt ábrázoltam. Látható, hogy az alacsonyabb kockázatú fél hasznossága az első periódusban magasabb, a második periódusban pedig alacsonyabb. Ez így is alátámasztja azt a feltételezést, hogy az alacsonyabb kockázatú félnek - akinek magasabb a halandósága - fontosabb, hogy az életének korábbi szakaszaiban magasabb járadékot kapjon, mivel alacsonyabb a valószínűsége, hogy megéli az idősebb kort.

Irodalomjegyzék

[Dushi-Webb, 2006] Irena Dushi és Anthony Webb, *Rethinking the sources of adverse selection in the annuity market*, megjelent: Chiappori, P.A.-Gollier,C.[*szerk*] Competitive Failures in Insurance Markets: Theory and Policy Implications, Cambridge, MIT Press, 185-212. o.

[Eckstein-Eichenbaum-Peled, 1985] Zvi Eckstein, Martin Eichenbaum és Dan Peled, *Uncertain Lifetimes and the Welfare Enhancing Properties of Annuity Markets and Social Security*, Journal of Public Economics, 26. évf. 3. sz. 303-326. o.

[Eső-Simonovits, 2003] Eső Péter és Simonovits András, *Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre*, Közgazdasági Szemle, 2. sz. 99-111. o.

[Fischer, 1973] Stanley Fischer, *A Life Cycle Model of Life Insurance Purchases*, International Economic Review, 14. évf., 1. sz., 132-152 o.

[Németh, 2013] Németh Henrietta, *Antiszelekció az annuitások piacán - A kötelező biztosítás szerepe*, Biztosítási modellek a közgazdaságtanban c. tárgy beadandója

[Rothschild-Stiglitz, 1976] Michael Rothschild és Joseph Stiglitz, *Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information*, Quarterly Journal of Economics, 90, 629-649. o.

[Samuelson, 1958] Paul A. Samuelson, *An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money*, 66. évf., 6. sz., 467-482. o.

[Wilson, 1977] Charles Wilson, *A model of insurance markets with incomplete information*, Journal of Economic Theory, 16. évf., 2. sz., 167-207. o.

[Yaari, 1965] Menahem E. Yaari, *Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer*, The Review of Economic Studies, 32. évf., 2. sz., 137-150. o.