



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR



BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

ESZKÖZÁR BUBORÉKOK DETEKTÁLÁSA

Szakdolgozat

Töttösi Nikolett

Biztosítási és pénzügyi matematika Msc

Kvantitatív pénzügyek szakirány

Témavezető:

Dr. Zempléni András

egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Jelölések jegyzéke	6
Bevezető	8
1. Az alapok	10
1.1. No Free Lunch Vanishing Risk	10
1.2. Fundamentális ár	12
1.2.1. Teljes piacon	12
1.2.2. Nem teljes piacon	13
1.3. No dominance	14
1.3.1. Teljes piacon	14
1.3.2. Nem teljes piacon	15
1.4. A buborékok karakterizációja	16
1.5. Funkcionálanalízisbeli fogalmak	17
1.5.1. Szoboljev-tér	18
1.5.2. Hilbert-tér	18
2. Volatilitás becslése	20
2.1. Florens-Zmirou becslés	20
2.2. Magfüggvényes becslés	22
3. Buborékok detektálása	30
3.1. Paraméteres becslés	31

3.2. RKHS becslés	33
3.2.1. Reprodukáló magvú Hilbert-tér	34
3.2.2. Reprodukáló magok konstruálása	38
3.2.3. Legjobb m választása	41
4. Alkalmazás valós adatokra	46
4.1. S&P 500	46
4.2. Facebook	48
4.2.1. Paraméteres becslés	49
4.2.2. RKHS becslés	50
Összefoglaló	55
Irodalomjegyzék	57

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Zempléni Andrásnak, amiért felkeltette az érdeklődésemet a téma iránt, és hasznos tanácsaival, észrevételeivel segítette dolgozatom elkészülését. Kérdéseimmel bármikor bizalommal fordulhattam hozzá, és végig felhívta a figyelmemet az esetleges hibákra.

Köszönöm családomnak és Páromnak, hogy a nyugodt és szeretetteljes környezet biztosításával hozzájárultak tanulmányaim sikerességéhez. Köszönettel tartozom továbbá évfolyamtársaimnak, barátaimnak, akik folyamatosan motiváltak és segítettek.

Jelölések jegyzéke

A jelölések az előfordulásuk sorrendjében szerepelnek. Ahol két jel van, ott az első teljes piacon, míg a második nem teljes piacon értendő.

S_t, Δ_t	részvényárfolyam-folyamat
W_t	Brown-mozgás/Wiener-folyamat
$\sigma(x)$	volatilitás
$\mu(x)$	drift
B_t	kockázatmentes kamatláb változásának folyamata
$V_t^{\pi, \eta}$	π darab részvényből és η darab betétből álló portfólió értékfolyamata
\mathcal{A}	megengedett stratégiák halmaza
\mathcal{K}	végtelen életű megengedett stratégiák értékfolyamatainak halmaza
\mathcal{C}	\mathcal{K} halmaznak azon mérhető függvényei, melyek korlátosak, nem pozitívak
L_+^0	pozitív mérhető függvények tere
L^∞	korlátos, szakaszonként folytonos függvények tere
X_t, Ξ_t	kifizetés-folyamat
\mathbb{F}	$(\mathcal{F})_t$ filtrációkból álló halmaz
D_t, Δ_t	osztalék-folyamat
T	megállási idő, amíg vizsgáljuk az eszközt
τ	megállási idő, a kockázatos eszköz élettartama
S_t^*, Δ_t^*	eszköz fundamentális ára
$\mathbb{Q}, \mathcal{Q}_i$	ekvivalens martingál mérték/kockázatsemleges mérték

\mathcal{Q}	valószínűségi mértékek tere
Φ_0	az összes kifizetés azon halmaza, ami előállítható (Δ, Ξ_τ) alakban
Φ	szuper-replikált cash flow-k halmaza
β_t	eszközár buborék
$G_{\nu, \kappa}$	ν, κ megállási időpárra a nettó nyereség
$l_T(x)$	lokális idő
$[\cdot, \cdot]$	kvadratikus variáció
$\hat{\sigma}(x)$	becsült volatilitás függvény
h_n	0-hoz konvergáló valós számok sorozata
\mathcal{D}	azon kompakt tartomány, ahol a becslést végezzük
$K(x)$	magfüggvény
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	skalárszorzat
$H(\mathcal{D})$	a $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekből álló Hilbert-tér
$\delta_{i,k}$	Kronecker-delta
$F_{2,1}(a, b, c, z)$	Gauss-féle hipergeometrikus függvény
$B(a, b)$	béta-függvény
$w(y)$	aszimptotikus súlyfüggvény
$W^{k,p}(I)$	Szoboljev-tér
$cond(A)$	az A mátrix kondíciószáma

Bevezető

Manapság sokszor használják az eszközár buborék kifejezést tőkepiaci elemzések alátámasztásához, múltbeli és jelenbeli események magyarázatához. A közgazdász szakmai zsargon része, egyike az érzelmi töltettel bíró színes szakmai fogalmaknak. De tulajdonképpen mi is a buborék? Erre a kérdésre a matematikusok és a közgazdászok régóta keresik a megfelelő választ. Míg a matematikai megközelítés azt vizsgálja hogyan, addig a közgazdászok elsősorban azt, hogy miért alakul ki.

A témakör első fontosabb kérdése, hogy mi is maga a buborék. Sajnos a szakértők sem adnak egységes választ, de talán annyit mondhatunk, hogy az eszközárak fundamentumoktól elszakadó, hosszú távon fenn nem tartható dinamikájú emelkedése, amelyet rendszerint a várakozások megfordulása és az eszközárak zuhanása követ. Ezért gyakran csak utólag állíthatjuk, hogy buborék volt a piacon.

A közgazdászok már régóta foglalkoznak a témakörrel, de csupán az elmúlt tíz évben születtek matematikai modellek a buborék folyamatok leírására. Philip Protter, a Columbia Egyetem professzora kutatásai során azt a feltevést tanulmányozza, miszerint a buborék kialakulásáért a volatilitás a felelős. A kutatónak számos cikke jelent meg a témában, melyek közül a legjelentősebb *A Mathematical Theory of Financial Bubbles* [8] című.

Az első fejezetben a másik két fejezethez szükséges fogalmakat és állításokat ismertetem. A [11] és [12] cikkek alapján felépítem az eszközár buborék fogalmát mind teljes, mind nem teljes piacon. Továbbá az RKHS módszer könnyebb megértéséhez szükséges funkcionálanalízisbeli ismereteket elevenítem fel Kurics Tamás: Bevezetés a funkcionálanalízisbe ([6]) jegyzete alapján.

Az [10]-es cikk Florens-Zmirou becslését és egy magfüggvényes becslést javasol a volatilitás meghatározásához. Mindkét nemparaméteres eljárás a diffúzió lokális idején alapul. A második fejezetben ezek lényegi részeit ismertetem, értelmezem.

A harmadik fejezetben az eszközárr buborékok detektálásának elméleti részleteit taglalom. Bemutatom a paraméteres és az RKHS becslés egyes lépéseit. Ismertetem a reprodukáló magvú Hilbert-terek tulajdonságait, valamint újfajta interpolációs és extrapolációs eljárást mutatok be a [8] és a [10] cikkek alapján.

A negyedik fejezet az eddig bemutatott módszerek gyakorlati alkalmazása az **R** statisztikai program segítségével. Elvégzem a becsléseket, az interpolálást és az extrapolálást egy részvény és egy index napi záróárfolyamaira. A megírt kódokat a mellékelt CD tartalmazza.

1. fejezet

Az alapok

A fejezetben a buborékokkal kapcsolatban [11] és [12] cikkek lényegi részét foglalom össze, míg a funkcionálanalízisbeli fogalmakkal kapcsolatban a [6] könyv megfelelő részeit ismertetem.

Az eszközár folyamatot a következő sztochasztikus differenciálegyenlet határozza meg, amit egy Brown mozgás (W) hajt meg:

$$dS_t = \sigma(S_t)dW_t + \mu(S_t)dt \quad (1.1)$$

$\forall t \in [0, T]$ -re valamilyen $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ filtrált valószínűségi mezőn, ahol $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Azzal a logikus feltételezéssel élünk továbbá, hogy az eszköz ára (S) nemnegatív.

1.1. No Free Lunch Vanishing Risk

Feltételezzük, hogy a piac arbitrázsmentes, azaz az első pénzügyi alaptörvény szerint nincs arbitrázs a piacon, ha létezik Q ekvivalens lokális martingál mérték (ELMM). Tehát a pénzügyi eszközfolyamat lokális martingál a Q mérték szerint. Erre a gondolatmenetre szokás *No Free Lunch with Vanishing Risk* (NFLVR)-ként is hivatkozni.

Szükséges tisztáznunk, hogy mikor önfinszírozó egy kereskedési stratégia, valamint mikor lesz ez a stratégia megengedett. Szerencsére ezek a fogalmak mind teljes, mind nem

teljes piacon megegyeznek.

1.1.1. Definíció (Önfinanszírozás). Egy $(\pi_t, \eta_t)_{t \geq 0}$ kereskedési stratégia önfinanszírozó, ha a $V_t^{\pi, \eta}$ értékfolyamatára fennáll, hogy

$$dV_t = \pi_t dS_t + \eta_t dB_t$$

ahol S_t az eszközár folyamat, B_t a kockázatmentes kamatláb változásának folyamata, melyekből rendre π_t, η_t darabot veszünk az adott t időpontban.

1.1.2. Definíció (Megengedhetőség). Legyen $V_t^{\pi, \eta} = \pi_t S_t + \eta_t$ az értékfolyamatunk. Azt mondjuk, hogy a kereskedési stratégia a -megengedett, ha önfinanszírozó és $V_t^{\pi, \eta} \geq -a$ majdnem mindenütt. Azt mondjuk, hogy egy stratégia megengedett, ha önfinanszírozó és $\exists a \in \mathbb{R}_+$, amire $V_t^{\pi, \eta} \geq -a$. A megengedett stratégiák halmazát \mathcal{A} -val jelöljük.

Ennek ismeretében vezessünk be további két jelölést, amikre az NFLVR-nél szükségünk lesz. Legyen \mathcal{K} olyan halmaz, mely a végtelen életű megengedett stratégiák értékfolyamatait tartalmazza és \mathcal{C} pedig ennek a halmaznak azon mérhető függvényei, melyek korlátosak és nem pozitívak, azaz:

$$\mathcal{K} = \left\{ V_\infty^\pi = \int_0^\infty \pi_u dW_u : \pi \in \mathcal{A} \right\}$$

$$\mathcal{C} = (\mathcal{K} - L_+^0) \cap L^\infty$$

1.1.3. Definíció (No Free Lunch Vanishing Risk). Azt mondjuk, hogy a piac megfelel az NFLVR-nek, ha $\bar{\mathcal{C}} \cap L_+^\infty = \{0\}$, ahol $\bar{\mathcal{C}}$ jelöli \mathcal{C} lezártját az L^∞ szuprémum norma topológiában.

Heurisztikusan tehát az NFLVR kizár minden olyan megengedett stratégiát, melynek kezdeti befektetése 0 és a végén nemnegatív, sőt pozitív valószínűséggel pozitív értékű (az úgynevezett egyszerű arbitrázslehetőséget), valamint a kereskedési stratégiák olyan sorozatát, amik megközelítik ezeket.

1.1.1. Tétel. *A piac eleget tesz az NFLVR feltételnek akkor és csak akkor, ha létezik rajta kockázatmentes mérték (vagyis ekvivalens martingál mérték).*

1.2. Fundamentális ár

A buborékok definiálásához szükségünk lesz mind teljes, mind nem teljes piacon a fundamentális ár bevezetésére.

1.2.1. Teljes piacon

Definiáljunk egy kockázatos pénzügyi eszközt, amelynek jelenlegi értéke S_t . Tekintsünk egy teljes valószínűségi mezőt (Ω, \mathcal{F}, P) -t és egy filtrációt $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Ez a folyamat egy τ megállási időben megszűnik egy $X_\tau \geq 0 \in \mathcal{F}_\tau$ kifizetéssel, addig pedig osztalékot fizet, amit egy $D_t \geq 0$ folyamattal írhatunk le. A megszűnés oka lehet csőd, felvásárlás vagy összeolvadás másik vállalattal. Protter [11] feltételezése szerint ez a folyamat és a korábban definiált S_t is cadlag szemimartingál. Nézzük mit is jelent ez a kifejezés.

1.2.1. Definíció (cadlag folyamat). *Egy $(X_t)_{t \geq 0}$ folyamat cadlag folyamat, ha trajektóriái jobbról folytonosak és ha balról határértékkel rendelkezik.*

1.2.2. Definíció (szemimartingál). *Legyen $(X_t)_{t \geq 0}$ folytonos, adaptált sztochasztikus folyamat egy $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}, P)$ filtrált valószínűségi mezőn. Ekkor $(X_t)_{t \geq 0}$ szemimartingál a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ filtrációra nézve, ha teljesül rá, hogy*

$$X_t = X_0 + A_t + M_t$$

ahol $(A_t)_{t \geq 0}$ korlátos variációjú folyamat, $(M_t)_{t \geq 0}$ 0-ból induló folytonos lokális martingál és X_0 az $(X_t)_{t \geq 0}$ folyamat kezdeti értéke.

A $[0, T^*]$ időhorizonton dolgozunk, ahol T^* lehet egy véges, fix T értékű, vagy akár ∞ . Legyen τ a kockázatos eszköz élettartama, ami megállási idő és amire igaz, hogy $\tau \leq T^*$.

Ezen jelölések ismeretében definiáljuk a következő értékfolyamatot, ami a részvény árából, a felhalmozott osztalékból (azzal a feltételezéssel, hogy azt kockázatmentes kötvényben helyezték el) és a lejáratú érték összegéből áll, abban az esetben, ha már túl vagyunk rajta (ha $t \geq \tau$):

$$V_t = S_t + \int_0^{t \wedge \tau} dD_u + X_\tau 1_{\{\tau \leq t\}}$$

Mivel a kockázatos eszköz nem létezik τ után, ezért a $[0, \tau]$ intervallumra koncentrálunk.

1.2.3. Definíció (Fundamentális ár teljes piacon). *Egy eszköz fundamentális ára (S_t^*) az eszköz (S_t) jövőbeli diszkontált kifizetésének (cash flow-jának) a \mathbb{Q} kockázatsemleges mérték szerint vett feltételes várható értéke:*

$$S_t^* = E_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^\tau dD_u + X_\tau 1_{\{\tau < \infty\}} \mid \mathcal{F}_t \right] 1_{\{t < \tau\}}$$

1.2.2. Nem teljes piacon

Nem teljes piacon a piaci ár egybeesik az arbitrázsmentes árral, valamint a fundamentális árral. Emiatt szükségünk van a fenti definíció módosítására. Mielőtt ezt megtennénk vezessünk be néhány jelölést.

Legyen eszközünk ($\Lambda_t(\phi)$) kifizetése nem teljes piacon $\phi = (\Delta, \Xi_\tau)$ alakú, ahol τ konstans (ami itt is megállási idő lesz), $\Delta = (\Delta_t)_{0 \leq t \leq \tau}$ az eszköz által felhalmozott osztalék folyamat, ami cadlag, nemnegatív, nem csökkenő és \mathbb{F} adaptált szemimartingál. Továbbá $\Xi_\tau \in \mathcal{F}_\tau$ nemnegatív valószínűségi változó, ami adja az eszköz végső kifizetését a τ időpontban. Jelölje Φ_0 az összes kifizetés azon halmazát, ami előállítható ebben a formában. Sajnos ez a halmaz így túl nagy és hiányzik belőle pár - a későbbiekben fontos - tulajdonság. Ezért tekintsük a következőt:

1.2.4. Definíció. *Legyen $\Phi = \{\phi \in \Phi_0 : \exists \pi \in \mathcal{A}, a \in \mathbb{R}_+ : \Delta_\tau + \Xi_\tau \leq a + V_\tau^\pi\}$. Az így definiált halmazt szuper-replikált cash flow-k halmazának nevezzük.*

A szűkebb halmazba tehát olyan eszközök tartoznak, melyekhez létezik egy megenge-

dett stratégia és egy pozitív szám úgy, hogy az eszköz élettartamának a végén az osztalék és a kifizetés összege legfeljebb a konstans és a megengedett stratégia értékének az összege.

1.2.5. Definíció (Fundamentális ár nem teljes piacon). Legyen $\Lambda_t(\phi)$ az eszközünk $\phi \in \Phi$ kifizetéssel és τ lejáráttal. Ekkor az eszköz fundamentális ára:

$$\Lambda_t^*(\phi) = \sum_{i=0}^{\infty} E_{Q_i} \left[\int_t^{\tau} d\Delta_u + \Xi_{\tau} 1_{\{\tau < \infty\}} \mid \mathcal{F}_t \right] 1_{\{t < \tau\} \cap \{t \in [\nu_i, \nu_{i+1})\}}$$

$\forall t \in [0, \infty)$, ahol $\Lambda_{\infty}^* = 0$ és ahol Q_i a kiválasztott kockázatmentes mérték.

A két definíció közti átjárást adja a nem teljes piac teljessé tétele, vagyis ha egyértelművé válik a kockázatmentes mérték. Ekkor $\Lambda_t^*(\phi) = S_t^*$ teljesül.

1.3. No dominance

Tegyük fel, hogy két különböző módon reprodukálhatunk egy adott cash flow-t. Vegyünk egyrésztől egy olyan eszközt, mely a megadott módon viselkedik. Másrésztől pedig készítsünk egy megengedett kereskedési stratégiát, ami szintén a kívánt pénzáramlást adja vissza. Az eszközt nevezzük el A-nak, míg a kialakított portfóliót B-nek. Ezenfelül tegyük fel, hogy A ára magasabb, mint az az összeg, amit a B előállítására költenénk. Ebben az esetben a B dominálja az A eszközt, mivel ugyanaz a cash flow-ja, de alacsonyabb az ára.

Ez a szituáció könnyen láthatóan egyszerű arbitrázslehetőséggel rendelkezik. Kockázat nélküli nyereségre teszünk szert ugyanis azáltal, hogy az A-t short-oljuk (eladjuk) és a B stratégiát pedig long-oljuk (megvesszük). Viszont, mivel a befektetők racionális gondolkodásúak, ezért nem fognak A-t vásárolni, hiszen ugyanazt a cash flow-t olcsóbban is megszerezhetik. Ezért egy jól működő piacon nem szeretnénk látni domináló eszközt vagy portfóliót.

1.3.1. Teljes piacon

A fenti gondolatnak megfelelően tegyük fel, hogy a piacon két eszközünk is ugyanazt a cash flow-t produkálja, amiket a következő párokkal karakterizálhatunk: $(\{D_{1,t}\}_{t \geq 0}, X_{1,\tau})$,

$(\{D_{2,t}\}_{t \geq 0}, X_{2,\tau})$. Legyen ezen eszközök ára rendre $S_{1,t}$ és $S_{2,t}$.

1.3.1. Feltételezés (Nincs Dominancia teljes piacon). Minden ν megállási időre, ha

$$D_{2,\nu+c} - D_{2,\nu} \geq D_{1,\nu+c} - D_{1,\nu} \quad \text{és} \quad X_{2,\tau} 1_{\{\tau > \nu\}} \geq X_{1,\tau} 1_{\{\tau > \nu\}}$$

$c > 0$ -ra, akkor $S_{2,\nu} \geq S_{1,\nu}$.

Továbbá, ha $\exists \nu$ megállási idő pozitív valószínűséggel, hogy

$$E\{1_{(\{D_{2,\infty} - D_{2,\nu} > D_{1,\infty} - D_{1,\nu}\} \cup \{X_{2,\tau} 1_{\{\tau > \nu\}} > X_{1,\tau} 1_{\{\tau > \nu\}}\})} \mid \mathcal{F}_\nu\} > 0$$

akkor $S_{2,\nu} > S_{1,\nu}$.

1.3.2. Nem teljes piacon

Jelöljük a ϕ eszközünk piaci árát a t időpontban $\Lambda_t(\phi)$ -vel. Egy megállási időpárra ($\nu < \kappa \leq \tau$) legyen a nettó nyereség a következő:

$$G_{\nu,\kappa}(\phi) = \Lambda_\kappa(\phi) + \int_\nu^\kappa d\Delta_s + \Xi^\tau 1_{\{\tau = \kappa\}} - \Lambda_\nu(\phi)$$

1.3.1. Definíció (Dominancia). Legyen $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$ két eszköz. Ha létezik egy megállási idő $\nu < \tau$ úgy, hogy

$$G_{\nu,u}(\phi_2) \geq G_{\nu,u}(\phi_1), \quad \forall u > \nu$$

majdnem mindenütt, és ha $\exists \nu \leq \kappa \leq \tau$ megállási idő, hogy

$$E[1_{\{G_{\nu,\kappa}(\phi_2) > G_{\nu,\kappa}(\phi_1)\}} \mid \mathcal{F}_\nu] > 0$$

majdnem mindenütt, akkor azt mondjuk, hogy a 2-es eszköz dominálja az 1-est a ν időpontban.

1.3.2. Feltételezés (Nincs dominancia nem teljes piacon). A piaci árát a $\Lambda_t : \Phi \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény reprezentálja úgy, hogy ne legyen dominált eszköz a piacon.

1.4. A buborékok karakterizációja

A fenti információk ismeretében már lehetőségünk van a buborékok definiálására, ami a két piacon ezután egybeesik.

1.4.1. Definíció (Buborék). *Az eszközárbuborék a t időpillanatban az adott eszköz piaci és fundamentális árának a különbsége.*

A buborék tehát teljes piacon $\beta_t = S_t - S_t^*$, míg nem teljes piacon $\beta_t = \Lambda_t(\phi) - \Lambda_t^*(\phi)$ alakba írható. Protter [11] első megállapítása az volt, hogy a részvény árfolyama mindig meghaladja a fundamentális árát. Ebből következik, hogy minden időpillanatban kialakulhat buborék. Ezt először osztalékot nem fizető részvény és konstans 0 kamatláb mellett mutatta meg, de az állítás a megszorítások elhagyásával is igaz.

1.4.1. Tétel. *Legyen S nemnegatív eszközárbuborék folyamat és tegyük fel, hogy S nem fizet osztalékot. Továbbá tegyük fel, hogy a spot kamatláb konstans és egyenlő 0-val. Legyen \mathbb{Q} a kockázatmentes mérték, ami alatt S lokális martingál (azaz szupermartingál). Legyen S^* a részvény fundamentális ára a \mathbb{Q} mérték alatt és legyen $\beta_t = S_t - S_t^*$. Ekkor $\beta \geq 0$.*

Bizonyítás: Mivel feltettük, hogy nincs osztalék és a spot kamatláb 0, ezért a fundamentális ár a következő egyszerű alakban számolható:

$$S_t^* = E_{\mathbb{Q}}(X_{\tau} 1_{\{\tau \leq T^*\}} \mid \mathcal{F}_t)$$

Mivel \mathbb{Q} alatt az eszközárbuborék folyamat szupermartingál (mert nem negatív és lokális martingál), ezért igaz a következő:

$$E_{\mathbb{Q}}(S_{\tau} \mid \mathcal{F}_t) \leq S_t$$

Tudjuk, hogy $S_{\tau} = X_{\tau} 1_{\{\tau \leq T^*\}}$. Innen pedig már látható, hogy igaz a tétel. \square

Szükségünk lesz a szigorúan lokális martingál definíciójára, aminek több lehetséges formája is van. Például Delbaen és Schachermayer nézete szerint a szigorúan lokális martingál olyan lokális martingál, ami nem egyenletesen integrálható. Egy jobban használható

definíciót a buborékok tanulmányozásához Jarrow, Protter és Shimbo [10] adott, amit a továbbiakban megfelelőnek tartunk.

1.4.2. Definíció (Szigorúan lokális martingál). *Egy folyamat szigorúan lokális martingál, ha lokális martingál, de nem martingál.*

A buborékokat mind teljes, mind nem teljes piacon ugyanúgy karakterizálhatjuk. Tekintsük ehhez a következő tételt, aminek a bizonyítása megtalálható a [11] cikkben.

1.4.2. Tétel. *Ha létezik az eszközárnak nem triviális buboréka ($\beta_t \neq 0$), akkor pontosan három lehetőség áll fent:*

1. β_t lokális martingál és egyenletesen integrálható, ha $\mathbb{P}(\tau = \infty) > 0$.
2. β_t lokális martingál, de nem egyenletesen integrálható, ha τ nem korlátos, de $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.
3. β_t szigorúan lokális martingál, ha τ egy korlátos megállási idő.

A tétel alapján a τ jellege szerint a buborékoknak 3 típusát különböztethetjük meg. Az első típus akkor áll fenn, ha az eszköz végtelen életű és a kifizetése $\{\tau = \infty\}$ -kor történik. Második típusról beszélünk, ha ugyan az eszköz véges életű, de nem korlátos. Végül harmadik típusú a buborék, ha az eszközünk élete korlátos.

A dolgozat szempontjából a harmadik típus a releváns. Tehát a buborék szigorúan lokális martingál, és mivel a fundamentális ár is lokális martingál, ebből következik, hogy az eszközár folyamat is szigorúan lokális martingál.

1.5. Funkcionálanalízisbeli fogalmak

A következőkben tekintsünk két olyan fogalmat, melyekre a harmadik fejezetben szükségünk lesz ahhoz, hogy definiálhassuk és alkalmazhassuk a reprodukált magvú Hilbert-tereket.

1.5.1. Szoboljev-tér

A Szoboljev-tér nevét Sergei Sobolev orosz matematikusról kapta. Fogalma a parciális differenciálegyenletek elméletében rendkívül fontos, melyet általánosabban, több változóra szokás bevezetni.

A p -edrendű N dimenziós Szoboljev-terek a következő alakban írhatók:

$$W^{n,p}(I) = \{f \mid f \in C^{n-1}(I), f^{(n-1)} \text{ abszolút folytonos függvény, melyre } f^{(n)} \in L^p(I)\}$$

Azaz olyan I -n értelmezett $n - 1$ -szer folytonos függvényeket tartalmaznak, melyek $n - 1$ -edik deriváltja abszolút folytonos és melyeknek n -ik deriváltja L^p -beli (vagyis p -edik hatványa integrálható).

Bevezethető ezen a téren egy norma az alábbi alakban:

$$\|f\|_{W^{n,p}} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_{L^p}$$

ahol

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \inf\{\sup_{I \setminus U} |f| : U \subset I \text{ nullmértékű}\} & \text{ha } p = +\infty \end{cases}$$

1.5.2. Hilbert-tér

A Hilbert-teret David Hilbertről nevezték el, aki az integrálegyenletekkel kapcsolatban tanulmányozta azokat. Az elnevezés eredete "der abstrakte Hilbertsche Raum" Neumann Jánostól származik, a nemkorlátos hermitikus operátorokról szóló 1929-es híres cikkéből. Neumann volt talán az a matematikus, aki legtisztábban látta a jelentőségét annak a megtermékenyítően ható munkájának következtében, mellyel a kvantummechanikát szilárd alapokra helyezte. A "Hilbert-tér" elnevezést hamarosan mások is elfogadták, például Hermann Weyl az 1931-ben publikált *A csoportok és a kvantummechanika elmélete* című könyvében.

A Hilbert-tér egy olyan tér, amin értelmezett egy skalárszorzás is az elemek között.

1.5.1. Definíció (Skalárszorzat). Legyen H vektortér \mathbb{C} felett. Egy $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ leképezést skalárszorzatnak nevezünk, ha

1. Minden $y \in H$ -ra az $x \mapsto \langle x, y \rangle$ leképezés lineáris funkcionál,
2. Minden $x, y \in H$ -ra $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$,
3. Minden $x \in H$ -ra, amire $\langle x, x \rangle \geq 0$ és $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ezen ismeret elsajátítása után könnyen bevezethető egy norma az $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ definícióval.

1.5.2. Definíció (Hilbert-tér). A $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi teret Hilbert-térnek nevezzük, ha H az indukált normával teljes (azaz minden Cauchy sorozat konvergens).

2. fejezet

Volatilitás becslése

A volatilitásfüggvény ($\sigma(x)$) becslésére rengeteg különféle becslés adható. Danielle Florens-Zmirou egy nemparaméteres becslést javasol, ami a diffúziós folyamat lokális idején alapszik. Egy másik lehetőség Genon Catalot és Jacod munkájának eredménye. Ők a parametrizálásra javasolnak becslési eljárást. A most bemutatott két nemparaméteres módszert a valós világban végezzük el és nem pedig a kockázatsemlegesben. A fejezetben az [10] cikk alapján mutatjuk be az egyes becsléseket, melyek megértésében nagy szerepet játszottak a [2], [5] és [9] cikkek is.

Tekintsünk diszkrét megfigyeléseket a $[0, T]$ intervallumban, azaz vesszük az S_{t_1}, \dots, S_{t_n} -t. Feltesszük még, hogy egyenletes a mintavétel, azaz $t_i = \frac{i}{n}T$ teljesül $i = 1, 2, \dots, n$ -re.

2.1. Florens-Zmirou becslés

Amint azt említettük, Florens-Zmirou becslése a lokális időn alapul. A matematikában a sztochasztikus folyamatok elméletén belül a lokális idő a diffúziós folyamatokhoz kapcsolódik, mint amilyen a Brown-mozgás, ahol azt írja le, hogy egy részecske mennyi időt tölt egy adott szinten. Ez a fogalom nagyon hasznos, mert gyakran megjelenik a sztochasztikus integrál formulákban, ha az integrandus nem elég sima. Az alapötlet, hogy $l_T(x)$ egy (átskálázott) mértéke annak, hogy S_s mennyi időt tölt x -ben a T időpontig,

tehát a következőt mondhatjuk:

2.1.1. Definíció (Lokális idő). *A lokális idő a következő alakban áll elő:*

$$l_T(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T 1_{\{|S_s - x| < \varepsilon\}} d[S, S]_s$$

ahol $d[S, S]_s$ a kvadratikus variációt jelenti.

Tudjuk, hogy S dinamikája a következő alakban áll elő:

$$dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t$$

Ebből könnyen számolható a kvadratikus variáció, ami $d[S, S]_t = \sigma^2(S_t)dt$ lesz, amit beírva a fenti képletbe:

$$l_T(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T 1_{\{|S_s - x| < \varepsilon\}} d[S, S]_s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T 1_{\{|S_s - x| < \varepsilon\}} \sigma^2(x) ds = \sigma^2(x) L_T(x)$$

Így tehát kapjuk, hogy $l_T(x) = \sigma^2(x) L_T(x)$, ahol

$$L_T(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T 1_{\{|S_s - x| < \varepsilon\}} ds$$

Ebből látható, hogy a fenti két mennyiség hányadosa fogja adni az x volatilitását, vagyis $\frac{l_T(x)}{L_T(x)} = \sigma^2(x)$.

Ezek a határértékek és integrálok a következő szummákkal becsülhetőek:

$$L_T^n = \frac{T}{2nh_n} \sum_{i=1}^n 1_{\{|S_{t_i} - x| < h_n\}}$$

$$l_T^n = \frac{T}{2nh_n} \sum_{i=1}^n 1_{\{|S_{t_i} - x| < h_n\}} n(S_{t_{i+1}} - S_{t_i})^2$$

ahol h_n 0-hoz konvergáló pozitív valós számok sorozata. Ezen mennyiségek ismeretében már meg tudjuk adni a becslést, ami - ha h_n eleget tesz bizonyos feltételeknek - a követ-

kezőből kapható:

$$\hat{\sigma}_{FZ}^2(x) = \frac{l_T(x)}{L_T(x)} = \frac{\frac{T}{2nh_n} \sum_{i=1}^n 1_{\{|S_{t_i}-x|<h_n\}} n(S_{t_{i+1}} - S_{t_i})^2}{\frac{T}{2nh_n} \sum_{i=1}^n 1_{\{|S_{t_i}-x|<h_n\}}} = \frac{\sum_{i=1}^n 1_{\{|S_{t_i}-x|<h_n\}} n(S_{t_{i+1}} - S_{t_i})^2}{\sum_{i=1}^n 1_{\{|S_{t_i}-x|<h_n\}}}$$

Florens-Zmirou [2] bebizonyította a következő két tételt. Az első $\hat{\sigma}_{FZ}^2(x)$ és $\sigma^2(x)$ kapcsolatáról szól adott feltételek mellett, míg a második $\sigma^2(x)$ becslésének konfidencia intervallumáról.

2.1.1. Tétel. *Legyen σ alulról és felülről is korlátos, $\sigma \neq 0$ és háromszor folytonosan és korlátosan deriválható. Teljesüljön a $(h_n)_{n \geq 1}$ sorozatra, hogy $nh_n \rightarrow \infty$ és $nh_n^4 \rightarrow 0$. Ekkor azt mondjuk, hogy $\hat{\sigma}_{FZ}^2(x)$ konzisztens becslése $\sigma^2(x)$ -nek, azaz az x volatilitásának.*

2.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az előző tétel feltételei fennállnak. Teljesüljön $(h_n)_{n \geq 1}$ sorozatra továbbá még, hogy $nh_n^3 \rightarrow 0$. Ekkor*

$$\sqrt{N_x^n} \left(\frac{\hat{\sigma}_{FZ}^2(x)}{\sigma^2(x)} - 1 \right) \xrightarrow{d} \sqrt{2}Z$$

ahol " \xrightarrow{d} " az eloszlásbeli konvergenciát jelöli, $Z \sim N(0, 1)$ valószínűségi változó és

$$N_x^n = \sum_{i=1}^n 1_{\{|S_{t_i}-x|<h_n\}}.$$

Az első tétel akkor is igaz marad, ha gyengítjük a feltételt, azaz $nh_n^4 \rightarrow 0$ helyett $nh_n^2 \rightarrow \infty$ kikötést alkalmazunk. Azonban a becslés, amit ad nekünk nem elég sima ahhoz, hogy a gyakorlatban dolgozhassunk vele. Az is egy probléma, hogy nem áll rendelkezésünkre annyi adat, amennyi a Florens-Zmirou becsléshez szükséges lenne. Emiatt egy másik eljárást dolgoztak ki, amit a következő fejezetben mutatok be.

2.2. Magfüggvényes becslés

Tegyük fel, hogy $T=1$ és $\sigma(x)$ alulról és felülről is korlátos, valamint nem egyenlő 0-val, C^3 függvény korlátos deriváltakkal. Ezek a feltételek fogják garantálni azt, hogy

létezik erős megoldás.

Jelölje \mathcal{Q} a valószínűségi mértékek terét a $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}$ filtrációval, ami mellett az $(S_t; 0 \leq t \leq 1)$ megoldása az (1.1) sztochasztikus differenciálegyenletnek. Legyen \mathcal{D} egy olyan kompakt intervallum, ami reprezentálja azt a tartományt, ahol a becslést el szeretnénk végezni. Csak azokban a pontokban tudjuk elvégezni a volatilitás becslését, amiket a diffúzió meglátogat.

2.2.1. Definíció (magfüggvény). *Azt a nemnegatív, valós értékű és integrálható függvényt (K -t), amelyre fennáll, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)du = 1$ és $K(-u) = K(u)$, $\forall u$ -ra magfüggvénynek nevezzük.*

A gyakorlatban több alakját különböztethetjük meg (pl.: uniform, triangular, Epanechnikov, Gauss ...). Mi most a négyzet alakú magfüggvényt fogjuk tekinteni, ami a következőképpen írható fel:

$$K(x) = \frac{1}{2} 1_{\{|x| < 1\}}$$

Az alapötlet, hogy az előző fejezetben tárgyalt l_T^n és L_T^n kifejezésekben található magfüggvényeket kicseréljük egy sima magfüggvényre, ami C^6 -beli, kompakt tartójú, pozitív függvény és teljesül rá, hogy $\int_{\mathbb{R}^+} K = 1$. Egy kisebb átalakításra van szükségünk mielőtt ezt megtesszük, ahol felhasználjuk, hogy $T = 1$ és $t_i = \frac{i}{n}$, $\forall i$ -re.

$$L_T^n = \frac{T}{2nh_n} \sum_{i=1}^n 1_{\{|S_{t_i} - x| < h_n\}} = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} 1_{\left\{ \left| \frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n} \right| < 1 \right\}}$$

$$l_T^n = \frac{T}{2nh_n} \sum_{i=1}^n 1_{\{|S_{t_i} - x| < h_n\}} n (S_{t_{i+1}} - S_{t_i})^2 = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} 1_{\left\{ \left| \frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n} \right| < 1 \right\}} n \left(S_{\frac{i+1}{n}} - S_{\frac{i}{n}} \right)^2$$

Ezek után elvégezhetjük a cserét, mert mindkét mennyiségnél megkaptuk azt a kifejezést, amivel a $K(x)$ egyenlő lesz:

$$L_n^x = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n} \right) \quad (2.1)$$

$$V_n^x = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n} \right) n \left(S_{\frac{i+1}{n}} - S_{\frac{i}{n}} \right)^2 \quad (2.2)$$

A továbbiakban ennek a két kifejezésnek az L^p -beli konvergenciáját fogjuk vizsgálni. Reményeink szerint az első L^x -hez, míg a második $\sigma^2(x)L^x$ -hez fog tartani, ha teljesül a h_n sorozatunkra, hogy $nh_n^2 \rightarrow \infty$. Ehhez 8 lemmát fogok ismertetni, melyek közül párnak ismertettem a bizonyítását is.

2.2.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy ϕ -t a fenti (2.1) és (2.2) alakból kapjuk, ami C^3 függvény. Ekkor $\forall \gamma \geq 2 \exists C$ konstans, hogy*

$$\sup_{x \in \mathcal{D}} E(|L_n^x - L^x|^\gamma) \leq C \left(h_n^{\frac{\gamma}{2}} + \left(\frac{1}{nh_n^2} \right)^\gamma \right)$$

2.2.2. Lemma. $\forall x \in \mathcal{D}$ -re $V_n^x \xrightarrow{L^1} \sigma^2(x)L^x$, azaz teljesül az L^1 -beli konvergencia.

Fő célunk a 2.2.2. Lemma bizonyítása. Ennek érdekében tekintsük a $V_n^x - \sigma^2(x)L^x$ kifejezést. Tegyük fel, hogy ez előáll valamilyen $A_n(x) + B_n(x)$ alakban, ahol:

$$A_n(x) = \frac{1}{h_n} \int_0^1 K \left(\frac{X_s - x}{h_n} \right) \sigma^2(X_s) ds - \sigma^2(x)L^x$$

$$B_n(x) = V_n^x - \frac{1}{h_n} \int_0^1 K \left(\frac{X_s - x}{h_n} \right) \sigma^2(X_s) ds$$

A továbbiakban célunk fix $x \in \mathcal{D}$ mellett belátni ezen mennyiségekről, hogy L^1 -ben konvergálnak a 0-hoz.

2.2.3. Lemma. $\forall \gamma \geq 2 \exists c > 0$, hogy $E|A_n|^\gamma \leq ch_n^{\frac{\gamma}{2}}$ teljesüljön.

A bizonyítás előtt szükségünk lesz az occupation időformula állítására.

2.2.1. Állítás (Occupation időformula). Legyen $X = (X_t)_{t \geq 0}$ folytonos szemimartingál. Ekkor minden $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátosan mérhető függvényre teljesül, hogy

$$\int_0^t g(X_s) d[X, X]_s = \int_{\mathbb{R}} g(x) l_t^x dx$$

Bizonyítás: [2.2.3 Lemma] Legyen $l = (l_t^x)$ a lokális idő diffúzió a $t = 1$ időpillanatban. Nézzük az A_n kifejezést. Az első tagban $d[X, X]_s = \sigma^2(X_s) ds$ teljesül a kvadratikus variációra, így tudjuk alkalmazni az occupation időformulát. Kapjuk, hogy

$$\frac{1}{h_n} \int_0^1 K\left(\frac{X_s - x}{h_n}\right) \sigma^2(X_s) ds = \frac{1}{h_n} \int_{\mathbb{R}^+} K\left(\frac{y - x}{h_n}\right) l^y dy$$

A második kifejezésnél felhasználunk két már ismert tulajdonságot. Az egyik, hogy $\int_{\mathbb{R}^+} K = 1$, míg a másik, hogy $l^x = \sigma^2(x) L^x$. Ekkor

$$\sigma^2(x) L^x = \frac{1}{h_n} \int_{\mathbb{R}^+} K\left(\frac{y - x}{h_n}\right) l^y dy$$

Ezután a két kifejezést A_n -ben össze tudjuk vonni, és kapjuk, hogy

$$A_n = \frac{1}{h_n} \int_{\mathbb{R}^+} K\left(\frac{y - x}{h_n}\right) (l^y - l^x) dy$$

Használjuk most a Jensen egyenlőtlenséget $E|A_n|^\gamma$ kifejezésre, valamint egy helyettesítést, hogy egyszerűbb kifejezést kapjunk. Legyen $y = zh_n + x$. Ekkor $z = \frac{y-x}{h_n}$ és $dy = h_n dz$.

$$\begin{aligned} E|A_n|^\gamma &= E \left| \frac{1}{h_n} \int_{\mathbb{R}^+} K\left(\frac{y - x}{h_n}\right) (l^y - l^x) dy \right|^\gamma = E \left| \frac{1}{h_n} \int_{\mathbb{R}} K(z) (l^{zh_n+x} - l^x) h_n dz \right|^\gamma = \\ &= E \left| \int_{\mathbb{R}^+} K(z) (l^{zh_n+x} - l^x) dz \right|^\gamma \leq E \int_{\mathbb{R}^+} |K(z) (l^{zh_n+x} - l^x)|^\gamma dz = \\ &= E \int_{\mathbb{R}^+} |l^{zh_n+x} - l^x|^\gamma K(z)^\gamma dz \end{aligned}$$

Most használjuk a Fubini tételt és a Hölder tulajdonságát a lokális időnek.

$$E|A_n|^\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^+} E(K(z)^\gamma |l^{zh_n+x} - l^x|^\gamma) dz = \int_{\mathbb{R}^+} K(z)^\gamma E(|l^{zh_n+x} - l^x|^\gamma) dz$$

$$\leq h_n^{\frac{\gamma}{2}} \int_{\mathbb{R}^+} |z|^{\frac{\gamma}{2}} K(z)^\gamma dz$$

Mivel K kompakt tartójú, ezért $c = \int_{\mathbb{R}^+} |z|^{\frac{\gamma}{2}} K(z)^\gamma dz$. Ekkor kapjuk, hogy $E |A_n|^\gamma \leq ch_n^{\frac{\gamma}{2}}$, ami a lemmát bizonyítja. \square

Bontsuk fel B_n -t a következőképpen: $-B_n = C_n + D_n$, ahol

$$C_n = \frac{1}{h_n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \left(K\left(\frac{S_s - x}{h_n}\right) \sigma^2(S_s) - K\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \sigma^2(S_{\frac{i}{n}}) \right) ds$$

$$D_n = \frac{1}{h_n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} K\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \left(\sigma^2(S_{\frac{i}{n}}) - n \left(S_{\frac{i+1}{n}} - S_{\frac{i}{n}} \right)^2 \right) ds$$

Legyen $X_i^n = \sqrt{n} \sigma(S_{\frac{i}{n}}) (W_{\frac{i+1}{n}} - W_{\frac{i}{n}})$ és $Y_i^n = \sqrt{n} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \sigma(S_s) dW_s$. Tekintsük Genon-Catalot és Jacod [10] lemmáját, amire szükségünk lesz a továbbiakban.

2.2.4. Lemma. *Legyen $g \in C^2$. Tegyük fel, hogy létezik $\gamma > 0$ úgy hogy, minden x -re $|g(x)| + |g'(x)| + |g''(x)| \leq \gamma(1 + |x|^\gamma)$. Ekkor létezik egy C konstans, hogy*

$$E \left((g(X_i^n) - g(Y_i^n))^2 \mid \mathcal{F}_{\frac{i}{n}} \right) \leq \frac{C}{n}$$

Továbbá, ha g még páros függvény is, akkor $\left| E \left(g(X_i^n) - g(Y_i^n) \mid \mathcal{F}_{\frac{i}{n}} \right) \right| \leq \frac{C}{n}$ teljesül.

Ennek ismeretében tanulmányozhatjuk D_n -t.

2.2.5. Lemma. *Létezik egy $C > 0$ konstans, hogy*

$$E |D_n| \leq \frac{C}{n} E \left(\frac{1}{nh_n} \sum_{i=0}^{n-1} K\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \right)$$

teljesül, továbbá D_n L^1 -ben konvergál 0-hoz.

Bizonyítás: D_n -t alakítsuk át egy általunk jobban preferált alakra. Az első tagot kiintegráljuk, míg a második tagnál felhasználjuk, hogy a Wiener-folyamat kvadratikus

variációja dt és, hogy $\sigma^2(S_s) = n(S_{\frac{i+1}{n}} - S_{\frac{i}{n}})$.

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{h_n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} K\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \left(\sigma^2(S_{\frac{i}{n}}) - n\left(S_{\frac{i+1}{n}} - S_{\frac{i}{n}}\right)^2\right) ds = \\ &= \frac{1}{h_n} \sum_{i=0}^{n-1} K\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \left(\frac{\sigma^2(S_{\frac{i}{n}})}{n} - \left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \sigma(S_s) dW_s\right)^2\right) \end{aligned}$$

Legyen $g(x) = x^2$. Ekkor

$$\begin{aligned} E|D_n| &\leq \frac{1}{h_n} \sum_{i=0}^{n-1} E\left(K\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \left|E\left(\frac{\sigma^2(S_{\frac{i}{n}})}{n} \middle| \mathcal{F}_{\frac{i}{n}}\right) - E\left(\left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \sigma(S_s) dW_s\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\frac{i}{n}}\right)\right|\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{h_n} \sum_{i=0}^{n-1} E\left(K\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \left|E(g(X_i^n) - g(Y_i^n) \middle| \mathcal{F}_{\frac{i}{n}})\right|\right) \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy feltételes várható érték várható értéke egy közönséges várható érték, hogy összeg várható értéke a várható értékek összege valamint, hogy $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Mivel a g páros függvény, ezért az előző lemma második állítását tudjuk alkalmazni. Így azt mondhatjuk, hogy létezik egy C konstans, hogy

$$\left|E\left(g(X_i^n) - g(Y_i^n) \middle| \mathcal{F}_{\frac{i}{n}}\right)\right| \leq \frac{C}{n}.$$

Innen $E|D_n| \leq \frac{C}{n} E\left(\frac{1}{nh_n} \sum_{i=0}^{n-1} K\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \middle| \mathcal{F}_{\frac{i}{n}}\right)$, ami igazolja a lemmánk első állítását. Továbbá, ha felhasználjuk a 2.2.1-es lemmát, akkor kapjuk, hogy ez a szumma konvergál a diffúzió lokális idejéhez x -ben és $E|D_n| \rightarrow 0$ igaz, ami az L^1 -beli konvergencia. \square

A fenti lemmák segítségével tehát beláttuk, hogy a D_n L^1 -ben 0-hoz tart. Ezek után tekintsük a C_n tagot, ami a következő alakban áll elő:

$$C_n = \frac{1}{h_n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \left(K\left(\frac{S_s - x}{h_n}\right) \sigma^2(S_s) - K\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \sigma^2(S_{\frac{i}{n}})\right) ds$$

A könnyebb tanulmányozás céljából vezessük be az $f(y) = K\left(\frac{y-x}{h_n}\right)\sigma^2(y) \in C^3$ függvényt és nézzük annak harmadrendű Taylor-sorfejtését a Lagrange-féle maradéktaggal. Vagyis $\forall s \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \exists \xi_{\frac{i}{n}}$, hogy f a következő alakba írható:

$$f(S_s) = f(S_{\frac{i}{n}}) + f'(S_{\frac{i}{n}})(S_s - S_{\frac{i}{n}}) + \frac{f''(S_{\frac{i}{n}})}{2}(S_s - S_{\frac{i}{n}})^2 + \frac{f^{(3)}(\xi_{\frac{i}{n}})}{6}(S_s - S_{\frac{i}{n}})^3$$

A C_n kifejezést tehát fel tudjuk bontani a következő 4 tag összegére:

$$\begin{aligned} C_{n,1} &= \frac{1}{h_n} \sum_{n-1}^{i=0} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \left((S_s - S_{\frac{i}{n}}) K\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) (\sigma^2)'(S_{\frac{i}{n}}) \right. \\ &\quad + \frac{(S_s - S_{\frac{i}{n}})^2}{2} \left(\frac{2}{h_n} K'\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) (\sigma^2)'(S_{\frac{i}{n}}) + K\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) (\sigma^2)''(S_{\frac{i}{n}}) \right) \\ &\quad + \frac{(S_s - S_{\frac{i}{n}})^3}{6} \left(\frac{3}{h_n^2} K''\left(\frac{\xi_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) (\sigma^2)'(\xi_{\frac{i}{n}}) + \frac{3}{h_n} K'\left(\frac{\xi_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) (\sigma^2)''(\xi_{\frac{i}{n}}) \right. \\ &\quad \left. \left. + K\left(\frac{\xi_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) (\sigma^2)^{(3)}(\xi_{\frac{i}{n}}) \right) \right) \\ C_{n,2} &= \frac{1}{h_n^2} \sum_{i=0}^{n-1} K'\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \sigma^2(S_{\frac{i}{n}}) \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (S_s - S_{\frac{i}{n}}) ds \\ C_{n,3} &= \frac{1}{h_n^3} \sum_{i=0}^{n-1} K''\left(\frac{S_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \sigma^2(S_{\frac{i}{n}}) \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{(S_s - S_{\frac{i}{n}})^2}{2} ds \\ C_{n,4} &= \frac{1}{h_n^4} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} K^{(3)}\left(\frac{\xi_{\frac{i}{n}} - x}{h_n}\right) \sigma^2(\xi_{\frac{i}{n}}) \frac{(S_s - S_{\frac{i}{n}})^3}{6} ds \end{aligned}$$

A következő lemma ezen kifejezések konvergenciájáról mond nekünk valamit, melynek bizonyítása megtalálható a [10] cikkben.

2.2.6. Lemma. *Ha $h_n \rightarrow 0$ és $nh_n^2 \rightarrow \infty$, akkor $C_{n,1}, C_{n,2}, C_{n,3}, C_{n,4} \xrightarrow{L_1} 0$.*

Ezeket a lemmákat összerakva kapjuk, hogy C_n tart a 0-ba az L^1 normában. Végül tehát tényleg azt mondhatjuk, hogy $L_n^x \xrightarrow{L^p} 0$, $\forall p > 0$ -ra és, hogy $V_n^x - \sigma^2(x)L^x$ konvergál a 0-hoz L^1 normában, ami a 2.2.2 Lemma bizonyításának vége.

A következő tétel innen már könnyen adódik.

2.2.1. Tétel. Ha $h_n \rightarrow 0$ és $nh_n^2 \rightarrow \infty$, akkor $\hat{\sigma}_{JCK}^2 = \frac{V_n^x}{L_n^x} 1$ valószínűséggel tart $\sigma^2(x)$ -hez és ez egy konzisztens becslését adja $\sigma^2(x)$ -nek.

A [10] cikk véleménye szerint h_n -t célszerű $\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ -nek, vagy ha simább becslést szeretnénk kapni, akkor $\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}$ -nek választani.

3. fejezet

Buborékok detektálása

Az egyik legfontosabb kérdés, hogy az előző két fejezetben ismertetett elképzelést hogyan tudjuk a gyakorlatban hasznosítani, azaz hogyan állapítható meg egy részvényár-folyam-folyamatról, hogy szigorúan lokális martingál vagy sem. Ebben a fejezetben erre szeretnénk választ adni. A továbbiakban a [8] és az [10] megfelelő fejezeteinek lényegi részét foglalom össze, melyek megértésében sokat merítettem az [1], [3], [4], [7] és [13] cikkekből.

Ehhez tekintsünk egy olyan eszközt, mely nem fizet osztalékot és legyen a kockázatmentes kamatláb 0. Ekkor az S_t legyen a következő sztochasztikus differenciálegyenlet egyértelmű, erős megoldása:

$$dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t$$

ahol W a standard Wiener-folyamat. Ezt a Girsanov-tétel segítségével módosíthatjuk:

3.0.2. Tétel (Girsanov-tétel). *Tegyük fel, hogy Q és Q^* ekvivalens mértékek és a Radon-Nikodyn-deriváltakból álló Z_t folyamat folytonos trajektóriájú martingál. Legyen W_t Wiener-folyamat a Q martingál alatt és legyen egy sztochasztikus folyamatunk S_t . Ekkor a*

$$dW_t^* = dW_t + d[W, S]_t$$

(ahol $d[W, S]_t$ a kvadratikus kovariáció) szintén Wiener-folyamat lesz a Q^* mérték alatt.

Nézzük mi lesz a kvadratikus kovariáció:

$$d[W, S]_t = dW_t dS_t = \mu(S_t) dt dW_t + \sigma(S_t) dW_t dW_t = \sigma(S_t) dt$$

Így a Q^* alatti Wiener folyamat $dW_t^* = dW_t + \sigma(S_t) dt$ alakban írható és ekkor az eszközár folyamatunkat a következő egyszerűbb alakra módosíthatjuk:

$$dS_t = \mu(S_t) dt + \sigma(S_t) [dW_t^* - \sigma(S_t) dt] = [\mu(S_t) - \sigma(S_t)] dt + \sigma(S_t) dW_t^*$$

Mivel a Q^* mérték ekvivalens martingálmérték, ezért a "dt"-s tag együtthatója 0 kell legyen. Innen adódik az eszközár folyamat dinamikájára, hogy $dS_t = \sigma(S_t) dW_t^*$.

Ekkor bebizonyítható, hogy a differenciálegyenlet megoldásaként definiált S_t folyamat akkor és csak akkor szigorúan lokális martingál, ha $\sigma(S_t)$ teljesíti a következő feltételt:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\sigma^2(x)} dx < \infty \quad (3.1)$$

ahol $\varepsilon > 0$.

A tétel alkalmazása során problémát jelent, hogy nem ismerjük az $x \mapsto \sigma(x)$ függvényt minden x -re. Mivel csak a megfigyelt adatok állnak rendelkezésünkre, ahol természetesen az x nem vett fel minden értéket a $\sigma(x)$ becslése piaci adatokból nem triviális feladat. Ezt a nehézséget kétféle módszerrel küszöbölhetjük ki a [10] cikk alapján.

3.1. Paraméteres becslés

Az alábbi alfejezetben a [10] paraméteres becslés lépéseit foglaljuk össze, nézzük mik ezek:

1.lépés: $\sigma(x)$ becslése nemparaméteres módszerekkel

Az előző fejezetben bemutatott Florens-Zmirou és magfüggvényes becslés felhasználásával becsljük az eszközünk volatilitását azokban a pontokban, amit a folyamatunk

meglátogat.

2.lépés: $\sigma(x)$ becslése paraméteres módszerekkel

Ahhoz, hogy a (3.1) feltételt vizsgálni tudjunk szükséges tehát, hogy ismerjük a $\sigma(x)$ farokeloszlását. Ehhez szükségünk lesz a volatilitás egy paraméteres alakjára is.

A paraméteres becslésnél feltesszük, hogy a volatilitás függvény olyan alakban áll elő, amit a gyakorlatban előszeretettel használnak. A most taglalt eljárás előnye, hogy az így kapott paraméterek becslése után azok farokeloszlását már ismerni fogjuk.

Tegyük fel például, hogy $\sigma(x) = x^\alpha$. Ekkor az eszközünk dinamikájára $dS_t = S_t^\alpha dW_t^*$ teljesül a martingál mérték mellett. Mivel nincs "dt"-s tag mindenképpen lokális martingálunk van. Ebben az esetben folyamatunk szigorúan lokális martingál (azaz létezik buborék), ha $\alpha > 1$ és martingál (azaz nincs buborék), ha $0,5 \leq \alpha < 1$.

Genon-Catalot és Jacod [13] cikke alapján válasszuk a volatilitásnak egy paraméteres formáját. Jelölje ezt $\sigma(\theta, x)$, ahol θ az a kétdimenziós paraméter, amit becsülni szeretnénk. Ekkor a becslésük a következő alakban áll elő:

$$\hat{\theta}_{GCJ} = \arg \min \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\sigma^2(\theta, S_{t_{i-1}}, S_{i,n}))$$

ahol $S_{i,n} = \sqrt{n}(S_{t_i} - S_{t_{i-1}})$.

Az f függvénynek két népszerű alakját fogjuk a továbbiakban használni:

$$f_1(G, x) = \log(G) + \frac{x^2}{G} \quad \text{és} \quad f_2(G, x) = (x^2 - G)^2$$

3.lépés: A két becsült volatilitás összehasonlítása

A becsült volatilitásfüggvények összehasonlíthatósága a következő tétel alapján dönthető el.

3.1.1. Tétel (Összehasonlító tétel). *Tegyük fel, hogy az S eszközünk dinamikája $dS_t = \sigma(t, S_t)dW_t$ alakú. Tegyük fel továbbá, hogy léteznek Σ és $\hat{\sigma}$ lokálisan Hölder-folytonos függvények $0,5$ exponenssel, melyekre fennáll, hogy $\forall t, x$ -re*

$\hat{\sigma}(x) \leq \sigma(t, x) \leq \Sigma(x)$. Ekkor ha

(i) $\forall \varepsilon > 0$ -ra $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\Sigma^2(x)} dx = \infty$, akkor S martingál.

(ii) $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\hat{\sigma}^2(x)} dx < \infty$, akkor S szigorúan lokális martingál.

Ezután azt mondhatjuk, hogy ha ezek a becslések összehasonlíthatóak, akkor el tudjuk dönteni a (3.1) integrál divergenciáját. Azonban ha nem összehasonlíthatóak, akkor az RKHS módszert kell használnunk annak eldöntésére, hogy van-e buborékunk.

3.2. RKHS becslés

A most bemutatásra kerülő módszer szintén a [10] cikkben található és 2 lépésben foglalható össze:

- (i) Először interpoláljuk a σ becslését azon korlátos intervallumon belül, ahol a megfigyeléseink vannak és ily módon kiküszöböljük a nemparaméteres becslések irregularitását.
- (ii) Másodszor extrapoláljuk a σ függvényünket reprodukáló magvú Hilbert tér megválasztásával oly módon, hogy a lehető legközelebb maradjunk az előző lépésben előállított interpolált függvényhez.

Az interpoláció az az eset, amikor a megközelítendő függvénykapcsolatnak azzal a szakaszával foglalkozunk, amelynek az értelmezési tartománya a mérések helyeinek tartományán belül van. Ilyenkor a mért értékek közötti ismeretlen értékekre adunk becslést. Az extrapoláció pedig az az eset, amikor az ismert értékek értelmezési tartományán kívül eső értékek közelítéséhez készítünk modellfüggvényt. Ez utóbbival gyakorlatilag olyan modellfüggvényt állítunk fel, amellyel a már valamennyire ismert függvényszakasz folytatására adunk közelítést.

3.2.1. Reprodukáló magvú Hilbert-tér

A reprodukáló magvú Hilbert-tereket a XX. század közepén definiálták (Aronszajn, Parzen), és az utóbbi évtizedekben terjedtek el széles körben a többváltozós statisztikában nem-linearitások kezelésére. Lényegük, hogy adatainkat egy ún. reprodukáló magvú Hilbert-térbe (RKHS) leképezve a szokásos lineáris faktor- és klaszteranalízis eljárások alkalmazhatók ahelyett, hogy az eredeti térben nemlineáris módszereket hajtottunk volna végre. Magukat az adatokat nem is szükséges leképezni, ehelyett az ún. magfüggvénnyel operálunk. Megértésüket nagyban segítették az [1], [4] és [7] cikkek.

Maga az RKHS elmélet a Riesz-Fréchet reprezentációs tétel szellemes alkalmazása az alábbiak szerint.

3.2.1. Definíció (RKHS). *Legyen \mathcal{D} egy térbeli tartomány, $H(\mathcal{D})$ Hilbert-tér, mely a $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekből áll. H RKHS, ha az $L_x : H(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ úgynevezett kiértékelő leképezés és folytonos $\forall x \in \mathcal{D}$. Az L_x leképezés egy $f \in H(\mathcal{D})$ függvényhez az $L_x(f) = f(x)$ számot rendeli.*

A Riesz-Fréchet reprezentációs tétel értelmében a $H(\mathcal{D})$ Hilbert-tér és duálisa (a $H(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionálok) izometrikusan izomorfak, vagyis van közöttük olyan művelettartó bijekció, amely egyben normatartó is. Ezért bármely L_x -hez egyértelműen tartozik $K_x \in H(\mathcal{D})$ úgy, hogy

$$L_x(f) = \langle f, K_x \rangle, \quad \forall f \in H(\mathcal{D})$$

ahol a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $H(\mathcal{D})$ Hilbert-téren értelmezett skalárszorzatot jelöli, amit a 3.2.2. fejezetben fogunk definiálni. Mivel K_x maga $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, kiértékelhető bármely $y \in \mathcal{D}$ esetén. Definiáljuk a $K : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$K(x, y) = K_x(y)$$

Ezt nevezzük $H(\mathcal{D})$ reprodukáló magjának. Ekkor a fentiek alapján egyrészt

$$K(x, y) = K_x(y) = L_y(K_x) = \langle K_x, K_y \rangle$$

másrészt

$$K(y, x) = K_y(x) = L_x(K_y) = \langle K_y, K_x \rangle$$

A skalárszorzat szimmetriája miatt K szimmetrikus és

$$K(x, y) = \langle K_x, K_y \rangle = \langle K(x, \cdot), K(y, \cdot) \rangle$$

és K pozitív definit is. Ezt nevezik kernel trükknek, mellyel a \mathcal{D} -beli pontok a többi ponthoz való hasonlóságuk alapján reprezentálódnak.

3.2.2. Definíció. *Egy szimmetrikus $K : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt pozitív definit magnak nevezünk, ha minden $n \in \mathcal{N}$ és $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{D}$ esetén a $K(x_i, x_j) = K(x_j, x_i)$ ($i, j = 1, \dots, n$) elemekből álló mátrix pozitív szemidefinit.*

Látjuk, hogy egy RKHS egy pozitív magot definiál. A következő tétel azt mutatja, hogy megfordítva is igaz.

3.2.1. Tétel (Aronszajn-Moore). *Minden $K : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív definit maghoz egyértelműen létezik egy (esetleg végtelen dimenziós) Hilbert-tér, mely $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekből áll, és melynek K a reprodukáló magja.*

A továbbiakban a következő lesz a feladatunk:

3.2.1. Feladat. *Legyen adott az $(f_i)_{i \in [1, M]}$ valós értékű adatok halmaza egy M adott pontig, melyre $S_M = x_i$, $i \in [1, M]$ egy \mathcal{D} tartományban, és legyen adott egy RKHS $H(\mathcal{D})$. Ekkor a feladatunk egy megfelelő $f(x)$ függvény keresése, aminek segítségével interpolálhatjuk az adatainkat.*

Felhasználva az előállító tulajdonságot a fenti interpolációs probléma a következő

lineáris inverz probléma megoldására redukálódik:

$$\forall i \in [1, M], \quad f(x_i) = \langle f(x), K(x_i, x) \rangle$$

Ezt fogjuk invertálni és megmutatjuk azt is, hogy $f(x) \in H(\mathcal{D})$.

Először nézzük az úgynevezett normális megoldást, aminek segítségével pontosan interpolálhatunk, majd ha ez nem hajtható végre, akkor áttérünk egy regularizált megoldásra, mely kvázi interpolációs eredményekre vezet minket.

Normális megoldás

A legegyszerűbb megközelítés, hogy találjunk egy olyan függvényt, amely normájának a négyzete megfelel az adott interpolációs feltételnek. Azaz adott az (f_i) , $1 \leq i \leq M$ valós értékű adatokból álló sorozat a \mathcal{D} tartományban. Ekkor célunk egy olyan f függvény megtalálása, melyre:

$$f(x) = \sum_{i=1}^M c_i K(x_i, x)$$

ahol a c_i együtthatók kielégítik az alábbi egyenletet:

$$\forall k \in [1, M], \quad \sum_{i=1}^M c_i K(x_i, x_k) = f_k$$

Továbbá, ha a K_M

$$\begin{pmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \dots & K(x_1, x_M) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & \dots & K(x_2, x_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_M, x_1) & K(x_M, x_2) & \dots & K(x_M, x_M) \end{pmatrix}$$

$M \times M$ -es mátrix jól kondicionált, akkor a fenti lineáris egyenletrendszert hatékonyan meg lehet oldani numerikus módszerekkel. Azonban, ha ez nem teljesül, akkor a regularizált megoldásra kell áttérnünk.

Egy mátrix akkor lesz jól kondicionált, ha a kondíciószáma kicsi azaz, ha a kapott szám 1-hez közeli. A kondíciószám meghatározza az egységömb maximális torzulását, amely a A mátrix által végrehajtott lineáris transzformáció okozott. Egy négyzetes mátrix (A) kondíciószáma

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A\|^{-1}$$

ha A invertálható. Abban az esetben, ha nem lenne invertálható (vagyis szinguláris lenne), akkor ezt a számot végtelennek definiáljuk.

Regularizált megoldás

A fentiek alapján tehát, akkor kerül sor erre az eljárásra, ha a K_M mátrix rosszul kondicionált, vagyis amikor a kondíciószáma magas. Ekkor az inverz lineáris probléma megoldására regularizációs eljárásokat hívunk segítségül. Egyik leggyakoribb eljárás a Tyihonov-féle regularizáció.

Ehhez vizsgáljuk meg a $\|Kf - F\|^2 + \alpha \|f\|^2 \rightarrow \min_f$ optimalizálási problémát. Ebben a felírásban F az (f_i) adatokat tartalmazó vektor és a norma a következőt jelenti:

$$\|Kf - F\|^2 = \sum_{i=1}^M (\langle f(x), K(x_i, x) \rangle - f_i)^2$$

Ez azt jelenti, hogy a Tyihonov-féle regularizáció által szolgáltatott megoldás, adott α regularizációs paraméter esetén minimalizálja a Kf vektor F -től való eltérésének és az f vektor α -val súlyozott normájának összegét. Az α paraméter segítségével a regularizáció mértékét lehet megszabni. Fontos kérdés ennek az optimális meghatározása, ugyanis túl alacsony értékek esetén a megoldás instabillá válik, túl magas értékeknél viszont "túlregularizálódik", ami azt jelenti, hogy értelmezésileg fontos részletek eltűnnek.

Ezen ismeretek tudatában a regularizált megoldás az

$$f_\alpha(x) = \sum_{i=1}^M c_i^\alpha K(x_i, x)$$

alakba írható, ahol a c_i^α együtthatók kielégítik a

$$\forall k \in [1, M], \quad \sum_{i=1}^M c_i^\alpha (K(x_i, x_k) + \alpha \delta_{i,k}) = f_k$$

lineáris egyenletet.

3.2.2. Reprodukáló magok konstruálása

Ebben az alfejezetben RKHS-ek egy családját fogjuk elkészíteni, amik lehetővé teszik az $f(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)}$ interpolálását.

Szükséges megfogalmaznunk továbbá egy aszimptotikus feltételezést is $f(x)$ -ről. E szerint $f(x)$ azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k f^{(k)}(x) = 0, \quad \forall k \in [1, n-1]$$

ahol $n \geq 1$.

Ezen feltételezéseknek például a CEV modell eleget tesz. A CEV (Constant Elasticity of Variance) modellt először 1976-ban John Cox és Stephen Ross mutatta be, mint a híres Black-Scholes európai call árazási modell kiterjesztését. Ez egy lokális volatilitás modell, mely azt jelenti, hogy a volatilitás nem konstans, hanem S_t -től függ egy determinisztikus függvényen keresztül. Előnye ezeknek a modelleknek, hogy elméletileg is képesek produkálni a leverage-hatást, vagyis amint a részvényár csökken, a volatilitás nő.

A CEV modell szerint a részvényár dinamikája a következő alakú:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^\alpha dW_t$$

ahol $\sigma, \alpha \geq 0$ feltételek teljesülnek. Mint dolgozatomban korábban, a μ -ről - az általánosság elvesztése nélkül - feltehetjük, hogy azonosan 0. Továbbá tegyük fel, hogy $\sigma = 1$. Ekkor tehát $dS_t = S_t^\alpha dW_t$ adódik, ahonnan a $\sigma(x) = x^\alpha$, és ahonnan az f függvény

alakjára kapjuk, hogy

$$f_{CEV}(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)} = \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

Nézzük, hogy teljesül-e rá az aszimptotikus tulajdonság. Tekintsük először a függvény k -adik deriváltját.

$$\begin{aligned} f'_{CEV}(x) &= \frac{-2\alpha}{x^{2\alpha+1}} \\ f''_{CEV}(x) &= \frac{(-2\alpha)(-2\alpha-1)}{x^{2\alpha+2}} \\ &\vdots \\ f^{(k)}_{CEV}(x) &= \frac{(-2\alpha)(-2\alpha-1)\dots(-2\alpha-(k-1))}{x^{2\alpha+k}} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(-2\alpha-i)}{x^k x^{2\alpha}} \end{aligned}$$

Ezután a limesz könnyen kiszámítható.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k f^{(k)}_{CEV}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^k \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(-2\alpha-i)}{x^k x^{2\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(-2\alpha-i)}{x^{2\alpha}} = 0, \quad \forall k \in [1, n-1]$$

Az utolsó egyenlőség nyilván fennáll, hiszen a számlálóban egy konstans szerepel, a nevezőben pedig egy végtelenbe tartó sorozat pozitív kitevőjű hatványa, ami szintén végtelenbe tart. A gyakorlatban n -et (a simaság mértékét) a legtöbbször 1, 2 vagy 3-nak választják.

A következő lépésben definiáljuk az alábbi Hilbert teret

$$H_n = H_n([0, \infty)) = \left\{ f \in C^n([0, \infty)) \mid \lim_{x \rightarrow \infty} x^k f^{(k)}(x) = 0, \quad \forall k \in [1, n-1] \right\}$$

valamint az alábbi skalárszorzatot

$$\langle f, g \rangle_{n,m} = \int_0^\infty \frac{y^n f^{(n)}(y)}{n!} \frac{y^n g^{(n)}(y)}{n!} \frac{1}{w(y)} dy$$

ahol $w(y) = \frac{1}{y^m}$ az aszimptotikus súlyfüggvény. Innentől beszélhetünk RKHS-ről, mely a $H_{n,m} = (H_n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ lesz. A következő tétel az ehhez tartozó reprodukáló magról szól.

3.2.2. Tétel. *A reprodukáló magfüggvény*

$$K_{n,m}(x, y) = n^2 \max(x, y)^{-(m+1)} B(m+1, n) F_{2,1}(-n+1, m+1, n+m+1, \frac{\min(x, y)}{\max(x, y)})$$

alakban áll elő, ahol $B(a, b)$ a béta-függvény és $F_{2,1}(a, b, c, z)$ a Gauss-féle hipergeometrikus függvény.

Ahhoz, hogy ezt a tételt megértsük szükségünk van a béta- és a Gauss-féle hipergeometrikus függvény definíciójára.

3.2.3. Definíció (béta-függvény). *A béta-függvény a következő képlettel definiált kétváltozós valós függvény:*

$$B : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

Erre függvényre a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, ahol Γ a gamma-függvényt jelöli.
2. $B(a, b) = B(b, a)$
3. $B(a, b+1) = \frac{b}{a+b} B(a, b)$
4. $B(1, 1) = 1$

3.2.4. Definíció (Gauss-féle hipergeometrikus függvény). *Minden $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $c \notin \mathbb{Z}_+$ esetén a Gauss-féle hipergeometrikus függvény alatt a következő hatványsort értjük:*

$$F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

ahol $(u)_0 = 1$ és $(u)_n = u(u+1)\dots(u+n-1)$ ($u = a, b, c$) (ami a Pochhammer-szimbólum).

Tehát n és m bármilyen megválasztása egy $H_{n,m}$ RKHS-t definiál és lehetőséget nyújt nekünk arra, hogy előállítsunk egy $f_{n,m}(x)$ speciális aszimptotikus viselkedésű interpolációs függvényt. A következő tétel erről a viselkedésről szól.

3.2.3. Tétel. Minden x -re $K(x, y)$ ekvivalens $\frac{n^2}{y^{m+1}}B(m+1, n)$ -nel a ∞ -ben, valamint teljesül, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{m+1} f_\alpha(x) = n^2 B(m+1, n) \sum_{i=1}^M c_i^\alpha$$

ahol f_α a regularizált megoldás és c_i^α a hozzá tartozó feltételből származik. Továbbá, ha $\sum_{i=1}^M c_i^\alpha \neq 0$, akkor

$$f_\alpha(x) \approx \frac{n^2 B(m+1, n)}{x^{m+1}} \sum_{i=1}^M c_i^\alpha$$

3.2.3. Legjobb m választása

A (3.1) tétel divergenciáját m megválasztásának segítségével el tudjuk dönteni, ugyanis buborék van a piacon, ha $m > 1$. Az optimális m meghatározása a következő négy lépésből tevődik össze:

1.lépés: Nemparaméteres becslés \mathcal{D} -n

Becsüljük $\sigma(x)$ -et a \mathcal{D} intervallum fix x_1, \dots, x_M osztópontjain a második és a harmadik fejezetben bemutatott nemparaméteres becsléssel. A \mathcal{D} a $[\min S, \max S]$ intervallummal lesz egyenlő, ahol $\min S$, illetve $\max S$ a vizsgált részvényárak minimuma, illetve maximuma a $[0, T]$ intervallumon. A magfüggvényes becslésnél a következőt fogjuk használni:

$$K(x) = \frac{1}{c} \exp\left(\frac{1}{4x^2 - 1}\right), \quad |x| < \frac{1}{2}$$

ahol c a megfelelő normalizációs együttható.

A bemenő adatok száma legyen n , míg az osztópontok száma M , amit a $(h_n)_{n \geq 1}$ sorozatra való korlátozás ad meg. Ez a szám a gyakorlatban viszonylag kicsi, a [10] cikk számításainál $7 \leq M \leq 25$.

2.lépés: $\sigma(x)$ interpolálása \mathcal{D} -n az RKHS módszer alapján

Az adatpontok $((\sigma(x_i))_{i \in [1, M]})$ interpolálása a \mathcal{D} intervallumon tetszőleges interpolációs eljárással elvégezhető. Miután ezt megtettük, a kapott függvényt $\sigma^*(x)$ -nek nevezzük.

A következőkben bemutatok egy olyan interpolációs eljárást, ami az RKHS módszert használja fel. Definiáljunk egy $W^{n,2}$ Szoboljev-teret a \mathcal{D} intervallumon.

$$W^{n,2}(\mathcal{D}) = \{u \in L^2(\mathcal{D}) \mid \forall k \in [1, n] \ u^{(k)} \in L^2(\mathcal{D})\}$$

azaz olyan \mathcal{D} -n négyzetesen integrálható függvényeket tartalmaz, melynek bármilyen 1 és n közötti deriváltja is négyzetesen integrálható \mathcal{D} -n. A norma, amit ezen a téren választanak a következő:

$$\|u\|^2 = \sum_{k=0}^n \int_{\mathcal{D}} (u^{(k)})^2(x) dx$$

Egy ekvivalens és megfelelőbb norma is adható, mely az u és annak n -edik deriváltja L^2 normájának a súlyozott összege:

$$\|u\|^2 = \int_{\mathcal{D}} u^2(x) dx + \frac{1}{\omega^{2n}} \int_{\mathcal{D}} (u^{(n)})^2(x) dx$$

ahol a ω paraméter szabályozza az egyensúlyt.

A továbbiakban jelöljük a $W^{n,2}((a, b))$ Szoboljev-térhez tartozó magfüggvényt $K_{n,\omega}^{(a,b)}$ -vel. A következő lemma ezt a reprodukáló magfüggvényt definiálja $n = 1$ és $n = 2$ esetben.

3.2.1. Lemma.

$$K_{1,\omega}^{(a,b)}(x, y) = \frac{\omega}{\sinh(\omega(b-a))} \cosh(\omega(b - \max(x, y))) \cosh(\omega(\min(x, y) - a))$$

$$K_{2,\omega}^{(a,b)}(x, y) = L_{\max(x,y)}(\min(x, y))$$

$$\text{ahol } L_x(t) = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 l_{ik} b_i(\omega t) b_k(\omega x).$$

Nézzük, hogy mit is jelentenek a fenti lemmában a b_i és az l_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) függ-

vények. Tekintsük először a b_i -ket, amiket a következőképpen állíthatunk elő:

$$b_1(z) = \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$$

$$b_2(z) = \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z\right) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$$

$$b_3(z) = \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}z\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$$

$$b_4(z) = \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}z\right) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$$

A 16 darab l_{ik} együtthatót pedig az alábbi következmény definiálja:

3.2.1. Következmény. *Az l_{ik} együtthatók, melyekkel a $K_{2,\tau}^{(0,1)}$ magfüggvényt előállítottuk a következők:*

$$l_{11} = \delta \left\{ -\cos(\sqrt{2}\omega) + \sin(\sqrt{2}\omega) + 3 \exp(-\sqrt{2}\omega) - 2 \right\}$$

$$l_{12} = \delta \left\{ -\cos(\sqrt{2}\omega) - \sin(\sqrt{2}\omega) + \exp(-\sqrt{2}\omega) \right\}$$

$$l_{13} = \delta \left\{ -\cos(\sqrt{2}\omega) + 3 \sin(\sqrt{2}\omega) - \exp(\sqrt{2}\omega) + 2 \right\}$$

$$l_{14} = \delta \left\{ -3 \cos(\sqrt{2}\omega) - \sin(\sqrt{2}\omega) - \exp(\sqrt{2}\omega) + 4 \right\}$$

$$l_{21} = l_{12}$$

$$l_{22} = \delta \left\{ \cos(\sqrt{2}\omega) - \sin(\sqrt{2}\omega) + \exp(-\sqrt{2}\omega) - 2 \right\}$$

$$l_{23} = \delta \left\{ -\cos(\sqrt{2}\omega) + \sin(\sqrt{2}\omega) + \exp(\sqrt{2}\omega) \right\}$$

$$l_{24} = \delta \left\{ -\cos(\sqrt{2}\omega) - \sin(\sqrt{2}\omega) - \exp(\sqrt{2}\omega) + 2 \right\}$$

$$l_{31} = l_{13} - \frac{\sqrt{2}}{4}\omega$$

$$l_{32} = l_{23} + \frac{\sqrt{2}}{4}\omega$$

$$l_{33} = \delta \left\{ \cos(\sqrt{2}\omega) + \sin(\sqrt{2}\omega) - 3 \exp(\sqrt{2}\omega) + 2 \right\}$$

$$l_{34} = \delta \left\{ -\cos(\sqrt{2}\omega) + \sin(\sqrt{2}\omega) + \exp(\sqrt{2}\omega) \right\}$$

$$\begin{aligned}
l_{41} &= l_{14} - \frac{\sqrt{2}}{4}\omega \\
l_{42} &= l_{24} - \frac{\sqrt{2}}{4}\omega \\
l_{43} &= l_{34} \\
l_{44} &= \delta \left\{ -\cos(\sqrt{2}\omega) - \sin(\sqrt{2}\omega) - \exp(\sqrt{2}\omega) + 2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{ahol } \delta = \frac{\sqrt{2}\omega}{16(\sin^2(\sqrt{2}\omega)) - \sinh^2(\sqrt{2}\omega)}.$$

Ezen ismeretek tudatában az interpolációs függvény $\sigma^* = \frac{1}{\sqrt{f^*}}$ alakú lesz, ahol

$$f^*(x) = \sum_{i=1}^M c_i^* K_{n,\omega}^{\mathcal{D}}(x_i, x), \quad \forall x \in \mathcal{D}$$

és

$$\sum_{i=1}^M c_i^* K_{n,\omega}^{\mathcal{D}}(x_i, x_k) = f_k = \frac{1}{\hat{\sigma}_{JK}^2(x_k)}, \quad \forall k \in [1, M]$$

3.lépés: *Annak eldöntése, hogy szükséges-e az extrapoláció*

Nincs szükség extrapolációra, ha a következő két feltétel közül valamelyik teljesül:

(i) $\sigma(x)$ interpolált becslése korlátos függvénynek bizonyul és nem tart ∞ -be, ha $x \rightarrow \infty$.

(ii) $\sigma(x)$ interpolált becslésének implicit kiterjesztett formája nem divergál ∞ -be, ha $x \rightarrow \infty$ és a korlátai \mathbb{R}_+ -on belül maradnak.

Ebben az esetben $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\sigma^2(x)} dx = \infty$ és így azt mondhatjuk, hogy az eszközár-folyamat martingál, vagyis nincs buborék. Abban az esetben viszont, amikor $\sigma(x) \rightarrow \infty$, ha $x \rightarrow \infty$ teljesül szükséges a következő lépés annak eldöntéséhez, hogy megtudjuk a volatilitás aszimptotikus viselkedését.

4.lépés: $\sigma^*(x)$ extrapolálása \mathbb{R}^+ irányába RKHS-t használva

Legyen $n = 1$ és definiáljuk \bar{m} -et a következő formában:

$$\bar{m} = \arg \min_{m \geq 0} \sqrt{\int_{[a, \infty) \cap \mathcal{D}} |\sigma_m - \sigma^*|^2 ds}$$

ahol $f_m = \frac{1}{\sigma_m^2}$ eleme a $H_{1,m} = (H_{1,m}([0, \infty)), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ reprodukált magvú Hilbert-térnek. Az f_m függvényt a 3.2.2. Tétel alapján megválasztott reprodukáló magfüggvény segítségével a következő képlet alapján határozzuk meg:

$$f_m(x) = \sum_{i=1}^M c_i^m K_{1,m}(x_i, x), \quad \forall i = 1, \dots, M$$

ahol a c_i^m együtthatók kielégítik az alábbi egyenletet:

$$\forall i \in [1, M], \quad \sum_{i=1}^M c_i^m K_{1,m}(x_i, x_i) = f_i = \frac{1}{\hat{\sigma}_{JCK}^2(x_i)}$$

Definíció szerint így minden σ_m interpolálja az adatpontokat és $\sigma_{\bar{m}}$ rendelkezik azzal az aszimptotikus viselkedéssel, ami a legjobban illik a becslési intervallumra.

Az optimalizációban az a küszöb határozza meg az interpolált függvénytől a távolságot. Ezt a számot az [10] cikkben $\max S - \frac{1}{3}(\max S - \min S)$ értékűnek választják meg.

4. fejezet

Alkalmazás valós adatokra

Ennek a fejezetnek a célja az eddig bemutatott elemzési módszerek gyakorlati alkalmazása. Ehhez az **R** program legújabb elérhető változatát és az ehhez szükséges kódokat saját kezűleg írtam meg.

Az alábbiakban egy indexet és egy részvényt fogok megvizsgálni. Ezek:

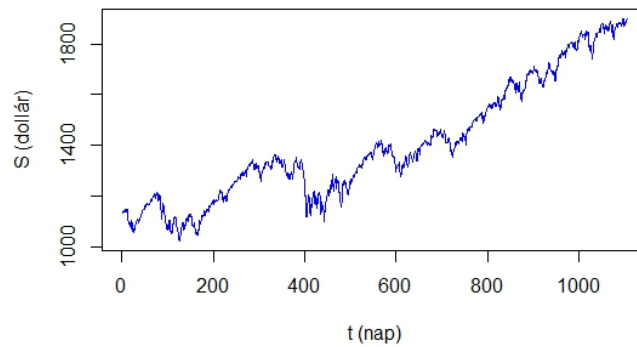
- **S&P 500.** Az S&P 500 részvényindex 500 nyilvánosan kereskedett nagyvállalat részvényeit jegyzi, amelyekkel a NYSE (New York-i tőzsde) vagy a NASDAQ tőzsdéken is kereskednek. Elsősorban az USA-beli vállalatokra összpontosít, ezért az S&P 500 sokak szerint az Egyesült Államok gazdaságának jelenlegi és jövőbeni alakulásának pontos mutatója.
- **Facebook, Inc.** A Facebook amerikai alapítású ismeretségi hálózat, amely 2004. február 4-én kezdte meg működését. A NASDAQ tőzsdére 2012. május 18-án került fel.

4.1. S&P 500

Ebben a részben csak az RKHS becslést mutatom be, ami már az interpolálás során megadja nekünk a választ. Mindkét módszer a Facebook részvény esetében kerül teljes bemutatásra a következő fejezetben.

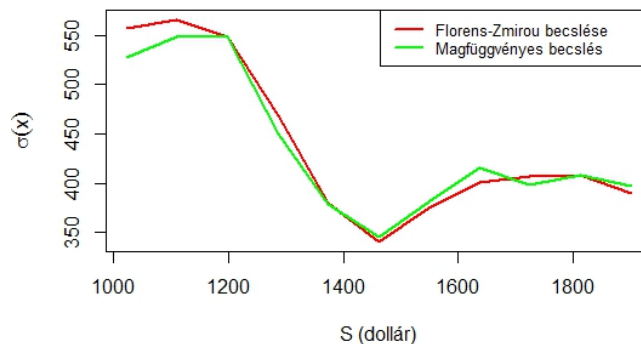
Az index a 2009-es mélypont óta több, mint 160%-kal került feljebb. Főbb elemzőházak egy recesszió érkezéséről sutognak, immáron egyre erőteljesebben, 10 – 15% visszaesés érkezhethet az indexekben hamarosan. Lehetséges, hogy S&P 500 buborék van a tőzsdén?

A 2010.01.01 és 2013.12.31 közötti záró árfolyamokat tartalmazza a 4.1. ábra, amik a www.quandl.com oldalról lettek letöltve. A grafikon alapján az mondható, hogy nem valószínű, hogy buborék van az S&P500 piacán, hiszen az árfolyam emelkedés ránézésre nem tűnik exponenciálisnak. Nézzük, mit mond az RKHS becslés!



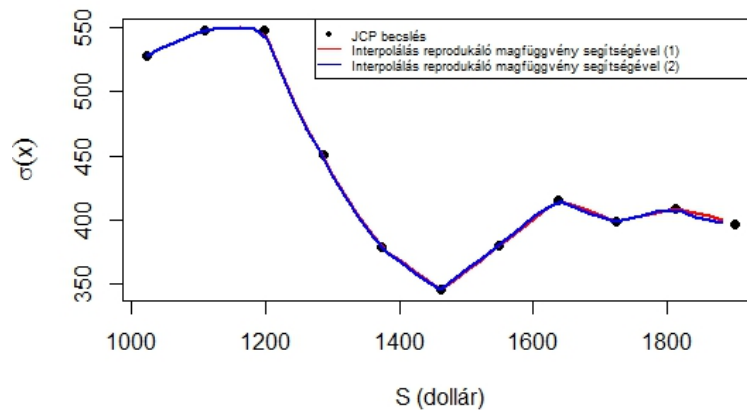
4.1. ábra. S&P 500 index árfolyama

Első lépésben tehát becsljük meg nemparaméteres módszerrel a volatilitást. Az intervallum, ahol ezt meg tesszük $D = [\min S; \max S] = [1022, 58; 1900, 53]$.



4.2. ábra. Nemparaméteres becslések

A 4.2. ábra azt sejteti, hogy ez a becült függvény nem tart ∞ -hez, ha $x \rightarrow \infty$. Ahhoz, hogy ezt biztosan ki tudjuk jelteni szükségünk lesz az interpolálásra is. Az optimális osztópont darabszámnak számos futtatás után a 11 bizonyult. Ugyanis ennél kevesebb pont esetén következtetéseket azokról le nem vonható, míg ennél több esetén nagyon kilengő ábrákat kaptam. A 3.2.1 Lemma alapján $K_{1, \frac{1}{100}}^{(1022,58;1900,53)}(x, y)$ és $K_{2, \frac{1}{100}}^{(1022,58;1900,53)}(x, y)$ reprodukáló magfüggvényeket használva a következő grafikon adódik:



4.3. ábra. Interpolálás a D tartományon

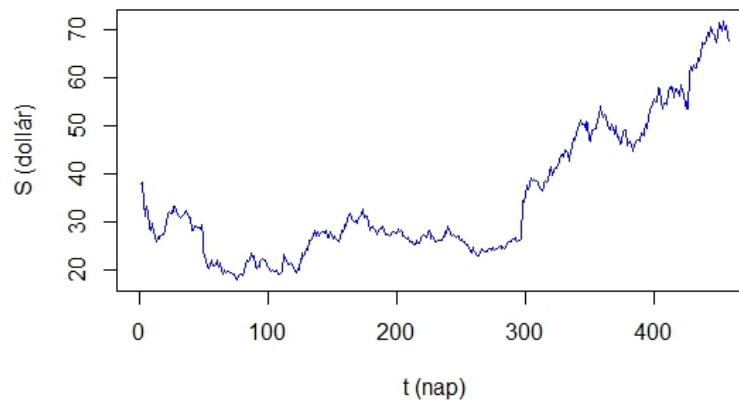
Ebben az esetben az RKHS módszer 3. lépésénél megállhatunk, ugyanis az interpolálással láthatóan korlátos volatilitásfüggvényt kaptunk, ami tehát nem tart végtelenbe, ha $x \rightarrow \infty$. Így azt mondhatjuk, hogy $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\sigma^2(x)} dx$ divergens $\forall \varepsilon > 0$ -ra, ami azt jelenti, hogy nincs buborék az S&P500 piacán.

4.2. Facebook

2000 – 2002 között beszélhettünk a dotcom válságról az Egyesült Államokban. Az internetes cégek részvény indexei az egekbe lóttak, mindenki minden likvid eszközét ezekbe fektette, majd mikor elfogyott a vásárlóerő jött az összeomlás. A jelenlegi helyzetet nagyon sokan hasonlítják ehhez az időszakhoz. Ugyan még nem tartunk ott, ahol 14 évvel ezelőtt, de a kitartott túlárazottság így is aggodalomra adhat okot. De mi is ennek a

túlárazottságnak az oka? Az elmúlt időben számos nagyobb felvásárlás történt, a Google, a Facebook és az Apple is bevásárolt néhány kisebb technológiai cégből, ezzel az egekbe hajtva jó néhány részvény árát.

A 4.1. ábra a Facebook napi záróárfolyamait mutatja 2012.05.07 és 2014.03.14 között, amit szintén a www.quandl.com oldalról töltöttem le. A grafikonon látszik, hogy az utóbbi időben rengeteget ugrott a Facebook árfolyama. Viszont cseppet sem biztos, hogy ez azt jelenti, hogy buborékot láthatunk.



4.4. ábra. Facebook árfolyam

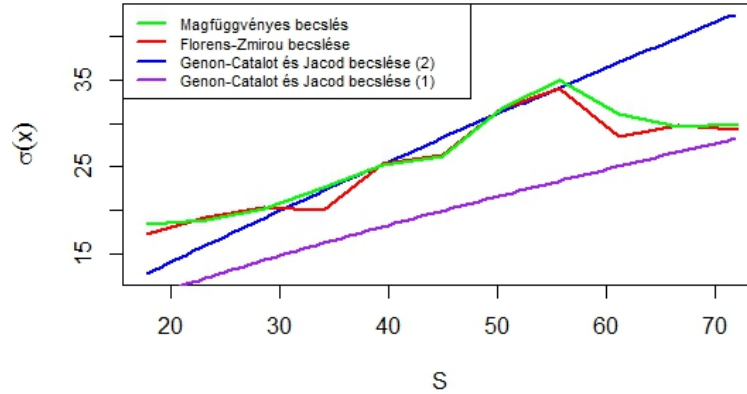
Nézzük mit mondanak nekünk az előzőekben bemutatott eljárások!

4.2.1. Paraméteres becslés

Genon-Catalot és Jacod módszeréhez -amit a 3.2 fejezetben a paraméteres becslés 2. lépéseként mutattam be - a volatilitást $\sigma^2(x) = \sigma_0 x^\alpha$ alakban keressük. Ekkor a két-dimenziós paraméter, amit becsülni szeretnénk a $\theta = (\sigma_0, \alpha)$. A minimalizációs eljárást mindkét $f(G, x)$ függvényre elvégezve a következő adódik:

- f_1 függvény esetén: $\sigma_0 = 1,39$ és $\alpha = 1,49$
- f_2 függvény esetén: $\sigma_0 = 1,08$ és $\alpha = 1,74$

Florens-Zmirou módszerét és a magfüggvényes becslést is lefuttatva, valamint az egyes volatilitásokat egy koordináta-rendszerben ábrázolva kapjuk a 4.5. ábrát.



4.5. ábra. Első módszer becslései

Egyrészt az f_2 függvényes becslés fölé esnek a nemparaméteresek. A [10] cikk alapján ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy ezt a technikát használva találtunk egy olyan becslőt $\hat{\sigma}_{GCJ2} = \sigma(\hat{\sigma}_0, \hat{\alpha}, x)$ -ot, aminek a farokeloszlása az $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\hat{\sigma}_{GCJ2}^2(x)} dx$ integrál konvergenciájához vezet. Mivel a nemparaméteres becslőt volatilitások e fölött vannak ezért azt mondhatjuk, hogy az eszközar folyamat szigorú lokális martingál és így buborék van a piacon.

Másrészt az f_1 függvényes becslés alá esnek a nemparaméteresek. Ebben az esetben az előbb említett következtetés nem vonható le, így ez a módszer nem tudja nekünk biztosan azt állítani, hogy buborékot találtunk. Szükséges továbbmennünk a második módszerre, hogy biztosak legyünk a kijelentésünkben.

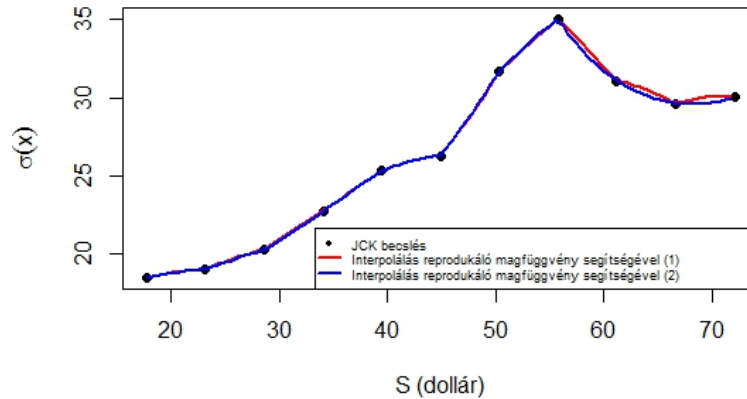
4.2.2. RKHS becslés

Első lépésben az interpolálást végezzük el a $D = [\min S, \max S] = [17, 73; 72, 03]$ tartományon $M = 11$ osztóponttra. Először meghatározzuk az osztópontokhoz tartozó nemparaméteres módszerrel becslőt értékeket ($\hat{\sigma}_{JCK}(x_k)$ -ket, ahol $k = 1, \dots, M$), amik

segítségével kiszámoljuk f_k -t. A normál megoldás kiszámolásához két reprodukáló magfüggvényt is használhatunk: $K_{1, \frac{1}{17}}^{(17,73;72,03)}$ -t és $K_{2, \frac{1}{17}}^{(17,73;72,03)}$ -t.

Az egyes reprodukáló magfüggvények esetében meghatározott \mathbf{K}_M mátrixok segítségével megkaphatóak a c_k konstansok az alábbi egyszerű mátrixszorzásból: $\mathbf{c} = \mathbf{F}\mathbf{K}_M^{-1}$, ahol \mathbf{c} a c_k konstansokból álló vektor és \mathbf{F} az f_k -kat tartalmazó vektor, ahol $k = 1, \dots, M$.

Végül már csak annyit kell tennünk, hogy a két különböző esetben ábrázoljuk a D tartományon a $\sigma^*(x)$ interpolált függvényeinket, amiket a $f^*(x) = \sum_{k=1}^M c_k K(x_k, x)$ képletből kapunk aszerint, hogy $\sigma^*(x) = \frac{1}{\sqrt{f^*(x)}}$. Így adódik a 4.6. ábra, amin feltüntettem a magfüggvényes becslés pontjait amire az interpolálást elvégeztük és a két reprodukáló magfüggvény esetén a kapott interpolált függvényeket.



4.6. ábra. Interpolálás a D tartományon

Sajnos ezek a becslések nem tesznek eleget az RKHS módszer 3. lépésében megfogalmazott feltételeknek. Ez azt jelenti, hogy nem teljesülnek az alábbiak:

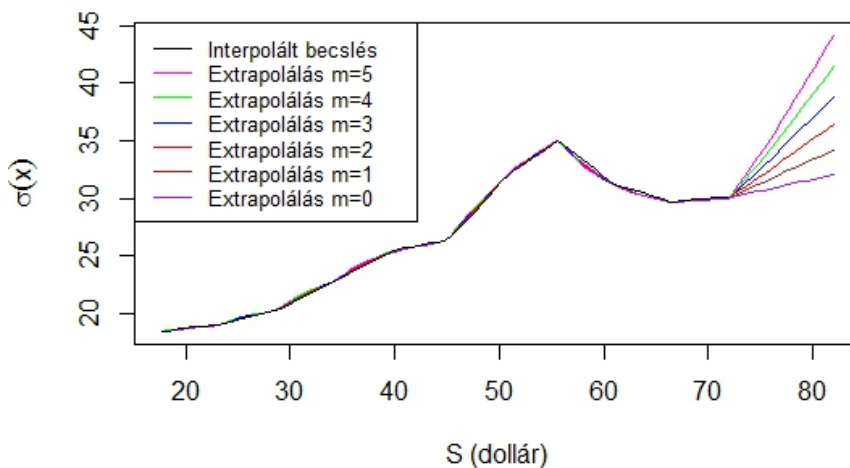
(i) $\sigma(x)$ interpolált becslése korlátos függvénynek bizonyul és nem tart ∞ -be, ha $x \rightarrow \infty$.

(ii) $\sigma(x)$ interpolált becslésének implicit kiterjesztett formája nem divergál ∞ -be, ha $x \rightarrow \infty$ és a korlátai \mathbb{R}_+ -on belül maradnak.

Emiatt szükséges továbbmennünk és elvégezni az extrapolációt is.

A következőkben célunk a súlyfüggvény optimális aszimptotikájának meghatározása. Ehhez először tekintsük az extrapolálást adott m értékekre.

Ebben a lépésben szükségünk van egy $H_{n,m} = (H_n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ RKHS-re. Legyen $n = 1$ és a paraméteres reprodukáló magot a 2.2.2.Tétel biztosítja nekünk. A lépések ezután ugyanúgy zajlanak le, mint az interpolálásnál, csak most más K -t használunk. Különböző aszimptotika mellett a 4.7. ábrát kapjuk:



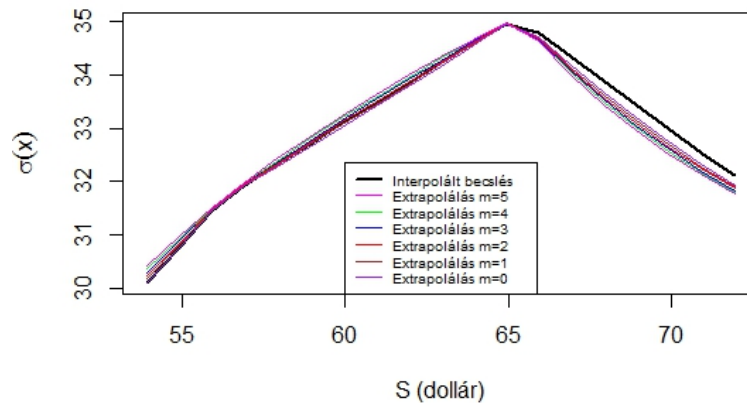
4.7. ábra. Extrapolálás különböző m -ekre

Láthatóan az optimális aszimptotika 0 és 2 körül lesz, hiszen az azokhoz tartozó grafikonok tűnnek reálisnak a folytatáshoz. Ennek meghatározásához az egyes illesztések hibáit kell meghatároznunk.

Egyik módszer, hogy nézzük koordinátánként a függvények abszolút eltérését és ezeket összegezzük. Nézzük mit kapunk, ha az a cél, hogy az extrapolált függvény az interpolált utolsó harmadára illeszkedjen a lehető legjobban. A következő táblázat magába foglalja a kapott eredményeket:

$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
1,77	1,88	2,24	2,86	3,49

Nem is vártunk nagy értékeket ebben az esetben, hiszen az 4.8. ábrán jól látható, hogy az extrapolált függvények elég közel esnek az interpolálthoz az intervallum utolsó harmadán. Sőt igazából az egész intervallumon!

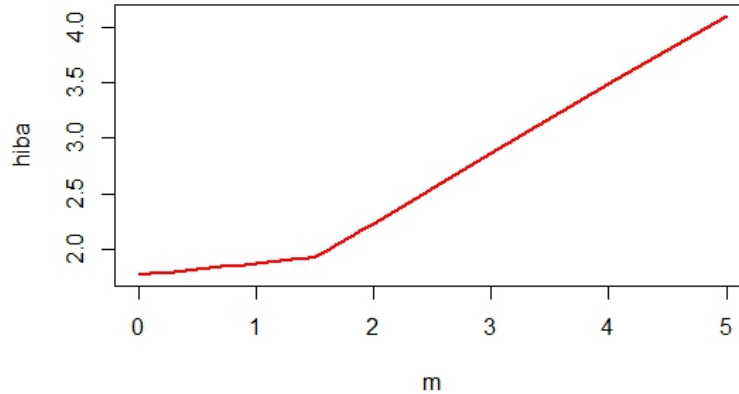


4.8. ábra. Extrapolálás különböző m -ekre az intervallum utolsó harmadán ábrázolva

Láthatóan minél nagyobb m -et választunk annál nagyobb lesz a két függvény közötti távolság, azaz monoton nő a hiba. A legkisebb hibák 0 és 1 értékekre adódnak. Nézzük meg, hogy ebben az intervallumban milyen értékeket kapunk az abszolút távolságokra. Legyen 6 ekvidisztáns m értékünk!

$m = 0$	$m = 0,2$	$m = 0,4$	$m = 0,6$	$m = 0,8$	$m = 1$
1,77	1,79	1,81	1,83	1,85	1,87

A fentiek alapján a 4.9. ábra a különböző m -ekre kapott hibákat mutatja, amiből látszik, hogy az abszolút távolság monoton nő.



4.9. ábra. Interpolált és extrapolált becslések abszolút távolsága m függvényében

Ebből már tényleg látható, hogy ha az intervallum utolsó harmadára szeretnénk a lehető legjobban illeszkedő extrapolált függvényt megtalálni, akkor $m = 0$ -t kell választanunk. Tehát az optimális aszimptotikus súlyra 0 adódik.

Mielőtt következtetéseket vonnánk le nézzük meg mit kapunk ha azt szeretnénk, hogy az extrapolált függvény az intervallum felén, vagy pl. az utolsó 40%-án illeszkedjen az interpolált függvényre. A következő táblázat az ezekhez tartozó hibákat tartalmazza:

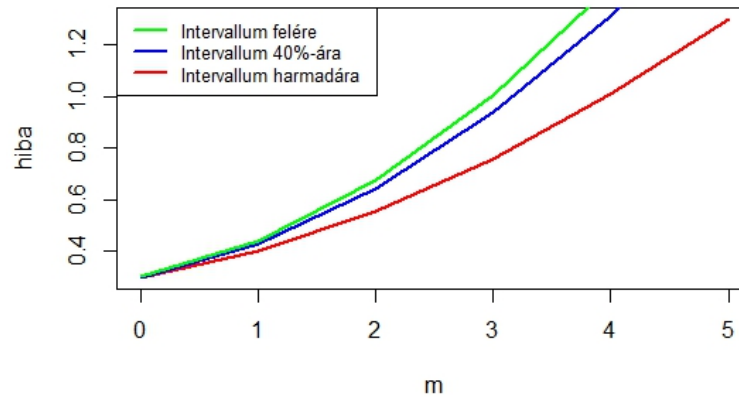
	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
50%	1,98	2,41	3,1	4,07	5,03	6
40%	1,83	2,16	2,74	3,59	4,44	5,28

Ezekben az esetekben is az mondható, hogy az optimum a 0 lesz.

Egy másik lehetőség lehet az optimum meghatározására, ha az abszolút eltérés helyett a négyzetes eltéréseket vesszük koordinátánként. A következő táblázat ebben az esetben kapott hibákat tartalmazza:

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
50%	0,3	0,44	0,68	1	1,42	1,94
40%	0,3	0,43	0,64	0,94	1,31	0,76
$\frac{1}{3}$	0,3	0,4	0,56	0,76	1	1,3

Ugyanúgy ábrázolva ezeket az eltéréseket a 4.10. ábrát kapjuk, mely alapján most már biztosan kijelenthetjük, hogy az optimális aszimptotika a 0 lesz.



4.10. ábra. Interpolált és extrapolált becslések négyzetes távolsága m függvényében

Az RKHS módszer végül azt mondja ki, hogy ha az optimális aszimptotika kisebb 1-nél, akkor nincs buborék a piacon. A mi esetünkben ez az érték $m = 0$, ami kisebb 1-nél. A módszerünk tehát azt adja, hogy a Facebook részvény piacán nem láthatunk eszközár buborékot.

Összefoglaló

A dolgozat fő területe az eszközár buborékok matematikai eszközökkel való felismerése, amely a sztochasztikus folyamatok elméleti keretein belül egyszerre jelent elméleti kihívást és gyakorlati haszonnal járó feladatot is. Elsődleges célom volt a volatilitás becslése és az azt követő reprodukáló magú Hilbert-terek elmélet felépítése. A továbbiakban pedig azt vizsgáltam, hogy a gyakorlatban hogyan lehet ténylegesen észrevenni az eszközár buborékokot.

Az eszközár buborékokot a piaci árfolyam és a fundamentális ár különbségként definiálta Protter [11] és [12] cikkeiben. A fundamentális ár meghatározására pedig a jövőbeli kifizetések kockázatmentesen várható értékének a jelenértékét használta. A jövőbeli pénzfolyamot egy sztochasztikus folyamattal adta meg, tehát itt is fennáll az a probléma mint valóságban, hogy a fundamentális árat nem tudjuk pontosan meghatározni. A definíciót megadta mind teljes, mind nem teljes piacon, aminek könnyebb megértéséhez bemutattam az NFLVR és a No Dominance feltételeket is.

Ezután felmerült a kérdés: Hogyan tudjuk eldönteni, hogy buborékokat látunk a piacon? A válaszadás előtt a 2. fejezetben bemutattam két a diffúzió lokális idején alapuló nemparaméteres becslési eljárást. Mindkét módszernél ismertettem a Protter [10] cikkében található feltételeket ahhoz, hogy ezek tényleg a volatilitás becslését adják vissza.

Protter legfontosabb állítása, hogy egy részvény árfolyamában akkor lehet buborék, ha az egy szigorúan lokális martingál. Ennek vizsgálatára módszertant is alkotott, melynek alapjai a dolgozatban is bemutatásra kerültek. Az első módszer veszi a 2. fejezetben bemutatott nemparaméteres becsléseket, amiket összehasonlít paraméteresekkel, hogy megtudja azok farokeloszlását és ebből vonjon le következtetést a buborék létevel kapcsolat-

ban.

A második eljárás a reprodukáló magú Hilbert-terek elméletén alapszik. Veszi a nem-paraméteres becsléseket adott korlátos tartományon, melyekből kiragad néhány pontot, amire interpolál. Miután megvan az interpolálás kísérletet tesz a volatilitás jövőbeni alakjának megjósolásához. Ehhez egy újfajta extrapolációs eljárást mutat be, amit reprodukáló magfüggvénnyel hajt végre. Ezt az eljárást alkalmazta számos termék esetén, és sok esetben sikeresen mutatta ki a buborék létezését.

Végül kísérletet tettem a bemutatott elmélet gyakorlati alkalmazására. Megnéztem, hogy a napjainkban olyan sokat emlegetett lehetséges újabb dot com buborék jelen van-e a Facebook részvény piacán. Megvizsgáltam a napi záróárfolyamokat mindkét - a 3. fejezetben bemutatott- módszer alapján és azt a konklúziót vontam le, hogy a módszereink alapján úgy tűnik, hogy nincs buborék.

A dolgozatban vizsgált legfőbb kérdés, hogy fel lehet-e ismerni a buboréket még kipukkanása előtt? A kapott válasz az, hogy vannak erre vonatkozó biztató eredmények. Az eljárás gyenge pontja egyelőre az, hogy nem tartozik hozzá megbízhatósági szint, mint a statisztikai teszteknel. De mindenesetre érdemes lehet alkalmazása azok számára, akiknek fő területe a spekuláció, részvények kereskedése.

Irodalomjegyzék

- [1] C. Thomas-Agnan. Computing a Family of Reproducing Kernels for Statistical Applications. *Numerical Algorithms*, (13):21-32., 1996.
- [2] D. Florens-Zmirou. On Estimating the Diffusion Coefficient from Discrete Observations, *Journal of Applied Probability*, 30:790-804., 1993.
- [3] Frits Beukers. Gauss' hypergeometric function. *Arithmetic and Geometry Around Hypergeometric Functions*, 23-42., 2007.
- [4] G. Wahba. An Introduction to Model Building With Reproducing Kernel Hilbert Spaces. *Technical report No 1020*, Department of Statistics, University of Wisconsin-Madison. 2000.
- [5] J. Jacod. Non-parametric kernel estimation of the coefficient of a diffusion. *Scandinavian Journal of Statistics*, (27):83-96., 2000.
- [6] Kurics Tamás. Bevezetés a funkcionálanalízisbe. *ELTE jegyzet*. 2002.
- [7] N. Aronszajn. Theory of Reproducing Kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, (68):337-404, 1951.
- [8] Philip Protter. A Mathematical Theory of Financial Bubbles. *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2013*,1-108, Springer. 2013.
- [9] R. Ghomrasni and G.Peskir. Local Time-Space Calculus and Extensions of Ito's Formula. *High Dimensional Probability III.*, 177-192., 2003.

-
- [10] Robert Jarrow, Younes Kchia and Philip Protter. How to Detect an Asset Bubble, *SIAM J. Financial Math.*, 2:839-865., 2011.
- [11] Robert A. Jarrow, Philip Protter and Kazuhiro Shimbo. Asset price bubbles in complete markets. In *Advances in mathematical finance*, Appl. Numer. Harmon. Anal., pages 98-121. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2007.
- [12] Robert A. Jarrow, Philip Protter and Kazuhiro Shimbo. Asset price bubbles in incomplete markets. *Mathematical Finance*, 20(2):145-185., 2010.
- [13] V. Genon-Catalot and J. Jacod. On the Estimation of the Diffusion Coefficient for Multi Dimensional Diffusion Processes. *Annales de l'I.H.P*, section B, 29:119-151., 1993.