Tőkeallokáció illikvid portfólió esetén

Szakdolgozat

Írta: Herczeg Bonifác

Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc
Kvantitatív pénzügyek szakirány

2015

Témavezető:

Dr. Csóka Péter
Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Csóka Péternek, amiért felkeltette érdeklődésemet a téma iránt, hasznos tanácsokkal, észrevételekkel és segédanyagokkal látott el, és kérdéseimmel mindig bizalommal fordulhattam hozzá. Szeretném megköszönni Klimaj Bettinának, hogy matematikai hozzáértésével segítette a munkámat, a rengeteg türelmet, és hogy mindig mindenben mellettem állt. Köszönettel tartozom a családomnak, akiktől rengeteg támogatást és biztatást kaptam tanulmányaim során.

Bevezetés

A tőkeallokáció kérdése onnan ered, hogy a portfóliók kockázatainak összege nagyobb, mint a portfóliók összegének kockázata. A tőkeallokáció során arra keressük a választ, hogy a portfóliók összeadásakor jelentkező diverzifikációs előnyt hogyan osszuk szét minél igazságosabban a részt vevő portfóliók között. Ez a kérdés kiemelten fontos, ha egy cég az üzletágai között szeretné elosztani a kockázatot vagy különböző portfóliókat szeretnénk értékelni a kockázat szempontjából.

Az első fejezetben áttekintjük a kockázatok mérésének módszereit, a koherens kockázati mértékeket. Ezek szükségesek ahhoz, hogy a portfóliók kockázatát mérni és később elosztani tudjuk. Ezután definiáljuk a tőkeallokációt és megfogalmazzuk vele szemben a legfontosabb, logikusnak tűnő elvárásokat. Majd áttekintjük az ismert tőkeallokációs módszereket, közülök kiemelten a harmadik fejezetben a szimuláció során is alkalmazott Shapley-féle eljárást, melyet egy példán keresztül is bemutatunk. Ezután ismertetünk egy negatív eredményt is, mely szerint lehetetlen egyszerre minden korábban megfogalmazott elvárásnak megfelelő tőkeallokációs módszert alkotni.

A második fejezetben áttérünk az illikvid piacok vizsgálatára. Először az ajánlati könyvről lesz szó, melyből a likviditás szintje kiolvasható. Ehhez az MSDC görbére lesz szükségünk, amely az ajánlati könyv adatait tartalmazza egy függvény formájában. Az illikvid piacon a portfóliók értékének meghatározásához a portfóliókban lévő eszközök ismeretén kívül szükség van likviditási elvárásra is, ezekről is szót ejtünk. Majd a koherens kockázati mértékek újragondolását mutatjuk be illikvid portfóliókra. Végül adott feltételezések mellett egy analitikusan megoldható csoportról lesz szó.

A harmadik fejezetben kap helyet a Shapley-érték vizsgálata a magbeliség szempontjából egy szimuláció segítségével. Egy korábbi példán keresztül is láthatjuk, hogy a Shapley-módszer nem minden esetben teljesíti ezt a fontos követelményt, azonban felmerül a kérdés, hogy ez egy valós probléma vagy a piaci viszonyok között általában az eljárás mégis magbeli allokációt eredményez-e. Ezt úgy vizsgáljuk meg, hogy a szimulációhoz szükséges adatokat a piacról vett megfigyelésekre illesztett eloszlásokból vesszük. A portfóliókat a szimuláció során egyszerű részvények fogják alkotni. Végül a kapott eredmények értelmezése, egy speciális esetre a magbeliség belátása és a bemenő paraméterekre végzett érzékenységvizsgálat is ennek a fejezetnek a részét képezi.

1. fejezet

Tőkeallokációs játékok

A tőkeallokáció problémája egyáltalán nem triviális, mivel a kockázati tőke a teljes cégre általában kisebb, mint az egyes üzletágakra összesen. Ennek oka a diverzifikációs hatás. A jelentkező megtakarítást szeretnénk igazságosan elosztani az üzletágak vagy portfóliók között. Ez fontos a cég üzletágainak, portfóliókezelőinek teljesítményértékeléséhez, sokkal informatívabb képet kapunk, ha a profit mellett a rájuk eső kockázatot is figyelembe vesszük. Az üzletágak között nem szeretnénk különbséget tenni, fontos az azonos elbírálás. A probléma vizsgálata során a kooperatív játékelmélet eszközeit használhatjuk. Először a koherens kockázati mértékeket tekintjük át, utána a koherens tőkeallokációt definiáljuk. Ezután lép be a játékelmélet, ahol a játékosok az egyes portfóliók lesznek.

1.1. Koherens kockázati mértékek

Természetes módon adódik a szükséglet a pénzügyekben, hogy egy portfólió kockázatát mérni tudjuk, erre alkalmasak a kockázati mértékek, melyeket Artzner, Delbaen, Eber, and Heath [1999] cikke vezetett be. A kockázati mértékek a portfólió lehetséges kifizetéseit tartalmazó valószínűségi változóhoz rendelnek valós számot, mely a portfólió kockázatát méri. Ha ez a $\rho : L^\infty \to \mathbf{R}$ érték pozitív, akkor a cégnek $\rho(X)$ tőkét kell tartalékolnia az X portfólióhoz, ha 0, akkor éppen elfogadható kockázatot tartalmaz a portfólió, míg negatív $\rho(X)$ esetén a tőkekivonás is megengedett. Az L^∞ alatt az $L^\infty(\Omega, \mathbf{A}, \mathbf{R})$ valósznűségi mezőt értjük.

1.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy ρ kockázati mérték koherens, ha minden X és Y-ra teljesülnek a következők:*

1. *Szubadditivitás:* $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
2. *Monotonitás: ha* $X \geq Y$ *majdnem mindenhol, akkor* $\rho(X) \leq \rho(Y)$

3. Pozitív homogenitás: minden $\lambda \geq 0$ *valós számra* $\lambda\rho(X) = \rho(\lambda X)$

4. Transzláció invariancia: minden $\alpha \in \mathbf{R}$*-re* $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$

Az előző természetes követelmények szükségesek, hogy egy kockázati mértéket koherensnek, megbízhatónak tekintsünk. A szubadditivitás a diverzifikációs hatást ragadja meg: ha két portfóliót összevonunk, a kockázat legfeljebb akkora lehet, mint ha külön-külön tekintjük őket. A monotonitás szerint ha egy portfólió kifizetése minden esetben legalább akkora, mint egy másiké, akkor a kockázata nem lehet nagyobb. A pozitív homogenitás garantálja, hogy a kockázati mérték skálafüggetlen legyen, és hogy a pozíció mérete lineárisan befolyásolja a kockázatot. Ez csak tökéletesen likvid piacokon igaz, a követelmény enyhítéséről a következő fejezetben lesz szó. A transzláció invariancia szerint pedig ha egy portfólióhoz bizonyos értékű készpénzt vagy ennek megfelelő kockázatmentes eszközt adunk hozzá, akkor ezzel az értékkel csökken a portfólió kockázata.

Bár látszólag természetes követelményeket támasztottunk, a leggyakrabban használt kockázati mérték, a VAR mégsem teljesíti őket.

1.1.2. Definíció. *Egy adott* X *portfólióhoz tartozó* α *szignifikanciaszint melletti* VAR_α *érték:*

$$VAR_\alpha(X) = inf\{x|P(X \leq x) > \alpha\}$$

A VAR definíciójában X értéke a portfólió veszteségeit jelöli. A VAR nem teljesíti a szubadditivitás kritérimuát és nem veszi figyelembe a küszöb alatti szcenáriók eloszlását. A kockázat mérésére szintén gyakran használt szórás sem koherens kockázati mérték. Ezért került Acerbi és Tasche [2002] által bevezetésre az expected shortfall, mely koherens kockázati mérték.

1.1.3. Definíció. *Egy adott* X *portfólióhoz tartozó* α *szignifikanciaszint melletti expected shortfall érték::*

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \overleftarrow{F}(p)dp$$

Az expected shortfall a feltételes várható veszteséget adja meg abban az esetben, ha a szignifikanciaszinten túli veszteség következik be. Ily módon az expected shortfall a VAR-ral ellentétben az eloszlás szélét is figyelmebe veszi.

A kockázati mértékek további speciális családját alkotják az Acerbi [2002] által definiált spektrális kockázati mértékek.

1.1.4. Definíció. *Egy* $M_\phi : \mathcal{L} \to \mathbf{R}$ *spektrális kockázati mérték, ha* ϕ *nem-negatív, nem-növekvő, jobbról folytonos, intergálható függvény a* $[0, 1]$*-en, melyre*

$$\int_0^1 \phi(p)dp = 1$$

és

$$M_\phi(X) = -\int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp$$

ahol F_X az eloszlásfüggvény.

A spektrális kockázati mértékek az eseményekhez balról egyre csökkenő súlyokat rendelnek, azaz egy rosszabb kimenetelnek sosem lehet kisebb súlya egy kedvezőbb kimenetelnél. Az expected shortfall spektrális kockázati mérték, a VAR azonban nem, mivel nem veszi figyelembe a küszöb alatti eseményeket.

1.2. Elvárások a tőkeallokációkkal szemben

Mivel a portfóliókat együtt tekintve a kockázatuk általában kisebb, mint ha külön-külön összeadjuk a rájuk eső kockázatot, adódik a kérdés, hogy hogyan osszuk el a jelentkező megtakarítást. Tőkeallokációnak nevezzük egy kockázatelosztási probléma megoldását. A következőkben Denault [2001] cikke alapján tekintjük át a tőkeallokációk matematikai definícióját.

A következő jelöléseket fogjuk használni:

- X_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ valószínűségi változók, melyek a portfóliók T időbeli értékét jelölik.
- X valószínűségi változó jelöli a portfóliók összegét, azaz a teljes cég értékét a T időpontban, ahol $X = \sum_{i=1}^n X_i$.
- N a cég portfólióinak halmaza.
- A a tőkeallokációs problémák halmaza: az (N, ρ) párok az n számú portfólióból és a ρ koherens kockázati mértékből állnak össze.
- $K = \rho(X)$ a cég teljes kockázati tőkéje.

Most már definiálhatjuk a tőkeallokációt.

1.2.1. Definíció. *Az allokációs elv egy $\Pi : A \to \mathbf{R}^n$ függvény, mely minden allokációs problémához egy egyedi allokációs vektort rendel, azaz*

$$\Pi : (N, \rho) \to \begin{pmatrix} \Pi_1(N,\rho) \\ \Pi_2(N,\rho) \\ \vdots \\ \Pi_n(N,\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}$$

úgy, hogy $\sum_{i \in N} K_i = \rho(X)$

A definíció biztosítja, hogy pontosan annyi kockázatot osszunk el, amennyi a teljes cégre, azaz a portfóliók összességére esik. Ezt a tulajdonságot hatékonyságnak nevezzük.

Kérdés, hogy milyen további tulajdonságokat várhatunk el egy tőkeallokációtól. A következőkben a követelményeket Csóka, Pintér, Bátyi, Balog [2011] cikke alapján tekintjük át.

1.2.2. Definíció. *Egy adott ρ tőkeallokációs elvtől elvárható tulajdonságok:*

1. *Nem blokkolható: Azaz tetszőleges M koalícióra nézve*

$$\sum_{i \in M} K_i \leq \rho(M),$$

ahol $S \subseteq N$.

2. *Szimmetrikus: Ha i, j játékos tetszőleges $M \subseteq N \backslash \{i, j\}$ koalícióhoz csatlakozva azonos kockázatnövekedést okoz, azaz*

$$\rho(M \cup \{X_i\}) = \rho(M \cup \{X_j\}),$$

akkor $K_i = K_j$.

3. *Monoton: Ha i, j játékosok tetszőleges $M \subseteq N \setminus \{i, j\}$ koalícióhoz csatlakozása esetén i játékos nagyobb kockázatnövekedést okoz, azaz*

$$\rho(M \cup \{X_i\}) \geq \rho(M \cup \{X_j\}),$$

akkor $K_i \geq K_j$.

Nézzük meg, milyen pénzügyi tartalma van a fenti követelményeknek! Az első követelmény az allokáció magbeliségét (Gillies, [1959]) fejezi ki, azaz egyetlen szereplőnek vagy csoportnak sem érdemes kilépnie a jelenlegi koalícióból, ezzel blokkolnia az allokációt. Ez akkor teljesül, ha minden koalícióra igaz, hogy az allokáció során a tagjaira összesen legfeljebb kockázatot osztottunk, mint ha a koalícióra önállóan határoznánk meg a kockázatot. A magbeliségből a definícióban már megkövetelt hatékonyság is következik.

A szimmetria biztosítja, hogy egy portfólió megítélését csak a kockázathoz való hozzájárulása befolyásolja, egyéb módon nem teszünk köztük különbséget. Azaz, ha bármely koalícióhoz történő csatlakozásuk esetén ugyanakkora kockázatnövekedést okoznak, akkor a rájuk eső tőkének is ugyanakkorának kell lennie. A monotonitást ösztönző tulajdonságnak is nevezik, mert arra készteti a portfóliókat, hogy csökkentsék a kockázatukat, hiszen ha egy portfólió tetszőleges koalícióhoz csatlakozva kisebb kockázatnövekedést okoz, mint egy másik portfólió, akkor jogosan bízhat benne, hogy a rá eső tőke is kisebb lesz.

A következő szakaszban a Shapley-értéket mutatjuk be.

1.3. Shapley-érték

A legismertebb tőkeallokációs módszer a Shapley [1953] által bevezetett Shapley-érték. Ez azon alapszik, hogy egy játékosra annyi tőkét allokál, amennyi a hozzájárulása az összes többi 2^{N-1} lehetséges koalícióhoz átlagosan.

1.3.1. Definíció. *A Shapley-érték:*

$$\rho(X_i|X) = \sum_{M \subseteq N, i \in M} \frac{(|M|-1)!(n-|M|)!}{n!} \Delta\rho(X_i|M)$$

minden $i = 1, 2, \dots, n$*-re, ahol* $|M|$ *a* M *koalíció számosságát jelöli, és ahol*

$$\Delta\rho(X_i|M) = \rho(M \cup \{X_i\}) - \rho(M),$$

azaz az X_i M*-hez csatlakozása által okozott kockázatnövekedés.*

A Shapley-érték kevés játékosnál még jól számolható, sok játékos esetén azonban már nagyon számításigényes. A következő szakaszban megmutatjuk, hogy a Shapley-érték az egyetlen tőkeallokációs módszer, mely minden szituációban kielégíti a szimmetria és az erős monotonitás feltételeit, ezért különösen érdekes a vizsgálata. Azonban a Shapley-érték sem eredményez mindig magbeli allokációt, mint azt a következő példán is láthatjuk majd.

1.3.1. Példa a Shapley-értékre

Ebben a szakaszban egy konkrét szituáción mutatjuk be a Shapley-érték kiszámítását, majd belátjuk, hogy a kapott allokációs vektor nem magbeli.

Tekintsünk három különböző portfóliót, melyek kezdetben 100 egységet érnek. Vizsgáljunk egyetlen periódust, melynek végén három lehetséges különböző kimenetel adódhat. Ezeket a lenti táblázat szemlélteti. Legyen a választott kockázati mérték a maximális veszteség! Ennek segítségével meghatározhatjuk portfóliónként a tőkeszükséglet mennyiségét.

Állapot	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
T_0	100	100	100	200	200	200	300
1. kimenetel	99	94	87	193	186	181	280
2. kimenetel	97	105	102	202	199	207	304
3. kimenetel	105	112	120	217	225	232	337
Tőkeszükséglet	3	6	13	7	14	19	20

1.1. ábra. Portfóliók lehetséges értékei és tőkeszükségletük

A tőkeszükségletet a maximális veszteség kockázati mérték szerint úgy számoltuk, hogy a portfóliók kezdeti értékéből kivontuk a legrosszabb esetben adódó értéket. A Shapley-érték számításához szükség van a portfóliók hozzájárulására az egyes koalíciókhoz való csatlakozáskor. Ezeket az értékeket mutatja a következő táblázat.

Ehhez csatlakozik	$\{\emptyset\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$
1. portfólió	3		1	1			1
2. portfólió	6	4		6		6	
3. portfólió	13	11	13		13		

1.2. ábra. Portfóliók lehetséges értékei és tőkeszükségletük

Mennyi lesz a portfóliókhoz tartozó Shapley-érték? Lássuk az első portfóliót!

$$\rho(X_1|X) = \sum_{M \subseteq N, i \in M} \frac{(|M|-1)!(n-|M|)!}{n!} \Delta\rho(X_i|M) =$$
$$\frac{0! * 2!}{3!} * 3 + \frac{1! * 1!}{3!} * (1+1) + \frac{2! * 0!}{3!} * 1 =$$
$$1 + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{3}.$$

A második portfólió esetén:

$$\rho(X_2|X) = \sum_{M \subseteq N, i \in M} \frac{(|M|-1)!(n-|M|)!}{n!} \Delta\rho(X_i|M) =$$
$$\frac{0! * 2!}{3!} * 6 + \frac{1! * 1!}{3!} * (4+6) + \frac{2! * 0!}{3!} * 6 =$$
$$2 + \frac{10}{6} + \frac{12}{6} = \frac{17}{3}.$$

Ugyanígy a harmadik esetben:

$$\rho(X_3|X) = \sum_{M\subseteq N, i\in M} \frac{(|M|-1)!(n-|M|)!}{n!}\Delta\rho(X_i|M) =$$
$$\frac{0!*2!}{3!}*13 + \frac{1!*1!}{3!}*(11+13) + \frac{2!*0!}{3!}*13 =$$
$$\frac{26}{6} + \frac{24}{6} + \frac{26}{6} = \frac{76}{6} = \frac{38}{3}.$$

A kapott tőkeallokációs vektor tehát a $(\frac{5}{3}, \frac{17}{3}, \frac{38}{3})$ Ez azonban könnyen látható, hogy nem magbeli, hiszen az első két portfólióra összesen $\frac{22}{3}$ kockázati tőke jut, a nagykoalícióból kilépve viszont csak $7 = \frac{21}{3}$. Ugyanígy az első és a harmadik portfólió is blokkolhatja az allokciót, hiszen rájuk $\frac{43}{3}$ kockázati tőkét osztott a Shapley-módszer, önállóan viszont csak $14 = \frac{42}{3}$ esne rájuk, így mindkét esetben $\frac{1}{3}$ egységet nyerhetnek a kilépők.

A szimmetriát és az erős monotonitást ezen a példán nem tudjuk ellenőrizni, azonban bizonyítható, hogy ezekre nem tudunk ellenpéldát találni, mert a Shapley-módszer ezeket a követelményeket minden szituációban teljesíti.

1.4. Egyéb tőkeallokációs módszerek

A gyakorlatban a Shapley-értéken kívül több tőkeallokációs eljárást is kifejlesztettek. A következő szakaszban öt további módszert mutatunk be Balog-Bátyi-Csóka-Pintér [2011] cikke alapján. Jelöljön ρ minden esetben tetszőleges kockázati mértéket.

1.4.1. Egyéni kockázattal arányos módszer

A módszert Hamlen [1977] vezette be. Az alkalmazása soránl a teljes kockázatot az egyéni kockázattal arányos módon osztjuk szét.

1.4.1. Definíció. *Legyen X a teljes cég, X_i az portfóliók. Ekkor az egyéni kockázattal arányos módszer szerint*

$$\rho(X_i|X) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^{n}\rho(X_j)}\rho(X).$$

Ez a módszer egyszerűen számolható ugyan, de hibája, hogy nem veszi figyelembe a diverzifikációs hatást, nem értékeli a portfóliók közötti kapcsolatokat, így nem jutalmazza azokat, akik a többi egységgel negatívan korrelálnak, ezzel csökkentik az összkockázatot.

1.4.2. Béta-módszer

A béta-módszer már figyelembe veszi az egyes üzletágak és a teljes cég kockázata közötti kovarianciát, így kovariancia-alapú módszernek is nevezik.

1.4.2. Definíció. *Legyen X a teljes cég, X_i az portfóliók. Ekkor a béta-módszer szerint*

$$\rho(X_i|X) = \beta_i \frac{\rho(X)}{\sum_{j=1}^{n} \beta j},$$

ahol

$$\beta_i = \frac{Cov(i,N)}{\sigma(N)^2}.$$

Itt a $Cov(i,N)$ az i-dik portfólió és a teljes cég közötti kovarianciát jelöli.

1.4.3. Növekményi módszer

A növekményi módszer (Jorion, [2007]) annak arányában osztja szét a teljes cég kockázatát, hogy az i portfólió csatlakozása a többi portfólióhoz milyen arányban növeli a teljes cég kockázatát. Jelölje

$$\Delta(X_i|N) = \rho(N) - \rho(N \setminus X_i)$$

az i portfólió hozzájárulását a másik $n-1$ portfólió kockázatához.

1.4.3. Definíció. *Legyen X a teljes cég, X_i az portfóliók. Ekkor a növekményi módszer szerint*

$$\rho(X_i|X) = \frac{\Delta\rho(X_i|N)}{\sum_{j=1}^{n} \Delta\rho(X_j|N)} \rho(X).$$

1.4.4. Költségrés módszer

A költségrés módszert (Driessen és Tijs [1986]) a növekményi módszer módosításával kapjuk.

1.4.4. Definíció. *Legyen X a teljes cég, X_i az portfóliók. Ekkor a költségrés módszer szerint*

$$\rho(X_i|X) = \begin{cases} \Delta\rho(X_i|N) & \textit{ha } \rho(X) - \sum_{i=1}^{n} \Delta(X_i) = 0 \\ \Delta\rho(X_i|N) + \frac{\nu_i}{\sum_{k=1}^{n} \nu_k}(\rho(X) - \sum_{i=1} n\Delta\rho(X_i)) & \textit{különben,} \end{cases}$$

ahol ν_i az i portfólió legkisebb költségrését jelöli, vagyis

$$\nu_i = \min_{K \subseteq N, i \in K} \{\rho(K) - \sum_{j \in N} \Delta\rho(X_j|N)\}.$$

A ν definíciójában szereplő minimum a K koalíció költségrése, ami azt mutatja meg, hogy mennyi a koalíció tagjainak egyéni növekményének és a koalíció teljes kockázatának különbsége, azaz mennyi a koalíció felosztásra nem került kockázata. A fel nem osztott kockázatot pedig a játékosok költségréseinek arányában osztjuk szét.

Ezt úgy értelmezhetjük, hogy ha a kockázatnövekmények összege megegyezik a teljes kockázattal, akkor ezzel a növekménnyel arányos lesz az elosztás. Ekkor a költségrés és a növekményi módszer eredménye megegyezik.

1.4.5. Gradiens-módszer

Ezt a tőkeallokációs eljárást Euler-módszernek is szokás nevezni. Először írjuk fel a teljes portfólió értékét az őt alkotó részek összegeként úgy, hogy

$$X = Y(u) = Y(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i Y_i.$$

Jelölje $f_{\rho,Y} = \rho(Y(u))$-t. Az egyes portfóliókra eső tőkenövekmény ekkor

$$\rho(Y_i|Y) = \frac{d\rho(Y + hY_i)}{dh}|_{h=0} = \frac{df_{\rho,Y}(1,\ldots,1)}{du_i},$$

ahol feltesszük, hogy $f_{\rho,Y}$ folytonosan differenciálható.

Az Euler-tétel szerint ekkor

$$f_{\rho,Y} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{df_{\rho,Y}(u)}{du_i}.$$

Így teljesül, hogy

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i|X) = \sum_{i=1}^{n} u_i \rho(Y_i|Y),$$

vagyis ez a módszer is tőkeallokáció, mert az pontosan az összes kockázatot osztja fel.

Buch és Dorfleitner [2008] megmutatták, hogy a gradiens-módszer koherens kockázati mérték mellett mindig magbeli tőkeallokációhoz vezet, azonban megsérti a szimmetria feltételét.

1.5. Egy lehetetlenségi tétel

A kooperatív játékelmélet eszközeinek felhasználásával a következőkben Csóka és Pintér [2014] cikke alapján megmutatjuk, hogy nem létezik olyan allokációs eljárás, mely az előző szakaszban megfogalmazott szimmetria, erős monotonitás, magbeliség követelményeinek minden szituációban eleget tesz. Ehhez szükség lesz a koalíciós játékok néhány osztályának definiálására, melyek a bizonyítás során szerepet kapnak majd.

1.5.1. Definíció. *Egy kockázatelosztási játék (N, c) a következőkből áll:*

- *A játékosok N-nel jelölt n elemű véges halmaza.*
- *Egy c költségfüggvény, mely egy valós $c(S)$ számot rendel N minden S részhalmazához (ezeket hívjuk koalícióknak).*

A játékosok célja, hogy minimalizálják a rájuk eső költséget oly módon, hogy döntenek arról, hogy egyes koalíciókban részt vesznek-e.

A játékok vizsgálata során érdemes különböző osztályokat áttekinteni. Egy (N, v) játék $C \in 2^N$ koalícióra történő (c, v^c) megszorítását részjátéknak nevezzük. Egy kockázatelosztási játékot teljesen kiegyensúlyozottnak nevezünk, ha minden részjáték magja nem üres. Jelölje Γ_{tb} a teljesen kiegyensúlyozott játékok családját. Ezek egy érdekes osztálya az egzakt játékok (Schmeidler, [1952]).

1.5.2. Definíció. *Egy (N, v) játékot egzaktnak nevezünk, ha minden $C \in 2^N$ részhalmazra létezik olyan magbeli allokáció, melyre $x(C) = v(C)$.*

1.5.1. Állítás. *Minden (N, v) kockázatelosztási játék teljesen kiegyensúlyozott, azaz $\Gamma_r \subseteq \Gamma_{tb}$.*

A másik irány is igaz, azaz nem csak minden kockázatelosztási játék teljesen kiegyensúlyozott, hanem minden teljesen kiegyensúlyozott játék előáll kockázatelosztási játékként. A bizonyítás Csóka [2009] cikkében található.

1.5.2. Állítás. *Tekintsünk egy $(N, v) \in \Gamma_{tb}$ teljesen kiegyensúlyozott játékot. Ekkor ez a játék előállítható egy kockázati környezetből, azaz $\Gamma_{tb} \subseteq \Gamma_r$.*

1.5.1. Tétel. *A kockázatelosztási játékok halmaza megegyezik a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztályával, azaz $\Gamma_r = \Gamma_{tb}$.*

Tekintsünk egy tőkeallokációs problémát és ennek egy ρ megoldását! Szeretnénk, ha ez az előző szakaszban bemutatott három természetes követelménynek eleget tenne.

Sajnos azonban nem létezik olyan tőkeallokációs eljárás, melynek eredménye minden tőkeallokáció probléma esetén olyan kockázatelosztáshoz vezet, amely kielégíti a fenti három követelményt.

1.5.2. Tétel. *Legyen ρ megoldás minden kockázatelosztási játék esetén, mely kielégíti a hatékonyság, szimmetria és az erős monotonitás követelémnyét. Ekkor ρ a Shapley-megoldás.*

Bizonyítás. A tőkeallokációs játékok a kooperatív játékok egy speciáls osztályát alkotják, mivel mindig teljesen kiegyensúlyozottak. Így az előző tételt elég erre az osztályra bizonyítani.

A Shapley-érték hatékonyságának, szimmetriájának és erős monotonitásának bizonyítása megtalálható Young [1985] cikkében. Tekintsük most a másik irányt, azaz hogy a Shapley-módszer az egyetlen ilyen allokációs eljárás!

Jelölje u_T azt az egyhangú játékot a T koalíción, ahol minden $C \subseteq N$-re

$$u_T(C) = \begin{cases} 1, & \text{ha } T \subseteq C \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy ha v játék teljesen kiegyensúlyozott, akkor $v + \alpha u_T$ is az, hiszen tetszőleges részjátékra meg tudjuk tartani az elvárt magbeli allokációt az α többlet egyenlő szétosztásával a T koalíció tagjai között.

Legyen v teljesen kiegyensúlyozott játék, majd bontsuk fel v-t egyhangú játékokra oly módon, hogy

$$v = \sum_{T \subseteq N} \alpha_T u_T.$$

Legyen továbbá

$$\alpha^m = \max_{T \subseteq N} \alpha_T,$$

és

$$v^* = \alpha^m \sum_{T \subseteq N} u_T,$$

valamint $v_d = v^* - v$.

Ekkor a fentiek miatt v^* is teljesen kiegyensúlyozott játék, és

$$v_d = \sum_{T \subseteq N} \beta_T u_T$$

alakba írható, ahol $\beta_T \geq 0$ minden $T \subseteq N$-re. Definiáljuk $I(w)$ értékét minden w játékra olyan módon, hogy

$$I(w) = |\{\gamma_T \neq 0 : w = \sum_{T \subseteq N} \gamma_T u_T\}|.$$

Ezután a bizonyítás $I(v_d)$ szerinti indukcióval történik.

Első lépésben lássuk be az állítást $I(v_d) = 0$ esetén. Ekkor minden játékos azonos, a játékosok nem megkülönböztethetők. A hatékonyság és a szimmetria miatt ekkor az allokáció egyértelmű, minden játékosra azonosan $\rho(X_i) = \frac{\rho(X)}{n}$. Ez ebben az esetben természetesn megegyezik a Shapley-megoldás által szolgáltatott értékekkel.

Legyen most k egész olyan, hogy $0 < k < 2^{|N|} - 1$. Tegyük fel, hogy minden teljesen kiegyensúlyozott játék esetén, ahol $I(w_d) \leq k$, ott $\rho(w)$ egyértelmű. Legyen v olyan teljesen kiegyensúlyozott játék, melyre $I(v_d) = k+1$! teljesül. Ekkor be kell látni, hogy ρ ebben az esetben is egyértelmű. Tekintsük v_d felbontását! Legyen

$$v_d = \sum_{T \subseteq N} \beta_T u_T,$$

ekkor

$$v = v^* - \sum_{T \subseteq N} \beta_T u_T,$$

ahol $\beta_T \geq 0$ minden $T \subseteq N$-re.

Ezután tekintsük azokat az i játékosokat, akikre létezik olyan $T \subseteq N$ és $\beta_T > 0$ úgy, hogy $i \notin T$. Legyen $v^k = v + \beta_T u_T$. Ekkor mivel $\beta_T > 0$, így v^k is teljesen kiegyensúlyozott. Továbbá mivel $I(v_d^k) = k$, ezért az indukció miatt $\rho(v^k)$ egyértelmű. Mivel $v' = (v + \beta_T u_T)'_i$, ezért az erős monotonitás miatt $\rho_i(v) = \rho_i(v_k)$.

Tekinsük most a többi játékost, melyekre $i \in T \subseteq N$ minden $T \subseteq N$-re, ahol $\beta_T > 0$. Ezen játékosok azonosan viselkednek v esetén, mivel azonosak minden $\beta_T u_T$ játékban, ahol $\beta_T > 0$, így a szimmetriából adódóan azonos értéket kapnak az allokáció során. Így a hatékonyság miatt minden v játékra ρ megoldás egyértelmű.

Mivel tudjuk, hogy a Shapley-érték teljesíti az erős monotonitás, hatékonyság és szimmetria feltételeit, ezért ez az egyértelmű megoldás megegyezik a Shapley-megoldással, így ez az egyetlen mindhárom feltételt teljesítő allokáció eljárás. ■

1.5.3. Tétel. *Nem létezik olyan minden kockázatelosztási játékon értelmezett ρ tőke-allokációs módszer, ami egyszerre magkompatibilis, szimmetrikus, és erősen monoton.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint a hatékony, szimmetrikus, erősen monoton tőkeallokációs módszer csak a Shapley-érték lehet. Az előző fejezetben látott példa mutatja, hogy a Shapley-érték nem teljesíti minden szituációban a magbeliség feltételeit, így nem létezik minden feltételt kielégítő megoldás a tőkeallokációs játékokra. ■

2. fejezet

Illikvid piacok

Ebben a fejezetben kilépünk a teljesen likvidnek feltételezett piac keretei közül, és áttekintjük az illikviditás hatásait a tőkeallokációra. Egy adott részvény kockázatát a kifizetés bizonytalansága mellett az illikviditásból eredő kockázata adja. Ezért a piacon nagyon fontos a likviditás vizsgálata, sok befektetőnek fontos lehet, hogy az általa birtokolt eszközt rövid időn belül és kis veszteséggel el tudja adni. A válság során az egyik fő problémát éppen a likviditás hiánya jelentette, ez is hozzájárult a likviditás kezelésének és elemzésének előtérbe kerüléséhez. A likviditást többféle mérőszámmal mérhetjük, az ezekhez szükséges adatok az ajánlati könyvek tartalmazzák. A fejezet során Acerbi-Scandolo [2007] cikkének eredményeit követve mutatjuk be az illikvid piacok vizsgálatának eszközeit.

2.1. Ajánlati könyvek

A tőzsdéknek két típusát különböztetjük meg a kereskedés módja szerint, az árjegyzői és az ajánlatvezényelt piacot. Mindkettőről részletes leírás található Váradi Kata [2012] cikkében.

Az árjegyzői piacon a likviditást az árjegyzők biztosítják, akik vételi és eladási, azaz kétoldali árjegyzéssel dolgoznak, a befektetők ezeken az árakon köthetik meg a tranzakciókat. A kereskedés itt kizárólag az árjegyzőkön keresztül működik. Ilyen rendszerben működik például a magyar állampapírpiac és a NASDAQ tőzsdéje.

Az ajánlatvezérelt piacon ezzel szemben a beadott vételi és eladási ajánlatokat párosítják össze. Vételi és eladási ajánlatból is két típusú lehetséges, a piaci áras vételi vagy eladási (take vagy hit) és a limitáras vételi vagy eladási (bid vagy ask) ajánlat. Az első tulajdonsága, hogy azonnal teljesül a megbízás, a piacon elérhető legjobb áron. A limitáras ajánlat pedig bekerül a rendszerbe, és csak akkor teljesül, ha a másik oldalról összepárosítható egy megfelelő beadott ajánlattal. Az éppen a rendszerben lévő limitáras ajánlatokat az ajánlati könyvben tárolják. A likviditást ezen piacon a limitáras ajánlatokat beadó piaci szereplők biztosítják. Ebben a rendszerben működő tőzsde a BÉT vagy a Dow Jones.

A likviditás egyik jellemző mennyisége a bid-ask spread. Ez a legjobb vételi (bid) és a legjobb eladási (ask) limitáras ajánlat különbsége. Azonban ez nem ragadja meg pontosan a likviditással járó kockázatokat, így például a bid-ask spreaddel korrigált VAR sem igazán alkalmas arra, hogy ezt a kockázatot beépítsük az elméletbe. Nem veszi figyelembe ugyanis a legjobb ajánlatok nagyságát, sem az ajánlati könyv legjobb ajánlattól különböző részeit.

A dolgozat elején szerepelt a koherens kockázati mérték fogalma. A likviditási kockázatokat is figyelembe véve azonban ezek már módosításra szorulnak, hiszen egy kétszer nagyobb portfólió kockázata az eredeti portfólió kockázatának akár több mint kétszerese is lehet. Ezért érdemes bevezetni a konvex kockázati mértékek fogalmát, amely a pozitív homogenitás és szubadditivitás helyett konvexitást követel meg. A fejezet során Acerbi és Scandolo Liquidity Risk Theory and Coherent Measures of Risk [2007] cikke alapján tekintjük át az illikvid piacok vizsgálatának formalizmusait.

2.1.1. Definíció. *Egy ρ kockázati mértéket konvexnek (vagy gyengén koherensnek) nevezünk, ha a következők teljesülnek minden X, Y portfólióra:*

1. *Monotonitás: ha $X \geq Y$ majdnem mindenhol, akkor $\rho(X) \leq \rho(Y)$*

2. *Transzláció invariancia: minden $\alpha \in \mathbf{R}$-re*

$$\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$$

3. *Konvexitás:*

$$\rho(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1 - \alpha)\rho(Y)$$

teljesül minden $\alpha \in (0, 1)$-re.

A konvexitási követelménynél X-en és Y-on a portfólió helyett azok értékeit kell érteni.

2.1.1. Állítás. *Minden koherens kockázati mérték konvex is.*

Bizonyítás. Azt kell látnunk, hogy a pozitív homogenitásból és a szubadditivitásból következik a konvexitás.

$$\rho(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \rho(\alpha X) + \rho((1 - \alpha)Y) = \alpha\rho(X) + (1 - \alpha)\rho(Y),$$

ahol az első egyenlőtlenség a szubadditivitás, míg az egyenlőség a pozitív homogenitásból következik. ∎

Az előző állítás megfordítása nem igaz, vagyis ez a koherens kockázati mértékek valódi gyengítése.

A következő szakaszban a marginális keresleti-kínálati függvény segítségével áttekintjük, hogyan vizsgálhatóak az ajánlati könyv adatai és azokból milyen következtetéseket lehet levonni a likviditásra.

2.2. MSDC és a portfólió értéke

Míg tökéletes likviditást feltételezve a portfóliók értéke és kockázata is a méretükkel lineárisan változik, a likviditási kockázatot is figyelembe véve ez már nem fog teljesülni. A likviditás megfigyelésénél kulcsszerepet játszik az ajánlati könyvből kiolvasható marginális keresleti-kínálati görbe, azaz az MSDC.

2.2.1. Definíció. *Legyen A egy piacon kereskedett eszköz, melynek árait az $m : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ függvény adja meg, melyre teljesül, hogy*

1. *$m(x_1) \geq m(x_2)$, minden $x_1 < x_2$-re*
2. *m cadlag [1], ha $x < 0$ és ladcag [2], ha $x > 0$.*

Az $m^+ := m(0^+)$ a legjobb bid árat, $m^- := m(0^-)$ pedig a legjobb ask árat jelöli. Ekkor $\delta m := m^- - m^+ \geq 0$ jelöli a fentebb már említett bid-ask spread értékét. Ez mindig legalább 0, különben arbitrázs lenne a piacon.

Az MSDC így a konstrukció miatt az arbitrázsmentességet is figyelmbe véve monoton csökkenő. Az MSDC-t a piacon minden pillanatban meg tudjuk figyelni az ajánlati könyv adataiból. Valós kereskedés során általában pozitív bid-ask spreadet figyelhetünk meg, valamint szakaszonként konstans MSDC-t, mivel az ajánlatok szintenként érkeznek véges mennyiségben. Az MSDC-k általában pozitív és negatív értékeket is felvehetnek. Azokat az eszközöket, melyeknél csak pozitív értéket vesz fel, securitynek, melyeknél negatívat is felvehet, swapnak hívunk. Az $x = 0$ pontban nem definiáljuk az MSDC értékét, mivel a piacon valójában a középárfolyamnak nincs szerepe a kereskedés során.

2.2.2. Definíció. *A cash egy speciális A_0 eszköz, melynek MSDC függvénye konstans 1 minden $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$-ra.*

[1] Cadlag: jobbról folytonos, balról létezik határértéke
[2] Ladcag: balról folytonos, jobbról létezik határértéke

Nézzük most meg az MSDC ismeretében, hogy mennyi bevételhez jutunk egy eszköz likvidálása során!

2.2.3. Definíció. *Tegyük fel, hogy egy termékből x darabot szeretnénk eladni. Ekkor az ebből származó bevétel:*

$$P(x) = \int_0^x m(y)dy.$$

Ekkor $x > 0$, ha a tranzakciónk valóban eladás, és $x < 0$, ha a megbízásunk vételi.

Az MSDC-ből könnyen számolható a mikroökonómiából ismert keresleti-kínálati görbe, azaz az SDC.

2.2.4. Definíció. *Az SDC értéke egy $X \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tranzakcióra*

$$S(x) = \frac{P(X)}{x}.$$

Ez éppen a tranzakció során általunk tapasztalt átlagárnak felel meg. Pozitív x esetén azt mutatja, hogy milyen átlagáron tudunk x terméket eladni, negatív x esetén pedig azt, hogy milyen átlagáron tudunk x termékhez hozzájutni.

Jelöljük $\mathcal{P}$-vel a portfóliók $\mathbf{R}^{N+1}$ terét. A portfólió és a pénz összességét $(a, \overrightarrow{0})$-val jelöljük, ahol az a skalár jelöli a tökéletesen likvid pénz mennyiségét, így $p+a = p + (a, \overrightarrow{0})$. A $p_0 < 0$ eset azt jelenti, hogy a portfóliónak azonnal fizetnie kell $-p_0$ pénzt, emiatt bizonyos illikvid eszközeit kell likvidálnia.

Nézzük meg, mennyi bevételre számíthatunk a likvidálás során!

2.2.5. Definíció. *A $p \in \mathcal{P}$ portfólió likvidációs értéke*

$$L(p) = \sum_{i=0}^{N} P_i(p_i) = p_0 + \sum_{i=1}^{N} \int_0^{p_i} m_i(x)dx.$$

Ez a likvidációs érték megmutatja, hogy mekkora bevételre számíthatunk, ha a teljes portfóliót azonnal likvidálnunk kell a jelenlegi ajánlati könyv alapján. Az ezzel ellentétes portfólióértékelési mód az uppermost érték.

2.2.6. Definíció. *A $p \in \mathcal{P}$ portfólió uppermost értéke*

$$U(p) = p_0 + \sum_{i=1}^{n} (m_i^+ p_i \theta(p_i) + m_i^- p_i \theta(-p_i)).$$

A fenti definícióban $\theta(.)$ a Heaviside-függvényt jelöli. Az uppermost portfólió érték azt tételezi fel, hogy az eszközzel a legjobb elérhető áron tudunk kereskedni. Ez csak akkor teljesül, ha a portfólió mérete minden eszköz esetén kisebb, mint a legjobb áron értékesíthető mennyiség a piacon. Általában az uppermost mark-to-market érték akkor releváns, ha semmit sem kell éppen likvidálnunk, ezt tekinthetjük az eszközök hosszú távú értékének.

2.2.7. Definíció. *Egy portfólió likvidálási költsége a likvidálási és az uppermost értékek különbsége, azaz $p \in \mathcal{P}$-ra*

$$C(p) = U(p) - L(p) \in \mathbf{R}_+$$

Vizsgáljuk a portfóliók egymásba alakíthatóságát!

2.2.8. Definíció. *Legyen $p, q \in \mathcal{P}$ portfóliók. Azt mondjuk, hogy*

1. *q elérhető p-ből, azaz $q \in Att(p) \subseteq (P)$, ha $q = p - r + L(r)$ valamely $r \in \mathcal{P}$-ra.*

2. *p és q egyezőek, ha $p_i q_i \geq 0$ minden $i > 0$ esetén.*

3. *p és q disszonánsak, ha $p_i q_i \leq 0$ minden $i > 0$ esetén.*

A $q \in Att(p)$ azt jelenti, hogy a q portfólió megkapható p-ből bizonyos eszközök likvidálásával a jelenleg elérhető árakon.

Vizsgáljuk meg most a fenti L, U, C függvények tulajdonságait!

2.2.1. Állítás. *Az L, U, C függvények $\mathcal{P}$-n folytonosak és kielégítik a következő tulajdonságokat:*

- *$L : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ konkáv $\mathcal{P}$-n, szubadditív egyező portfóliókon és szuperadditív disszonáns portfóliókon*

- *$U : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ konkáv és szuperadditív $\mathcal{P}$-n és additív egyző portfóliókon.*

- *$C : \mathcal{P} \to \mathbf{R}_+$ konvex $\mathcal{P}$-n, szuperadditív egyező és szubadditív disszonáns portfóliókon.*

2.3. Likviditási elvárás

A portfólió értéke nem csak a benne lévő eszközök minőségétől és árától, hanem attól is függ, hogy mi a célunk a portfólióval. Ezt likviditási elvárásnak nevezzük.

2.3.1. Definíció. *A likviditási elvárás egy olyan $\mathcal{L}$ zárt konvex $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$ halmaz a portfóliók terében, melyre*

1. *$p \in \mathcal{L} \Rightarrow p + a \in \mathcal{L}$ minden $a > 0$-ra*

2. *$p = (p^0, \overrightarrow{p}) \in \mathcal{L} \Rightarrow (p^0, \overrightarrow{0}) \in \mathcal{L}$*

A fenti két követelményből az első azt fejezi ki, hogy a tökéletesen likvid pénzből sosem lehet túl sok, amellyel már kilépnénk az elfogadható halmazból, a második pedig azt, hogy az illikvid eszközökből nem lehet túl kevés. A következő alakú likviditási elvárásokat cash likviditási elvárásnak nevezzük:

$$\mathcal{L}(a) = \{(p_0, \overrightarrow{p})|p_0 \geq a\} \quad a \in \mathbf{R}$$

Ebben az esetben azt követeljük meg, hogy a portfólió bizonyos mennyiségű készpénzzel rendelkezzen.

A likviditási elvárás fogalma nem azt jelenti, hogy a portfóliónak ezt minden pillanatban teljesítenie kell, hanem fel kell készülnie arra, hogy a jövőben ezt teljesítse. Most már definiálhatjuk a portfólió értékét.

2.3.2. Definíció. *Egy p portfólió értéke egy $\mathcal{L}$ likviditási elvárás mellett*

$$V^{\mathcal{L}}(p) = sup\{U(q) \quad |q \in Att(p) \cap \mathcal{L}\}.$$

Ezzel p értékét úgy definiáltuk, mint az elérhető és a likviditás elvárásnak is megfelelő portfóliók uppermost értékeinek szuprémuma. Ez a $V^{\mathcal{L}}$ egy konvex optimalizálási problémát határoz meg.

2.3.1. Tétel. *A fenti optimalizációs probléma q-ra ekvivalens a következő konvex optimalizálási problémával r-ben:*

$$V^{\mathcal{L}}(p) = sup\{U(p - r) + L(r)|r \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}(p)\},$$

ahol

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(p) = \{r \in \mathcal{P}|p - r + L(r) \in \mathcal{L}\}.$$

Ha $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \oslash$,akkor $V^{\mathcal{L}}(p) = -\infty$.

2.3.1. Állítás. *Tetszőleges $\mathcal{L}$ likviditási elvárásra*

$$V^{\mathcal{L}} \leq U(p)$$

Vagyis tetszőleges likviditási elvárás mellett sem lehet a portfólió értéke nagyobb, mint az uppermost számítás esetén.

2.3.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges likviditási elvárás. Ekkor a $V^{\mathcal{L}} : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ leképezésre igaz, hogy*

1. *konkáv, azaz minden p_1 és p_2-re és minden $\theta \in [0, 1]$ -re*

$$V^{\mathcal{L}}(\theta p_1 + (1 - \theta)p_2) \geq \theta V^{\mathcal{L}}(p_1) + (1 - \theta)V^{\mathcal{L}}(p_2)$$

2. *transzláció szupervariáns, azaz minden* $k \geq 0$*-ra*

$$V^{\mathcal{L}}(p+k) \geq V^{\mathcal{L}}(p) + k.$$

Bizonyítás.

1. Legyen $p_\theta = \theta p_1 + (1-\theta)p_2$. Jelölje $r_i (i = 1, 2)$ a fenti optimalizálási feladat megoldását $V^{\mathcal{L}}(p_i)$-re. Legyen $r_\theta = \theta r_1 + (1-\theta)r_2$. Ekkor L konkavitása miatt $r_\theta \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}(p_\theta)$. Továbbá

$$V^{\mathcal{L}}(p_\theta) \geq U(p - r_\theta) + L(r_\theta) \geq$$

$$\theta(U(p - r_1) + L(r_1)) + (1-\theta)(U(p - r_2) + L(r_2)) =$$

$$\theta V^{\mathcal{L}}(p_1) + (1-\theta)V^{\mathcal{L}}(p_2),$$

ahol U és L konkavitását használuk ki.

2. A fentiből következően $U(p + k - r) = U(p - r) + k$, így $k \geq 0$ esetén $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(p) \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}}(p+k)$.

■

$V^{\mathcal{L}}$ konkavitása a diverzifikációs hatást ragadja meg, mely a likviditás figyelembe vételével azonnal jelentkezik. Azaz két portfóliót összeadva az értéke több lesz, mint a két tagnak külön-külön, együtt csekélyebb likviditási kockázatot kell viselniük. A szupervariancia szerint a portfólióhoz pénzt adva a hozzáadott pénznél is nagyobb mértékben nőhet a portfólió értéke. Ez azért van, mert a pénz hozzáadásával a likviditási pozíciónk is nagy mértékben javul, nem leszünk rákényszerítve értékes eszközünk esetleg áron alul likvidálására.

2.4. Koherens kockázati mértékek portfóliókra

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ valószínűségi mező, ahol $\mathcal{A}$ σ-algebra tartalmazza a $T > 0$ időpontig elérhető információkat. Egy véletlen MSDC egy véletlen változó az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ mezőn, ahol az MSDC $\in \mathcal{M}$. Ekkor a portfólió $V^{\mathcal{L}}(p)$ értéke is valószínűségi változó, mivel nem ismerjük pontosan előre az MSDC alakját.

2.4.1. Definíció. *Legyen adott egy véletlen MSDC görbe. Legyen továbbá* $\rho : \nu \to \mathbf{R}$ *koherens kockázati mérték és* $\mathcal{L}$ *likviditási elvárás. Ekkor* $\rho : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$*-t* $\mathcal{L}$ *likviditási elvárás által generált koherens portfólió kockázati mértéknek (CPRM) hívjuk és*

$$\rho^{\mathcal{L}}(p) = \rho(V^{\mathcal{L}}(p)).$$

A fentiek alapján a portfólió értékéről és kockázatáról is csak az $\mathcal{L}$ likviditási elvárás ismeretében van értelme beszélni.

Nézzük, mi marad változatlan a koherens kockázati mértékeket meghatározó tulajdonságok közül a CPRM-re!

2.4.1. Állítás. *Legyen $\rho^{\mathcal{L}}$ CPRM! Ekkor minden $p, q \in \mathcal{P}$-re*

$$\rho^{\mathcal{L}}(p) \leq \rho^{\mathcal{L}}(q), \quad ha \quad V^{\mathcal{L}}(p) \geq V^{\mathcal{L}}(q).$$

2.4.1. Tétel. *Legyen $\rho^{\mathcal{L}}$ tetszőleges CPRM! Ekkor*

1. *$\rho^{\mathcal{L}}$ konvex, azaz*

$$\rho^{\mathcal{L}}(\theta p_1 + (1-\theta)p_2) \leq \theta\rho^{\mathcal{L}}(p_1) + (1-\theta)\rho^{\mathcal{L}}(p_2)$$

2. *$\rho^{\mathcal{L}}$ transzláció szubvariáns, azaz*

$$\rho^{\mathcal{L}}(p+k) \leq \rho^{\mathcal{L}}(p) + k \quad \forall k \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Bizonyítás.

1.
$$\rho^{\mathcal{L}}(\theta p_1 + (1-\theta)p_2) = \rho(V^{\mathcal{L}}(\theta p_1 + (1-\theta)p_2) \leq$$
$$\rho(\theta V^{\mathcal{L}}(p_1) + (1-\theta)V^{\mathcal{L}}(p_2)) \leq \theta\rho(V^{\mathcal{L}}(p_1)) + (1-\theta)\rho(V^{\mathcal{L}}(p_2) =$$
$$\theta\rho^{\mathcal{L}}(p_1) + (1-\theta)\rho^{\mathcal{L}}(p_2)$$

2. A második egyenlőtlenség a szupervarianciából, a monotonitásból és a transzláció-invarianciából következik.

■

Látszik, hogy a konvexitást a likviditási környezet vizsgálata során a kiinduló formalizmust használva kaptuk meg. Az eredmény független a választott likviditási elvárástól is. A diverzifikációs elv tehát illikvid piacokon is működik. Lényeges különbség a konvex kockázati mértékekhez képest, hogy a transzláció kovariancia helyett itt transzláció szubvariancia áll. A transzláció szubvariancia jelentése, hogy egység készpénzt adva a portfóliónkhoz a likviditás javulása következtében az értéke több mint egy egységgel is nőhet. Azt mondhatjuk tehát, hogy ez a formalizmus jobban írja le az illikvid piacokra jellemző kockázatokat.

2.5. Egy analitikusan megoldható csoport

A fenti optimalizációs feladatból analitikusan megoldható problémához jutunk, ha feltételezéssel élünk az MSDC görbéről. Ha feltesszük, hogy a piacon jellemző MSDC folytonos és szigorúan monoton csökken, akkor a következő tételhez jutunk.

2.5.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{L}(a)$ likviditási elvárás, és tegyük fel, hogy a lehetséges m_i MSDC-k folytonosak a valós számok halmazán és szigorúan monoton csökkenőek minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re. Ekkor a*

$$V^{\mathcal{L}(a)}(p) = sup\{U(p-r) + L(R) | r \in \mathcal{C}_{(a)}(p)\}$$

probléma $r^a = (0, \overline{r}^a)$ megoldása egyértelmű és a következőképp adódik:

$$r_i^a = \xi_i\Big(\frac{m_i(0)}{1+\lambda}\Big) \quad ,ha \;\; p_0 < a$$

$$r_i^a = 0 \quad ,ha \;\; p_0 \geq a,$$

ahol ξ_i az m_i szigorúan monoton függvény inverze, λ pedig a Lagrange-szorzó.

Ezzel a feltételezésnek megfelelő típusú MSDC görbékre gyors optimalizálás válik lehetségessé.

Az MSDC-k egy tetszőleges pillanatban a piacra tekintve szakaszonként konstansok, de hosszabb távon tekintve exponenciális függvénnyel jól modellezhetők.

2.5.1. Példa. *Tekintsünk egy piacot N illikvid eszközzel, ahol minden MSDC függvény exponenciális alakú, azaz $m_i(x) = A_i e^{-k_i x}$, ahol $A_i, k_i \geq 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, N$-re. Ekkor*

$$L(q) = q_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{k_i}(1 - e^{-k_i q_i}).$$

Számítsuk ki $V^{\mathcal{L}(a)}(p)$ értékét a p portfólióra az előző tételt használva. Tegyük fel, hogy $p_0 < a$, különben a probléma triviális alakot ölt. Ekkor az előzőket felhasználva:

$$r_i^a = \frac{1}{k_i} log(1+\lambda) \quad minden \quad i = 1, 2, \ldots, N - re$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{k_i}(1 - e^{-k_i r_i^a(\lambda)}) = a - p_0.$$

A második egyenlet általában csak numerikus módszerekkel lehet megoldani, jelen helyzetben azonban analitikusan is megoldható:

$$\lambda = \frac{a}{\sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{k_i - a}}$$

és

$$r_i^a = \frac{1}{k_i} log(1 + \lambda).$$

Ez alapján a keresett portfólióértékre a következő adódik:

$$V^{\mathcal{L}(a)}(p) = U(p - r^a) + L(r^a) = \sum_{i=1}^{N} A_i(p_i - r_i^a) + a.$$

3. fejezet

Shapley-érték magbeliségének szimulációja

3.1. A szimuláció leírása

A következő fejezetben a Shapley-érték magbeliségének valószínűségét fogjuk vizsgálni. Az előző fejezetben szerepelt, hogy nincs olyan tőkeallokációs módszer, mely hatékony, monoton, szimmetrikus és magbeli. Az egyetlen olyan tőkeallokációs módszer, mely az első három követelményt teljesíti, a Shapley-érték, ezért ezt érdemes közelebbről is megvizsgálni.

Fontos kérdés, hogy az a tény, hogy a Shapley-érték magbeliségének cáfolására könnyű ellenpéldát találni, azt jelenti-e, hogy valódi, piaci tőkeallokációs szituációban sem számíthatunk arra, hogy a Shapley-féle eljárás magbeli tőkeallokációra fog vezetni, vagy ez csak egy elméleti eredmény és a gyakorlatban a Shapley-érték a piaci esetek nagy részében nem lesz blokkolható. Ennek megválaszolására különböző, nagyrészt a piacról számított bemenő adatok mellett fogjuk vizsgálni a kapott tőkeelosztás magbeliségét.

A szimuláció során négy különálló portfólió esetén fogjuk vizsgálni a Shapley-érték magbeliségét. Az egyes portfóliók jelen esetben egyszerű részvények lesznek. A kiválasztott részvények a Microsoft, az Apple, a Google és a McDonald's.

Szeretnénk figyelembe venni az illikviditást is, ezért felhasználjuk a részvények ajánlati könyveit, ezekből meghatározzuk az MSDC görbéjüket, majd arra folytonos, exponenciális görbét illesztünk. A vizsgált részvények nagyon likvidek, így a likviditás kezelése nem okoz túl nagy eltérést a teljesen likvid esethez képest.

Azonban hogy mégis összehasonlítható legyen a magbeliség likvid és illikvid eset között, ezért szimulálunk fiktív, illikvid részvényeket is.. A likviditási elvárás bizonyos mennyiségű készpénz tartása lesz, amely eszközök eladásával érhető el, ennek során pedig az illikviditás miatt veszteséget szenvedünk el.

A szimuláció technikai megvalósítása során Csóka Péter Fair Risk allocation in illiquid markets [2015] cikkénél használt Matlab kódot módosítottam. A szimuláció során 1000 egymást követő napon generálunk a négy részvényhez véletlen hozamokat normális eloszlással, ahol ennek a paramétereit a historikus piaci adatok segítségével becsüljük. A részvények hozamai közötti korrelációt szintén historikus adatokból számoljuk. Összehasonlításképpen véletlen várható hozamú, véletlen szórású és véletlen generált korrelációs mátrixszal is elvégezzük a szimulációt. A játékot 10000 esetre ismételjük, majd ebből számolunk magbeliségi arányt.

3.2. Az MSDC közelítése

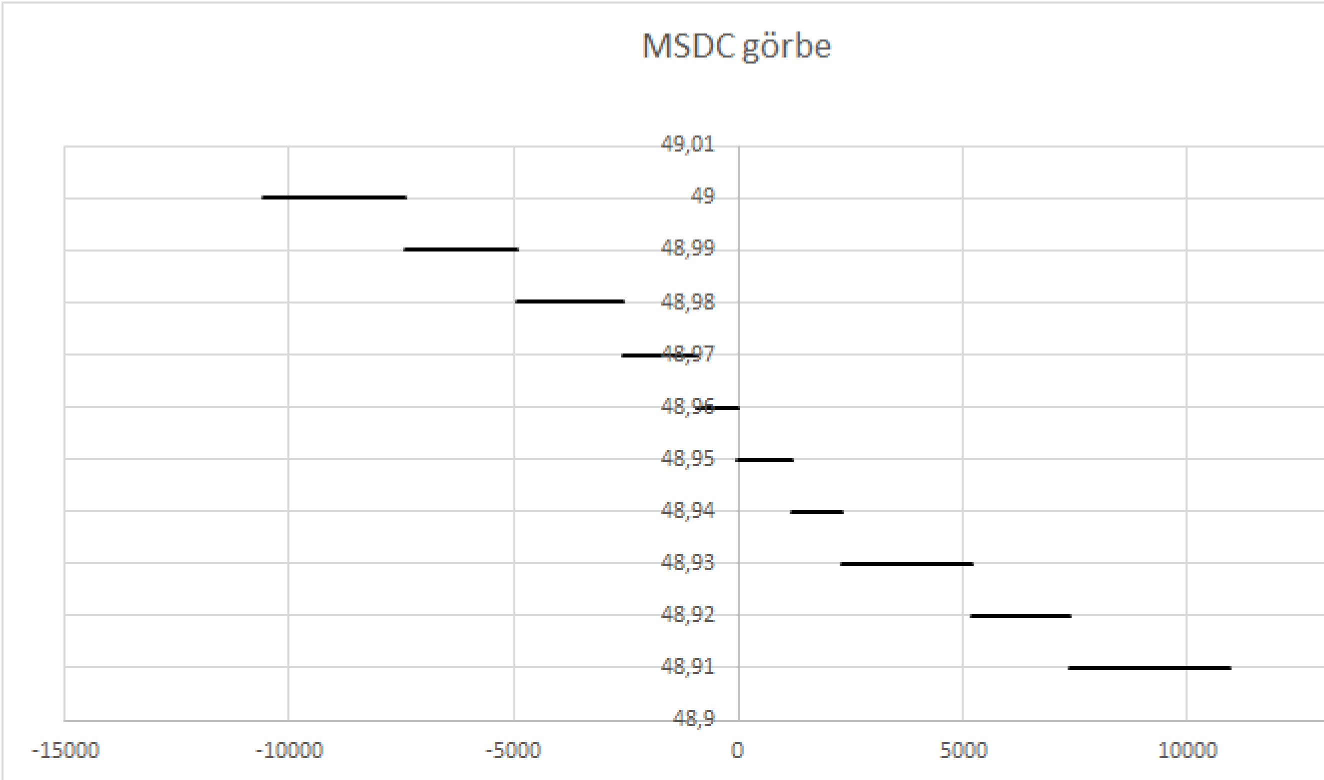
A Shapley-érték magbeliségének számítása során a portfólió likviditását is figyelembe szeretnénk venni. Egy részvény esetén ezt az ajánlati könyv adatainak tanulmányozásával tehetjük meg, melyből az MSDC görbe felírható. Az MSDC valódi piaci körülmények között lépcsős függvény, hiszen egy adott árszinten még a leglikvidebb részvények esetén is csak véges mennyiségűt tudunk venni vagy eladni. Ezek a rendelkezésre álló mennyiségek lesznek a konstans szakaszok hosszai, a közöttük tapasztalt különbségek pedig a függvény ugrásai.

Alább látható egy példa ajánlati könyvre nagyon likvid (Microsoft) részvény esetén. A következő oldal telején pedig ebből az adatsorból megalkotott MSDC függvény látható. A táblázatban az öt legjobb limitáras ajánlat (bid és ask) látható 2015 áprilisában.

Bid	Méret	Ask	Méret
48.95	1200	48.96	900
48.94	1100	48.97	1669
48.93	2900	48.98	2369
48.92	2169	48.99	2469
48.91	3569	49.00	3169

3.1. ábra. Példa ajánlati könyvre (Microsoft)

Minél likvidebb egy részvény, a konstans szakaszok annál hosszabbak, az árak közötti ugrások pedig annál kisebbek lesznek. Azaz az MSDC görbe minél meredekebb, a részvényt annál inkább illikvidnek tekinthetjük. A nehezen kezelhető lépcsős függvényt a matematikailag jó tulajdonságokkal rendelkező exponenciális függvénnyel közelítjük. Az MSDC függvényt a fentiek alapján a következő alakban



3.2. ábra. A Microsoft részvény MSDC görbéje az előző ajánlati könyv alapján

keressük:

$$m(x) = Ae^{-kx},$$

ahol A a középárfolyam, azaz a legjobb bid és a legjobb ask összegének a fele, és k ismeretlen.

A közelítés során 5 mélységű ajánlati könyvekkel dolgoztunk. Ez 10 ismert konstans szakaszból álló MSDC-t jelent. A konstans szakaszokat az intervallum közepére helyezett pontokkal helyettesítettük, azaz egy $[x_1, x_2]$ szakaszt egy $\frac{x_1+x_2}{2}$ ponttal. Ezzel 10 ponthoz jutottunk, jelölje ezeket $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_{10}, y_{10})$. Ekkor a legkisebb négyzetes eltérések módszere alapján a keresett k az az érték, mely minimalizálja a következő összeget:

$$\sum_{i=1}^{10} (y_i - Ae^{kx_i})^2$$

A fenti optimalizálást excelben solver segítségével hajtottuk végre. A kapott eredményeket k-ra néhány sokat kereskedett, likvid részvény esetén a 3.3-as ábra mutatja.

A várakozásoknak megfelelően a vizsgált négy részvény közül a jobban kereskedett Microsoft és Apple bizonyult likvidebbnek, a nagyjából egy nagyságrenddel kisebb forgalmú Google és McDonald's esetén valamivel nagyobb k értéket kaptunk.

Részvény	k értéke
Microsoft	$9,05 * 10^{-8}$
Apple	$1,51 * 10^{-7}$
Google	$3,97 * 10^{-6}$
McDonald's	$1,26 * 10^{-6}$

3.3. ábra. Vizsgált részvények k-értékei az egyik vizsgált időpontban

Mivel a részvények esetében az MSDC görbe természetesen nem állandó, hanem időben változik, ezért három különböző napon is megvizsgáltuk a részvények ajánlati könyveit és az előzőkkel azonos módszerrel illesztettünk az MSDC görbére exponenciális függvényt. Ezzel három különböző kitevőhöz jutottunk. A vizsgált időpontokban az illesztéssel kapott kitevők nem mutattak nagy eltérést, viszonylag stablinak mondhatók.

Ezután a három adatból várható értéket és tapasztali szórást számítottunk, majd a kapott értékeknek megfelelő várható értékű és szórású normális eloszlással szimuláltuk az MSDC görbéhez tartozó kitevőt. Az eredmények a következő táblázatban láthatók.

Részvény	k várható értéke	k szórása
Microsoft	$7,838 * 10^{-8}$	$1.787 * 10^{-8}$
Apple	$1.099 * 10^{-7}$	$4.0893 * 10^{-8}$
Google	$3.2020 * 10^{-6}$	$8.737 * 10^{-7}$
Mc'Donalds	$6.686 * 10^{-7}$	$5.274 * 10^{-7}$

3.4. ábra. Vizsgált részvények k-értékeinek várható értéke és szórása

Ezzel a négy részvény esetén meg is kaptuk a keresett véletlen exponenciális MSDC függvényt, melyek segítségével a magbeliség arányának vizsgálatakor a likviditás hatását is figyelembe tudjuk venni.

Mivel a fenti négy nagyon likvid részvény esetén az illikviditás hatása nagyon csekély, fiktív illikvid részvényekre is elvégezzük a szimulációt. Ezekre az esetekre a k értékét az 1 és a 2 közötti tartományból egyenletes eloszlással választjuk.

3.3. Shapley és egyéni kockázattal arányos módszer Matlabban

Egy N szereplős játék esetén a Shapley-érték kiszámításához szükség van egy $2^N - 1$ hosszú vektorra, mely a koalíciók kifizetéseit tartalmazza. A 2^N részhalmaz közül az üres halmaz kifizetését nullának tekintjük, így marad 2^{N-1} érték. A program ellenőrzi, hogy a kapott vektor hossza megfelel-e ennek a követelménynek. Ha minden részhalmazhoz tartozó kifizetést ismerünk, akkor a Shapley-érték kiszámítása úgy történik, hogy portfóliókat egyesével minden lehetséges 2^{N-1} részhalmazhoz csatlakoztatjuk, majd a kifizetések így tapasztalt növekedéseinek átlagát vesszük, azaz

$$\rho(X_i|X) = \sum_{M \subseteq N, i \in M} \frac{(|M|-1)!(n-|M|)!}{n!} \Delta\rho(X_i|M),$$

ahol $|M|$ a M halmaz számosságát jelöli és

$$\Delta\rho(X_i|M) = \rho(M \cup \{X_i\}) - \rho(M)$$

az i portfólió csatlakozása által okozott kockázatnövekedés.

Az egyéni kockázattal arányos módszer a Shapley-módszerhez hasonlóan 2^{N-1} hosszú vektorból dolgozik, azonban a végeredményhez mindössze az első N és az utolsó elemet használja. A képlet itt

$$\rho(X_i|X) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^{n} \rho(X_j)} \rho(X),$$

mely nem használja a többelemű részhalmazokhoz tartozó kifizetéseket, azaz nem veszi figyelembe a diverzifikációt.

Az allokáció során az utolsó portfólióra eső tőkét mindkét módszer esetén egy külön függvény számolja ki, mely azt biztosítja, hogy az allokáció hatékony legyen. Ez úgy működik, hogy az allokációs vektor utolsó elemét a portfóliók összességére eső tőkekövetelmény és az eddigi $N-1$ portfólióra allokált tőke különbségeként számolja ki, azaz

$$\rho(X_n) = \rho(X) - \sum_{i=1}^{n-1} \rho(X_i).$$

A konstukcióból is látható, hogy a Shapley-érték és az egyéni kockázattal arányos módszer is monoton és szimmetrikus. Azonban az első fejezetben bemutatott lehetetlenségi tételből adódóan nem lehetnek mindig magbeliek. Kérdés, hogy vajon milyen arányban lesznek azok különböző szituációkban? Ennek a megválaszolására szolgál a következő szimuláció.

3.4. A bemenő paraméterek

Ebben a szakaszban kerül bemutatásra a program, mely a tőkeallokációs játékot szimulálja. A program 3 vagy 4 portfóliót tud kezelni és 10000 tőkeallokációs játékot szimulál, minden egyes játéknál 1000 realizációval. A szimuláció elve az, hogy veszünk 4 portfóliót, ahol jelen esetben egy portfólió egy részvényt jelent. Mint korábban már szerepelt, a részvények a Google, Apple, Microsoft és McDonalds.

Ezután meghatározunk egy likviditási elvárást, melynek megfelelő mennyiségű casht kell a portfólióknak generálni. A portfóliók hozamát és szórását szimuláljuk egy historikusan számolt várható értéket és szórást feltételezve, normális eloszlással, így a portfóliók értéke lognormális eloslást követ. A napi hozamot és szórást az elmúlt 9 hónap adatai alapján számítottuk, a kapott eredmények a négy részvény esetén az alábbi táblázatban láthatók.

Részvény	Apple	Microsoft	McDonalds	Google
Hozam	0.0502	0.01986	0.0104	0.0563
Szórás	0.00659	0.00737	0.00481	0.01221

3.5. ábra. Vizsgált részvények hozama és szórása

A hozam a táblázatban napi loghozamot jelent százalékban kifejezve.

A részvények korrelációs mátrixát szintén az utóbbi kilenc hónap adatai alapján számítottuk. A vizsgált időszakra az alábbi táblázatban látható eredmények adódtak.

Korreláció	Apple	Microsoft	McDonalds	Google
Apple	1	0.3650	0.3420	0.1861
Microsoft	0.3650	1	0.4034	0.1997
McDonalds	0.3420	0.4034	1	0.2320
Google	0.1861	0.1997	0.2320	1

3.6. ábra. Vizsgált részvények korrelációs mátrixa

A szimuláció során kiderült, hogy az eredmény nagyon érzékeny a részvények között feltételezett korrelációkra és állandó korrelációs mátrixot feltételezve sokkal magasabb magbeliségi arány adódik. Ezért a programot úgy is lefuttattuk, hogy a korrelációt normális eloszlású valószínűségi változónak feltételezzük, melynek paramétereit a piaci adatok alapján számoljuk. Az elmúlt kilenc hónap adatsorát három három hónapos adatsorra bontottuk fel és időszakonként számítottunk korrelációs mátrixokat. Így tetszőleges részvénypárra a korrelációs együtthatók átlagát véve egy várható korrelációhoz és a korreláció három adatból számított tapasztalati szórásához jutottunk. Az eredményeket a lenti táblázat mutatja.

Korr	Apple	Microsoft	McDonalds	Google
App	N(1,0)	N(0.373,0.0719)	N(0.319,0.1404)	N(0,186,0.0919)
Mic	N(0.373,0.0719)	N(1,0)	N(0.414,0.0451)	N(0.191, 0.1533)
McD	N(0.319,0.1404)	N(0.414,0.0451)	N(0,1)	N(0.226,0.1005)
Goog	N(0,186,0.0919)	N(0.191,0.1533)	N(0.226,0.1005)	N(0,1)

3.7. ábra. Vizsgált részvények valószínűségi változókból álló korrelációs mátrixa

Ezekből az eloszlásokból generált korrelációs együtthatók esetén előfordulhat, hogy a kapott mátrix nem lesz pozitív szemidefinit. Ekkor egyszerűen újra generáltuk a korrelációs mátrixot továbbra is ezen eloszlások használatával.

Kezdetben a 4 portfólióban olyan mennyiségű részvényt tartunk, hogy a kezdeti értékek megegyezzenek. Az előző szakaszban látott módon meghatározott MSDC-k felhasználásával kapjuk a likviditási elvárásnak megfelelő mennyiségű eszköz eladásából keletkező likvidálási veszteséget.

Miután a generáltuk a portfóliók cash flowját, szükségünk van még egy kockázati mértékre, melynek segítségével a tőkekövetelményt meghatározhatjuk. Lehetséges választás az expected shortfall, a VAR és a maximális veszteség. Ezek közül csak az első koherens kockázati mérték, így a szimuláció során erre koncentrálunk. Végül a kockázatok ismeretében a Shapley-érték vagy az egyéni kockázattal arányos módszer elosztja a tőkét az egyes portfóliók között. Ez a kapott allokáció meghatároz egy N hosszú vektort, melynek magbeliségét kell ellenőríznünk.

Egy X allokáció akkor magbeli, ha egyetlen (akár egy elemű) koalíciónak sem érdeke kilépni a nagykoalícióból, azaz blokkolnia az eloszást. Ezt minden $K \subseteq N$ részhalmaz ellenőrzésével tehetjük meg, ahol a feltétel:

$$\sum_{i \in K} X(i) \leq \rho(K)$$

minden K-ra. Végül a program összegzi, hogy a 10000 generált kockázatelosztási játék közül hány esetben kaptunk magbeli allokációt.

3.5. A szimuláció eredményei

A program többszöri futtatása során kiderült, hogy a 10000 generált kockázatelosztási játék már elegendő számú ahhoz, hogy futtatásonként nagyon hasonló, stabli eredményeket kapjunk. A futási idő is kezelhető, néhány perces tartományban maradt.

Az egyszerű, könnyen számolható, de a diverzifikációs hatást teljesen figyelmen kívül hagyó egyéni kockázattal arányos tőkeallokációs eljárás nagyon kevésszer eredményezett magbeli allokációt, a Shapley-módszer ezzel szemben a bizonyos feltételek mellett közel 100 százalékos magbeliségi arányt produkált.

A piaci adatokra (szórás, várható érték, likviditás, korreláció 4 részvényre) állandó korrelációs mátrix mellett a magbeliség aránya 99,9 százalék fölöttinek adódott.

A magbeliség aránya kicsit csökken, amikor a korrelációs mátrixot a piacról kiszámolt paraméterekkel generáljuk újra minden játék során. A kapott értékeket normális és 3 és 10 szabadságfokú t-eloszlásra az alábbi táblázatban figyelhetjük meg.

Eloszlás	Normális	t 3 szab. fokkal	t 10 szab. fokkal
Magbeliség aránya	0,9981	0,9979	0,9974

3.8. ábra. Magbeliség aránya piaci adatok alapján generált korrelációs mátrix esetén

A piaci adatok alapján kapott eredmények ismeretében tehát azt mondhatjuk, hogy a Shapley-érték magbelisége piaci körülmények között általában teljesül. Ennek oka az lehet, hogy a paraméterek itt már statisztikailag nagyon hasonlítanak arra az esetre, amikor nullla várható értékű, független, azonos, normális eloszlásúnak feltételezzük a hozamokat. Ekkor ugyanis a Shapley-érték magbeli allokációt eredményez, és ezt az előző állapottól kicsit eltérő piaci körülmények sem változtatják meg, ugyanis a modell ezen paraméterek ilyen mértékű megváltoztatására nem érzékeny.

A Shapley-érték magbelisége belátható expected shortfall kockázati mérték mellett abban az esetben, amikor nulla várható értékű, független, azonos, normális eloszlásúak a hozamok. Ekkor a portfóliók értéke lognormális eloszlású. Horváth Ferenc szakdolgozatában [2012] három portfólió esetén belátta az állítást, a következőkben a számolás általánosítását mutatjuk be n portfólióra.

3.5.1. Magbeliség független, azonos lognormális eloszlásokra

Vegyünk n portfóliót, melyek hozamai függetlenek és normális eloszlást követnek $N(0, \sigma)$ paraméterekkel. A kockázati mérték legyen az expected shortfall! Ekkor az expected shortfall megkapható az $1 - \alpha$-nál nagyobb konfidenciaszintű VAR-ok integráljaként (Rau-Bredow [2003] alapján), azaz

$$ES_{1-\alpha}(X) = \frac{\int_{1-\alpha}^{1} VAR_s(X)ds}{\alpha}$$

A $(0,1)$ paraméterű lognormális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze:

$$G(x) = e^{\sigma\Phi^{-1}(p)}$$

Az előzőekből egy tetszőleges portfólió kockázata a következőképpen számolható:

$$ES_1 = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha (e^{\sigma\Phi^{-1}(x)})dx.$$

Tekintsünk most egy két portfólióból álló koalíciót! Ennek a hozama is normális eloszlású lesz, nulla várható értékkel és $\sqrt{2}$ szórással.

Az expected shortfallja a következővel egyezik meg:

$$ES_2 = \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha (e^{\sqrt{\frac{1}{2}}\sigma\Phi^{-1}(x)})dx.$$

Az előzőek alapján egy k portfólióból álló koalíció kockázata pedig

$$ES_k = \frac{k}{\alpha}\int_0^\alpha (e^{\sqrt{\frac{1}{k}}\sigma\Phi^{-1}(x)})dx.$$

A feltételek szerint a portfóliók hozamai független, azonos eloszlásúak. Így a portfóliókat nem tudjuk megkülönböztetni, tetszőleges koalíciót kiválasztva bármelyik két kimaradó portfólió csatlakozása azonos mértékű kockázatnövekedéssel jár. Tudjuk, hogy a Shapley-módszer teljesíti a szimmetria követelményét, ezért a feltételek mellett szükségképpen az összes portfólióra azonos mennyiségű tőkét allokál, sőt az összes azonos (pl. k) méretű koalícióra is megegyezik a kockázat. A magbeliség feltétele így a következő összefüggésre egyszerűsödik:

$$\frac{ES_k}{k} \geq \frac{ES_n}{n} \quad \text{minden } 1 \leq k < n\text{-re},$$

azaz minden n-nél kevesebb tagú koalíció kockázata portfóliónként nagyobb, mint a teljes cég kockázata portfóliónként, vagyis senki sem blokkolja az elosztást.

$$\frac{ES_k}{k} = \frac{1}{k}\frac{k}{\alpha}\int_0^\alpha (e^{\sqrt{\frac{1}{k}}\sigma\Phi^{-1}(x)})dx \geq \frac{1}{n}\frac{n}{\alpha}\int_0^\alpha (e^{\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma\Phi^{-1}(x)})dx = \frac{ES_n}{n}$$

, egyszerűsítve és α-val felszorozva ez akkor teljesül, ha az integrandusra

$$e^{\sqrt{\frac{1}{k}}\sigma\Phi^{-1}(x)} \geq e^{\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma\Phi^{-1}(x)}$$

Ez az összefüggés pedig 0 és 0,5 közé eső α esetén teljesül, ekkor a lognormális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze nagyobb σ paraméter esetén kisebb értéket vesz fel, azaz $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{n}$ miatt a bal oldal paramétere nagyobb, így a kitevő értéke kisebb, vagyis az egyenlőtlenség teljesül. A gyakorlatban a szignifikanciaszintek mindig ebbe a tartományba esnek, így a Shapley-érték mindig magbeli lesz a feltételek teljesülése esetén.

3.6. Shapley-érték magbeliségének érzékenysége

Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy a bemenő paraméterek megváltozása mennyire befolyásolja az előző szakaszban kapott nagyon kedvező eredményeket.

Már akkor jelentős csökkenést tapasztalunk a magbeliség arányában, ha a kockázati mértéket változtatju meg: a nem koherens maximális veszteséget használva már csak 59,75 százalékos arányt kapunk.

Könnyen meghatározhatunk azonban olyan korrelációs mátrixot, amely mellett drámaian zuhan a magbeliség aránya. Egy lehetséges választást a következő ábra mutat.

Korrelációk	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	1	-0.9	-0.9	-0.9
X_2	-0.9	1	0.9	0.9
X_3	-0.9	0.9	1	0.9
X_4	-0.9	0.9	0.9	1

3.9. ábra. Alacsony magbeliségi arányt eredményező korrelációs mátrix

A szimuláció szerint a magbeliségi arány minden paraméter változatlanul hagyása és a korrelációs mátrix fentire módosítása mellett mindössze 2,17 százalékra változik. Ennek oka az, hogy itt az első portfólió a másik hárommal erősen ellentétes mozgást végez, így az X_1-et tartalmazó kételemű koalíciók esetén nagyon erősen érvényesül a diverzifikációs hatás. A nagykoalíció kockázata azonban jelentős marad, mivel X_2, X_3, X_4 erősen korrelálnak. Ezt a Shapley-módszer általában nem tudja úgy elosztani, hogy a kételemű koalíciók ne blokkolják az elosztást.

Abban az esetben, ha minden paramétert (korreláció, várható érték, szórás) véletlenszerűen generálunk, az MSDC függvény kitevőjét pedig a likvid részvényekre számolt értéknek tekintjük, akkor a magbeliség arányára lényegesen alacsonyabb, 39,7 százalékos arányt kapunk. Ez kis mértékben, 40,7 százalékra növekedett, ha az MSDC függvény kitevőjét nulla és egy közötti egyenletes eloszlásból generáljuk.

Azonban abban az esetben, ha a kitevőt 50 és 100 közötti egyenletes eloszlásból generáljuk, akkor a magbeliség aránya már 64,7 százalékra nő. Ez már irreálisan illikvid részvényt jelentene. Az arány növekedésének magyarázata az lehet, hogy az illikviditás miatt a portfóliók likvidiálási költsége nagyon magas és emiatt a nagyobb koalíciók a likvidebb helyzetük miatt előnyben vannak, a kisebbeknek nehezebb blokkoló koalíciót alkotni.

Összegzés

A dolgozatban a tőkeallokációhoz szükséges kockázati mértékek, majd az allokációval szemben elvárható tulajdonságok után magukat a módszereket tekintettük át. Ezek közül a Shapley-értéket vizsgáltuk részletesebben illikvid piacok esetén is az ehhez szükséges fogalmak bevezetése után. Azonban azt is láttuk, hogy minden megfogalmazott elvárásnak lehetetlen megfelelni, a Shapley-érték pedig a magbeliséget sérti meg ezek közül.

A szimuláció során piaci adatokból kiindulva viszont azt kaptuk, hogy a Shapley-módszer szinte mindig magbeli allokációhoz vezet. De valóban csak elméleti lenne az előző probléma? Az érzékenységvizsgálat megmutatta, hogy bizonyos paraméterek megváltoztatására vagy nagyobb tartományból generálására is érzékenyen reagál a magbeliség aránya. Óvatosságra int az is, hogy a magbeliséget különösen erősen befolyásoló korrelációt viszonylag kevés és rövid időszak alapján számoltuk. Érdekes lenne a szimulációt illikvid, magyar részvényekre és a köztük tapasztalt korrelációra (pl. TVK, CIG, Rába, Egis) is lefuttatni, ezek ajánlati könyveiből azonban az illikviditás miatt nehezebb adatot szerezni. Így a szimuláció biztató eredménye alapján azt a következtetést levonni, hogy a Shapley-módszer piaci körülmények között majdnem mindig magbeli lesz, elhamarkodottnak tűnik, a téma további vizsgálódást igényel.

Irodalomjegyzék

[1] Denault, M. (2001), *Coherent allocation of risk capital*, Journal of Risk 4, 1–34

[2] C. Acerbi, G. Scandolo, *Liquidity Risk Theory and Coherent Measures of Risk*, [2007] Quantitative Finance 8:681-692.

[3] Csóka, P., P.J.J. Herings, and L.A. Kóczy (2009), *Stable allocations of risk*, Games and Economic Behavior 67, 266–276

[4] D. Balog, *Risk based capital allocation*

[5] Csóka, P. and P.J.J. Herings (2014), *Risk allocation under liqudity considerations*, Journal of Banking and Finance 49, 1–9.

[6] P. Csoka, M. Pinter *On the impossibility of fair risk allocation.* [2014]

[7] Csóka Péter, *Koherens kockázatmérés és tõkeallokáció.* Közgazdasági Szemle, L. évf., 2003. október (855–880. o.)

[8] Balog Dóra, Csóka Péter, Pintér Miklós, *Tőkeallokáció nem likvid portfóliók esetén* Hitelintézeti szemle (604-616. o.)

[9] Váradi Kata, *Likviditási kockázat a részvénypiacokon* [2012]

[10] Balog, D., T. Bátyi, P. Csóka, and M. Pintér (2014), *Properties of risk capital allocation methods: Core Compatibility, Equal Treatment Property and Strong Monotonicity*, Corvinus Economics Working Papers (CEWP) 2014/13, pp. 1–22.

[11] Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath (1999), *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance 9, 203–228.

[12] Peter Csoka, 2015. *Fair risk allocation in illiquid markets* IEHAS Discussion Papers 1509, Institute of Economics, Centre for Economic and Regional Studies, Hungarian Academy of Sciences.

[13] Acerbi, C., and D. Tasche (2002), *On the Coherence of Expected Shortfall*, Journal of Banking and Finance 26, 1487–1504.

[14] Buch, A., and G. Dorfleitner (2008), *Coherent risk measures, coherent capital allocations and the gradient allocation principle*, Insurance: Mathematics and Economics 42, 235– 242.

[15] Shapley, L.S. (1953), *A value for n-person games*, in H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.), Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies, 28, Princeton University Press, Princeton, pp. 307–317

[16] Acerbi C. (2002) *Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion* Journal of Banking and Finance 26 (2002) 1505–1518

[17] Gillies, D.B. (1959), *Solutions to general non-zero-sum games*, in A.W. Tucker and R.D. Luce (eds.) Contributions to the Theory of Games IV, Annals of Mathematics Studies, 40, Princeton University Press, Princeton, pp. 47–85.

[18] Schmeidler D (1972) *Cores of Exact Games.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 40:214-225

[19] Rau-Bredow, H. [2003]: *Derivatives of Value at Risk and Expected Shortfall.* Working Paper

[20] Hamlen SS, Hamlen WA, Tschirthart JT (1977) The use of core theory in evaluating joint cost allocation games. The Accounting Review 52:616–627

[21] Jorion P (2007) Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk McGraw - Hill

[22] Horváth Ferenc- A tőkeallokáció stabilitásának érzékenységvizsgálata [2012]

[23] Driessen TSH, Tijs SH (1986) Game theory and cost allocation problems. Management Science 32 (8), 1015–1028.