Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

Hozamgörbe modellek kalibrálásának nehézségei alacsony hozamkörnyezetben

Készítette: Hosszú Ádám Tamás
Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc
Aktuárius szakirány
2015

Témavezető: Bozsó Dávid

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni mindazoknak akik ötletekkel, tanácsokkal vagy bármilyen más módon segítségemre voltak a szakdolgozat összeállítása során.

Köszönöm Bozsó Dávidnak, hogy elvállalta a témavezetői feladatokat és segítette a dolgozat elkészítését, továbbá Beck Szabolcsnak, hogy folyamatos szakmai segítséget nyújtott és ötleteket adott a dolgozat elkészítése során.

Hosszú Ádám

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A Solvency II és IFRS 4 phase 2 bevezetésével a biztosítási kötelezettségek piaci értékelése kulcsfontosságúvá válik. Azonban komplex biztosítási termékeket, melyek például garanciát vagy opciót tartalmaznak, explicit módon nehéz vagy nem lehet értékelni. Az ilyen termékeknél ugyanis a kötelezettség értéke függhet a hozamok jövőbeli alakulásától, így ahhoz hogy ezeket mégis megfelelő módon tudjuk értékelni szimulációkra, hozamszcenáriókra van szükség. Ezen szcenáriók felhasználása a biztosítási portfóliók értékelésén túl kockázatkezelési feladatokra is kiterjedhet.

A hozamgörbe fejlődésének leírásához sztochasztikus modellekre van szükség. Ahhoz, hogy a használt modell segítségével megbízhatóan tudjuk értékelni a biztosítási portfóliót, úgy kell beállítanunk a paramétereket, hogy a sűrűn kereskedett pénzügyi termékek árait minél jobban visszaadja a modell. Fontos hogy csak olyan pénzügyi termékek piaci árait használjuk a kalibrálás során, melyek likvidek, hiszen ellenkező esetben az adott termék ára nem biztos, hogy visszaadja a termék valós értékét, így torzítja a modellt. A gyakorlatban gyakran a swaption-ök árai alapján kalibrálják a modellt, amennyiben likvid az adott swaption piac. Ennek oka, hogy a swaption-ök pénzárama hasonlít legjobban a biztosítói kötelezettségekben megjelenő garanciák pénzáramára. A modellek paramétereinek beállításához tehát szükség van a piacon megfigyelhető hozamokra, swaption árakra (bonyolultabb kalibráció esetén korrelációkra is).

Az utóbbi évtizedben a hozamok jelentősen csökkentek, melynek hatására a hozamgörbe modellek rosszabb illeszkedést mutatnak, így a portfóliók értékelése nehezebbé válhat.

Az utóbbi évtizedekben számos hozamgörbe modell jelent meg, például a Gauss modellek, CIR++ modell, Longstaff és Schwartz modell. A dolgozatban a gyakorlatban elterjedt Gauss modell bemutatása mellett döntöttem. A modell elterjedtsége kedvező tulajdonságainak tudható be: az azonnali spot hozam normális eloszlású, melynek következtében zárt képleteket kaphatunk több pénzügyi derivatíva árára. Továbbá a modell egy időtől függő paraméternek köszönhetően pontosan visszaadja a megfigyelt hozamokat.

A dolgozat 2. fejezetében Brigo and Mercurio (2006) alapján röviden ismertetem a későbbiekben használt pénzügyi derivatívákat (swapok, swaption-ök). Továbbá leírásra kerülnek Harrison and Pliska (1981) alapvető fontosságú eredményei, melyek segítségével precízen felírhatóak a termékek árai. Végül bevezetésre kerül a numeraire fogalma, mely nagymértékben segíti a derivatívák árainak kiszámítását.

A 3. fejezetben a k-faktoros Gauss modell részletes bemutatására kerül sor. Schrager and Pelsser (2006) eredményei alapján explicit képletet kaphatunk a swaptionök áraira.

A két- illetve háromfaktoros Gauss modellt alkalmaztam valós, piaci adatokon. A 4. fejezetben ezen eredmények bemutatására kerül sor. Alacsony és magasabb hozamkörnyezetben is végeztem kalibrációt, melyeken szemléltethető az illeszkedések közötti különbség. Végül a modellek kis változtatásával igyekeztem jobb illeszkedést találni, mely bizonyos esetekben sikerrel is járt.

2. Irodalmi áttekintés

2.1. Jelölések, derivatívák

Ebben az alfejezetben egy gyors áttekintést nyújtok a későbbiekben használt jelölésekről illetve a dolgozatban használt pénzügyi derivatívákról Brigo and Mercurio (2006) alapján.

A dolgozatban t illetve T időpontokat fognak jelölni (a felhasználások során legtöbbször $t = 0$). Két időpont között eltelt időt jelölje $\tau(t, T)$, melyet években adunk meg. $\tau(t, T)$ értéke függ a kamatkonvenciótól, amit használunk, azaz hogy hány naposnak tekintünk egy évet. A dolgozatban a 365 napos konvenciót használjuk.

Jelölje $B(t)$ a bankbetét értékét a t időpontban. A bankbetét egy kockázatmentes befektetés, mely értéke folytonosan növekszik a kockázatmentes hozam alapján. A $t = 0$ időpontban $B(0) := 1$. Ezek alapján $B(t)$ a követező differenciálegyenlet szerint fejlődik:

$$dB(t) = r_t B(t)\mathrm{d}t \qquad B(0) = 1,$$

ahol $r(t)$ a t időpontbeli azonnali spot hozamot jelöli. A differenciálegyenletet megoldva kapjuk:

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right).$$

A fenti egyenlet azt fejezi ki, hogy ha befektetünk 1 egység pénzt a 0 időpontban akkor mennyi pénzünk lesz a t időpontban.

Legyen $D(t, T)$ a sztochasztikus diszkontfaktor t és T között, azaz a t időpontbeli értéke a T időpontbeli 1 egységnek. Ezt a fentiek alapján a következőképp kaphatjuk meg:

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s \mathrm{d}s\right).$$

Jelölje $P(t, T)$ a T lejáratú elemi kötvény (zero coupon bond) értékét a t időpontban (az elemi kötvény 1 egységet fizet lejáratkor, a tartam alatt nincsen kuponfizetés). Így természetesen $P(T, T) = 1$. Ez alapján hasonlóan a sztochasztikus diszkontfaktorhoz az elemi kötvény értéke is a T-ben fizetendő 1 egység t-beli értékét adja meg. Azonban míg $P(t, T)$ értéke a t időpontban determinisztikus, és $D(t, T)$ értéke függ $r(t)$ fejlődésétől t és T között. Tulajdonképpen $P(t, T)$ nem más, mint $D(t, T)$ várható értéke egy megfelelő valószínűségi mérték szerint.

Éven belüli kamatszámításnál lineárisan számolunk. Jelölje $L(t, T)$ azt a konstans rátát, melyre a t időpontbeli befektetésünk értéke a T időpontban egy egység (lineárisan számolva), azaz:

$$P(t,T)(1+L(t,T)\tau(t,T))=1 \qquad L(t,T)=\frac{1-P(t,T)}{P(t,T)\tau(t,T)}.$$

Éven túli ügyleteknél folytonos kamatszámítást alkalmazok. Legyen $R(t,T)$ az a konstans ráta, amelyre a t időpontbeli befektetésünk értéke a T időpontban egy egység (folytonosan számolva), azaz:

$$P(t,T)\exp(R(t,T)\tau(t,T))=1 \qquad R(t,T)=\frac{-\ln(P(t,T))}{\tau(t,T)}. \tag{1}$$

2.1.1. Interest Rate Swap

Az Interest Rate Swap (IRS) egy olyan ügylet, melynek keretében egy jövőbeli időponttól kezdődően fix kamatot cserélünk el változó kamatra. Jelölje az IRS ügylet kezdetét T_α, a fizetési időpontokat $T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}, ..., T_\beta$, két fizetési időpont között eltelt időt:

$$\tau_i = T_i - T_{i-1} \qquad i=\alpha+1, \alpha+2, ..., \beta.$$

A fix kamatot fizető fél $N\tau_i K$ összeget fizet, ahol N az ügylet nominális értéke, K a fix kamat. A változó kamatot fizető fél, $N\tau_i L(T_{i-1},T_i)$ összeget fizet, ahol $L(T_{i-1},T_i)$ értéke a T_{i-1} időpontban határozódik meg (a gyakorlatban az ügylet fix illetve változó kamatot fizető lába általában nem ugyanolyan időközönként fizet, de hogy a jelölést egyszerűsítsük, ezt feltesszük). Payer IRS-nak (PFS) nevezzük amikor a fix kamatot fizetjük és a változót kapjuk, Receiver IRS-nak (RFS) ha a változó kamatot fizetjük és a fix kamatot kapjuk. Az előbbiek alapján a PFS pénzáramának értéke a $t < T_\alpha$ időpontban

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t,T_i)N\tau_i(L(T_{i-1},T_i)-K),$$

hasonlóan az RFS értéke a $t < T_\alpha$ időpontban:

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t,T_i)N\tau_i(K-L(T_{i-1},T_i)).$$

Más oldalról tekintve a RFS ügyletre, a T_i időpontban a pénzáram:

$$N\tau_i(K-L(T_{i-1},T_i))$$

behelyettesítve $L(T_{i-1},T_i)$ helyére:

$$N\tau_i\left(K-\frac{1-P(T_{i-1},T_i)}{\tau_i P(T_{i-1},T_i)})\right)=N\left(K\tau_i-\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)}+1\right)$$

melynek értéke a t időpontban:

$$N(P(t,T_i)\tau_i K - P(t,T_{i-1}) + P(t,T_i)).$$

Így a RFS értéke a t időpontban:

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (N(P(t,T_i)\tau_i K - P(t,T_{i-1}) + P(t,T_i))) = -NP(t,T_\alpha) + NP(t,T_\beta) + \\ + N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t,T_i)\tau_i K,$$

hasonlóan a PFS értéke a t időpontban:

$$NP(t,T_\alpha) - NP(t,T_\beta) - N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t,T_i)\tau_i K.$$

Pontosan egy olyan K létezik, amelyre az RFS illetve a PFS értéke a t időpontban 0, ez:

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t,T_i)}$$

melyet forward swap rátának hívunk. A swap ügylet kezdetekor kiszámított forward swap ráta lesz az ügyletben megjelenő fix kamat. A piac általában ebben a fix kamatban jegyzi a swap ügyleteket.

2.1.2. Swaption

A swaption-ök opciók az IRS ügyletekre. Az európai payer swaption birtoklása lehetőséget biztosít belépni egy payer IRS ügyletbe az opció lejártakor, mely általában egybeesik a swap ügylet T_α időpontjával. Az alaptermék hosszát $(T_\beta - T_\alpha)$ a swap tenorjának nevezzük. Csak akkor lépünk be a swap ügyletbe, ha a T_α időpontban az ügylet értéke pozitív (mostantól $N := 1$):

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (-P(T_\alpha,T_i)\tau_i K + P(T_\alpha,T_{i-1}) - P(T_\alpha,T_i))$$

így a payer swaption értéke a t időpontban:

$$D(t,T_\alpha)\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (-P(T_\alpha,T_i)\tau_i K + P(T_\alpha,T_{i-1}) - P(T_\alpha,T_i))\right)^+.$$

Ennek megfelelően a receiver swaption értéke:

$$D(t,T_\alpha)\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (P(T_\alpha,T_i)\tau_i K - P(T_\alpha,T_{i-1}) + P(T_\alpha,T_i))\right)^+.$$

A piac a swaption-öket egy a Black-Scholes képlethez hasonló számítással árazza. A payer swaption piaci ára a $t = 0$ időpontban:

$$\left(S_{\alpha,\beta}(0)\Phi(d_1(K, S_{\alpha,\beta}(0), \upsilon)) - K\Phi(d_2(K, S_{\alpha,\beta}(t), \upsilon))\right) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i)\tau_i$$

ahol

$$d_1(K, S_{\alpha,\beta}(0), \upsilon)) = \frac{\ln\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(0)}{K}\right) + \frac{\upsilon^2}{2}}{\upsilon}$$

$$d_2(K, S_{\alpha,\beta}(0), \upsilon)) = \frac{\ln\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(0)}{K}\right) - \frac{\upsilon^2}{2}}{\upsilon},$$

$\upsilon = \sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_\alpha}$ és Φ a sztenderd normális eloszlásfüggvény. $\sigma_{\alpha,\beta}$ a piacon jegyzett volatilitás. Hasonlóan a receiver swaption ára a $t = 0$ időpontban:

$$\left(-S_{\alpha,\beta}(0)\phi(-d_1(K, S_{\alpha,\beta}(0), \upsilon)) + K\phi(-d_2(K, S_{\alpha,\beta}(t), \upsilon))\right) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i)\tau_i.$$

Egy PFS-t at-the-money-nak (ATM) nevezünk, ha $K = S_{\alpha,\beta}(0)$, in-the-money-nak (ITM), ha $K < S_{\alpha,\beta}(0)$ és out-of-the-money-nak (OTM), ha $K > S_{\alpha,\beta}(0)$ (RFS esetén a relációk fordítva állnak).

2.2. Mértékcsere, numeraire

Az előző fejezetben láthattuk hogyan számíthatjuk ki a swaption értékét bármely $t < T_\alpha$ időpontban. A későbbiekben (a swaption árának a Gauss modellben történő meghatározásához) szükségünk van a következő néhány alapvető fontosságú tételre, definícióra. Ebben az alfejezetben ezeknek bemutatására kerül sor.

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, Q_0)$ egy valószínűségi mező, és $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ egy jobbról folytonos filtráció. Jelölje $S(t)$ a vizsgált pénzügyi eszköz árfolyamát a t időpontban, illetve $\phi(t)$ az eszközből tartott mennyiséget (ahol $\phi(t)$ mérhető $\mathcal{F}_{t+}$-ra). Ezt a $\phi(t)$ folyamatot kereskedési stratégiának nevezzük. Jelölje $V_t(\phi)$ a befektetésünk értékét a t időpontban, azaz:

$$V_t(\phi) = \phi(t)S(t).$$

A befektetésből származó nyereségünket a következő képlettel számolhatjuk:

$$G_t(\phi) = \int_0^t \phi(u)\mathrm{d}S(u),$$

melyet nyereségfolyamatnak nevezünk.

2.1. Definíció. *Egy kereskedési stratégiát önfinanszírozónak nevezünk, ha minden* $0 < t < T$*-re* $V_t(\phi) > 0$ *és:*

$$V_t(\psi) = V_0(\psi) + G_t(\psi),$$

azaz a befektetésünk értéke csak a pénzügyi eszköz árfolyamváltozása miatt változik (nincsenek időközi pénzáramlások).

2.2. Definíció. *Egy X véletlen követelés egy négyzetesen integrálható, pozitív valószínűségi változó a $(\Omega, \mathcal{F}, Q_0)$ valószínűségi mezőn. A véletlen követelés elérhető, ha létezik egy olyan önfinanszírozó stratégia, amelyre: $V_T(\phi) = X$.*

2.3. Definíció. *Egy Q valószínűségi mértéket a $(\Omega, \mathcal{F})$ téren ekvivalens martingál mértéknek nevezünk, ha*

1. *Q és Q_0 ekvivalens valószínűségi mértékek,*
2. *$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}Q_0}$ Radon-Nikodym derivált négyzetesen integrálgató Q_0 szerint,*
3. *a $D(0,.)S$ folyamat $(\mathbb{F}, Q)$-martingál.*

Harrison and Pliska (1981) cikkükben bebizonyították a következő alapvető fontosságú tételt:

2.4. Tétel. *Egy piaci modellben akkor és csak akkor nincs arbitrázslehetőség, ha létezik Q_0-al ekvivalens martingál mérték.*

A dolgozat egészében élünk a feltételezéssel, hogy a piacon nem létezik arbitrázslehetőség, ebből következendően létezik ekvivalens martingál mérték. A következő állítás a derivatívák árazásához nyújt segítséget (Harrison and Pliska (1981)):

2.5. Állítás. *Tegyük fel hogy létezik egy Q ekvivalens martingál mérték, és legyen X egy elérhető követelés. Ekkor minden $0 \leq t \leq T$ időpontban létezik egy egyértelmű ára a követelésnek:*

$$\pi_t = E(D(t,T)X|\mathcal{F}_t).$$

Ezen eredmények alapján, a fenti feltételek teljesülése mellett, egyértelműen létezik a payer swaption ára minden $t < T_\alpha$ időpontban (a gyakorlatban a piacnak likvidnek, teljesnek és mélynek kell lennie):

$$PFS(t,T_\alpha,T_\beta,K) =$$

$$= E\left(D(t,T_\alpha)\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}(-P(T_\alpha,T_i)\tau_i K + P(T_\alpha,T_{i-1}) - P(T_\alpha,T_i))\right)^+\right).$$

A receiver swaption ára:

$$RFS(t,T_\alpha,T_\beta,K) =$$

$$= E\left(D(t,T_\alpha)\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}(P(T_\alpha,T_i)\tau_i K - P(T_\alpha,T_{i-1}) + P(T_\alpha,T_i))\right)^+\right).$$

Ugyanakkor a kapott kifejezés kiszámítása $D(t, T_\alpha)$ miatt nehézségekbe ütközik. A megoldásban segít a használt Q mérték cseréje. Bevezetjük a numeraire fogalmát, mely intuitívan egy referencia pénzügyi eszköz, mely árfolyamával normalizáljuk más eszközök árait. (Geman et al. (1995))

2.6. Definíció. *Egy numeraire bármely pozitív osztalékfizetés nélküli pénzügyi eszköz.*

Ugyanebben a cikkben látták be a szerzők, hogy egy önfinanszírozó stratégia önfinanszírozó marad a numeraire váltás után, ennek következtében egy elérhető követelés is elérhető marad. Az ekvivalens mérték definíciójában szereplő numeraire implicit módon a bankbetét volt. A következő tétel (Geman et al. (1995)) a numeraire váltáshoz nyújt segítséget:

2.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy létezik egy N numeraire és egy hozzá tartozó Q^N mérték, mely ekvivalens az eredeti Q_0 mértékkel, úgy hogy bármely Y kereskedett termék értéke N-el normalizálva martingál Q^N alatt, azaz:*

$$\frac{Y_t}{N_t} = E\left(\frac{Y_T}{N_T}|\mathcal{F}_t\right) \qquad 0 \le t \le T.$$

Legyen U egy tetszőleges numeraire. Ekkor létezik egy Q^U valószínűségi mérték, mely ekvivalens Q_0-al, úgy, hogy bármely X elérhető követelésre X/U martingál lesz Q^U alatt, azaz:

$$\frac{X_t}{U_t} = E\left(\frac{X_T}{U_T}|\mathcal{F}_t\right) \qquad 0 \le t \le T.$$

Továbbá a Radon-Nikodym deriváltat a következőképp számíthatjuk:

$$\frac{\mathrm{d}Q^U}{\mathrm{d}Q_N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T}.$$

A swapoknál illetve swaption-öknél leggyakrabban használt numeraire az

$$N_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i).$$

Ezt felhasználva:

$$PFS(0,T_\alpha,T_\beta,K)=$$

$$=E\left(D(0,T_\alpha)\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}\left(-P(T_\alpha,T_i)\tau_iK+P(T_\alpha,T_{i-1})-P(T_\alpha,T_i)\right)\right)^+\right)=$$

$$=E\left(D(0,T_\alpha)\left(-KN_{\alpha,\beta}(T_\alpha)+P(T_\alpha,T_\alpha)-P(T_\alpha,T_\beta)\right)^+\right)=$$

$$=E\left(D(0,T_\alpha)N_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\left(\frac{P(T_\alpha,T_\alpha)-P(T_\alpha,T_\beta)}{N_{\alpha,\beta}(T_\alpha)}-K\right)^+\right)=$$

$$=E\left(D(0,T_\alpha)N_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-K\right)^+\right)=$$

$$=E\left(\frac{N_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-K\right)^+}{B(T_\alpha)}\right)$$

Ekkor a 2.7. tétel szerint kiszámíthatjuk a Radon-Nikodym deriváltat, majd elvégezhetjük a mértékcserét.

$$\frac{\mathrm{d}Q^N}{\mathrm{d}Q^B}=\frac{N_{\alpha,\beta}(T_\alpha)B(0)}{N_{\alpha,\beta}(0)B(T_\alpha)}=\frac{N_{\alpha,\beta}(T_\alpha)}{N_{\alpha,\beta}(0)B(T_\alpha)},$$

így

$$PFS(0,T_\alpha,T_\beta,K)=E\left(\frac{N_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-K\right)^+}{B(T_\alpha)}\right)=$$

$$=E^N\left(\frac{N_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-K\right)^+}{B(T_\alpha)}\frac{\mathrm{d}Q^B}{\mathrm{d}Q^N}\right)=$$

$$=E^N\left(\frac{N_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-K\right)^+}{B(T_\alpha)}\frac{N_{\alpha,\beta}(0)B(T_\alpha)}{N_{\alpha,\beta}(T_\alpha)}\right)=$$

$$=N_{\alpha,\beta}(0)E^N\left(\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-K\right)^+\right).$$

Így ha ismerjük $S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)$ eloszlását, úgy ki tudjuk számolni a swaption árát. Hasonlóan a receiver swaption ára:

$$RFS(0,T_\alpha,T_\beta,K)=N_{\alpha,\beta}(0)E^N\left(\left(K-S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\right)^+\right).$$

Hasonlóan levezethetőek a képletek a $t<T_\alpha$ időpontra is:

$$PFS(t,T_\alpha,T_\beta,K)=N_{\alpha,\beta}(t)E^N\left(\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-K\right)^+\right),$$

illetve

$$RFS(t,T_\alpha,T_\beta,K)=N_{\alpha,\beta}(t)E^N\left(\left(K-S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\right)^+\right).$$

3. Gauss modellek

A biztosítói kötelezettségek piaci értékelése az alapja a Solvency II-nek és az IFRS 4 phase 2-nek. Ahhoz hogy a biztosítási szerződéseket megfelelően tudjuk értékelni, sztochasztikus modellek alkalmazására van szükség. A kötelezettségek piaci értékeléséhez szükséges hogy a modellek úgy legyenek kalibrálva, hogy minél pontosabban visszaadják a kereskedett pénzügyi eszközök árait. A későbbi tesztekben a két- illetve háromfaktoros Gauss modellt fogom használni, azonban itt általánosabban, a k-faktoros modellt mutatom be, vezetem le a szükséges összefüggéseket.

Természetesen a modell kalibrálásához szükségünk van a piacon megfigyelhető árakra, hozamokra. A kalibráció során úgy igyekszünk beállítani a modellek paramétereit, hogy a modell által a swaption-ök áraira kiadott értékek a lehető legközelebb legyenek a piacon megfigyelhető árakhoz. A swaption-ök esetében "ár" alatt a swaption volatilitását is szokás érteni (a Black-Scholes képlet egy egyértelmű megfeleltetést ad a két érték között). Így tehát szükségünk lesz a likvid swaption-ök piaci áraira (volatilitásaikra), illetve a kockázatmentes hozamokra. Fontos hogy a kalibráció során csak olyan piaci árakkal szabad dolgoznunk, melyek likvidek, azaz megfelelő mennyiségben kereskednek velük, hiszen ellenkező esetben a megfigyelt ár nem biztos, hogy visszaadja a swaption értékét, mely torzíthatja a modellt, rosszabb kalibrációhoz vezethet.

A k-faktoros Gauss modell az azonnali spot hozam dinamikáját írja le a következő formában:

$$r_t = \varphi_t + \sum_{i=1}^{k} x_i(t)$$

$$\mathrm{d}x_i(t) = -a_i x_i(t)\mathrm{d}t + \sigma_i W_i(t) \qquad x_i(0) = 0 \qquad i = 1 \dots k$$

ahol $W(t)$ egy k dimenziós Wiener-folyamat, melynek azonnali korrelációs mátrixa:

$$\Sigma = (\varrho_{ij}) \qquad -1 \leq \varrho_{ij} \leq 1 \qquad \varrho_{ii} = 1.$$

Itt φ_t értékét beállíthatjuk úgy, hogy a modell által megadott hozamgörbe teljesen megegyezzen a piacon megfigyelttel. Az $x_i(t)$-kre felírt egyenletek lineáris sztochasztikus differenciálegyenletek, melyek megoldóképlete ismert, így egyszerűen kaphatjuk:

$$x_i(t) = e^{-a_i t} \int_0^t e^{a_i u} \sigma_i \mathrm{d}W_i(u),$$

melyből rögtön következik, hogy

$$x_i(t) = x_i(s) e^{-a_i(t-s)} + \sigma_i \int_s^t e^{-a_i(t-u)} \mathrm{d}W_i(u).$$

3.1. Az elemi kötvény árazása

Mint ahogy a 2. fejezetben említettük $P(t,T)$ a sztochasztikus diszkontfaktor várható értéke egy megfelelő mérték szerint. Ez a mérték Q_0, a bankbetéthez tartozó mérték. Így (E-vel jelöljük a Q_0 mérték szerinti várható értéket):

$$P(t,T) = E\left(\exp\left(-\int_t^T r_u \mathrm{d}u\right)\right).$$

Ahhoz hogy meghatározhassuk ezt a várható értéket szükségünk lesz $R(t,T) := \int_t^T r_u du$ eloszlására.

$$R(t,T) = \int_t^T r_u \mathrm{d}u = \int_t^T \sum_{i=1}^k x_i(u)\mathrm{d}u + \int_t^T \varphi_u \mathrm{d}u.$$

Tekintsük először a következő tagot:

$$\int_t^T x_i(u)\mathrm{d}u = \int_t^T x_i(t)e^{-a_i(u-t)} + \sigma_i \int_t^u e^{-a_i(u-s)}\mathrm{d}W_i(s)\mathrm{d}u =$$

$$= \left[-\frac{x_i(t)}{a_i}e^{-a_i(u-t)}\right]_{u=t}^{u=T} + \sigma_i \int_t^T\int_s^T e^{-a_i(u-s)}\mathrm{d}u\mathrm{d}W_i(s) =$$

$$= \frac{1-e^{-a_i(T-t)}}{a_i}x_i(t) + \sigma_i \int_t^T \left[\frac{-e^{-a_i(u-s)}}{a_i}\right]_{u=s}^{u=T} \mathrm{d}W_i(s) =$$

$$= \frac{1-e^{-a_i(T-t)}}{a_i}x_i(t) + \sigma_i \int_t^T \frac{1-e^{-a_i(T-s)}}{a_i}\mathrm{d}W_i(s),$$

ahol a második lépésben használtuk Fubini tételét az integrálok sorrendjének felcseréléséhez. Mivel φ_t determinisztikus függvény, így rögtön adódik, hogy $R(t,T)$ normális eloszlású, várható értéke:

$$M(t,T) := E(R(t,T)) = \sum_{i=1}^k \frac{1-e^{-a_i(T-t)}}{a_i}x_i(t) + \int_t^T \varphi_u \mathrm{d}u.$$

Tekintsük most a varianciát. Mivel $\frac{1-e^{-a_i(T-t)}}{a_i}x_i(t)$-k determinisztikus függvények, így a variancia:

$$Var(R(t,T)) = Var\left(\sum_{i=1}^k \left(\sigma_i \int_t^T \frac{1-e^{-a_i(T-s)}}{a_i}\mathrm{d}W_i(s)\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(\varrho_{ij}\frac{\sigma_i\sigma_j}{a_i a_j}\int_t^T \left(1-e^{-a_i(T-s)}\right)\left(1-e^{-a_j(T-s)}\right)\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma_i^2}{a_i^2}\int_t^T 1 - 2e^{-a_i(T-s)} + e^{-2a_i(T-s)}\mathrm{d}s\right) +$$

$$+\sum_{i,j=1..k;i<j}\left(2\varrho_{ij}\frac{\sigma_i\sigma_j}{a_ia_j}\int_t^T 1-e^{-a_i(T-s)}-e^{-a_j(T-s)}+e^{-(a_i+a_j)(T-s)}\mathrm{d}s\right)$$

Így

$$V(t,T):=Var(R(t,T))=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\sigma_i^2}{a_i^2}\left[s-2\frac{e^{-a_i(T-s)}}{a_i}+\frac{e^{-2a_i(T-s)}}{2a_i}\right]_{s=t}^{s=T}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1..k;i<j}\left(2\varrho_{ij}\frac{\sigma_i\sigma_j}{a_ia_j}\left[s-\frac{e^{-a_i(T-s)}}{a_i}-\frac{e^{-a_j(T-s)}}{a_j}+\frac{e^{-(a_i+a_j)(T-s)}}{a_i+a_j}\right]_{s=t}^{s=T}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\sigma_i^2}{a_i^2}\left((T-t)-2\frac{e^{-a_i(T-t)}}{a_i}+\frac{e^{-2a_i(T-t)}}{2a_i}-\frac{3}{2a_i}\right)\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1..k;i<j}\left(2\varrho_{ij}\frac{\sigma_i\sigma_j}{a_ia_j}\left((T-t)-\frac{e^{-a_i(T-t)}-1}{a_i}-\frac{e^{-a_j(T-t)}-1}{a_j}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{e^{-(a_i+a_j)(T-t)}-1}{a_i+a_j}\right)\right)$$

Összegezve:

$$R(t,T)\sim\mathcal{N}\left(M(t,T),V(t,T)\right).$$

Mivel $R(t,T)$ eloszlása normális, így $-R(t,T)$ eloszlása is normális lesz, $-M(t,T)$ várható értékkel és $V(t,T)$ varianciával. Ebből következik, hogy $\exp(-R(t,T))$ lognormális eloszlású $-M(t,T)$ és $V(t,T)$ paraméterekkel, így (felhasználva hogy egy lognormális eloszlású valószínűségi változó várható értéke $E(Z)=\exp(\mu_Z+\frac{1}{2}\sigma_Z)$):

$$P(t,T)=E(e^{-R(t,T)})=\exp\left(-M(t,T)+\frac{1}{2}V(t,T)\right)=$$

$$=\exp\left(-\sum_{i=1}^{k}\frac{1-e^{-a_i(T-t)}}{a_i}x_i(t)-\int_t^T\varphi_u\mathrm{d}u+\frac{1}{2}V(t,T)\right).$$

A fenti kifejezésből már csak $\int_t^T\varphi_u du$ értékét nem ismerjük. Ezt a paramétert úgy szokás beállítani (természetesen) hogy minden lejáratra a piacon megfigyelt hozam egybeessen a modell által kiadott hozammal vagy, ekvivalens módon az elemi kötvények árfolyamai egyezzenek meg minden lejáratra, azaz:

$$P^M(0,T)=E\left(\exp\left(-M(0,T)+\frac{1}{2}V(0,T)\right)\right)=\exp\left(-\int_0^T\varphi_u\mathrm{d}u+\frac{1}{2}V(0,T)\right)$$

ahol $P^M(0,T)$ a piacon megfigyelt ára a T lejáratú elemi kötvénynek. Mind a két oldal logaritmusát véve, majd az egyenletet átrendezve kapjuk:

$$\int_0^T\varphi_u\mathrm{d}u=-\ln P^M(0,T)+\frac{1}{2}V(0,T).$$

Ennek felhasználásával:

$$\exp\left(-\int_t^T \varphi_u \mathrm{d}u\right) = \exp\left(-\int_0^T \varphi_u \mathrm{d}u\right)\exp\left(\int_0^t \varphi_u \mathrm{d}u\right) =$$
$$= \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)}\exp\left(\frac{1}{2}\left(V(0,t) - V(0,T)\right)\right)$$

Ezen formulák segítségével már felírhatjuk az elemi kötvény modell által számított árfolyamát a t időpontban:

$$P(t,T) = A(t,T)\exp\left(-\sum_{i=1}^{k} B(a_i,t,T)x_i(t)\right)$$
$$A(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)}\exp\left(\frac{1}{2}\left(V(t,T) + V(0,t) - V(0,T)\right)\right) \tag{2}$$
$$B(y,t,T) = \frac{1 - e^{-y(T-t)}}{y}$$

A kapott eredmények felhasználásával rátérhetünk a swaption-ök modellbeli árainak kiszámításához.

3.2. A swaption árazása

Tekintsük T_α lejáratú, $T_\beta - T_\alpha$ tenorú swaption-t. A fizetési időpontokat jelölje $T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2} \dots T_\beta$, a közöttük eltelt idő rendre $\tau_{\alpha+1}, \tau_{\alpha+2} \dots \tau_\beta$. Ahogy a 2. fejezetben láthattuk a payer swaption ára a t időpontban:

$$PFS(t, T_\alpha, T_\beta, K) = N_{\alpha,\beta}(t) E^N\left((S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+\right),$$

ahol E^N az $N_{\alpha,\beta}(t)$ numerairehez tartozó mérték szerinti várható értéket jelöli, és

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)}{N_{\alpha,\beta}(t)}$$

$$N_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t,T_i).$$

Schrager and Pelsser (2006) cikkében adott egy közelítést $S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)$ eloszlására Q^N alatt. A következő levezetés az említett cikk alapján történik.

Tudjuk, hogy $S_{\alpha,\beta}$ egy martingál Q^N alatt, így $E^N\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\right) = S_{\alpha,\beta}(0)$. Felírva az Ito-lemmát a swap rátára kapjuk:

$$\mathrm{d}S_{\alpha,\beta}(t) = \hat{\Sigma}\frac{\partial S_{\alpha,\beta}(t)}{\partial x(t)}\mathrm{d}W^N(t)$$

ahol W^N egy k dimenziós Wiener-folyamat, melynek korrelációs mátrixa Σ, és $\hat{\Sigma} = \operatorname{diag}([\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_k])$. Felhasználva hogy

$$\frac{\partial P(t,T)}{\partial x_i(t)} = \frac{\partial \left(A(t,T) \exp \left(\sum_{j=1}^{k} -B(a_j,t,T) x_j(t) \right) \right)}{\partial x_i(t)} =$$

$$= -B(a_i,t,T) A(t,T) \exp \left(\sum_{j=1}^{k} -B(a_j,t,T) x_j(t) \right) = -B(a_i,t,T) P(t,T)$$

a parciális deriváltak:

$$\frac{\partial S_{\alpha,\beta}(t)}{\partial x_i(t)} = \frac{\partial \left(\frac{P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)}{N_{\alpha,\beta}(t)} \right)}{\partial x_i(t)} = \frac{-B(a_i,t,T_\alpha) P(t,T_\alpha)}{N_{\alpha,\beta}(t)} + \frac{B(a_i,t,T_\beta) P(t,T_\beta)}{N_{\alpha,\beta}(t)} -$$

$$- \frac{(P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)) \left(\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} -\tau_j P(t,T_j) B(a_i,t,T_j) \right)}{(N_{\alpha,\beta}(t))^2} =$$

$$= -B(a_i,t,T_\alpha) P^N(t,T_\alpha) + B(a_i,t,T_\beta) P^N(t,T_\beta) +$$

$$+ S_{\alpha,\beta}(t) \sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j P^N(t,T_j) B(a_i,t,T_j)$$

ahol $P^N(t,T) = \frac{P(t,T)}{N_{\alpha,\beta}(t)}$. $P^N(t,T)$ és $S_{\alpha,\beta}(t)$ alacsony varianciájú martingálok Q^N alatt, így értéküket közelíthetjük a várható értékükkel, mely rendre $P(0,T)$ illetve $S_{\alpha,\beta}(0)$. Továbbá elvégezve ezt a becslést a swap ráta volatilitása determinisztikussá válik (a becsült változó volatilitása determinisztikus), így egy normális eloszlású változókból álló martingált kapunk (Schrager and Pelsser (2006)). Így a kapott kifejezést behelyettesítve $B(y,t,T)$ helyére:

$$\widetilde{\frac{\partial S_{\alpha,\beta}(t)}{\partial x_i(t)}} = -\frac{1 - e^{-a_i(T_\alpha - t)}}{a_i} P^N(0,T_\alpha) + \frac{1 - e^{-a_i(T_\beta - t)}}{a_i} P^N(0,T_\beta) + \tag{3}$$

$$+ S_{\alpha,\beta}(0) \sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j P^N(0,T_j) \frac{1 - e^{-a_i(T_j - t)}}{a_i} =$$

$$= \frac{1}{a_i} \left(-P^N(0,T_\alpha + P^N(0,T_\beta) + S_{\alpha,\beta}(0) \sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j P^N(0,T_j) \right) +$$

$$+ \frac{e^{a_i t}}{a_i} \left(e^{-a_i T_\alpha} P^N(0,T_\alpha) - e^{-a_i T_\beta} P^N(0,T_\beta) - S_{\alpha,\beta}(0) \sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j P^N(0,T_j) e^{-a_i T_j} \right) =$$

$$= \frac{1}{a_i} \left(-S_{\alpha,\beta}(0) + S_{\alpha,\beta}(0) \right) +$$

$$+\frac{e^{a_i t}}{a_i}\left(e^{-a_i T_\alpha} P^N(0,T_\alpha) - e^{-a_i T_\beta} P^N(0,T_\beta) - S_{\alpha,\beta}(0)\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j P^N(0,T_j) e^{-a_i T_j}\right) =$$

$$= \frac{e^{a_i t}}{a_i}\left(e^{-a_i T_\alpha} P^N(0,T_\alpha) - e^{-a_i T_\beta} P^N(0,T_\beta) - S_{\alpha,\beta}(0)\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \tau_j P^N(0,T_j) e^{-a_i T_j}\right) :=$$

$$:= e^{a_i t} C^{(i)}_{\alpha,\beta}$$

Így jutunk a következő egyenlethez:

$$S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) = \int_0^{T_\alpha} \mathrm{d}S_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^{T_\alpha} \hat{\Sigma}\frac{\partial S_{\alpha,\beta}(t)}{\partial x(t)} \mathrm{d}W^N(t) \approx \int_0^{T_\alpha} \hat{\Sigma}\frac{\partial \widetilde{S_{\alpha,\beta}(t)}}{\partial x(t)} \mathrm{d}W^N(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_0^{T_\alpha} \sigma_i e^{a_i t} C^{(i)}_{\alpha,\beta} \mathrm{d}W^N_i(t)$$

Az Ito-izometriát felhasználva megkaphatjuk a forward swap ráta becslésének varianciáját:

$$Var(\widetilde{S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)}) = Var\left(\sum_{i=1}^{k} \int_0^{T_\alpha} \sigma_i e^{a_i t} C^{(i)}_{\alpha,\beta} \mathrm{d}W^N_i(t)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \left(C^{(i)}_{\alpha,\beta}\right)^2 \int_0^{T_\alpha} e^{2a_i t}\mathrm{d}t + \sum_{i,j=1;i<j}^{k} \varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j C^{(i)}_{\alpha,\beta} C^{(j)}_{\alpha,\beta} \int_0^{T_\alpha} e^{(a_i+a_j)t}\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \left(C^{(i)}_{\alpha,\beta}\right)^2 \left[\frac{e^{2a_i t}}{2a_i}\right]_{t=0}^{t=T_\alpha} + \sum_{i,j=1;i<j}^{k} \varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j C^{(i)}_{\alpha,\beta} C^{(j)}_{\alpha,\beta} \left[\frac{e^{(a_i+a_j)t}}{a_i+a_j}\right]_{t=0}^{t=T_\alpha} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \left(C^{(i)}_{\alpha,\beta}\right)^2 \frac{e^{2a_i T_\alpha} - 1}{2a_i} + \sum_{i,j=1;i<j}^{k} \varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j C^{(i)}_{\alpha,\beta} C^{(j)}_{\alpha,\beta} \frac{e^{(a_i+a_j)T_\alpha} - 1}{a_i+a_j}$$

Ebből a forward swap ráta szórásának becslése:

$$\sigma_{\alpha,\beta} := \sqrt{Var(\widetilde{S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)})} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \left(C^{(i)}_{\alpha,\beta}\right)^2 \frac{e^{2a_i T_\alpha} - 1}{2a_i} + \sum_{i,j=1;i<j}^{k} \varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j C^{(i)}_{\alpha,\beta} C^{(j)}_{\alpha,\beta} \frac{e^{(a_i+a_j)T_\alpha} - 1}{a_i+a_j}}$$

Így a payer swaption modell által megadott árára a következő kifejezést kapjuk:

$$PFS(t, T_\alpha, T_\beta, K) = N_{\alpha,\beta}(t) E^N \left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K\right)^+ =$$

$$= N_{\alpha,\beta}(t) \int_K^\infty \frac{x-K}{\sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}}\right)^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= N_{\alpha,\beta}(t)\left(\int_K^\infty \frac{\frac{x-S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}}\right)^2\right)\mathrm{d}x+\right.$$

$$\left.+\int_K^\infty \frac{S_{\alpha,\beta}(0)-K}{\sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}}\right)^2\right)\mathrm{d}x\right)$$

Végezzük el a $z=\frac{x-S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}}$ helyettesítést:

$$PFS(t,T_\alpha,T_\beta,K)=$$

$$= N_{\alpha,\beta}(t)\left(\sigma_{\alpha,\beta}\int_{\frac{K-S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}}}^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z+\int_{\frac{K-S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}}}^\infty \frac{S_{\alpha,\beta}(0)-K}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z\right)=$$

$$= N_{\alpha,\beta}(t)\left(\sigma_{\alpha,\beta}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\right]_{z=\frac{K-S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}}}^{z=\infty}+\right.$$

$$\left.+\left(S_{\alpha,\beta}(0)-K\right)\left(1-\Phi\left(\frac{K-S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}}\right)\right)\right)=$$

$$= N_{\alpha,\beta}(t)\left(\sigma_{\alpha,\beta}\Psi\left(\frac{K-S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}}\right)+\left(S_{\alpha,\beta}(0)-K\right)\Phi\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(0)-K}{\sigma_{\alpha,\beta}}\right)\right)$$

ahol Ψ a sztenderd normális eloszlás sűrűségfüggvényét, Φ az eloszlásfüggvényét jelöli. Hasonlóan megkaphatjuk a receiver swaption árát:

$$RFS(t,T_\alpha,T_\beta,K)=$$

$$= N_{\alpha,\beta}(t)\left(\sigma_{\alpha,\beta}\Psi\left(\frac{K-S_{\alpha,\beta}(0)}{\sigma_{\alpha,\beta}}\right)+\left(S_{\alpha,\beta}(0)-K\right)\Phi\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(0)-K}{\sigma_{\alpha,\beta}}\right)\right)$$

A képletek tovább egyszerűsödnek, ha ATM swaption-öket vizsgálunk, ekkor ugyanis $K_{ATM}=S_{\alpha,\beta}(0)$. Továbbá a kalibráció során a swaption-ök $t=0$-beli ára érdekes, így:

$$PFS(0,T_\alpha,T_\beta,K_{ATM})=RFS(0,T_\alpha,T_\beta,K_{ATM})=N_{\alpha,\beta}(0)\frac{\sigma_{\alpha,\beta}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ezeket a képleteket használjuk az a_i,σ_i,ρ_{ij} paraméterek meghatározásához.

A modell egy gyengesége hogy a szcenárió generálás során negatív azonnali spot hozamokat kaphatunk. Ugyanis:

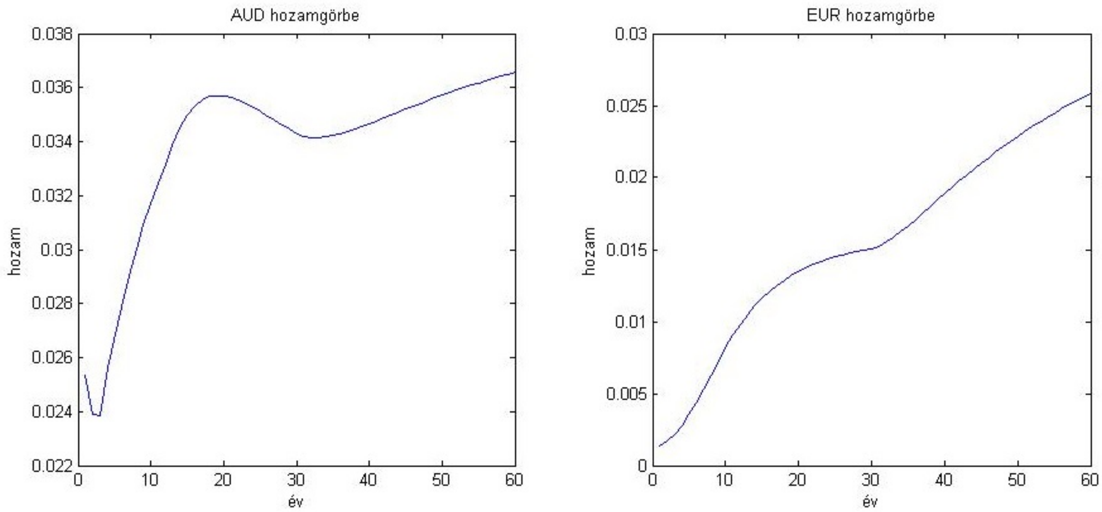
$$r(t)=\varphi_t+\sum_{i=1}^k x_i(t),$$

így $r(t)$ eloszlása normális. Ebből adódóan előfordulhatnak negatív értékek, azonban az értékelés során ez nem okoz elméleti nehézséget (csak a gyakorlatban fordul elő ritkán az ilyen hozamkörnyezet). Ugyanakkor $r(t)$ normális eloszlása az, ami miatt a gyakorlatban sűrűn alkalmazzák ezt a modellt. A normalitásnak köszönhetően ugyanis explicit képletet kaphatunk az elemi kötvények és több derivatíva árára, mely lényegesen leegyszerűsíti a számításokat.

4. Kalibrálás

4.1. Adatok

Az előzőekben bemutatott Gauss modellt alkalmaztam valós, piaci adatokon, ebben a fejezetben ezeket az eredményeket mutatom be. Két külön pénznemet választottam, az eurót (EUR), melynél a kockázatmentes hozam alacsony (1 éves hozam körülbelül 0.1%), illetve az ausztrál dollárt (AUD), ahol a kockázatmentes hozam magasabb (az egy éves hozam körülbelül 3%). A két hozamgörbe az 1. ábrán látható.



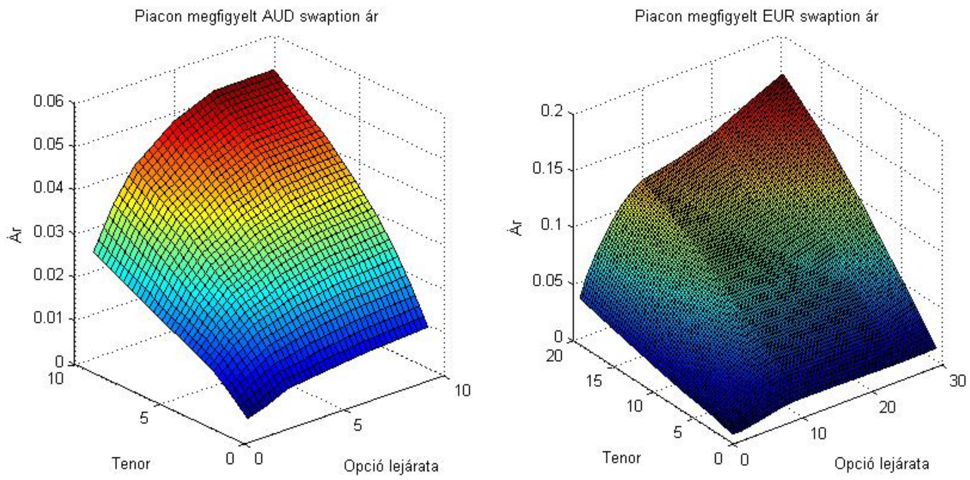
1. ábra: Hozamgörbék

Forrás: saját ábra

Mindkét pénznemre igaz, hogy likvid a swaption piacuk, euróra azokat a swaption-öket vizsgáltam melyek lejárata az 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,15,20,25 és 30 illetve a tenorja 1,2,3,4,5,7,10,15 és 20 évek közül kerülnek ki. Az ausztrál dollárnál valamivel kevesebb swaption-t tudunk vizsgálni, ezek lejárata az 1,2,3,5,7 és 10, tenorja az 1,2,3,4,5,7 és 10 évek közül való. A piacon megfigyelhető árakat az opció lejárata és tenorja függvényében a 2. ábra szemlélteti (a pontos értékek megtalálhatóak a Függelékben).

Az adatok 2014 év végi értékek, ezeket a Bloombergről gyűjtöttem.

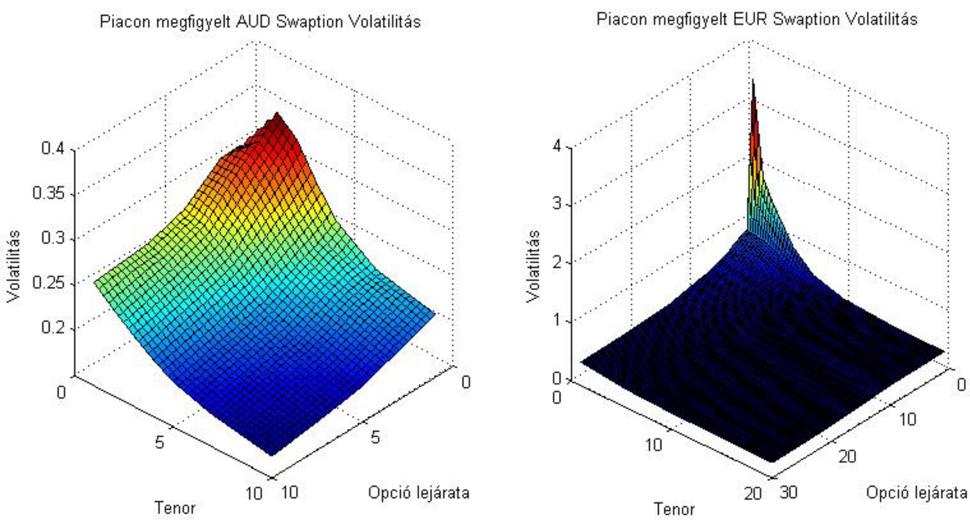
A piacon megfigyelhető árakból (rögzített hozamgörbe mellett) egyértelműen kiszámíthatóak a swaption volatilitások, felhasználva a Black-Scholes képletet. A 3. ábrán láthatóak a kalibráláshoz használt értékek. Ahogyan az ábrán is látszik a két felület között jelentős eltérés mutatkozik: az ausztrál dollárhoz tartozó felület



2. ábra: Piacon megfigyelt swaption árak

Forrás: saját ábra

egyenletesebb, míg az euróhoz tartozónál kiugró értékek figyelhetőek meg a rövid lejáratú, rövid tenorú swaption-öknél. Ez a különbség okozza a későbbiekben a kalibráció nagyobb pontatlanságát az euró esetében és oka az alacsonyabb hozam rövid lejáratok esetén.



3. ábra: Piacon megfigyelt swaption volatilitások

Forrás: saját ábra

4.2. Egyfaktoros Gauss modell

Az általános felírásban a $k = 1$ értéket választva rögtön megkaphatjuk az egyfaktoros modellben az azonnali spot hozam fejlődését leíró egyenletrendszert:

$$
\begin{aligned}
r(t) &= \varphi(t) + x(t) \\
\mathrm{d}x(t) &= -ax(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t) \qquad x(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Egyfaktoros modell esetén minden t időpontra a különböző lejárathoz tartozó kamatlábak között tökéletes korreláció van, ugyanis a folytonosan számított kamatláb t és T között:

$$
\begin{aligned}
R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t} &= -\frac{\ln\left(e^{-B(a,t,T)x(t) - \int_t^T \varphi(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}V(t,T)}\right)}{T-t} = \\
&= -\frac{\ln A_1(t,T)}{T-t} + \frac{B(a,t,T)x(t)}{T-t} = \\
&= -\frac{\ln A_1(t,T)}{T-t} + \frac{B(a,t,T)r(t) - B(a,t,T)\varphi(t)}{T-t} = \\
&= -\frac{\ln A_2(t,T)}{T-t} + + \frac{B(a,t,T)r(t)}{T-t} = a(t,T) + b(t,T)r(t)
\end{aligned}
$$

és így a korreláció:

$$
\begin{aligned}
Corr(R(t,T_1), R(t,T_2)) &= Corr(a(t,T_1) + b(t,T_1)r(t), a(t,T_2) + b(t,T_2)r(t)) = \\
&= Corr(r(t), r(t)) = 1.
\end{aligned}
$$

Ez a tulajdonság azt jelenti, hogy ha a t időpontban a görbe kezdőértékét ($r(t)$-t) egy sokk éri, az az egész hozamgörbére kihat, tehát az egész görbe ugyanabba az irányba mozog, mint $r(t)$. Ez a szituáció nem életszerű, a rövid és hosszútávú hozamoknak várakozásunk szerint dekorreláltnak kell lenniük. Így az egyfaktoros modell alkalmazása elővigyázatosságot igényel, ha olyan terméket akarunk árazni, mely értéke függ a hozamgörbe más típusú változásától. Szcenárió generáláshoz egyfaktoros Gauss modellt abban az esetben szokás alkalmazni, ha az adott pénznem swaption piaca nem likvid.

A többfaktoros modelleknél ez a probléma már nem áll fenn, így választásom inkább ezen modellek alkalmazására esett.

4.3. Kétfaktoros Gauss modell

A 3. fejezetben levezetett képleteket implementáltam a MATLAB programba, majd az előre megírt GlobalSearch nevű függvényt használtam az optimalizáláshoz. A gyakorlatban legtöbbször a piacon megfigyelt swaption volatilitás értékekhez illesztik a modell által megadott árból visszaszámolt volatilitást. Ez alapján az első modellben a piaci, illetve a modellből származó volatilitások négyzetes eltérését választottam célfüggvénynek, ezt minimalizáltam:

$$\min_{a_1,a_2,\sigma_1,\sigma_2,\varrho_{12}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(PiaciVol_{ij} - ModellVol_{ij}\right)^2,$$

ahol $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ és $-1 \leq \varrho_{12} \leq 1$, továbbá n jelöli az adott pénznemnél vizsgált opció lejáratok számát, m a tenorok számát, a $PiaciVol$ mátrix i. sorának j. eleme az i. lejárathoz és j. tenorhoz tartozó piacon megfigyelt volatilitást tartalmazza, hasonlóan a $ModellVol$ mátrix elemei a modell által számolt volatilitás értékeket tartalmazza.

A minimalizálás eredményeképpen megkapjuk a modell paramétereit és ezzel együtt az optimumban a modell által számolt swaption volatilitásokat és árakat. Azonban mivel mind az nm darab swaption-re kapunk egy volatilitást és egy árat, az illeszkedés „jóságát" nehéz szabad szemmel látni. A hiba mérésére a MAE (Mean Absolute Error) mutatót használtam, melyet mind a volatilitásokra, mind az árakra alkalmaztam:

$$MAE_{Vol} = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left|PiaciVol_{ij} - ModellVol_{ij}\right|,$$

illetve

$$MAE_{Ár} = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left|PiaciÁr_{ij} - ModellÁr_{ij}\right|.$$

Ahhoz hogy a különböző pénznemekre alkalmazott modellek illeszkedése is összehasonlítható legyen az előző MAE értéket vetítettem a piaci volatilitások illetve árak átlagára:

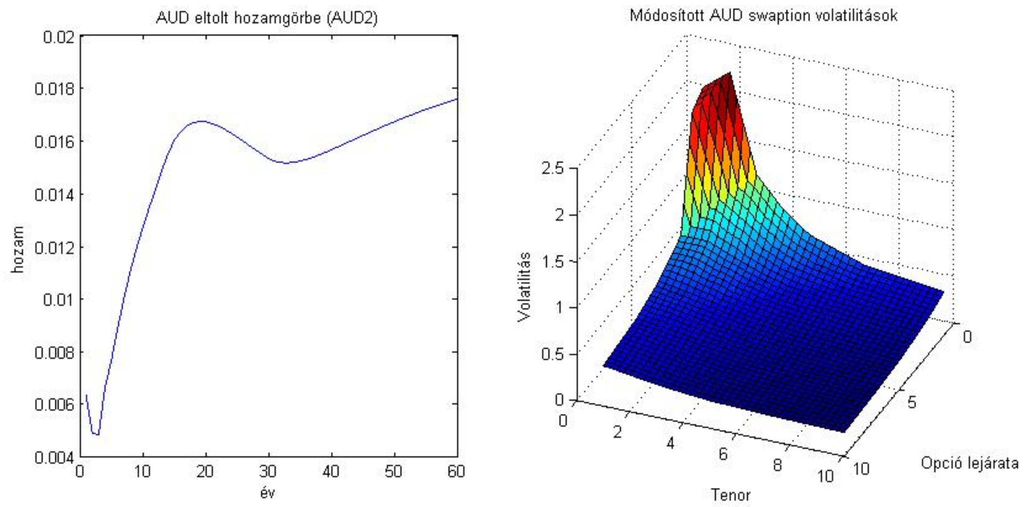
$$\overline{MAE_{Vol}} = \frac{MAE_{Vol}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} PiaciVol_{ij}} = \frac{MAE_{Vol}}{\overline{PiaciVol}}$$

$$\overline{MAE_{Ár}} = \frac{MAE_{Ár}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} PiaciÁr_{ij}} = \frac{MAE_{Ár}}{\overline{PiaciÁr}}.$$

Az összes általam vizsgált modell paraméterei megtalálhatóak az 1. táblázatban, az összehasonlítási mérőszámok pedig a 2. táblázatban.

Tekintsük először az ausztrál dollárra alkalmazott modellt. A 2. táblázatban láthatjuk, hogy a $\overline{MAE_{Vol}}$ érték 7.23%, míg a $\overline{MAE_{Ár}}$ 5.27%, ezek alapján a modell jól illeszkedik a piaci értékekhez. Az euróra alkalmazott modellnél azonban az eltérések egy nagyságrenddel nagyobbak, a $\overline{MAE_{Vol}}$ 17.09%, a $\overline{MAE_{Ár}}$ 13.68%.

Ezek alapján egyértelműen láthatjuk, hogy annál a pénznemnél amelynél alacsonyabb a hozam gyengébb illesztést tudunk elvégezni. Ez azonban még nem bizonyítja, hogy a rosszabb kalibráció mögött valóban az alacsonyabb kamatok állnak, ennek tesztelésére tegyük a következőt: vegyük rögzítettnek az ausztrál dollár swaption árakat, de az AUD hozamgörbét toljuk lefelé párhuzamosan 1,9%-kal (ekkor még minden lejáratra pozitívak maradnak a kamatok). Így egy olyan modellt kaphatunk, melyben alacsonyak a hozamok, ugyanakkor a swaption árak szerkezete megegyezik az eredetivel (az új hozamgörbét illetve a swaption volatilitásokat a 4. ábrán láthatjuk).



4. ábra: Módosított AUD hozamgörbe és swaption volatilitások

Forrás: saját ábra

Az újonnan kapott swaption volatilitások felülete így hasonlít az eurónál látottra, az illeszkedés pontosságától is hasonlóakat várhatunk. Ez így is történik: a $\overline{MAE_{Vol}}$ értéke 18.91% (ugyanakkor a $\overline{MAE_{Ár}}$ 4.45%, meglepően jól illeszkedik a visszaszámolt ár a piacon megfigyelthez). Levonhatjuk tehát a következtetést, hogy kétfaktoros modell esetén alacsonyabb hozamkörnyezetben az illesztett modell kevésbé képes visszaadni a piacon megfigyelt értékeket.

Kétfaktoros modellek	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\boldsymbol{\sigma_1}$	$\boldsymbol{\sigma_2}$	$\boldsymbol{\varrho_{12}}$
AUD	0.2712	0.2261	0.193	0.1826	-0.9981
EUR	0.1476	0.0922	0.0515	0.0489	-0.9972
AUD2	0.1773	0.3852	0.029	0.0282	-0.9778
AUD Hozam volatilitással	0.2696	0.2107	0.14	0.1304	-0.9965
EUR Hozam volatilitással	0.0916	0.1484	0.0476	0.0503	-0.9971
AUD2 Hozam volatilitással	0.7003	0.1109	0.012	0.0141	-0.9996
AUD Árra optimalizálással	0.2391	0.2022	0.2207	0.2054	-0.998
EUR Árra optimalizálással	-0.0388	-0.0279	0.0176	0.0232	-0.9904
AUD2 Árra optimalizálással	0.2204	0.2863	0.1045	0.1158	-0.993

1. táblázat: A kétfaktoros modellek paraméterei

Forrás: saját számítás

Kétfaktoros modellek	$\mathbf{MAE}_{\acute{A}r}$	$\overline{\mathbf{MAE}_{\acute{A}r}}$	$\mathbf{MAE_{Vol}}$	$\overline{\mathbf{MAE_{Vol}}}$
AUD	0.00119	5.27%	0.01828	7.23%
EUR	0.00568	13.68%	0.08719	17.09%
AUD2	0.00102	4.53%	0.05324	21.05%
AUD Hozam volatilitással	0.0012	5.29%	0.01834	7.25%
EUR Hozam volatilitással	0.00568	13.68%	0.08719	17.09%
AUD2 Hozam volatilitással	0.00099	4.36%	0.04786	18.93%
AUD Árra optimalizálással	0.00079	3.5%	0.02191	8.66%
EUR Árra optimalizálással	0.00368	8.85%	0.14406	28.23%
AUD2 Árra optimalizálással	0.0006	2.67%	0.04981	19.7%
Háromfaktoros modellek	$\mathbf{MAE}_{\acute{A}r}$	$\overline{\mathbf{MAE}_{\acute{A}r}}$	$\mathbf{MAE_{Vol}}$	$\overline{\mathbf{MAE_{Vol}}}$
AUD	0.0007	3.12%	0.0096	3.8%
EUR	0.00453	10.91%	0.07908	15.5%
AUD2	0.00135	5.97%	0.04731	18.71%
AUD Hozam volatilitással	0.00075	3.3%	0.01265	5%
EUR Hozam volatilitással	0.00507	12.2%	0.06966	13.65%
AUD2 Hozam volatilitással	0.00098	4.33%	0.03543	14.01%
AUD Árra optimalizálással	0.00053	2.32%	0.0099	3.91%
EUR Árra optimalizálással	0.00225	5.43%	0.11962	26.03%
AUD2 Árra optimalizálással	0.00044	1.94%	0.02234	8.83%

2. táblázat: A modellek eredményei

Forrás: saját számítás

4.4. Háromfaktoros Gauss modell

A k-faktoros modellre felírt egyenletekből egyszerűen megkaphatjuk a háromfaktoros modellben az azonnali spot hozam fejlődését leíró egyenleteket:

$$\begin{aligned} r(t) &= \varphi(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ \mathrm{d}x_1(t) &= -a_1 x(t)\mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}W_1(t) \qquad x_1(0) = 0 \\ \mathrm{d}x_2(t) &= -a_2 x(t)\mathrm{d}t + \sigma_2 \mathrm{d}W_2(t) \qquad x_2(0) = 0 \\ \mathrm{d}x_3(t) &= -a_3 x(t)\mathrm{d}t + \sigma_3 \mathrm{d}W_3(t) \qquad x_3(0) = 0, \end{aligned}$$

ahol $W(t)$ egy három dimenziós Wiener-folyamat, melynek korrelációs mátrixa:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{12} & \varrho_{13} \\ \varrho_{21} & 1 & \varrho_{23} \\ \varrho_{31} & \varrho_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Könnyen látható, hogy a háromfaktoros modell kibővítése a kétfaktorosénak, hiszen ha az új egyenlet paramétereit $(a_3, \sigma_3, \varrho_{13}, \varrho_{23})$ nullának választjuk visszakapjuk a kétfaktoros modellt. Ennek következtében a háromfaktoros modell alkalmazása esetén mindenképp jobb illeszkedést várunk, mint a kétfaktoros esetben. Az optimalizáláshoz meg kell adnunk a programnak egy kezdőértéket, jó kezdőérték választása gyorsíthatja az optimalizálást. A háromfaktoros modelleket indíthatjuk a kétfaktoros modellek által megadott optimális paraméterértékekből, az új $\sigma_3, \varrho_{13}, \varrho_{23}$ nullának véve. A 3. fejezetben bemutatott becslési eljárás során (Schrager and Pelsser (2006) alapján) a 3 levezetés során az a_i paraméter a nevezőbe kerül, így az értékét nem választhatjuk nullának, sőt ha megfelelően kicsinek választanánk sem a megfelelő hatást érnénk el, azonban a többi paraméter nullának választása már elegendő ahhoz, hogy visszakapjuk a kétfaktoros modellt.

A vizsgált háromfaktoros modellek paraméterei megtalálhatóak a 3. táblázatban.

A 2. táblázatra tekintve láthatjuk, hogy az elvárásoknak megfelelően a háromfaktoros modellek minden esetben felülmúlták a kétfaktorosokat, a $\overline{MAE_{Vol}}$ értékek 2-3%-ot csökkentek, a háromból két esetben a pontosabb volatilitásértékek hatására a visszaszámolt árak is közelebb kerültek a piacon megfigyelthez (az AUD2 modellnél a $\overline{MAE_{\acute{A}r}}$ 4.53%-ról 5.97%-ra nőtt). Azonban az alacsony hozamkörnyezetű modellek illeszkedése a kibővített modell használatával sem javult jelentősen.

Mint láthattuk egy újabb faktor bevezetésével valóban javultak az eredményeink, azonban csak kis mértékben. Felmerül a kérdés, hogy megéri-e egy újabb faktort bevenni a modellbe és ezzel növelni a futási időt. A 3. fejezetben bemutatott becslési eljárás során a számítások száma nem nő jelentősen egy újabb faktor hozzáadásával (a kapott modellbeli árból a volatilitás visszaszámításának számításigénye nagyságrendekkel nagyobb), azonban az optimalizálásnál megjelenő négy újabb paraméter (kétfaktorosról háromfaktorosra való áttérésnél) már nagymértékben megnöveli a futási időt. Ezzel a kérdéssel több cikkben foglalkoztak már. Jamshidian and Zhu (1997) cikkükben főkomponens analízist végeztek JPY, USD és DEM adatokra, melyből azt láthatjuk, hogy egy komponens a totális variancia 68%-76%-át, két komponens 83%-91%-át, három komponens pedig 93%-94%-át magyarázza. Több komponens hozzáadása egyre kevesebb növekedést jelent, ez alapján két-három faktor már elegendő a hozamgörbe fejlődésének modellezésére. Ezek következtében a négy- vagy többfaktoros modelleket már nem vizsgáltam.

4.5. Hozam volatilitás

A gyakorlatban a kalibráció stabilabbá tételéhez a célfüggvény egy újabb taggal bővül, mely célja hogy a modellben megfigyelt hosszútávú hozamok volatilitása közel legyen a piacon megfigyelthez. A piacon ezt az értéket historikus adatok alapján számolják. Ebben a dolgozatban a 20, 30 illetve 50 év lejáratú hozamokat tekintem, a piacon megfigyelhető értékek rendre 61, 64 illetve 68 bázispont az eurónál, 99, 102 és 61 bázispont az ausztrál dollárnál. A modellbeli érték számításának levezetését szintén általánosan, k-faktoros modellre végzem el.

Tekintsük a 1 egyenletet és a 2 kifejezést, behelyettesítve:

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t} = -\frac{\ln\left(A(t,T)\exp\left(-\sum_{i=1}^{k} B(a_i,t,T)x_i(t)\right)\right)}{T-t} =$$

$$= -\frac{\ln A(t,T)}{T-t} + \frac{\sum_{i=1}^{k} B(a_i,t,T)x_i(t)}{T-t}$$

$$A(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)}\exp\left(\frac{1}{2}\left(V(t,T)+V(0,t)-V(0,T)\right)\right)$$

$$B(y,t,T) = \frac{1-e^{-y(T-t)}}{y}.$$

A varianciát egy h hosszúságú szakaszon a következőképpen számolhatjuk:

$$Var(R(t+h,T+h)-R(t,T)) = Var\left(-\frac{\ln A(t+h,T+h)}{T-t}+\right.$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{k} B(a_i,t+h,T+h)x_i(t+h)}{T-t}+\frac{\ln A(t,T)}{t-T}-\frac{\sum_{i=1}^{k} B(a_i,t,T)x_i(t)}{T-t}\Bigg)=$$

$$=Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(B(a_i,t,T)\left(x_i(t+h)-x_i(t)\right)\right)}{T-t}\right)$$

felhasználva hogy

$$B(y,t+h,T+h)=\frac{1-e^{-y(T+h-(t+h))}}{y}=\frac{1-e^{-y(T-t)}}{y}=B(y,t,T).$$

Mivel tudjuk hogy

$$x_i(t)=x_i(s)e^{-a_i(t-s)}+\sigma_i\int_s^t e^{-a_i(t-u)}\mathrm{d}W_i(u)\sim\mathcal{N}\left(0,\frac{\sigma_i^2}{2a_i}\left(1-e^{-2a_i(t-s)}\right)\right),$$

így rögtön megkaphatjuk a szükséges összefüggéseket:

$$Var(x_i(t+h)-x_i(t))=\frac{\sigma_i^2}{2a}\left(1-e^{2a_ih}\right)$$

$$Cov(x_i(t+h),x_j(t+h))=\varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j\frac{1-e^{-(a_i+a_j)}}{a_i+a_j}.$$

Az eddigiek alapján:

$$\begin{aligned}MYV(t,T,h):&=Var(R(t+h,T+h)-R(t,T))=\\&=Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(B(a_i,t,T)\left(x_i(t+h)-x_i(t)\right)\right)}{T-t}\right)=\\&=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{B(a_i,t,T)}{T-t}\right)^2 Var(x_i(t+h)-x_i(t))+\\&+\sum_{i,j=1;i<j}^{k}2\frac{B(a_i,t,T)B(a_j,t,T)}{(T-t)^2}Cov(x_i(t+h),x_j(t+h))=\\&=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\sigma_iB(a_i,t,T)}{T-t}\right)^2\frac{1-e^{2a_ih}}{2a_i}+\\&+\sum_{i,j=1;i<j}^{k}2\varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j\frac{B(a_i,t,T)B(a_j,t,T)}{(T-t)^2}\frac{1-e^{-(a_i+a_j)h}}{a_i+a_j}.\end{aligned}$$

A kapott eredményt évesítve kapjuk:

$$\begin{aligned}MYV(t,T,h)=&\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\sigma_iB(a_i,t,T)}{T-t}\right)^2\frac{1-e^{2a_ih}}{2a_ih}+\\&+\sum_{i,j=1;i<j}^{k}2\varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j\frac{B(a_i,t,T)B(a_j,t,T)}{(T-t)^2}\frac{1-e^{-(a_i+a_j)h}}{(a_i+a_j)h}.\end{aligned}$$

Itt mivel h kicsi $\frac{1-e^{2a_ih}}{2a_ih}$ és $\frac{1-e^{-(a_i+a_j)h}}{(a_i+a_j)h}$ közel vannak az 1-hez, így kapjuk a közelítést:

$$MYV(t,T) \approx \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\sigma_i B(a_i,t,T)}{T-t}\right)^2 + \sum_{i,j=1;i<j}^{k} 2\varrho_{ij}\sigma_i\sigma_j \frac{B(a_i,t,T)B(a_j,t,T)}{(T-t)^2}.$$

Ennek segítségével már felírhatjuk az új célfüggvényt, azokat a paraméter értékeket keressük, melyekre a kifejezés felveszi a minimumát:

$$\min_{a,\sigma,\varrho}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(PiaciVol_{ij} - ModellVol_{ij})^2 + \sum_{l=20,30,50}(MYT(0,l) - YVT(l))^2\right),$$

ahol $YVT(l)$ a piacon megfigyelt l éves hozam volatilitása, kétfaktoros modell esetén $a = [a_1, a_2]$, $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2]$ és $\varrho = \varrho_{12}$, illetve háromfaktoros modell esetén $a = [a_1, a_2, a_3]$, $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$, $\varrho = [\varrho_{12}, \varrho_{13}, \varrho_{23}]$.

Az eredményekre tekintve láthatjuk, hogy az alacsony hozamkörnyezetű modellekben 3-5%-os javulást hozott az újabb tag bevezetése a célfüggvényben (EUR, AUD2), míg az AUD modellben rontott az illeszkedésen. Az új tag miatti többletszámítás elhanyagolható a modellekben, így használata – az eredményeink alapján – indokolt alacsony hozamok esetén.

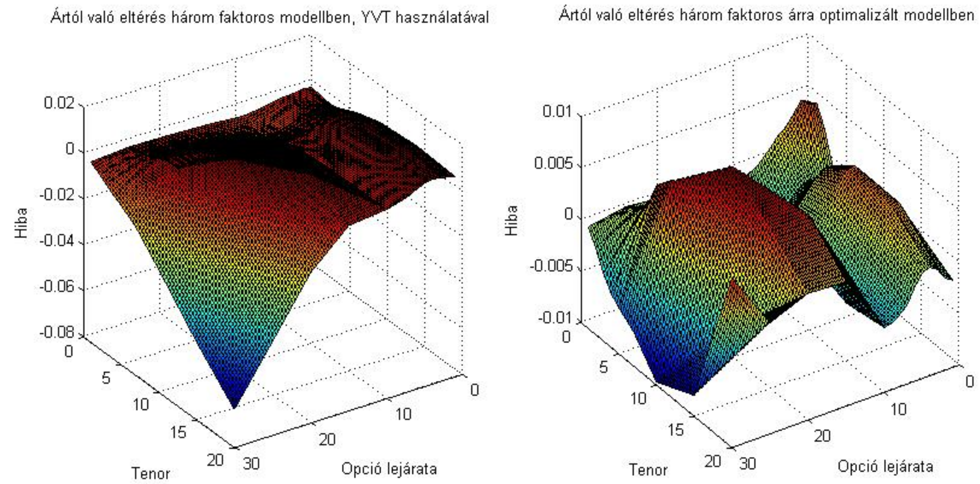
4.6. Optimalizálás a swaption árára

A k-faktoros Gauss modellek segítségével a swaption-ök árát kaphatjuk meg, ebből tudjuk kiszámolni a Black-Scholes képlet segítségével a volatilitásokat. Természetesen merül fel a kérdés, hogy szükség van-e a volatilitások visszaszámítására, nem lehetne-e közvetlenül úgy beállítani a paramétereket, hogy az árak legyenek egymáshoz közel. Mivel ebben az esetben a volatilitásokat ki sem kell számítani így a futásidő az eddigi modellek töredékére eshet vissza. A megközelítés hátránya hogy semmi sem garantálja, hogy a modell által megadott árakhoz valóban tartozik volatilitásérték. Ebben az esetben a következő optimalizálási problémát tudjuk felírni:

$$\min_{a,\sigma,\varrho}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(PiaciÁr_{ij} - ModellÁr_{ij}\right)\right)^2,$$

ahol hasonlóan az eddigiekhez kétfaktoros modell esetén $a = [a_1, a_2]$, $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2]$ és $\varrho = \varrho_{12}$, illetve háromfaktoros modell esetén $a = [a_1, a_2, a_3]$, $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$, $\varrho = [\varrho_{12}, \varrho_{13}, \varrho_{23}]$.

A 2. táblázatban foglalt értékek alapján ez a megközelítés bizonyul a legjobbnak: az EUR modellben, ahol az eddigi $\overline{MAE_{Ár}}$ értékeink 11-13% körül mozogtak most a kétfaktoros modellben 8.85%, illetve a háromfaktoros modellben 5.43%. Az ausztrál dollár esetében a piaci árakat jól adják vissza a modellek, az eltérések 2% körüliek. Az árakhoz képesti jobb illeszkedés ára, hogy az árra optimalizált modellekben valóban nem létezik minden volatilitásérték, rendszerint a rövid lejáratú és tenorú swaption-ökre. Hogy a modellek mégis valamilyen szinten összehasonlíthatóak legyenek a $\overline{MAE_{Vol}}$ számításánál a nem létező volatilitások helyére az adott pontban legjobban eltérő modell volatilitásértékével számoltam. Azonban ezek a mérőszámok így csak tájékoztató jellegűek (EUR és AUD2 két- illetve háromfaktoros modelleknél)



5. ábra: A modellek által kiadott árak hibái EUR esetében

Forrás: saját ábra

Háromfaktoros modellek	a_1	a_2	a_3	σ_1	σ_2	σ_3	ϱ_{12}	ϱ_{13}	ϱ_{23}
AUD	0.217	0.7689	0.2416	0.4386	0.0461	0.4823	0.6304	-0.998	-0.6865
EUR	0.1464	0.0845	0.0408	0.044	0.0667	0.0212	-0.7042	-0.4891	-0.6295
AUD2	0.0553	35.3801	35.4891	0.0096	3.6962	3.7211	-0.4456	-0.4047	-0.9955
AUD Hozam volatilitással	0.1231	0.7571	0.5945	0.0278	0.2709	0.283	0.7147	-0.7804	-0.9971
EUR Hozam volatilitással	0.032	0.9331	0.9672	0.0101	0.9403	0.946	-0.9976	1	-1
AUD2 Hozam volatilitással	0.4615	0.3566	0.6655	0.5642	0.3293	0.2408	-0.9959	-0.9999	0.9888
AUD Árra optimalizálással	0.6099	0.1416	0.7351	0.5043	0.0338	0.5159	-0.8493	-0.999	0.8246
EUR Árra optimalizálással	0.2442	-0.0653	0.2156	0.3259	0.0011	0.2999	-0.3875	-1	0.3991
AUD2 Árra optimalizálással	0.1194	1.1773	1.0747	0.0164	1.0229	0.9734	0.5894	-0.6047	-1

3. táblázat: A háromfaktoros modellek paraméterei

5. Összefoglalás

A Solvency II és IFRS 4 phase 2 bevezetésével a biztosítói kötelezettségek piaci értékelése nagyobb hangsúlyt kap. A komplex termékek értékeléséhez hozamszcenáriókra van szükség, melyek előállításához megfelelően kalibrált sztochasztikus modellek szükségesek. A dolgozatban bemutatásra került a k-faktoros Gauss modell, melyet elterjedten használnak szcenárió generálási célokra. Azonban az utóbbi évtizedben a hozamok jelentősen csökkentek, ennek hatására a modellek piaci adatokhoz való illeszkedése romlott.

A dolgozatban valós piaci adatokra alkalmaztam a modellt. Összehasonlításnak az alacsony hozamú eurót és a magasabb hozamú ausztrál dollárt választottam. Így egy valós gyakorlati példán tudtam megfigyelni az illeszkedések közötti különbséget. Kétfaktoros modellt alkalmazva az euróra láthatóan rosszabb eredményt kaptunk. Ugyanakkor nem lehetünk biztosak benne, hogy a háttérben valóban az alacsony hozamok állnak, így egy újabb példán is alkalmaztam a modellt, amelyben a piacon megfigyelhető ausztrál dollár árakat használtam, de alacsony hozamok mellett. A kalibráció eredménye ebben az esetben is rosszabb lett, így már igazoltnak látszik, hogy az alacsony hozamok gyengítik az illeszkedést. Ennek oka az lehet, hogy ilyen hozamok mellett a swaption-ökhöz tartozó volatilitás felület csúcsossá válik, melyet az alkalmazott modellek nem tudnak teljesen megfogni.

Mint az várható, a háromfaktoros modellek alkalmazása minden esetben javított az eredményeken. Ugyanakkor az újabb faktor bevonása minden modellen hasonló mértékben javított, nem tudott jobb illeszkedést mutatni alacsony hozamkörnyezetben. Mivel a háromfaktoros modellek esetében az optimalizálás erőforrásigénye sokkal nagyobb, így alkalmazása nem biztos, hogy megéri.

Tekintetbe véve a hozam volatilitásokat újabb kalibrációt végeztem. Ezek a modellek alacsony hozamkörnyezetben az illeszkedés javulását idézték elő, míg magasabb hozamok esetében rontottak az eredményeken. Mivel számításuk nem igényel sok többlet erőforrást, így alkalmazásuk indokolt lehet az alacsony hozamú pénznemek esetében.

Az optimalizálás során a futási idő nagy része a modell által kiadott árból a volatilitás visszaszámítására megy el. Azonban ha nincs szükségünk a swaption-ök volatilitására akkor optimalizálhatunk közvetlenül az árra is. Ekkor a futásidő a töredékére csökken. Az eredmények biztatóak, az árak természetes módon közelebb kerültek a piacon megfigyeltekhez, emellett a volatilitások különbsége sem nő lényegesen. Az eljárás hátránya azonban, hogy alacsony hozamok esetén a kalibrálás eredményeképpen kapott árból sok esetben nem lehet visszaszámolni a volatilitást.

Összegezve tehát a modellek illeszkedése alacsony hozamok esetén valóban gyengébb, azonban a célfüggvényben újabb tag bevezetésével az eredmények kicsit javíthatóak. Ha a swaption-ök árára hajtjuk végre az optimalizálást jobb eredményeket és ennek folytán megbízhatóbb szcenáriókat kaphatunk, melyek segítségével a biztosítási kötelezettségek biztosabban értékelhetőek.

Irodalomjegyzék

Brigo D., Mercurio F. (2006): Interest Rate Models - Theory and Practice, Springer Finance, 2006.

Geman H., El Karoui N., Rochet, J.C.: Changes of Numeraire, Changes of Probability Measures and Pricing of Options, *Journal of Applied Probability* 32 (443-458).

Harrison J.M., Pliska S.R.: Martingals and Stochastic Integrals in the Theory of Continous Trading, *Stochastic Processes and their Applications* 11 (215-260).

Jamshidian F., Zhu Y.: Scenario Simulation: Theory and Methodology, *Finance and Stochastics* 1 (43-67).

Schrager D.F., Pelsser A.A.J.:Pricing Swaptions and Coupon Bond Options in Affince Term Structure Models, *Mathematical Finance*, Vol. 16, No. 4 (October 2006), (673–694).

Függelék

Lejárat\ Tenor	1	2	3	4	5	7	10
1	0.0024	0.0062	0.0096	0.0118	0.0137	0.0177	0.0241
2	0.004	0.0095	0.0137	0.0168	0.0196	0.0257	0.0335
3	0.0061	0.012	0.0171	0.0211	0.0244	0.0316	0.0404
5	0.0073	0.0144	0.0204	0.0253	0.0294	0.0376	0.0477
7	0.0083	0.0159	0.0224	0.0278	0.0323	0.0414	0.0516
10	0.0092	0.0171	0.0239	0.0294	0.0339	0.0421	0.0517

4. táblázat: Piacon megfigyelt AUD árak

Forrás: Bloomberg adatok alapján saját számítás

Lejárat\ Tenor	1	2	3	4	5	7	10	15	20
1	0.00186	0.00324	0.00522	0.0072	0.00839	0.01081	0.01563	0.02495	0.03455
2	0.00145	0.00359	0.00634	0.00912	0.01155	0.01603	0.02437	0.03804	0.05133
3	0.00258	0.00583	0.00946	0.01302	0.0162	0.02215	0.03268	0.04873	0.06431
4	0.00384	0.00812	0.01268	0.0171	0.02098	0.02812	0.04025	0.05886	0.07556
5	0.00493	0.01046	0.01594	0.02121	0.0257	0.03393	0.04728	0.0678	0.0855
6	0.0064	0.01296	0.01931	0.02516	0.0302	0.03923	0.05385	0.07587	0.09462
7	0.00778	0.01533	0.02224	0.02867	0.03416	0.04389	0.05957	0.08274	0.10266
8	0.00894	0.01716	0.0247	0.03146	0.03724	0.04765	0.06417	0.08835	0.10875
9	0.00966	0.01853	0.02638	0.03348	0.03952	0.05047	0.06781	0.09296	0.11378
10	0.0104	0.01957	0.02777	0.03497	0.04116	0.05265	0.07054	0.09663	0.11773
15	0.01009	0.01915	0.0272	0.03442	0.04063	0.05228	0.07001	0.09463	0.12459
20	0.00944	0.01786	0.02556	0.03238	0.03847	0.0499	0.06635	0.10024	0.13485
25	0.00883	0.01676	0.02398	0.03045	0.03605	0.04968	0.07513	0.11629	0.15038
30	0.00961	0.01964	0.02979	0.03942	0.04849	0.06611	0.0935	0.13328	0.16454

5. táblázat: Piacon megfigyelt EUR árak

Forrás: Bloomberg adatok alapján saját számítás