



Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar



Budapesti Corvinus Egyetem  
Közgazdaságtudományi Kar

---

# HITELDERIVATÍVÁK ÁRAZÁSA SZTOCHASZTIKUS VOLATILITÁS MODELLEKKEL

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc  
Kvantitatív pénzügyek szakirány

Szakdolgozat

Kránicz Enikő Gréta

Témavezető:

Dr. Molnár-Sáska Gábor

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2015

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek munkámat, és hozzájárultak ahhoz, hogy ez a szakdolgozat megszülethessen. Különösképpen témavezetőmnek, Dr. Molnár-Sáska Gábornak köszönöm, amiért hasznos tanácsaival, észrevételeivel segítette a szakdolgozatom elkészülését.

# Tartalomjegyzék

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1. Motiváció . . . . .  | 6         |
| 1.2. Hitelkockázat, csődkockázat . . . . .                              | 7         |
| 1.3. Hitelderivatívák . . . . .   | 8         |
| 1.3.1. Credit Default Swaps . . . . .                                   | 10        |
| 1.3.2. Credit Default Swaptions . . . . .                               | 14        |
| <b>2. Modellek hitelderivatívák árazására</b>                           | <b>17</b> |
| 2.1. Strukturális modellek . . . . .                                    | 17        |
| 2.1.1. A strukturális modell általános leírása . . . . .                | 18        |
| 2.2. Intenzitás modellek . . . . .                                      | 21        |
| 2.2.1. A sztochasztikus intenzitás modell általános leírása . . . . .   | 21        |
| 2.2.2. Árazás a sztochasztikus intenzitás modellben . . . . .           | 24        |
| 2.2.3. A determinisztikus intenzitás modell általános leírása . . . . . | 29        |
| 2.2.4. Árazás a determinisztikus intenzitás modellben . . . . .         | 30        |
| <b>3. HJM kamatlábmodell sztochasztikus volatilitással</b>              | <b>33</b> |
| 3.1. A sztochasztikus volatilitású HJM modell felépítése . . . . .      | 35        |
| 3.1.1. Korrelációs struktúra bevezetése . . . . .                       | 39        |
| 3.1.2. HJM feltétel . . . . .   | 41        |
| 3.2. Markov-tulajdonságú HJM kamatlábmodellek . . . . .                 | 44        |
| <b>4. Implementáció, árazás szimulációval</b>                           | <b>49</b> |
| 4.1. Árazás a sztochasztikus HJM modellel . . . . .                     | 50        |
| 4.1.1. A modell felépítése . . . . .                                    | 50        |
| 4.1.2. CDS opció árazása . . . . .                                      | 57        |
| 4.2. Árazás a Black-modellel . . . . .                                  | 59        |
| 4.2.1. A modell felépítése . . . . .                                    | 59        |

|   |           |
|---|-----------|
| 4.2.2. CDS opció árazása . . . . .                            | 59        |
| 4.3. Összehasonlítás, összefoglalás . . . . .                 | 61        |
| <b>A. Függelék - Együttható függvények és állapotváltozók</b> | <b>63</b> |
| <b>B. Függelék - Programkód</b>                               | <b>67</b> |

# 1. fejezet

## Bevezetés

A szakdolgozatban a legjelentősebb és leglikvidebb, ún. single-name hitelderivatíva, a credit default swappok árazására koncentrálnak, amelyek talán túlzás nélkül a hitelderivatívák alap építőkövének tekinthetők, és igen jól használhatóak a csőd kockázat becslésére. Az általuk nyújtott, egy-egy országra vagy vállalatra vonatkozó csődinformációk és várakozások roppant fontosak, ha bonyolultabb, ún. multi-name hitelderivatívákat szeretnénk árazni, és emellett fontos szerepet játszanak a hitelkockázat, partnerkockázat kezelésében is.

Mégis a szakdolgozat fő célja a credit default swaption-ök, azaz a forward credit default swappokra szóló opciók árazása, amelyek kevésbé likvidek, mint az alaptermékül szolgáló credit default swap, és pont ezért kiemelt jelentőségű az árazásuk, hiszen a piac gyakran nem ad fair árat.

Alapvetően két fő csoportja van a hitelkockázatot és hitelderivatívákat megragadó modelleknek, ezek közül az ún. intenzitás modellekre koncentrálnak ebben a szakdolgozatban, és ezek általános áttekintése után egy speciális, szintén az intenzitás modellek körébe tartozó sztochasztikus volatilitást is használó Heath-Jarrow-Morton modellt fogunk részletesebben megvizsgálni.

A sztochasztikus volatilitású HJM modellekben a volatilitás folyamatot további, a forward kamatlábat mozgató Wiener-folyamatokon felüli Wiener-folyamatok mozgatják, ez a kiemelendő különbség a sztenderd HJM modellekhez képest. Ez a feltevés azokkal a piaci megfigyelésekkel konzisztens, hogy egyrészt a kamatláb volatilitás sztochasztikus, és változása korrelál a kamatláb változással, másrészt hogy ez a sztochasztikus volatilitás tartalmaz olyan faktorokat, amelyeket nem lehet fedezni csupán az alapterméket használva (ezt nevezik átíveletlen volatilitásnak), harmadrészt olyan, a piacon megfigyelt jellegzetességeket is visszaad, mint például a volatilitás púposágát. Így ez a megközelítés egy sokkal általánosabb keretrendszerben vizsgálja a kamatláb folyamatokat és hitelderivatívákat.

Mindezt úgy teszi, hogy a kockázatos hozamgörbe modellezésére külön fogalmazza meg a kockázatmentes forward kamatláb, és az ezen felüli, kockázattal kompenzáló forward spread di-

namikáját, illetve ezek driftjét és volatilitását vezető sztochasztikus volatilitás-folyamatot.

Megmutatjuk, hogy bizonyos volatilitás-struktúra esetében a kockázatos és kockázatmentes elemi kötvény árak kifejezhetőek (nagy számú) együttesen Markov-tulajdonságú állapotváltózkodó exponenciálisan affin kombinációjaként, könnyű kezelhetőséget, de emellett továbbra is nagyfokú rugalmasságot biztosítva.

Végül ennek a sztochasztikus volatilitású HJM modellnek egy, a piaci adatokhoz kalibrált változatát használva megvizsgáljuk a credit default swaption-ök árazását, és összehasonlítjuk a kapott árakat egy egyszerűbb, az alaptermék lognormális eloszlását feltételező modell által adott árakkal.

## 1.1. Motiváció

A hitelderivatívák megjelenése kétségkívül forradalmasította a hitelkockázat kezelését és kereskedését, és alapvetően megváltoztatta a bankok és pénzügyi intézetek hitelkockázatról és hitelkockázat kezelésről alkotott képét. A hitelderivatívák fő jellegzetessége, hogy segítségével könnyen és hatékonyan átruházható a hitelkockázat, és egy olyan piacot nyitottak ezeknek a kockázatoknak, amelyen bárki részt vehet.

Kezdetben főként a bankok használták a hitelderivatívák által nyújtott lehetőségeket, mivel igen hasznos eszköznek találták a tipikus banki mérlegben megjelenő nagymértékű, hitelek nyújtásából és kötvények tartásából származó hitelkockázat fedezésére, és az ezekre tartandó kötelező tartalékok hatékonyabb kezelésére, így csökkentve a bankszektorban jelenlévő hitelkockázat koncentrációját.

A hitelderivatívák hirtelen felfutásának és népszerűségének további fő okai között szerepel, hogy a pénzügyi szereplők hamar felfedezték, hogy új termékeket alkothatnak, amelyeket a kívánt hozam-kockázat profilnak megfelelően alakíthatnak, ezzel alapvetően valami újat nyújtva mind a befektetőknek, mind a hedgereknek. Ezáltal növelik a likviditást, olyan módon, hogy a kevésbé likvid termékeket átcsoomagolják, átstrukturálják olyan termékekké, amelyek jobban megfelelnek a befektetők elképzeléseinek.

További tulajdonságai között szerepel, hogy a hitelderivatívák segítségével könnyebben vehető fel short pozíció, akár meglévő hitelkitettségek fedezésére, akár hogy kifejezzük negatív várakozásainkat a hitelpiacon, illetve segítségével könnyebben diverzifikálható a hitelkockázat, mivel a piaca likvidebb, mint a vállalati kötvényeké, és így a hitelderivatívák megjelenésével átláthatóbbá vált a hitelkockázat árazása.

Akár csak a hitelderivatívák piaca, a hitelkockázat modellezése is hirtelen nagy figyelmet kapott, és gyors fejlődésen ment keresztül, de természetesen folyamatosan fejlődik most is, ezért csak igen ritka esetekben tudunk viszonylag egyértelműen állást foglalni az egyes modellezési

kérdésekben, folyamatos kihívást nyújtva így mind az akadémiai, mind az üzleti szektornak.

Mindezért ebben a szakdolgozatban is egy viszonylag új, és érdekes megközelítést fogunk megvizsgálni a hitelkockázat modellezésére, hitelderivatívák árazására.

## 1.2. Hitelkockázat, csőd kockázat

Mielőtt nekiláthatnánk a hitelderivatívák definiálásának, a hasonlóan kérdéses csőd kockázat és hitelkockázat fogalmak megfelelő definícióját is fontos végiggondolni. A csőd kockázat valójában a kötelezett (adós) fizetési kötelezettségéhez kapcsolódik, hiszen minket az érdekel, fizetni fog-e. Ebben az értelemben a csőd kockázat definíciója csak a fizetési kötelezettségre vonatkozik, nem magára a kötelezetre, elképzelhető lenne tehát, hogy egy adós csak bizonyos kötelezettségeinek tesz eleget, míg másoknak nem. Ez a viselkedés azonban általában törvényileg tiltott, az adós köteles eleget tenni minden fizetési kötelezettségének, ameddig arra képes. Ha nem tud, egy független közvetítő veszi át eszközeit, és megpróbálja megtalálni a módját, hogy kifizesse az összes hitelezőt. Így az összes hitelezőt egyenlően kezelik, nem választhat, hogy melyik követeléseknek tesz eleget és melyiknek nem. A kötelezett csődje esetén ezért általában az összes hitelező veszteséget szenved el. Ezeket a csőd esetén fellépő veszteségeket igen nehéz előre megbecsülni, ugyanis számos előre nem látható tényező hathat rá. Fontos kérdés ennek a modellezése is.

Ezek alapján azonban már a kötelezett csőd valószínűségéről beszélhetünk, és nem az egyes kötelezettségekről.

Természetesen a csőd valószínűség sok más fontos jellemzője is nehezíti a kvantitatív modellezést, például hogy a csődesemények ritkák és váratlanul következnek be, illetve hogy jelentős veszteséget okoznak, amelyek nagysága a csőd előtt nem ismert.

A hitelkockázat jelentőségét az adja, hogy nincs olyan kötelezettség, amellyel kapcsolatban nem kéne számolnunk azzal, hogy a partner nem fizet vagy valamilyen más módon veszteségünk származik a fizetési képességének változásából.

A hitelkockázat legfontosabb elemei a következők lehetnek:

- Bekövetkezési kockázat (arrival risk), ami annak a kockázatát fejezi ki, hogy bekövetkezik-e a csőd egy adott időhorizonton (tipikusan egy év). A csőd valószínűséggel szokás mérni, amely a csőd időhorizonton belüli bekövetkeztenek, mint indikátor változónak az eloszlását írja le.
- Időzítési kockázat (timing risk), ami annak a kockázatát fejezi ki, hogy mikor következik be a csőd, aminek ismerete magába foglalja a bekövetkezési kockázat ismeretét minden időhorizonton. A csőd idejét, mint valószínűségi változót az eloszlásfüggvényével jellemezzük. Ha nem következik be csőd, akkor a csőd időpontját végtelennek tekintjük.

- **Megtérülési kockázat (recovery risk)**, ami a csőd esetén fellépő veszteség nagyságának kockázatát fejezi ki, vagyis egészen pontosan annak ellentétét, azaz azt, hogy mennyit nem veszünk el. A bizonytalanságot itt tehát csőd esetén a tényleges kifizetés nagysága adja, és általában a névérték százalékában fejezzük ki. A recovery rate feltételes valószínűségi eloszlásával fejezzük ki.
- **Piaci kockázat (market risk)**, ami annak a kockázatát fejezi ki, hogy a kockázatos eszköz piaci értéke változik, akkor is, ha nem következett be csőd. A timing és recovery risk változása is hat rá, olyan módon, hogy megváltoztatja a piaci várakozásokat és így az eszköz értékelését. Ezen kívül egyéb piaci változók viselkedése, mozgása is befolyásolhatja a követelés értékét, ilyen például a kockázatmentes hozam vagy a devizaárfolyamok változása.
- **Korrelációs kockázat (default correlation risk)**, ami annak a kockázatát fejezi ki, hogy bizonyos adósok egyszerre jelenthetnek csődöt. Ebben az esetben már nem külön-külön kell figyelembe vennünk a kötelezettségeket, hanem együttes csődvalószínűségi eloszlást és a csőd idejét kifejező együttes eloszlást kell vizsgálnunk.

Ezek a felsorolt kockázatok mind alapvető jelentőségűek lesznek a hitelkockázat, illetve hitelderivatívák tárgyalásakor, és többségükre a későbbiekben ki fogunk térni a szakdolgozatban. Különböző feltevéseket fogunk tenni ezek alakulására, természetesen törekedve a minél általánosabb megközelítésre, de sok esetben hasznos lesz megkötéseket és egyszerűsítéseket tenni a konkrét gyakorlati alkalmazásokkor.

Elméleti szempontból minél többféle kockázatot veszünk figyelembe, annál jobb, annál pontosabb és realizistikusabb a modellünk. Világos azonban, hogy minél komplexebb a modell, annál több implementációs problémával kell megküzdenünk, és annál lassabb a futásideje is. Ezzel szemben azonban minden egyszerűsítés egyben olyan implicit feltevéseket jelent a modellezett kockázatokról, amelyek következményei nem feltétlenül egyértelműek. Fontos tehát úgy megválasztanunk a modellünkben szereplő tényezőket, hogy csak olyanokat hagyjunk ki, amelyek hiánya nem eredményez túl nagy eltérést a valóságtól, de mindeközben maradjon a lehető legegyszerűbb. Hogy mikor milyen kockázatokat érdemes figyelembe venni, az természetesen sok mindentől függ: a termék konstrukciójától, hogy mennyire kereskedett, illetve hogy mennyi adatunk van róla, ezért általában a modellezett termék ismeretében határozzuk meg azokat, ahogy ezt a későbbiekben is látni fogjuk.

### 1.3. Hitelderivatívák

A hitelderivatíva kifejezést a származtatott termékek rendkívül széles körére használhatjuk, amelyeket elsősorban a hitelkockázat fedezésére, átruházására, kezelésére használunk. A következő



definíció pontosabban is meghatározza ezt a fogalmat, és érthetővé teszi, hogy miért volt szükség a hitelkockázat és annak elemeinek áttekintésére.

**1.3.1. Definíció.** *Hitelderivatívának nevezzük azokat a származtatott termékeket, amelyek kifizetése hitelesemények bekövetkeztéhez kötött. A hitelesemény egy adott referencia egységhez kapcsolódik, és csődje vagy egyéb előre meghatározott hitelesemény bekövetkeztekor a partnerek egyike köteles a szerződésben meghatározottak alapján fizetni a másikat.*

A következő pár pontban felsoroljuk a hitelderivatívák tárgyalásakor megjelenő főbb fogalmakat, szereplőket.

- **A** partner, a védelmet vásárló fél, aki csőd vagy egyéb hitelesemény bekövetkeztekor kifizetésre jogosult, más szóval aki long a hitelderivatívában. A védelemért cserébe díjat (prémiumot) fizet.
- **B** partner, a védelmet eladó fél, aki csőd vagy egyéb hitelesemény bekövetkeztekor fizetni köteles. Short a hitelderivatívában.
- **C** partner, a szerződés alapjául szolgáló referencia egység, aki(k)nek csődjére vagy egyéb hiteleseményére szól a szerződés.
- Referencia eszköz(ök), az(ok) az eszköz(ök), amely(ek)re hatással van a referencia egység csődje vagy hiteleseménye. Szükségesek a recovery rate, illetve maguk a hitelesemények meghatározásához. Általában a szerződésben tételesen felsorolják a referencia eszközök körébe tartozó hiteleket és kötvényeket.
- Hitelesemény, azok a szerződésben pontosan meghatározott események, amelyek általában a referencia egységgel és a referencia eszközökkel szorosan összefüggnek. Lehet például: bankcsőd, fizetési képtelenség, fizetés elhalasztása vagy átstrukturálása, leminősítés, credit spread változása stb.
- Kifizetés csőd esetén (default payment), az a kifizetés, amelyet a **B** partner köteles teljesíteni a szerződésben rögzített hitelesemények valamelyikének bekövetkezése esetén. A kifizetés történhet többféleképpen, készpénzben vagy fizikai leszállítással, és dátuma illetve nagysága is változhat - ezek mind befolyásolják a védelem árát.

A továbbiakban áttekintjük a legjelentősebb és legnépszerűbb hitelderivatívákat, főbb tulajdonságaikat, és árazásuk alapelveit. A következő fejezetekben ezeket az általánosan érvényes árazási elveket fogjuk felhasználni.

### 1.3.1. Credit Default Swaps

Elsőként a legjelentősebb és leglikvidebb ún. single-name<sup>1</sup> hitelderivatíva, a credit default swap, azaz hitelkockázat csereügylet (továbbiakban CDS) felépítését és árazását ismertetjük. Kiemelten fontos szerepe van a hitelderivatívák körében, mert sok másik hitelderivatíva alapját adja, illetve a piaci árakból következtetni tudunk az adott kockázatos referencia egység csődvalószínűségére, amelyet sok egyéb termék árazásakor is felhasználhatunk.

Egy CDS szerződés keretében két partner, **A** és **B** megegyeznek abban, hogy **C** referencia egység  $T$  lejáratú idő előtt bekövetkező csődje – jelöljük a csőd időpontját  $\tau$ -val – vagy előre meghatározott hiteleseménye esetén **B** fizet **A**-nak egy előre meghatározott  $LGD$  összeget (általában az ún. loss given default értékét, azaz nemteljesítéskori veszteségrátát); ez a kifizetés csőd esetén. Egyelőre tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy ez az összeg előre meghatározott, később azt az általánosabb esetet is fogjuk vizsgálni, ahol az  $\mathcal{R}(t)$  recovery rate determinisztikusan vagy sztochasztikusan változó nagysága fogja meghatározni a fizetendő összeget – egészen pontosan a névérték és a recovery rate névértékre vetített nagyságának különbsége.

A védelemért cserébe **A** előre meghatározott időközönként  $\pi$  díjat fizet, ez a CDS felár (CDS spread). Legyenek a díjfizetés időpontjai  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ ,  $\delta_i = T_i - T_{i-1}$ ,  $T_0 = 0$ ,  $T_n \leq T$  (tipikusan  $T_n = T$ ). Addig fizet díjat, amíg **C** referencia egység csődbe nem megy ( $\tau \leq T$ ), vagy ha nem megy csődbe, akkor  $T_n$ -ig. Vegyük észre, hogy az utolsó díjfizetés időpontja után bekövetkező csődöt is megengedjük ( $T_n \leq \tau \leq T$ ), hogy minél általánosabban írassuk fel a terméket.

Vizsgáljuk először a CDS értékét a **B** partner szemszögéből, azaz milyen díjfizetéseket kap a védelem eladója a védelemért cserébe, ezt premium legnek nevezik.

$$V_{prem}(t, \mathcal{T}, T, \pi) = 1_{\{t < \tau\}} \left( d(t, \tau) (\tau - T_{\alpha(\tau)-1}) \pi 1_{\{\tau < T_n\}} + \sum_{i=\alpha(t)}^n \left( d(t, T_i) \delta_i \pi 1_{\{\tau \geq T_i\}} \right) \right), \quad (1.1)$$

ahol  $T_{\alpha(t)}$  a  $t$  időpontot követő első díjfizetést jelöli, tehát  $T_1, T_2, \dots, T_n$  időpontok valamelyikét, és  $d(t, T) = B(t)/B(T) = e^{-\int_t^T r(s) ds}$  sztochasztikus diszkontfaktor,  $r(s)$  a rövid logkamatláb. (Az árazáshoz szükségünk lesz tehát a kamatláb dinamikájának alakulására vonatkozó feltevésekre, ezeket a harmadik fejezetben fogjuk részletesen tárgyalni, illetve ezen kívül a csődvalószínűség meghatározásához is szükségünk lesz egy modellre, ezt a második fejezetben ismertetjük. Egyelőre teljesen általánosan, az előbbiekre semmilyen feltevést nem téve vizsgáljuk a CDS-ek árazását.)

A felírás azt fejezi ki, hogy az évesített  $\pi$  díjat a csőd időpontjáig minden díjfizetéskor megkapja a **B** partner, illetve a csőd bekövetkeztekor az utolsó díjnak az utolsó díjfizetés óta eltelt idővel arányos részét is.

---

<sup>1</sup>egyetlen referencia egységhez kapcsolódó

Nézzük meg a CDS másik lábát, vizsgáljuk tehát a szerződést **A** partner szemszögéből – milyen kifizetés illeti őt meg **C** partner csődje esetén, ezt protection legnek nevezzük.

$$V_{prot}(t, \mathcal{T}, T, LGD) = 1_{\{t < \tau\}} \left( 1_{\{\tau \leq T\}} d(t, \tau) LGD \right) \quad (1.2)$$

A felírás azt fejezi ki, hogy **C** partner csődje esetén **A** partner fix  $LGD$  összeget kap a csőd időpontjában. Ez az úgynevezett sztenderd, folyamatos<sup>2</sup> CDS.

Megjegyezzük, hogy egyszerűsítésként, a számolások megkönnyítése érdekében meghatározható lenne a fizetési struktúra úgy is, hogy ezt a fix összeget ne a csőd időpontjában, hanem az azt követő első díjfizetési időpontban (illetve a CDS lejártakor, ha az utolsó díjfizetésen már túlvagyunk) kapja meg a **A** partner, illetve **A** partner az utolsó esedékes díjfizetésnek a következő díjfizetési időpontban tesz eleget **B** partner felé (amennyiben kell még díjat fizetni). Amikor tehát azt tesszük fel, hogy csődhöz kapcsolódó kifizetésekkel csak a következő díjfizetés időpontjában (vagy a lejártakor) számolnak el, akkor az ún. halasztott<sup>3</sup> CDS-ről beszélünk.

A CDS  $t$ -beli diszkontált értékét a két láb értékének különbsége adja, tehát felírhatjuk az alábbi módon, a két partner kifizetéseit együttesen vizsgálva, (1.1) és (1.2) egyenlőségek különbségét véve:

$$\begin{aligned} V_{CDS}(t, \mathcal{T}, T, \pi, LGD) &= V_{prem}(t, \mathcal{T}, T, \pi) - V_{prot}(t, \mathcal{T}, T, LGD) = \\ &= 1_{\{t < \tau\}} \left( d(t, \tau)(\tau - T_{\alpha(\tau)-1})\pi 1_{\{\tau < T_n\}} + \sum_{i=\alpha(t)}^n \left( d(t, T_i) \delta_i \pi 1_{\{\tau \geq T_i\}} \right) - 1_{\{\tau \leq T\}} d(t, \tau) LGD \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

**1.3.2. Jelölés.** Legyen a fenti folyamatos CDS ára  $t$  időpillanatban  $CDS(t, \mathcal{T}, T, \pi, LGD)$

Mint árazáskor általában, a CDS árát a diszkontált kifizetés kockázatsemleges mérték szerinti feltételes várható értéke adja.

$$CDS(t, \mathcal{T}, T, \pi, LGD) = \mathbb{E}_Q \left( V_{prem}(t, \mathcal{T}, T, \pi) - V_{prot}(t, \mathcal{T}, T, LGD) \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

ahol az összes rendelkezésre álló információt  $\mathcal{F}_t$  szigma-algebra reprezentálja, és a kockázatmentes kamatláb által generált filtráció, illetve a  $\tau$  csődidőpont által generált filtráció úniója, azaz  $\mathcal{F}_t = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{L}_t$ , ahol  $\mathcal{H}_t = \sigma(\{\tau < u\} : u \leq t)$ , és  $\mathcal{L}_t = \sigma(r(u) : u \leq t)$ . Megjegyezzük, hogy valójában  $\mathcal{L}_t$  minden csőd nélküli információt tartalmaz, ami egyelőre a kockázatmentes kamatlábat jelenti, később ez még bővülni fog. Ennek pontosabb definiálására akkor lesz szükségünk, amikor már egyéb folyamatok is megjelennek az árazáskor, ezt a második fejezetben bővebben tárgyaljuk

---

<sup>2</sup>running

<sup>3</sup>postponed

majd.  $\mathbb{E}_Q$  jelzi, hogy kockázatsemleges mérték szerinti várható értéket veszünk.

A korábbiakat felhasználva

$$\begin{aligned} CDS(t, \mathcal{T}, T, \pi, LGD) &= \\ &= \mathbb{E}_Q \left( d(t, \tau)(\tau - T_{\alpha(\tau)-1})\pi \mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}} + \sum_{i=\alpha(t)}^n \left( d(t, T_i) \delta_i \pi \mathbf{1}_{\{\tau \geq T_i\}} \right) - \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} d(t, \tau) LGD \middle| \mathcal{F}_t \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Megjegyezzük, hogy azért nem írjuk ki a továbbiakban az  $\mathbf{1}_{\{t < \tau\}}$  indikátorváltozót, amely szerepelt a  $V_{prem}(t, \mathcal{T}, T, \pi)$  és  $V_{prot}(t, \mathcal{T}, T, LGD)$  meghatározásakor, mert ezt az információt  $\mathcal{F}_t$  tartalmazza, tehát figyelembe vesszük, amikor feltételes várható értéket veszünk  $\mathcal{F}_t$  szerint.

Az úgynevezett fair CDS felár<sup>4</sup> (vagy CDS díj<sup>5</sup>) az a  $\pi^*(t, T)$  védelemért fizetendő díj, amely mellett

$$CDS(t, \mathcal{T}, T, \pi^*(t, T), LGD) = \mathbb{E}_Q \left( V_{prem}(t, \mathcal{T}, T, \pi^*(t, T)) - V_{prot}(t, \mathcal{T}, T, LGD) \middle| \mathcal{F}_t \right) = 0.$$

A számolások megkönnyítése érdekében érdemes a szűkebb, csak a "kockázatmentes" információkat tartalmazó  $\mathcal{L}_t$  szubfiltráció szerinti feltételes várható értékkel számolni. Ezt a cserét a következőképpen tehetjük meg (lásd például [4], [5], illetve a 2. fejezetben is kitérünk rá):

$$\begin{aligned} CDS(t, \mathcal{T}, T, \pi^*(t, T), LGD) &= \mathbb{E}_Q \left( V_{prem}(t, \mathcal{T}, T, \pi^*(t, T)) - V_{prot}(t, \mathcal{T}, T, LGD) \middle| \mathcal{F}_t \right) = \\ &= \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t | \mathcal{L}_t)} \mathbb{E}_Q \left( V_{prem}(t, \mathcal{T}, T, \pi^*(t, T)) - V_{prot}(t, \mathcal{T}, T, LGD) \middle| \mathcal{L}_t \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ez a későbbiekben igen hasznos lesz a konkrét számolásoknál.

Fontos kiemelnünk, hogy az eddig ismertetettek a lehető legáltalánosabb esetben adnak képletet a CDS-ek árára. Természetesen lehet még általánosítani (például a fix, előre meghatározott  $LG D$  összeget egy determinisztikusan, vagy sztochasztikusan változó mennyiségre, azaz  $(1 - \mathcal{R}(t))$ -t írni a helyére), de inkább abban az értelemben tekinthetjük általánosnak ezeket a képleteket, hogy nem tettünk fel semmit a kamatláb, vagy a csődvalószínűség változásáról, dinamikájáról. Ezekkel a következő fejezetekben fogunk foglalkozni, és ott minden esetben kiindulhatunk majd ezekből a képletekből, és hozzáadhatjuk az aktuális feltételeinkből következő plusz információkat.

## Piaci kitekintés

A piacon a fair CDS díjak meghatározása a következőképpen történik: ha a  $t$  időpillanatig nem történt csőd, akkor olyan  $\pi^*(t, T)$  felárat határoznak meg, amelyre

$$CDS(t, \mathcal{T}, T, \pi^*(t, T), LGD) = 0.$$

---

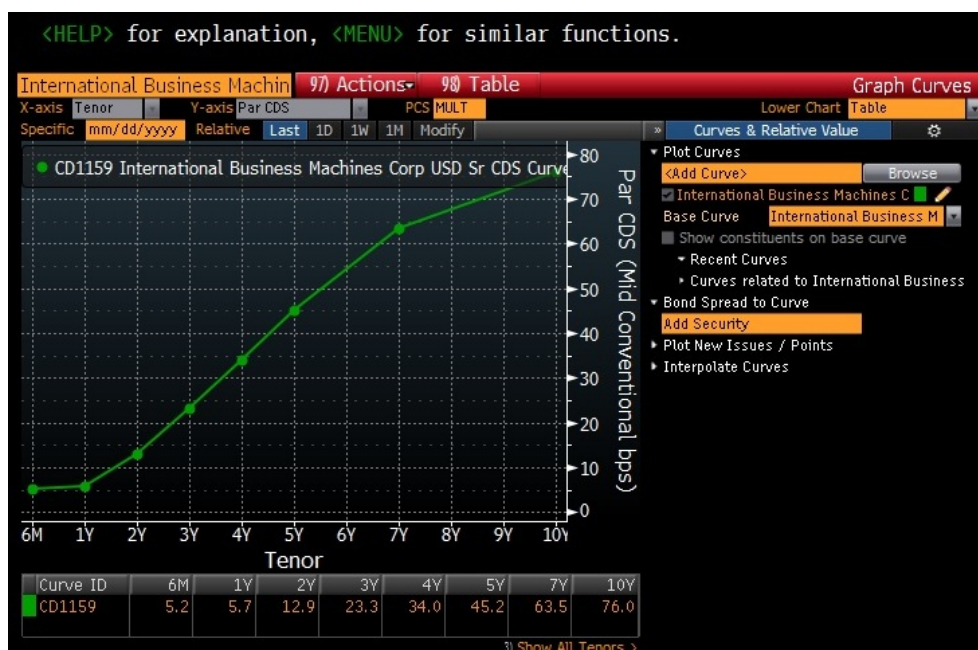
<sup>4</sup>spread

<sup>5</sup>premium

A ténylegesen megjelenő bid és ask árakat pedig a  $\pi^*(t, T)$  fair felár alatt, illetve felett fogják meghatározni.

Az alábbi 1.1-es ábrán látható az International Business Machines CDS spread görbéje, amely a lejáratú idő függvényében ábrázolja a mid CDS felárakat, amelyeket ebben az esetben a piaci bid és ask árak átlagaként számolnak. Általában hat hónapos a legrövidebb, és tizenöt éves a leghosszabb futamidejű CDS, de a legkereskedettebbek, leglikvidebbek az öt éves futamidejűek.

A piaci CDS felárakból meghatározható a CDS alapjául szolgáló referencia egység csődvalószínűsége az adott időintervallumon, a leggyakrabban alkalmazott módszer az ún. bootstrapping, amelyről a második fejezetben bővebben is lesz szó, és amelynek segítségével a negyedik fejezetben kiszámoljuk az IBM csődvalószínűségét.



1.1. ábra. IBM CDS felárak - Bloomberg képernyő

Mostanra a CDS piac nagyrészt szabványosították, az International Swaps and Derivatives Association (ISDA) sztenderd szerződés tervezetét használva fix kuponfizetést és sztenderd díj-fizetési időpontokat használva. A fix, évesített kuponok (100 vagy 500 bázispont) miatt fellépő különbözetet upfront díj fizetésével egyenlítik ki a szerződés létrejöttének pillanatában.

### 1.3.2. Credit Default Swaptions

A CDS szerződésre szóló opciót nevezzük Credit Default Swaption-nek, a továbbiakban pedig CDS opcióként fogunk hivatkozni rá.

Egy vanília CDS opció  $T_E$  lejáráttal valójában egy forward CDS-re szóló európai opció. Az alaptermék, a forward CDS egy olyan CDS, amely szerződés szerint a jövőbeli  $T_E$  pillanatban indul, és  $T$ -ben jár le, és minderről (azaz a jövőben fizetendő  $\pi_f$  díjról)  $s$  pillanatban állapotok meg ( $0 \leq s \leq T_E < T$ ), tehát **C** partner csődje ellen véd a  $[T_E, T]$  intervallumban, de ha a **C** partner még a CDS kezdetének időpontja előtt csődbe megy ( $\tau < T_E$ ), akkor a szerződés érvényét veszti<sup>6</sup>. A forward CDS értékét a szokásos módon, kockázatsemleges mérték szerinti feltételes várható értéként kapjuk

$$CDS_f(t, \pi_f) = \mathbb{E}_Q \left( V_{prot}^f(t) - \pi_f \bar{V}_{prem}^f(t) \mid \mathcal{F}_t \right), \quad t \in [s, T_E], \quad (1.6)$$

ahol az előzőekhez hasonlóan  $V_{prot}^f(t)$  a CDS részeként kifizetett védelem  $t$  időpontra diszkontált értéke, és  $\pi_f \bar{V}_{prem}^f(t) = V_{prem}^f(t)$  a CDS díjfizetéseinek  $t$  időpontra diszkontált értéke, tehát ahol  $V_{prem}^f(t)$ -ből kiemelve a fizetett  $\pi_f$  díjat  $\bar{V}_{prem}^f(t)$ -t kapjuk. A többi, CDS árat befolyásoló tényezőről a következőket tesszük fel, és a továbbiakban nem jelöljük külön:  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\} = \{T_E + \delta, T_E + 2\delta, \dots, T_E + N\delta\}$ ,  $\delta = (T - T_E)/N$ , lejárat ideje  $T$ , csőd esetén  $LGD$  összeget fizet **A** partnernek.

A  $\pi_f^*(t, T_E)$  fair forward CDS felár az a díj, amely mellett

$$CDS_f(t, \pi_f^*(t, T_E)) = \mathbb{E}_Q \left( V_{prot}^f(t) - \pi_f^*(t, T_E) \bar{V}_{prem}^f(t) \mid \mathcal{F}_t \right) = 0, \quad t \in [s, T_E].$$

Vizsgáljuk most meg a forward CDS-re szóló opciót: tekintsünk egy  $K$  kötési díjú CDS opciót, amely az opció lejártakor, azaz  $T_E$ -ben, ha addig **C** partner nem ment csődbe ( $\tau > T_E$ ) egy olyan  $T_E$  pillanatban kezdődő és  $T$ -ben lejáró CDS szerződésbe belépés lehetőségét biztosítja, amelyben **A** partner  $K$  díjat fizet **B** partnernek az előre meghatározott díjfizetési időpontokban, és cserébe **C** partner csődje esetén jogosult a szintén előre meghatározott  $LGD$  kifizetésre. Ha nem kötöttek volna opciót erre a CDS-re, akkor ugyanezen feltételek mellett **A** partnernek a  $K$  díj helyett  $\pi_f^*(T_E, T_E)$  díjat kéne fizetnie, hogy  $T_E$  időpillanatban beléphessen egy CDS szerződésbe.

Azt az opciót, ahol a tulajdonosa azért fizet opciós díjat, hogy az opció lejártakor (ha lehívja) a CDS szerződés díjat fizető **A** partnere lesz, payer CDS opciónak nevezzük. Ezzel szemben, azt az opciót, amely az opciós díj ellenében arra a lehetőségre jogosít fel, hogy a lejártakor egy CDS szerződés díjat kapó, és csőd esetén fizető **B** partnere legyen, receiver CDS opciónak nevezzük.

Megkülönböztetjük ezen kívül a knockout és nem-knockout CDS opciókat. A továbbiakban a knockout CDS opciókkal fogunk foglalkozni, amelyek **C** referenciaegység  $T_E$  lejárat ideje előtti

<sup>6</sup>ez az ún. knockout tulajdonság, a továbbiakban bővebben is lesz szó róla

csődje esetén további kifizetések nélkül megszűnnek. A nem-knockout payer CDS opció tulajdonosa  $\mathbf{C}$  referenciaegység  $T_E$  lejáratú idő előtti csődje esetén ezzel szemben leszállíthatja a csődös alapterméket a névértékért cserébe. A nem-knockout CDS opció értéke meghatározható egy knockout swaption és egy ún. front end védelem értékének összegeként, ezért vizsgáljuk a továbbiakban a knockout CDS opciókat.

Nézzük a payer CDS opció kifizetésfüggvényét annak  $T_E$  lejáratú időpontjában

$$G^P(T_E) = 1_{\{\tau > T_E\}} \left( CDS_f(T_E, K) - CDS_f(T_E, \pi_f^*(T_E, T_E)) \right)^+, \quad (1.7)$$

ahol  $CDS_f(T_E, \pi_f^*(T_E, T_E)) = 0$  definíció szerint. Továbbá a  $\pi_f^*(T_E, T_E)$  egy olyan forward CDS díját jelöli  $T_E$ -ben, amelyik  $T_E$ -ben kezdődik szerződés szerint, tehát valójában egy egyszerű CDS áráról van szó, ezért a továbbiakban egyszerűen  $\pi^*(T_E)$ -el jelöljük.

Mivel a payer opció csak akkor lesz lehívva, ha  $\pi^*(T_E) > K$ , ezért

$$\begin{aligned} G^P(T_E) &= 1_{\{\tau > T_E\}} \left( CDS_f(T_E, K) \right) = 1_{\{\tau > T_E\}} \left( \mathbb{E}_Q(V_{prot}^f(T_E) - K \bar{V}_{prem}^f(T_E) | \mathcal{F}_t) \right)^+ = \\ &= 1_{\{\tau > T_E\}} \left( \mathbb{E}_Q(V_{prot}^f(T_E) | \mathcal{F}_t) - K \mathbb{E}_Q(\bar{V}_{prem}^f(T_E) | \mathcal{F}_t) \right)^+ = \\ &= 1_{\{\tau > T_E\}} 1_{\{\pi^*(T_E) > K\}} \mathbb{E}_Q(V_{prot}^f(T_E) | \mathcal{F}_t) - K 1_{\{\tau > T_E\}} 1_{\{\pi^*(T_E) > K\}} \mathbb{E}_Q(\bar{V}_{prem}^f(T_E) | \mathcal{F}_t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Vagy másképp megközelítve, egyszerűen behelyettesítve (1.7) egyenlőségbe (1.6) kifejezés alapján

$$G^P(T_E) = 1_{\{\tau > T_E\}} \mathbb{E}_Q(\bar{V}_{prem}^f(T_E) | \mathcal{L}_{T_E}) (\pi^*(T_E) - K)^+. \quad (1.9)$$

Vegyük észre, hogy a feltételes várható értéket már csak a kockázatmentes információkat tartalmazó  $\mathcal{L}_t$  szubfiltráció szerint vesszük (a korábbiakkal megegyezően  $\mathcal{F}_t = \mathcal{L}_t \vee \mathcal{H}_t$ ). Hasonlóan kapjuk a receiver CDS opció kifizetésfüggvényét (amelyet csak akkor hívnak le, ha  $\pi^*(T_E) < K$ )

$$G^R(T_E) = 1_{\{\tau > T_E\}} \mathbb{E}_Q(\bar{V}_{prem}^f(T_E) | \mathcal{L}_{T_E}) (K - \pi^*(T_E))^+. \quad (1.10)$$

**1.3.3. Jelölés.** Jelöljük  $V_{swpt}^P(t)$ -vel a payer CDS opció értékét, illetve  $V_{swpt}^R(t)$ -vel a receiver CDS opció értékét ( $t \in [s, T_E]$ ).

A CDS opció értékét meghatározhatjuk, mint a diszkontált kifizetésfüggvény kockázatsemleges mérték szerinti feltételes várható értéke, és felhasználva a kifizetésfüggvény (1.9)-as és (1.10)-as alakját a következőt kapjuk

$$V_{swpt}^P(t) = \mathbb{E}_Q \left( d(t, T_E) G^P(T_E) | \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}_Q \left( d(t, T_E) 1_{\{\tau > T_E\}} \mathbb{E}_Q(\bar{V}_{prem}^f(T_E) | \mathcal{L}_{T_E}) (\pi^*(T_E) - K)^+ | \mathcal{F}_t \right), \quad (1.11)$$

$$V_{swpt}^R(t) = \mathbb{E}_Q \left( d(t, T_E) G^R(T_E) | \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}_Q \left( d(t, T_E) 1_{\{\tau > T_E\}} \mathbb{E}_Q(\bar{V}_{prem}^f(T_E) | \mathcal{L}_{T_E}) (K - \pi^*(T_E))^+ | \mathcal{F}_t \right), \quad (1.12)$$

ahol a diszkontfaktor  $d(t, T_E) = e^{-\int_t^{T_E} r(s)ds}$ .

Mostanáig (ahogy az egész szakdolgozatban) a  $\mathbb{Q}$  kockázatmentes mérték szerint áraztunk, amely mérték szerint a  $B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$  bankbetét, mint ármérce szerinti tetszőleges diszkontált kifizetésfüggvény martingál. Az  $A(t)$  ármérce megfelelő megválasztásával, és így a  $\overline{\mathbb{Q}}$  mértékre áttéréssel, ahol

$$\frac{d\overline{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_t = \frac{A(t)B(0)}{A(0)B(t)}, \quad (1.13)$$

egyszerűbben is kifejezhető a CDS opció értéke. Rutkowski és Armstrong [2009] javasolta az ármérce következő megválasztását

$$A(t) = \frac{1}{\mathbb{Q}(t < \tau | \mathcal{L}_t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( \bar{V}_{prem}^f(t) | \mathcal{L}_t \right). \quad (1.14)$$

Ekkor a CDS opció értéke kifejezhető, mint

$$V_{supt}^P(t) = A(t) \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{Q}}} \left( \frac{G^P(T_E)}{A(T_E)} | \mathcal{F}_t \right) = 1_{\{\tau > t\}} A(t) \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{Q}}} \left( (\pi_f^*(t, T_E) - K)^+ | \mathcal{L}_t \right), \quad (1.15)$$

$$V_{supt}^R(t) = A(t) \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{Q}}} \left( \frac{G^R(T_E)}{A(T_E)} | \mathcal{F}_t \right) = 1_{\{\tau > t\}} A(t) \mathbb{E}_{\overline{\mathbb{Q}}} \left( (K - \pi_f^*(t, T_E))^+ | \mathcal{L}_t \right). \quad (1.16)$$

Továbbá gyakori feltételezés, hogy a forward CDS felárak lognormális eloszlást követnek az új  $\overline{\mathbb{Q}}$  mérték szerint, azaz

$$d\pi_f(t, T_E) = \sigma_{T_E} \pi_f(t, T_E) d\overline{W}(t), \quad (1.17)$$

ahol  $\tilde{W}(t)$  Wiener-folyamat  $\overline{\mathbb{Q}}$  szerint. Lognormális eloszlást feltételezni kézenfekvő, mert egyrészt biztosítja, hogy a forward CDS felárak sosem lesznek negatívak, másrészt az eloszlás ferdesége összevág a piacon megfigyelt adatokkal. Ezenkívül így a CDS opció értéke megadható a Black-formulával (lásd Brigo és Mortini [2005])

$$V_{supt}^P(t) = 1_{\{\tau > t\}} A(t) \left( \pi_f^*(t, T_E) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right), \quad (1.18)$$

ahol

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{\pi_f^*(t, T_E)}{K}\right) + \frac{\sigma_{T_E}^2}{2}(T_E - t)}{\sigma_{T_E} \sqrt{T_E - t}} \quad \text{és} \quad d_2 = d_1 - \sigma_{T_E} \sqrt{T_E - t}.$$

Ekkor  $\sigma_{T_E}$  az egyetlen paraméter, amit a piaci adatokból kell kinyernünk, de illikvid termékeknél gyakran ez is nehézségekbe ütközhet. A másik probléma ezzel a modellel, hogy már többen is elutasították azt a feltevést, hogy a forward CDS felárak lognormális eloszlást követnének, például Jabbour, El-masri és Young [2008] megmutatta, hogy a lognormális forward CDS felárak túlságosan ferdek és csúcsosak.



## 2. fejezet

# Modellek hitelderivatívák árazására

Az utóbbi évtizedekben két típusú arbitrázsmentes árazási megközelítés jelent meg a szakirodalomban a hitelkockázatok modellezésére: az intuitívabb, könnyebben értelmezhető strukturális modellek, illetve a könnyebben kalibrálható redukált vagy intenzitás modellek családja.

Jarrow és Protter [16] szerint a két típusú modell nem is annyira különbözik egymástól, sőt valójában ugyanaz az alapjuk, csak különböző feltevésekkel élnek a rendelkezésre álló információkról. A modellező rendelkezésére álló információ minősége maga után vonja a csőd idejének előrejelezhetőségét, és gyakran e szerint különböztetik meg a két megközelítést.

Ebben a fejezetben ezek alapvető feltevéseit, működését fogjuk áttekinteni, majd a harmadik fejezetben részletesebben a sztochasztikus volatilitást is használó, HJM keretrendszerben leírt speciális intenzitás modellekkel fogunk foglalkozni.

### 2.1. Strukturális modellek

A strukturális modellek Merton [1974] modelljéből fejlődtek ki, később Black és Cox [1976] fejlesztették tovább. Azon alapszanak, hogy a vállalat vagy portfólió értéke sztochasztikus folyamatot követ, és ha ez az érték egy meghatározott determinisztikus vagy véletlen minimum szint alá csökken, akkor a vállalat csődbe megy. Jarrow és Protter [16] szerint a szétválasztás alapja a rendelkezésre álló információ: a strukturális modellben a modellező rendelkezésére álló információ tartalmazza a vállalat értékfolyamata által generált filtrációt.

Merton eredeti modellje felteszi, hogy csőd csak az időszak végén, az adósság lejártakor következhet be. Konstans kockázatmentes kamatlábat és volatilitást feltételezve zárt formulát kapunk az adósság értékére tetszőleges, időhorizonton belüli időpillanatra. A vállalat saját tőkéjét call opciónak tekintve a vállalat értékén a jól ismert Black-Scholes képletet vezette le kockázatos adósságok árazására.

Ezt fejlesztette tovább Black és Cox, bevezetve egy exponenciális szintelérési időt és így

megengedve a korábbi csődöt, illetve zárt formulájú megoldást adtak a kockázatos kötvények árazására.

Általánosíthatunk tehát a következőképpen: csőd nem csak az adósság lejártakor, az időszak végén következhet be, hanem az egész időszak alatt bármikor, ha átlép egy meghatározott  $L(t)$  küszöböt, ami maga is lehet sztochasztikus folyamat. Ez azt jelenti, hogy a modellező rendelkezésére álló információnak nem csak a vállalat értékfolyamata által generált, hanem az  $L(t)$  korlát által generált filtrációt is tartalmaznia kell. A csőd tehát szintelérési idő, és így általában előrejelezhető megállási idő (kivéve, ha vannak ugrások az  $L(t)$  folyamatban). (Előrejelezhető a megállási idő, ha létezik  $\tau_n$  növekvő megállási idő sorozat, amelyre  $\tau_n \leq \tau$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$ .) Ezért, bár a csőd egy bizonytalan esemény, a modellező mégis majdnem biztosan előre látja a vállalat értékének alakulását figyelve. Látható, hogy ez elég erős feltevés, és így egyben a modell kritikáját adja.

Sokan fejlesztették még tovább az alapmodellt, újabb feltevéseket feloldva, például teljeskörű információk helyett aszimmetrikus információ, a részvényesek egyenlősége helyett egyes szereplők prioritása, elemi kötvények helyett kamatot is fizető kötvények jelenléte stb.

A szakdolgozatnak szempontjából fontos továbbfejlesztés még Longstaff és Schwarz [1995] modellje, akik bevezették a hozamgörbe kockázatot is a modellbe, feltételezve, hogy a rövidtávú hozamok a Vasicek-modellt követik. Csőd akkor következik be, ha a vállalat értékfolyamata elér egy konstans küszöbértéket az adósság élettartama alatt. Cathcart és El-Jahel [1998] ezt a gondolatot folytatva azt tették fel, hogy a rövid kamatok folyamata CIR dinamikát, illetve hogy a csődöt jelentő küszöbérték geometrikus Brown-mozgást követ. Shirakawa [1999] a credit spreadek viselkedését vizsgálta a modellen belül és különválasztotta a kockázatmentes hozamot illetve a hozamfelárat (spreadet).

### 2.1.1. A strukturális modell általános leírása

Először általánosabb esetben vizsgáljuk meg a strukturális modelleket, majd megmutatjuk hogyan vezethető be a modellbe a csődök közti korreláció, végül kitekintésként adunk pár alternatívát a referencia egység értékfolyamatának dinamikájára. Röviden a strukturális modellek fő hátrányait is megemlítjük, melyek miatt kevésbé alkalmazhatóak a gyakorlatban, így ebben a szakdolgozatban is inkább a később tárgyalt intenzitás modellekre koncentrálnunk, míg a strukturális modellekre kevésbé.

Tekintsük a  $[0, T]$  időhorizontot és  $N$  referencia egységet<sup>1</sup>, amelyek értékváltozása diffúziós folyamatot követ ebben az időszakban, és amelyek egységnyi névértéknyi adóssága (kötvénye)  $T$ -ben jár le. Ezen az intervallumon legyen  $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  filtrált valószínűségi mező, és a vállalatok

---

<sup>1</sup>a fejezet további részében vállalatként hivatkozunk rá, mivel ez a legáltalánosabb megközelítés

értékének dinamikája

$$dV_i(t) = \mu_i(t, V_i(t)) V_i(t) dt + \sigma_i(t, V_i(t)) V_i(t) dW_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

ahol  $W_i(t)$  Wiener-folyamat a  $\mathbb{P}$  mérték szerint. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $W_i(0) = 0$ . Továbbá legyen  $L_i(t)$  az a sztochasztikus küszöbfolyamat, amelyet ha elér  $V_i(t)$ , akkor az  $i$ . vállalat csődbe megy, és ebben az esetben a hitelező  $L_i(t) < 1$  összeget kap, tekinthető tehát egyfajta recovery rate-nek. Ekkor a strukturális modellek jellemzőjeként  $\sigma(V_i(s), L_i(s)) : s \leq t \subseteq \mathcal{F}_t$ , az  $i$ . vállalat csődjének időpontja  $\tau_i = \inf \{t > 0 : V_i(t) \leq L_i(t)\}$ .

Tegyük fel, hogy a piacok arbitrázmentesek, és így létezik olyan ekvivalens  $\mathbb{Q}$  mérték, amely mellett a diszkontált kötvényárfolyamok martingálok lesznek. Tegyük továbbá fel, hogy a kockázatmentes kamatláb konstans  $r$ , és a vállalatok volatilitása is konstans  $\sigma_i$ . Ekkor a vállalat értékének kockázatsemleges mérték szerinti dinamikája

$$dV_i(t) = rV_i(t) dt + \sigma_i V_i(t) d\tilde{W}_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

ahol  $\tilde{W}_i(t)$   $\mathbb{Q}$  mérték szerinti Wiener-folyamat. Alkalmazzuk az  $It\hat{o}$ -lemmát  $\log V_i(t)$ -re:

$$d \log V_i(t) = 0 dt + \frac{1}{V_i(t)} dV_i(t) + \frac{-1}{2 V_i^2(t)} \sigma_i^2 V_i^2(t) dt,$$

$$d \log V_i(t) = r dt + \sigma_i d\tilde{W}_i(t) - \frac{1}{2} \sigma_i^2 dt.$$

Átrendezve

$$\tilde{W}_i(t) = \frac{\log V_i(t) - \log V_i(0) - (r - \sigma^2/2)t}{\sigma_i}$$

Ezek alapján definiálhatunk az  $L_i(t)$  küszöböknek megfelelő, de már a  $\tilde{W}_i$  Wiener-folyamatokhoz tartozó  $\tilde{L}_i(t)$  küszöböket

$$\tilde{L}_i = \frac{\log L_i(t) - \log V_i(0) - (r - \sigma^2/2)t}{\sigma_i},$$

amelyekre tehát igaz, hogyha  $\tilde{W}_i(t)$  folyamat  $\tilde{L}_i(t)$  küszöb alá csökken, akkor az  $i$ . vállalat csődbe jut, ugyanis

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(V_i(t) < L_i(t)) &= \mathbb{Q}\left(\frac{\log V_i(t) - \log V_i(0) - (r - \sigma^2/2)t}{\sigma_i} < \frac{\log L_i(t) - \log V_i(0) - (r - \sigma^2/2)t}{\sigma_i}\right) = \\ &= \mathbb{Q}(\tilde{W}_i(t) < \tilde{L}_i(t)) = \mathbb{Q}(Z < \frac{\tilde{L}_i(t)}{\sqrt{t}}) = \Phi\left(\frac{\ln L_i(t) - \ln V_i(0) - (r - \sigma^2/2)t}{\sigma_i \sqrt{t}}\right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

ahol  $Z$  sztenderd normális eloszlású valószínűségi változó, és  $\Phi(t)$  az eloszlásfüggvénye.

Fontos ismét megjegyezni, hogy ez tehát azt jelenti, hogy ebben az esetben (és a strukturális modelleknél általában) a csőd ideje egy előrejelezhető megállítási idő, egészen pontosan egy szintelési idő, ami így endogénnek, a modellen belül meghatározottnak tekinthető. Ahogy korábban is említettük, sokszor pont ez az előrejelezhetőség ad okot a modell kritizálására.

Nézzük a legegyszerűbb "hitelderivatíva", azaz az  $i$ . vállalat adósságának – egységnyi névértékű kötvényének – értékét, amelyet a következő alakban írhatuk fel

$$P_i^d(0, T) = \mathbb{E}_Q \left( 1_{(\tau_i \leq T)} L_i(\tau_i) e^{-\int_0^{\tau_i} r(s) ds} + 1_{(\tau_i > T)} e^{-\int_0^T r(s) ds} \right). \quad (2.4)$$

Idáig csak egy vállalat értékváltozásával foglalkoztunk, de szükségünk van a vállalatok közötti kapcsolatok leírására is. Legyen ezért a  $W_i$  Wiener-folyamat a következő dinamikájú:

$$dW_i(t) = c_i(t) dM(t) + \sqrt{1 - c_i^2(t)} dZ_i(t),$$

ahol  $M(t)$  a közös hatásokat modellező Wiener-folyamat,  $Z_i(t)$  pedig egy tőle független  $N$  dimenziós, az egyéni hatásokat reprezentáló Wiener-folyamat  $i$ . koordinátája, és  $-1 \leq c_i \leq 1$ . Ezek alapján az  $i$ . és  $j$ . vállalat közötti csőd-korreláció a  $t$  időpillanatban  $c_i(t)c_j(t)$ .

Miután felépítettük a modellt, Monte Carlo szimulációval kapjuk az együttes veszteség eloszlást, illetve annak időbeli alakulását is mutató együttes veszteség felületet, amelynek segítségével árazhatunk, például a korábban felírt (2.4) kockázatos elemi kötvényt.

Azonban a strukturális modellek egyik fő hátránya, hogy rövid lejáratokra tipikusan túl alacsony csődvalószínűségeket ad a modell (A Wiener-folyamat nem éri el olyan hamar a csődküszöböt), így a kockázatért kompenzáló hitelfélár is túl alacsony lesz. Ezt a problémát megoldhatja, ha nem korrelált Wiener-folyamatokkal vezetjük be a referencia egységek közötti korrelációt, hanem közös (lefelé) ugrásokat használunk, amelyek segítségével a korai csöddök is valószínűbbek lesznek. Azonban már egy referencia egységre is bonyolult az ugró-folyamatokkal felépített modellben árazni.

Ez a bemutatott modell természetesen az egyik legegyszerűbb megközelítés, Hull, Predescu és White [1995] például sztochasztikus korrelációt és sztochasztikus recovery rate-et használva fejlesztették tovább.

További lehetőségként, az előzőektől eltérően ((2.1) vagy (2.2) vagy ugró-folyamat) a vállalat értékének alakulására a következő feltevéseket is választhatjuk:

- $It\hat{o}$ -diffúzió sztochasztikus volatilitással:

$$\begin{aligned} dV_i(t) &= \mu_i(t, V_i(t)) V_i(t) dt + \sigma_i(t) V_i(t) dW_i(t) \\ d\sigma_i(t) &= a_i(t, \sigma_i(t)) dt + b_i(t, \sigma_i(t)) d\tilde{W}_i(t) \end{aligned}$$

- Exponenciális Lévy-folyamat:

$$V_i(t) = \exp(rt + X_i(t)),$$

ahol  $X_i(t)$  Lévy-folyamat, lehet tehát ugró-folyamat (pl Merton modell - az ugrások normálisak, Kou modell - az ugrások aszimmetrikus dupla exponenciálisak), vagy végtelen aktivitású folyamat (átskálázott Wiener-folyamatok pl Normal Inverz Gaussian vagy Variance Gamma).

## 2.2. Intenzitás modellek

A strukturális modellektől eltérően az intenzitás modellek – vagy redukált formájú – modellek azt feltételezik, hogy egy kívülről adott, exogén folyamat vezérli a csődvalószínűséget és egy másik, szintén kívülről adott folyamat modellezi a recovery rate-et. A csődvalószínűség folyamat minden időintervallumon pozitív, és a csődöt gyakran Poisson-folyamattal vagy Cox-folyamattal modellezzük, ekkor sztochasztikus intenzitás modellekről beszélhetünk.

A fejezet további részében először az általános sztochasztikus intenzitású esetet, majd speciális eseteként a gyakorlatban jobban használható determinisztikus intenzitás modelleket tekintjük át, illetve megvizsgáljuk az adott keretrendszerben a hitelderivatívák árazását.

A strukturális és intenzitás modellek közti egyik eltérés az, hogy ebben az esetben a modellező rendelkezésére álló információk nem olyan részletesek a vállalat eszközeinek, értékeinek változásáról, sőt valójában úgy alkották, hogy a rendelkezésre álló információ a piacon megfigyelhető információ legyen, ezzel egy sokkal realiztikusabb megközelítést képviselve. Így egyrészt a csőd időpontja már nem előrejelezhető. Másrészt, ami a fő, kiemelendő különbség, hogy a piacon megfigyelt árakból megbecsülhető, kalibrálható a kockázatsemleges csődvalószínűség, amelyet aztán fel tudunk használni árazáskor.

Először Pye [1974] illetve Litterman és Iben [1991] nevéhez köthető ez a fajta megközelítés, majd sokan továbbfejlesztették ezt az elképzelést. A teljesség igénye nélkül Jarrow és Turnbull [1995] konstans Poisson-folyamatot használt mind a csődvalószínűség, mind a recovery rate dinamikájához, és zárt formulájú megoldást adott a kockázatos kötvények és származtatott termékek árazására, míg Lando [1994, 1998] az általánosabb Cox folyamatot használta a csődvalószínűség modellezésére.

Ezen kívül több megközelítésben megjelent a kockázatmentes hozam és az ezen felüli, a kockázatért kompenzáló spread szétválasztása, majd többféle migrációs megoldás is: az adósságok besorolása – ami meghatározza a kockázatmentes kamatok feletti árakat – a vizsgált időhorizonton megváltozhat.

A továbbiakban nagyrészt [18], [17], [19], [21] és [4] alapján áttekintjük a sztochasztikus és determinisztikus intenzitás modelleket, illetve megvizsgáljuk az adott keretrendszerben az egyik legfontosabb hitelderivatíva, a credit default swappok árazását.

### 2.2.1. A sztochasztikus intenzitás modell általános leírása

Tekintsük a  $[0, T]$  időhorizontot, ezen az intervallumon legyen  $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$  filtrált valószínűségi mező, ahol  $\mathbb{Q}$  a kockázatsemleges mérték (vagy martingálmérték). Fontos kiemelni, hogy az intenzitás modellek keretében csak a kockázatsemleges valószínűséget használjuk.

Legyen  $N$  vállalatunk (vagy  $N$  elemű portfóliónk), és jelöljük  $\tau_i$ -vel az  $i$ . elem csődjének

időpontját, illetve  $F_i$ -vel a csőd kumulált eloszlásfüggvényét

$$F_i(t) = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t) \quad i = 1, \dots, N,$$

ahol  $\mathbb{Q}$  kockázatsemleges mérték szerinti valószínűség. Tegyük fel, hogy  $F_i(t)$  folytonos és monoton nő. Látni fogjuk a későbbiekben, hogy gyakran ez egy exponenciális eloszlásfüggvény lesz.

A gyakorlatban  $F_i(t)$ -t úgy határozhatjuk meg, hogy a piacon megfigyelhető árakból kiszámítjuk bizonyos  $t_j$  időpontokra az  $F_i(t_j)$  értékeket, és a köztes értékekre (például exponenciálisan) interpolálunk. A másik gyakori megközelítés a bootstrapping, amit a fejezet későbbi részében ismertetünk.

Ezen kívül szintén kívülről adott az időhorizonton az a kifizetésfüggvény, amelyet csőd esetén alkalmazunk: ennyit fizet egységnyi névértékű adósság az  $i$ . vállalat csődje esetén. Ez a  $\mathcal{R}_i(t)$  recovery rate gyakran maga is sztochasztikus folyamatot követ.

Az egyszerűbb intenzitás modellek esetében a csőd  $\tau_i$  időpontját  $N_{\lambda_i}(t)$  Poisson-folyamat vezérli, determinisztikus  $\lambda_i(t)$  intenzitással, felfoghatóak tehát a sztochasztikus intenzitás modellek speciális eseteként, amelyek Poisson-folyamat helyett az általánosabb, sztochasztikus intenzitású Cox-folyamatot használják: sztochasztikus intenzitás modellek esetében az  $i$ . vállalat  $\tau_i$  csőd-időpontja egy Cox-folyamat első ugrásának időpontjával írható le.

Definiáljuk ehhez először a Poisson folyamatot, majd áttérhetünk a Cox-folyamatra is.

**2.2.1. Definíció.** Az  $N(t)$   $\lambda(t)$  determinisztikus intenzitású Poisson folyamat, ha  $N(0) = 0$ , független és stacionárius növekményű, és annak a valószínűsége, hogy  $k$  csőd következik be a  $[t, T]$  intervallumon

$$\mathbb{Q}(N(T) - N(t) = k) = \frac{\left(\int_t^T \lambda(u) du\right)^k}{k!} e^{-\int_t^T \lambda(u) du}.$$

$\lambda(t)$ -ről feltesszük, hogy pozitív és szakaszonként folytonos folyamat.

**2.2.2. Megjegyzés.** A továbbiakban hasznos lesz az az észrevétel, hogy a definíció alapján egyszerű formában kifejezhető annak a valószínűsége, hogy  $t$ -ig nem következett be csőd

$$\mathbb{Q}(N(t) - N(0) = 0) = \mathbb{Q}(N(t) = 0) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}.$$

**2.2.3. Definíció.**  $M(t)$ -t Cox-folyamatnak nevezzük, ha Poisson-folyamat  $\lambda(t, \omega)$  intenzitással, ahol  $\lambda(t, \omega)$  sztochasztikus folyamat (és amelyről gyakran azt tesszük fel, hogy diffúziós folyamatot követ).

A Cox-folyamatot olyan értelemben tekinthetjük tehát a Poisson-folyamat általánosításának, hogy ha az intenzitásfüggvény egy adott realizációját  $\lambda(\cdot, \omega)$  tekintjük, akkor determinisztikus intenzitású Poisson-folyamatot kapunk  $\lambda(t, \omega)$  intenzitással, ahol most tehát az  $\omega$  rögzítve van.

Azt tesszük fel, hogy a sztochasztikus intenzitás modellek keretein belül a modellező által megfigyelhető információ a vállalatok csőd időpontja, azaz  $\tau_i$  megállási idő,  $r(t)$  kockázatmentes kamatláb,  $X_i(t)$  állapotváltozó és a recovery rate  $\mathcal{R}_i(t)$  által generált filtrációt kell tartalmazza, ezért

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{G}_t \vee \mathcal{D}_t \vee \mathcal{K}_t = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{L}_t,$$

ahol a csőd időpontját  $\tau_i$ -t  $M_i(t)$  Cox-folyamat első ugrásaként definiáljuk,

$$\mathcal{H}_t = \sigma(\tau_i : s \leq t, i = 1, \dots, n),$$

$$\mathcal{G}_t = \sigma(r(s) : s \leq t),$$

$$\mathcal{K}_t = \sigma(X_i(s) : s \leq t, i = 1, \dots, n),$$

$$\mathcal{D}_t = \sigma(\mathcal{R}_i(s) : s \leq t, i = 1, \dots, n),$$

és  $\mathcal{L}_t$  tartalmaz minden "kockázatmentes" információt, tehát  $\mathcal{L}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{D}_t \vee \mathcal{K}_t$ . A csőd időpontját mozgató Cox-folyamat intenzitásáról a továbbiakban azt tesszük fel, hogy a következőképpen véletlen folyamat:  $\lambda_i(t, \omega) = \lambda_i(X_i(t))$ , tehát az  $X_i(t)$   $d$ -dimenziós sztochasztikus állapotváltozó (amelyről általában azt tesszük fel, hogy diffúziós folyamatot követ) vezérli az intenzitás-folyamatot. Ekkor tehát a  $\lambda_i$  intenzitás egy nemnegatív, folytonos,  $d$ -változós függvény. Az a feltétel, hogy az intenzitás az állapotváltozó pillanatnyi értékének függvénye, és nem az állapotváltozó egész múltjának függvénye, a gyakorlatban kifejezetten kényelmes feltevés, de matematikai szempontból nem szükséges, egyelőre mi sem szorítkozunk erre az esetre.

A kockázatmentes hozamról gyakran azt tesszük fel, hogy szintén az  $X_i$  sztochasztikus állapotváltozók mozgatják, és így  $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{K}_t$ . Ekkor jól látható a csődintenzitás és a kockázatmentes hozam kapcsolata, hiszen ugyanattól a  $d$  dimenziós állapotváltozótól függnek, de természetesen ez a függés úgy is megadható, hogy  $\mathcal{G}_t$  és  $\mathcal{H}_t$  függetlenek legyenek, például ha a kockázatmentes hozam csak az  $X_i$  állapotváltozó első  $k$  koordinátájától függ, a csődintenzitás pedig a következő  $d - k$  koordinátájától.

**2.2.4. Definíció.** A  $\lambda(X(t))$  sztochasztikus intenzitáshoz tartozó hazard-folyamat

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(X(s)) ds.$$

**2.2.5. Megjegyzés.** Definiálhatjuk  $\tau_i$ -t egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó segítségével is. Legyen  $\xi(1)$  exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amely független az  $X_i(t)$  állapotváltozótól, és  $\lambda_i(X_i(t))$  továbbra is nemnegatív és folytonos függvény, ekkor

$$\tau_i = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \lambda_i(X_i(s)) ds \geq \xi \right\} = \inf \{ t \geq 0 : \Lambda(t) \geq \xi \}.$$

Látható, hogy ha  $\lambda_i(X_i(s))$  nagy, akkor a megfelelő hazard-folyamat is gyorsabban nő, és gyorsabban eléri a független exponenciális valószínűségi változó szintjét, és így annak a valószínűsége, hogy  $\tau_i$  kicsi, tehát hamar bekövetkezik a csőd, nagyobb lesz.

Annak a feltételes valószínűsége, hogy az  $i$ . vállalat csődbe jut egy adott kicsi időintervallumban, feltéve, hogy addig nem következett be csőd

$$\mathbb{Q}(t \leq \tau_i < t + \Delta t \mid t \leq \tau_i, \mathcal{K}_t) = \lambda_i(X_i(t))\Delta t.$$

De az előző (2.2.2) megjegyzés alapján feltétel nélküli valószínűségként is fel tudjuk írni a csőd bizonyos időpont előtti be nem következését valószínűségét

$$\mathbb{Q}(t < \tau_i \mid \mathcal{K}_t) = e^{-\int_0^t \lambda_i(X_i(s))ds} = e^{-\Lambda_i(t)}, \quad (2.5)$$

$$\mathbb{Q}(t < \tau_i \leq T \mid \mathcal{K}_t) = e^{-\int_0^t \lambda_i(X_i(s))ds} - e^{-\int_0^T \lambda_i(X_i(s))ds} = e^{-\Lambda_i(t)} - e^{-\Lambda_i(T)}, \quad (2.6)$$

mert  $\mathcal{K}_t$  szerinti feltételes valószínűséget véve ismerjük az  $X_i$  folyamat realizációját, így  $\lambda_i(X_i)$  realizációját. A determinisztikus esetben ezt a feltételt természetesen majd elhagyhatjuk.

Nem feltételes valószínűségként is kifejezhetjük a túlélési és csődvalószínűséget, ekkor várható értéket kell vennünk.

$$\mathbb{Q}(t < \tau_i) = \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_0^t \lambda_i(X_i(s))ds}\right) = \mathbb{E}_Q\left(e^{-\Lambda_i(t)}\right), \quad (2.7)$$

$$\mathbb{Q}(t < \tau_i \leq T) = \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_0^t \lambda_i(X_i(s))ds} - e^{-\int_0^T \lambda_i(X_i(s))ds}\right) = \mathbb{E}_Q\left(e^{-\Lambda_i(t)} - e^{-\Lambda_i(T)}\right). \quad (2.8)$$

### 2.2.2. Árazás a sztochasztikus intenzitás modellben

Ebben az általánosabb, sztochasztikus környezetben szeretnénk elsőként levezetni árazási formulákat, ehhez [18] és [21] alapján először megmutatunk három összefüggést, és ezeket mint alapelemeket használva rakjuk majd össze a hitelderivatívákat. Például egy CDS értékének felírásához kettő vagy három alapelem összegét fogjuk felhasználni, de ehhez először a kockázatos kötvény árát is felírjuk majd ebben a sztochasztikus intenzitású keretrendszerben.

Az ebben a részben levezetett, CDS árát meghatározó egyenlőséget később a determinisztikus modellben, mint speciális esetet fogjuk felhasználni, néha további megszorításokat is téve. Az általános eset áttekintésével egyrészt egy sokkal mélyebb és átfogóbb képet kapunk a témáról, másrészt a későbbiekben elég az itt levezetett formulákra hivatkozni.

Az előző részben részletesebben is felírtuk, hogy a megfigyelhető információk által generált  $\sigma$ -algebra hogyan bontható fel rész  $\sigma$ -algebrákra, de ebben a részben elég a  $\mathcal{F}_t = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{L}_t$  felbontás alkalmazása, ahol a korábbiakkal megegyezően  $\mathcal{H}_t$  a  $t$  időpontig megfigyelt csődinformációkat,  $\mathcal{L}_t$  pedig a  $t$  időpontig megfigyelt egyéb, "kockázatmentes" információkat tartalmazza, tehát  $\mathcal{L}_t = \sigma(r(X(s)), \lambda(X(s)), \mathcal{R}(s) : s \leq t)$ . A jelölésbeli egyszerűség kedvéért a továbbiakban nem



fogjuk külön jelölni  $r(t)$  és  $\lambda(t)$   $X(t)$  állapotváltozótól való függését, de természetesen minden folyamat marad sztochasztikus.

Nézzük tehát az alapelemeinket: legyen először  $X \in \mathcal{L}_T$  a  $T$  időpillanatban esedékes kifizetés, amit akkor kapunk meg, ha addig nem következett be a csőd. Legyen  $Z(t)$ <sup>2</sup>  $\mathcal{L}_t$ -adaptált folyamat, amelyre azért van szükségünk, hogy meg tudjuk határozni, hogy mennyi kifizetést kapunk, ha bekövetkezett a csőd. Definiáljuk  $Z(t)$ -t úgy, hogy  $Z(t) = 0$ , ha  $t > T$ , így a megfelelő alapelemben elhagyhatjuk majd a  $1_{\{\tau \leq T\}}$  indikátort. Végül legyen  $Y(t)$  a befizetések  $\mathcal{L}_t$ -adaptált folyamata, amelyet addig kell csak teljesíteni, amíg nem következik be a csőd. Ez az utóbbi végül kevésbé lesz hasznos számunkra, mert a CDS-ek esetében továbbra is azt feltételezzük, hogy a díjfizetések fix  $T_i$  időpontokban történnek, és nem folyamatosan, de a teljesebb kép érdekében hasznos ezt az összefüggést is felírni.

Ezekre a bizonyos alapelemekre vonatkozó állítások következnek, amelyekben a teljes  $\mathcal{F}_t$  filtrációra vett feltételes várható értéket lecserélhetjük a "kockázatmentes" információkat tartalmazó  $\mathcal{L}_t$ -re vett feltételes várható értékre. Ezt már használtuk korábban is az (1.5) egyenlőségnél, és most láthatjuk hogyan vág össze az intenzitás modellekben levezethető képlettel.

**2.2.6. Állítás.** Ha  $\mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^T r(s) ds} | X \right) < \infty$ , akkor

$$\mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^T r(s) ds} X 1_{\{\tau > T\}} | \mathcal{F}_t \right) = 1_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^T (r(s) + \lambda(s)) ds} X | \mathcal{L}_t \right).$$

**2.2.7. Állítás.** Ha  $\mathbb{E}_Q \int_t^T \left( e^{-\int_t^s r(u) du} | Y(s) | \right) ds < \infty$ , akkor

$$\mathbb{E}_Q \left( \int_t^T \left( e^{-\int_t^s r(u) du} Y(s) 1_{\{\tau > s\}} \right) ds | \mathcal{F}_t \right) = 1_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_Q \left( \int_t^T \left( e^{-\int_t^s (r(u) + \lambda(u)) du} Y(s) \right) ds | \mathcal{L}_t \right).$$

**2.2.8. Állítás.** Ha  $\mathbb{E}_Q \int_t^T \left( e^{-\int_t^s (r(u) + \lambda(u)) du} | Z(s) \lambda(s) | \right) ds < \infty$ , akkor

$$\mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^\tau r(s) ds} Z(\tau) | \mathcal{F}_t \right) = 1_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_Q \left( \int_t^T \left( e^{-\int_t^s (r(u) + \lambda(u)) du} Z(s) \lambda(s) \right) ds | \mathcal{L}_t \right).$$

Az előző állítások bizonyításához, és jelen esetben főleg a jobb megértés érdekében a következő állítást hasznos belátni.

**2.2.9. Állítás.**

$$\mathbb{E}_Q \left( 1_{\{\tau \geq T\}} | \mathcal{L}_T \vee \mathcal{H}_t \right) = 1_{\{\tau > t\}} e^{-\int_t^T \lambda(s) ds}$$

---

<sup>2</sup>ez a folyamat természetesen az  $\mathcal{R}(t)$  recovery rate-nek feleltethető majd meg

**Bizonyítás.**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q\left(1_{\{\tau \geq T\}} \mid \mathcal{L}_T \vee \mathcal{H}_t\right) &= \mathbb{E}_Q\left(1_{\{\tau \geq T\}} 1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{L}_T \vee \mathcal{H}_t\right) = \\
&= 1_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_Q\left(1_{\{\tau \geq T\}} \mid \mathcal{L}_T \vee \mathcal{H}_t\right) = 1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{Q}(\{\tau \geq T\} \cap \{\tau > t\} \mid \mathcal{L}_T)}{\mathbb{Q}(\{\tau > t\} \mid \mathcal{L}_T)} = \\
&= 1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{Q}(\{\tau \geq T\} \mid \mathcal{L}_T)}{\mathbb{Q}(\{\tau > t\} \mid \mathcal{L}_T)} = 1_{\{\tau > t\}} \frac{e^{-\int_0^T \lambda(s) ds}}{e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}} = 1_{\{\tau > t\}} e^{-\int_t^T \lambda(s) ds}
\end{aligned}$$

□

A (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8) állítások bizonyításáért lásd [18].

Szükségünk lesz a (zero-recovery-rate, azaz  $\mathcal{R}(t) = 0$ ) kockázatos kötvény értékére, azaz mennyi az ára egy olyan jövőbeli kifizetésnek, amelyről tudjuk, hogy ha addig csődöt jelent a kötelezettje, akkor nem kapunk semmit?

**2.2.10. Jelölés.** Legyen  $P_i^d(t, T)$  a  $T$  időpillanatban lejáró,  $i$ . vállalathoz tartozó, egységnyi névértékű, zero-recovery-rate kockázatos kötvény  $t$  pillanatbeli értéke, azaz

$$P_i^d(t, T) = \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r(s) ds} 1_{\{\tau_i > T\}} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

**2.2.11. Jelölés.** Legyen  $\bar{P}_i^d(t, T)$  a  $T$  időpillanatban lejáró,  $i$ . vállalathoz tartozó, egységnyi névértékű zero-recovery-rate kockázatos kötvény  $t$  pillanatbeli értéke, feltéve hogy tudjuk, hogy  $t$ -ig nem következett be csőd, azaz

$$P_i^d(t, T) = 1_{\{\tau_i > t\}} \bar{P}_i^d(t, T). \quad (2.9)$$

Ez az ún. pszeudo kötvény.

Használjuk fel a (2.2.6) állítást, ahol most  $X = 1$  a  $T$ -ben esedékes kifizetés, tehát

$$\begin{aligned}
P_i^d(t, T) &= \mathbb{E}_Q\left(1 e^{-\int_t^T r(s) ds} 1_{\{\tau_i > T\}} \mid \mathcal{F}_t\right) = 1_{\{\tau_i > t\}} \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^T (r(s) + \lambda_i(s)) ds} 1 \mid \mathcal{L}_t\right) = \\
&= 1_{\{\tau_i > t\}} \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r(s) ds} e^{-\int_t^T \lambda_i(s) ds} \mid \mathcal{L}_t\right) = 1_{\{\tau_i > t\}} \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r(s) ds} e^{-\int_0^T \lambda(s) ds} e^{\int_0^t \lambda_i(s) ds} \mid \mathcal{L}_t\right) = \\
&= 1_{\{\tau_i > t\}} e^{\int_0^t \lambda_i(s) ds} \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r(s) ds} e^{-\int_0^T \lambda(s) ds} \mid \mathcal{L}_t\right), \quad (2.10)
\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy  $e^{\int_0^t \lambda_i(s) ds}$  mérhető  $\mathcal{L}_t$ -re, ezért kiemelhetjük a feltételes várható értékből, és így tovább írva az egyenlőséget, és felhasználva a sztochasztikus intenzitás modell (2.5) tulajdonságát, kapjuk hogy

$$P_i^d(t, T) = \frac{1_{\{\tau_i > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau_i > t \mid \mathcal{L}_t)} \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r(s) ds} 1_{\{\tau_i > T\}} \mid \mathcal{L}_t\right). \quad (2.11)$$

Ezért  $\bar{P}_i^d(t, T)$  definíciója miatt

$$\bar{P}_i^d(t, T) = \frac{\mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^T r(s) ds} \mathbf{1}_{\{\tau_i > T\}} \mid \mathcal{L}_t \right)}{\mathbb{Q} \left( \tau_i > t \mid \mathcal{L}_t \right)}, \quad (2.12)$$

illetve szintén  $\bar{P}_i^d(t, T)$  definíciója és (2.10) első egyenlősége miatt

$$\bar{P}_i^d(t, T) = \mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^T (r(s) + \lambda_i(s)) ds} \mid \mathcal{L}_t \right) \quad (2.13)$$

Írjuk fel a nem zero-recovery-rate kockázatos kötvény árát is, azaz mennyi az értéke egy olyan követelésnek, ahol az  $i$ . referencia egység csődje esetén  $\mathcal{R}_i(\tau_i)$  összeget kapunk a csőd pillanatában?

**2.2.12. Jelölés.** Jelöljük  $\hat{P}_i^d(t, T)$ -vel a kockázatos, nem zero-recovery-rate kötvény értékét, azaz

$$\hat{P}_i^d(t, T) = \mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^T r(s) ds} \mathbf{1}_{\{\tau_i > T\}} + \mathcal{R}_i(\tau_i) e^{-\int_t^{\tau_i} r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right),$$

ahol feltesszük, hogy  $\mathcal{R}_i(t) = 0$ , ha  $t > T$ , így elhagyható a második tagból az  $\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}$  indikátorváltozó.

Felhasználva (2.2.8), (2.9) és (2.10) egyenlőségeket kapjuk, hogy

$$\hat{P}_i^d(t, T) = \mathbf{1}_{\{\tau_i > t\}} \left( \mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^T (r(s) + \lambda_i(s)) ds} \mid \mathcal{L}_t \right) + \mathbb{E}_Q \left( \int_t^T (e^{-\int_t^s (r(u) + \lambda_i(u)) du} \lambda_i(s) \mathcal{R}_i(s) ds) \mid \mathcal{L}_t \right) \right) \quad (2.14)$$

A következő lépésben levezetjük a folytonos (running) CDS árára vonatkozó képletet, felhasználva a sztochasztikus intenzitás modellben tett, a csődvalószínűségekre vonatkozó feltevéseinket. Mivel a CDS egyetlen  $\mathbf{C}$  partner csődjére vonatkozó speciális biztosítás, ezért az előzőekkel ellentétben ebben a részben nem lesz szükségünk több vállalatra vagy portfólió elemre, így a jelölés ennek megfelelően egyszerűsödik, és figyelembe veszi az első fejezet jelöléseit is.

Az első fejezet, egy CDS  $t$ -beli értékére vonatkozó (1.4) egyenlőségét használjuk, de annyiban változtatunk azon, hogy nem fix  $LGD$  összeget kap a védelem vevője csőd esetén, hanem  $(1 - \mathcal{R}(\tau))$ -t, és itt  $\mathcal{R}(\tau)$  sztochasztikus folyamat, amiről azt tesszük fel, hogy  $(1 - \mathcal{R}(t))$  0-t vesz fel, ha  $t > T$ , és így elhagyhatjuk a protection legből a  $\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}$  indikátorváltozót.

$$\begin{aligned} CDS(t, T, \pi, (1 - \mathcal{R}(\tau))) &= \mathbb{E}_Q \left( d(t, \tau) (\tau - T_{\alpha(\tau)-1}) \pi \mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=\alpha(t)}^n \left( d(t, T_i) \delta_i \pi \mathbf{1}_{\{\tau \geq T_i\}} \right) - \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} d(t, \tau) (1 - \mathcal{R}(\tau)) \mid \mathcal{F}_t \right) \quad (2.15) \end{aligned}$$

Nézzük tagonként, az első tagra a (2.2.8) állítást fogjuk alkalmazni  $Z(\tau) = (\tau - T_{\alpha(\tau)-1})\pi$  helyettesítéssel, amire valóban teljesül, hogy 0, ha  $\tau > T_n$ , mert akkor az  $\mathbf{A}$  partnernek már nem

kell több díjat fizetnie, ezért elhagyhatjuk a  $1_{\{\tau < T_n\}}$  indikátorváltozót, és így az első tag

$$\mathbb{E}_Q\left(d(t, \tau)(\tau - T_{\alpha(\tau)-1})\pi \mid \mathcal{F}_t\right) = 1_{\{\tau > t\}}\mathbb{E}_Q\left(\int_t^{T_n} \left((s - T_{\alpha(s)-1})\pi \lambda(s) e^{-\int_t^s (r(u)+\lambda(u))du}\right) ds \mid \mathcal{L}_t\right) \quad (2.16)$$

Nézzük a második tagot, erre a (2.2.6) állítást fogjuk alkalmazni a szummán belül minden  $i$ -re  $X_i = \delta_i \pi$  helyettesítéssel, így

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q\left(\sum_{i=\alpha(t)}^n \left(d(t, T_i) \delta_i \pi 1_{\{\tau \geq T_i\}}\right) \mid \mathcal{F}_t\right) &= \sum_{i=\alpha(t)}^n \mathbb{E}_Q\left(d(t, T_i) \delta_i \pi 1_{\{\tau \geq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \sum_{i=\alpha(t)}^n 1_{\{\tau > t\}}\mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^{T_i} (r(u)+\lambda(u))du} \delta_i \pi \mid \mathcal{L}_t\right) = \pi \sum_{i=\alpha(t)}^n \delta_i 1_{\{\tau > t\}}\mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^{T_i} (r(u)+\lambda(u))du} \mid \mathcal{L}_t\right) = \\ &= \pi \sum_{i=\alpha(t)}^n \delta_i 1_{\{\tau > t\}} \bar{P}^d(t, T) = \pi \sum_{i=\alpha(t)}^n \delta_i P^d(t, T), \end{aligned} \quad (2.17)$$

ahol az utolsó előtti átalakításnál (2.13) egyenlőséget használtuk ki.

Végül a harmadik tagnál ismét a (2.2.8) állítást használjuk  $Z(\tau) = (1 - \mathcal{R}(\tau))$  helyettesítéssel, és így

$$\mathbb{E}_Q\left(-d(t, \tau) (1 - \mathcal{R}(\tau)) \mid \mathcal{F}_t\right) = 1_{\{\tau > t\}}\mathbb{E}_Q\left(-\int_t^T (1 - \mathcal{R}(s))\lambda(s) e^{-\int_t^s (r(u)+\lambda(u))du} ds \mid \mathcal{L}_t\right). \quad (2.18)$$

A három tag összegét véve felírhatjuk a CDS  $t$  pillanatbeli értékét.

$$\begin{aligned} CDS(t, T, T, \pi, (1 - \mathcal{R}(\tau))) &= 1_{\{\tau > t\}}\left(\mathbb{E}_Q\left(\int_t^{T_n} \left((s - T_{\alpha(s)-1})\pi \lambda(s) e^{-\int_t^s (r(u)+\lambda(u))du}\right) ds \mid \mathcal{L}_t\right) + \right. \\ &+ \pi \sum_{i=\alpha(t)}^n \delta_i \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^{T_i} (r(u)+\lambda(u))du} \mid \mathcal{L}_t\right) - \mathbb{E}_Q\left(\int_t^T (1 - \mathcal{R}(s))\lambda(s) e^{-\int_t^s (r(u)+\lambda(u))du} ds \mid \mathcal{L}_t\right)\Big) = \\ &= 1_{\{\tau > t\}}\left(\pi \int_t^{T_n} \left((s - T_{\alpha(s)-1}) \mathbb{E}_Q\left(\lambda(s) e^{-\int_t^s (r(u)+\lambda(u))du} \mid \mathcal{L}_t\right)\right) ds + \right. \\ &+ \pi \sum_{i=\alpha(t)}^n \delta_i \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^{T_i} (r(u)+\lambda(u))du} \mid \mathcal{L}_t\right) - \int_t^T \mathbb{E}_Q\left((1 - \mathcal{R}(s))\lambda(s) e^{-\int_t^s (r(u)+\lambda(u))du} ds \mid \mathcal{L}_t\right)\Big). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Fontos hangsúlyoznunk, hogy ez az egyenlet a lehető legáltalánosabb, minden folyamat sztochasztikus benne, és nem teszünk fel függetlenséget, vagy teszünk egyéb megszorításokat. Valójában az egész szakdolgozatban az összes CDS értékére felírt képlet ebből az egyből származtatható, speciális esetként. Azért írtuk fel mégis ezt az általános esetet, miközben természetesen a gyakorlatban ennél speciálisabb modelleket használunk (szakaszonként konstans intenzitás, konstans

recovery rate), hogy lássuk honnan vezethetők le ezek a képletek, és mindig elég legyen erre az egyenlőségre hivatkoznunk.

A továbbiakban tehát megvizsgáljuk a determinisztikus intenzitású modelleket, és ezek legjobban alkalmazható, szakaszonként konstans intenzitást feltevő alesetét.

### 2.2.3. A determinisztikus intenzitás modell általános leírása

Ahogy korábban is említettük, a determinisztikus intenzitás modellben az  $i$ . vállalat csődjének időpontját egy  $\lambda_i(t)$  determinisztikus intenzitású Poisson-folyamat első ugrásaként definiáljuk,  $N_{\lambda_i}(t) = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$ , az összes csődre vonatkozó bedőlési számlálófolyamat pedig  $N(t) = \sum_{i=1}^n 1_{\{\tau_i \leq t\}}$ .

A Poisson-folyamatot vizsgálva elkülöníthetjük az időben állandó és a determinisztikusan változó intenzitású modelleket. A determinisztikus változatot definiáljuk, és utána külön vizsgáljuk a konstans esetet, mint az első speciális esetét, amely gyakorlati alkalmazásokban egyszerűbb ábrázáshoz vezet.

A sztochasztikus intenzitású eset speciális eseteként felírhatóak a következő feltételes és feltétel nélküli csődvalószínűségeik:

$$\mathbb{Q}(t \leq \tau_i < t + \Delta t \mid t \leq \tau_i) = \lambda_i(t) \Delta t. \quad (2.20)$$

$$\mathbb{Q}(t < \tau_i) = e^{-\int_0^t \lambda_i(s) ds} = e^{-\Lambda_i(t)}, \quad (2.21)$$

illetve ennek a komplementere

$$\mathbb{Q}(\tau_i \leq t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_i(s) ds} = 1 - e^{-\Lambda_i(t)}. \quad (2.22)$$

Ezekből következik

$$\mathbb{Q}(t < \tau_i \leq T) = e^{-\int_0^t \lambda_i(s) ds} - e^{-\int_0^T \lambda_i(s) ds} = e^{-\Lambda_i(t)} - e^{-\Lambda_i(T)}. \quad (2.23)$$

Ha tehát a  $\lambda$  intenzitás-folyamat konstans, akkor egy adott időszakban bekövetkező csőd valószínűsége a kockázatsemleges mérték szerint

$$\mathbb{Q}(t < \tau_i \leq T) = e^{-\int_0^t \lambda_i ds} - e^{-\int_0^T \lambda_i ds} = e^{-\lambda_i t} - e^{-\lambda_i T}. \quad (2.24)$$

Írjuk fel az  $i$ . vállalat egységnyi, zero-recovery-rate adósságának értékének alakulását, felhasználva az előző részben levezetett (2.13) egyenlőséget:

$$\begin{aligned} P_i^d(t, T) &= 1_{\{\tau_i > t\}} \bar{P}_i^d(t, T) = 1_{\{\tau_i > t\}} \mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^T r(s) + \lambda_i(s) ds} \mid \mathcal{L}_t \right) = \\ &= 1_{\{\tau_i > t\}} \left( e^{-\int_t^T \lambda_i(s) ds} \mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \mathcal{L}_t \right) \right) = 1_{\{\tau_i > t\}} \left( e^{-\int_t^T \lambda_i(s) ds} P(t, T) \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ha  $\lambda_i$  intenzitás-folyamat és  $\mathcal{R}_i$  recovery rate folyamat is konstans, az előző formula a következőképpen egyszerűsödik

$$P_i^d(t, T) = 1_{\{\tau_i > t\}} e^{-\lambda_i(T-t)} P(t, T).$$

### 2.2.4. Árazás a determinisztikus intenzitás modellben

Ebben a részben levezetünk egy, a folytonos CDS-ek árazására alkalmas képletet determinisztikus intenzitású Poisson-folyamatot használva a csőd modellezésére, és felhasználva az előző fejezetben már áttekintett jelöléseket és levezetett formulákat, majd egyszerűsítésképpen tekintjük ennek egy speciális, szakaszonként konstans intenzitású változatát is.

Használjuk fel, hogy  $\lambda(t)$  determinisztikus, ezért (2.19) egyenlőségben a  $\lambda(t)$ -s tagok kiemelhetők, mert mérhetőek a feltételre nézve. Ekkor

$$\begin{aligned}
CDS(t, \mathcal{T}, T, \pi, (1 - \mathcal{R}(\tau))) &= 1_{\{\tau > t\}} \left( \pi \int_t^{T_n} \left( (s - T_{\alpha(s)-1}) \lambda(s) e^{-\int_t^s \lambda(u) du} \mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^s r(u) du} \middle| \mathcal{L}_t \right) \right) ds + \right. \\
&+ \pi \sum_{i=\alpha(t)}^n \delta_i e^{-\int_t^{T_i} \lambda(u) du} \mathbb{E}_Q \left( e^{-\int_t^{T_i} r(u) du} \middle| \mathcal{L}_t \right) - \int_t^T \lambda(s) e^{-\int_t^s \lambda(u) du} \mathbb{E}_Q \left( (1 - \mathcal{R}(s)) e^{-\int_t^s r(u) du} \middle| \mathcal{L}_t \right) ds \Big) = \\
&= 1_{\{\tau > t\}} \left( \pi \int_t^{T_n} \left( (s - T_{\alpha(s)-1}) \lambda(s) e^{-\int_t^s \lambda(u) du} P(t, s) \right) ds + \right. \\
&+ \pi \sum_{i=\alpha(t)}^n \delta_i e^{-\int_t^{T_i} \lambda(u) du} P(t, T_i) - \int_t^T \lambda(s) e^{-\int_t^s \lambda(u) du} \mathbb{E}_Q \left( (1 - \mathcal{R}(s)) e^{-\int_t^s r(u) du} \middle| \mathcal{L}_t \right) ds \Big)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Ha ezen kívül feltesszük, hogy  $\mathcal{R}(t)$  recovery rate folyamat is determinisztikus, akkor ez tovább egyszerűsödik, és

$$\begin{aligned}
CDS(t, \mathcal{T}, T, \pi, (1 - \mathcal{R}(\tau))) &= 1_{\{\tau > t\}} \left( \pi \int_t^{T_n} \left( (s - T_{\alpha(s)-1}) \lambda(s) e^{-\int_t^s \lambda(u) du} P(t, s) \right) ds + \right. \\
&+ \pi \sum_{i=\alpha(t)}^n \delta_i e^{-\int_t^{T_i} \lambda(u) du} P(t, T_i) - \int_t^T \lambda(s) e^{-\int_t^s \lambda(u) du} (1 - \mathcal{R}(s)) P(t, s) ds \Big)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Ha még további feltételként  $\mathcal{R}(t)$  recovery rate folyamatról azt tételezzük fel, hogy konstans, és  $1 - \mathcal{R} = LGD$ , akkor a CDS értéke a 0 időpillanatban

$$\begin{aligned}
CDS(0, \mathcal{T}, T, \pi, LGD) &= \pi \int_{T_0}^{T_n} P(0, t) (t - T_{\alpha(t)-1}) (\lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}) dt + \\
&+ \pi \sum_{i=1}^n \delta_i P(0, T_i) e^{-\int_0^{T_i} \lambda(s) ds} - LGD \int_{T_0}^T P(0, t) (\lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}) dt.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

**2.2.13. Megjegyzés.** További egyszerűsítéseket téve, például hogy  $T_n = T$ , a  $\lambda$  intenzitás konstans, illetve halasztott CDS-t vizsgálva, továbbá felhasználva, hogy  $LGD = 1 - \mathcal{R}$  a korábbi képletekből levezethető az ún. credit triangle (lásd [21]), azaz

$$\pi = \lambda(1 - \mathcal{R}).$$

Ennél egy kevésbé leegyszerűsített modellben fogjuk felírni a CDS felárat a következő részben.

### Szakaszonként konstans intenzitás

A rész lezárásaként tekintjük azt a speciális esetet, amikor a  $\lambda(t)$  intenzitás szakaszonként konstans, és megmutatjuk az előbbi (2.28) árazási formula egy egyszerűbb, gyakorlatban jobban használható alakját. Legyen tehát

$$\lambda(t) = \lambda_i, \quad i \in [T_{i-1}, T_i).$$

Ekkor a hozzá tartozó hazard-folyamat is egyszerűbb alakban írható fel

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \delta_j + (t - T_{i-1}) \lambda_i = \Lambda(T_{i-1}) + (t - T_{i-1}) \lambda_i, \quad (2.29)$$

ahol  $t \in [T_{i-1}, T_i)$ . Nézzük először a protection leg értékét

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(V_{prot}(0, \mathcal{T}, T, LGD)) &= LGD \int_{T_0}^T P(0, t) (\lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}) dt = \\ &= LGD \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \int_{T_{i-1}}^{T_i} P(0, t) e^{-(\Lambda(T_{i-1}) + \lambda_i(t - T_{i-1}))} dt. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Hasonlóan a premium leg értéke

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(V_{prem}(0, \mathcal{T}, T, \pi)) &= \\ &= \pi \int_{T_0}^{T_n} P(0, t) (t - T_{\alpha(t)-1}) (\lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}) dt + \sum_{i=1}^n \pi \delta_i P(0, T_i) e^{-\int_0^{T_i} \lambda(s) ds} = \\ &= \pi \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{T_{i-1}}^{T_i} P(0, t) (t - T_{i-1}) e^{-(\Lambda(T_{i-1}) + \lambda_i(t - T_{i-1}))} dt + \pi \sum_{i=1}^n \delta_i P(0, T_i) e^{-\Lambda(T_i)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Az előbbi két rész különbségként írjuk fel a CDS értékét a 0 időpillanatban, és használjuk minden hazard-folyamat összegalakú felírását, ekkor

$$\begin{aligned} CDS(0, \mathcal{T}, T, \pi, LGD) &= \pi \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{T_{i-1}}^{T_i} P(0, t) (t - T_{i-1}) e^{-(\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \delta_j + \lambda_i(t - T_{i-1}))} dt + \\ &+ \pi \sum_{i=1}^n \delta_i P(0, T_i) e^{-\sum_{j=1}^i \lambda_j \delta_j} - LGD \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \int_{T_{i-1}}^{T_i} P(0, t) e^{-(\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \delta_j + \lambda_i(t - T_{i-1}))} dt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Mindez azért volt hasznos, mert ezt az alakot már olyan diszkrét formába tudjuk hozni, hogy a piaci adatokból ki tudjuk számolni az intenzitás függvény értékeit (amiről feltettük, hogy szakaszonként konstans), azaz hozzá tudjuk kalibrálni a csődintenzitásokat a piacon megfigyelt

CDS felárakhoz. Ehhez diszkrétizáljuk tehát az előbbi (2.32) képletet, és legyen

$$\begin{aligned}
CDS(0, \mathcal{T}, T, \pi, LGD) &= \pi \sum_{i=1}^n \lambda_i P(0, T_i) (T_i - T_{i-1}) e^{-(\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \delta_j + \lambda_i (T_i - T_{i-1}))} (T_i - T_{i-1}) + \\
&+ \pi \sum_{i=1}^n \delta_i P(0, T_i) e^{-\sum_{j=1}^i \lambda_j \delta_j} - LGD \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P(0, T_i) e^{-(\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \delta_j + \lambda_i (T_i - T_{i-1}))} (T_i - T_{i-1}) = \\
&= \pi \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i^2 P(0, T_i) e^{-(\sum_{j=1}^i \lambda_j \delta_j)} + \\
&+ \pi \sum_{i=1}^n \delta_i P(0, T_i) e^{-\sum_{j=1}^i \lambda_j \delta_j} - LGD \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \delta_i P(0, T_i) e^{-(\sum_{j=1}^i \lambda_j \delta_j)} \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Ebből úgy tudjuk meghatározni a  $\lambda_i$  intenzitásokat az ún. bootstrapping eljárással, hogy vesszük azokat a piacról szerzett, különböző  $T$  lejáratra vonatkozó CDS felárakat, amelyeket az előbbi képletbe behelyettesítve a megfelelő  $T$  lejáratú CDS értékét 0-nak határozzák meg, és megoldjuk az egyenlőségeket a  $\lambda_i$  intenzitásokra iteratívan, azaz először egy rövidebb lejáratú CDS-re vonatkozó felárból számoljuk ki  $\lambda_1, \dots, \lambda_i$  intenzitásokat, majd a sorban következő lejáratú CDS felárból meghatározzuk  $\lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \dots = \lambda_{i+j}$  intenzitásokat is, felhasználva a már kiszámolt  $\lambda_1, \dots, \lambda_i$  intenzitásokat. Hogy hány új, de egymással egyenlő  $\lambda_{i+k}$  intenzitást tudunk meghatározni egy adott lépésben, az függ a díjfizetési gyakoriságtól és az egymást követő CDS-ek lejáratú idejének különbségétől. Valójában tehát minden lejáratú időhöz egyetlen új, az eddigiektől különböző  $\lambda_i$  tartozik, de figyelembe kell vennünk, hogy ebben az időszakban valószínűleg több díjfizetés is történik, és ennek megfelelően kell számolnunk.

Ezt a módszert alkalmazva csődvalószínűséget tudunk számolni a megfelelő időszakokra, és felhasználni majd a következő fejezetben ismertetett modellben.



## 3. fejezet

# HJM kamatlábmodell sztochasztikus volatilitással

A Heath-Jarrow-Morton (továbbiakban HJM) modellt megelőző kamatlábmodellek - például Vasicek modell [1977], Cox, Inngersoll és Ross modellje [1979] - jellemzően véges dimenziós Markov-tulajdonságú rendszerek voltak, amelyekben a hozamkörnyezetet a pillanatnyi kamatláb és esetleg pár állapotváltozó határozza meg. Habár ezen modellek keretein belül gyakran analitikus megoldást kaphatunk a parciális differenciálegyenletek fejlett elméletét és technikáit felhasználva, a paraméterek kalibrációja bonyolult és nehezen értelmezhető. Sőt, sokszor szinte lehetetlen következetesen a piacon megfigyelt kezdeti hozamgörbéhez és egyéb megfigyelt változókhoz igazítani, és gyakran nem adják vissza a piacon megfigyelt jellegzetességeket, mint például a volatilitás púposságát.

Ezzel ellentétben a Heath-Jarrow-Morton megközelítés egy olyan általános kamatláb környezet, amely majdhogynem az összes piaci jellegzetességet megtestesíti. A HJM modellt mindig a kezdeti hozamgörbéhez kalibráljuk, ez az egyik bemeneti adatunk. A kamatlábpiacon bizonytalanságát a forward kamatláb folyamatot vezető Wiener-folyamat reprezentálja. A megjelenő HJM modellek különbözősége a forward kamatláb volatilitására vonatkozó feltételek különbözőségéből származnak. Az eredeti sztenderd HJM modellben a forward kamatláb volatilitása a lejáratig hátralévő idő és a spot vagy forward kamatláb függvénye, tehát nem von be újabb véletlen forrásokat a volatilitás folyamat modellezéséhez, és bár az útvonalfüggőség miatt valójában sztochasztikus, a szakirodalomban a sztochasztikus volatilitású modell kifejezést a továbbiakban leírt modellekre használják.

A sztochasztikus volatilitású HJM modellekben a volatilitás folyamatot további, a forward kamatlábat mozgató Wiener-folyamatokon felüli Wiener-folyamatok mozgatják, ez a kiemelő különbség a sztenderd HJM modellekhez képest. Ez a feltevés azokkal a piaci megfigyelésekkel

konzisztens, hogy egyrészt a kamatláb volatilitás sztochasztikus (lásd például [24]), és változása korrelál a kamatláb változással, másrészt hogy ez a sztochasztikus volatilitás tartalmaz olyan faktorokat, amelyeket nem lehet fedezni csupán az alapterméket használva (ezt nevezik átíveltlen volatilitásnak, lásd például Li és Zhao [2006]), harmadrészt olyan, a piacon megfigyelt jellegzetességeket is visszaad, mint például a volatilitás púposságát (lásd például [24], illetve Reno és Ubaldi [2005]). Így ez a megközelítés egy sokkal általánosabb keretrendszerben vizsgálja a kamatláb folyamatokat és kamatderivatívákat.

A következő fejezetben bevezetünk egy HJM modellt, továbbá korrelációs struktúrát az extra Wiener-folyamatok kezeléséhez, és felhasználjuk a HJM feltételként ismert, az arbitrázsmentességre vonatkozó feltételeket, hogy áttérhessünk a kockázatsemleges mértékre, és felírhatjuk a modellünk kockázatsemleges dinamikáját is.

A HJM modellek fő hátránya, hogy általában nem Markov-tulajdonságúak<sup>1</sup>, így végtelen sok állapotváltozó szükséges modellezésükkor, és nem alkalmazhatóak a parciális differenciálegyenletek megoldására alkalmas technikák, csak szimulációval juthatunk megoldáshoz, ami sokszor túl időigényes. Mivel a kezdeti, piacon megfigyelt forward hozamgörbe kivételével csak a forward kamatláb volatilitására vonatkozó feltevések szerepelnek bemenetként a modellben, így az utóbbira vonatkozó feltételek megváltoztatásával érhetünk el véges dimenziós Markov-tulajdonságú rendszert.

Sokan foglalkoztak a HJM modellek Markov-tulajdonságú rendszerré alakításának problémájával, például Bhar és Chiarella [1997] ([1]), valamint Björk és Svensson [2001], Björk és Landen [2002] is feltételeket fogalmaztak meg a volatilitás folyamatra, hogy véges dimenziós Markov-tulajdonságú HJM modellt kapjunk diffúziós forward kamatláb mellett. Chiarella és Kwon [1998a, 1998b, 2003] ([10]), ([11]), ([9]) jelentősen kiterjesztették ezeket a korábbi munkákat, és szükséges és elégséges feltételt adtak a véges dimenziós realizációk létezésére, még hozzá általánosabb volatilitás struktúra mellett. Ezekben a transzformált rendszerekben egyesítették tehát a Markov-tulajdonságú modellek és a HJM keretrendszer előnyös tulajdonságait, hasznos eszközt nyújtva a kamat-, és hitelderivatívák vizsgálatára.

A fejezet későbbi részében alaposabban is áttekintjük ezeket az eredményeket, illetve a modell Markovitása érdekében egy speciális alakú volatilitásfüggvényt vezetünk be, amely mellett véges sok állapotváltozó segítségével írjuk majd fel a forward kamatlábakat. Ez azért hasznos és kívánatos tulajdonság, mert így az elemi kötvényárak is kifejezhetőek ezen állapotváltozók affin kombinációjaként.

A HJM modell kockázatos hozamgörbe modellezésére történő alkalmazása az intenzitás modellek körébe tartozik. Az ebben a fejezetben bevezetett sztochasztikus volatilitású HJM modell

---

<sup>1</sup>általában útvonalfüggő rövid kamatlábat eredményeznek, azaz a rövid kamatláb pillanatnyi értéke a múltbeli értékeitől is függ

külön fogalmazza meg a kockázatmentes forward kamatláb, és az ezen felüli, kockázatért kompenzáló forward spread vagy felár dinamikáját, illetve ezek driftjét és volatilitását vezető sztochasztikus volatilitás-folyamatot. A fejezetben felhasználjuk a korábban áttekintett (csőd modellezésre használt) redukált modell tulajdonságait és következményeit.

Először Jarrow és Turnbull [1995] használta ezt a fajta megközelítést, Duffie és Singleton [1999] pedig diszkrét idejű redukált formulájú modellt fejlesztettek, amely a kockázatmentes forward kamatlábhöz egy forward spread folyamatot adva (amely kapcsolatot teremt a kockázatos és kockázatmentes hozamgörbe között) alkalmazták a HJM megközelítést, és levezették az arbitrázsmentességhez szükséges, driftre vonatkozó feltételt. Többek között Schönbucher [1998], Pugachevsky [1999] fejlesztették tovább ezt a megközelítést. Bielecki és Rutkowski [2000b, 2004] a minősítési osztályok közötti migráció valószínűségét is bevezették modelljükben, és levezettek képleteteket hitelderivatívák árazására is. Eberlein és Özkan [2003] Lévy-folyamatot használva fejlesztették tovább az előző modellt, többszörös csődöt illetve felgyógyulást is megengedve. Fontos még megemlíteni Hobbson és Rogers [1998] munkáját, akik bizonyos, a diffúziós folyamatot követő volatilitásra vonatkozó feltételek mellett bevezettek egy speciális sztochasztikus volatilitás modellt a sztenderd Black-Scholes világba, megőrizve annak teljességét.

### 3.1. A sztochasztikus volatilitású HJM modell felépítése

A fejezet első felében [6] és [20] alapján bevezetjük a sztochasztikus HJM modell tárgyalásához szükséges fogalmakat és jelöléseket.

Legyen a  $[0, \mathbb{T}]$  időintervallumon  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$  filtrált valószínűségi mező, ahol  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_t^r$ , azaz az  $\mathcal{F}_t$  filtráció két szubfiltrációból áll, amelyek a kockázatmentes illetve a csőd információkat tartalmazzák. Pontosabban

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W(s) : s \leq t)$$

minden  $t \geq 0$ -ra, azonban nemsokára még ennél pontosabban is meg fogjuk határozni, hogy pontosan milyen Wiener-folyamatok által generált  $\sigma$ -algebrát tekintünk itt.

A csőd időpontja  $\tau$  megállási idő, és egy  $\hat{\lambda}(t)$  intenzitású  $M(t) = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{\tau_i \leq t\}}$  Cox-folyamat első ugrásának idejével modellezzük:

$$\tau = \inf \{t \in \mathbb{R}^+ : M(t) > 0\},$$

illetve

$$\mathcal{F}_t^r = \sigma(1_{\{\tau \leq s\}} : 0 \leq s \leq t).$$

A csőd esetén alkalmazandó recovery rate-re vonatkozó feltevéseket a fejezet későbbi részében, a kockázatos eszközök bevezetését követően fogjuk áttekinteni.

**3.1.1. Megjegyzés.** Megjegyezzük, hogy ez a szubfiltrációkra osztás teljes mértékben megfeleltethető az intenzitás modellek tárgyalásakor tekintett felosztással. Világos, hogy a csőd információkat tartalmazó  $\mathcal{F}_t^T$  szigma-algebra ugyanaz, mint  $\mathcal{H}_t$  az előző fejezetben, és itt a Wiener-folyamatok által generált  $\mathcal{F}_t^W$  szigma-algebra fejezi ki a többi, kockázatmentes információt, amit korábban  $\mathcal{L}_t$ -vel jelöltünk, és azért térünk át erre a jelölésre, mert fontosnak tartjuk hangsúlyozni a modellre jellemző véletlen-forrásokat.

**3.1.2. Jelölés.** A  $T$ -ben (a továbbiakban mindig feltesszük, hogy  $T \leq \mathbb{T}$ ) lejáró kockázatmentes elemi kötvény  $t$  ( $t \leq T$ ) pillanatbeli árát  $P(t, T, \mathbb{V})$ -vel jelöljük, ahol  $\mathbb{V} \in \Omega$  jelzi, hogy a kötvény ára függ a sztochasztikus volatilitás folyamattól, és  $P(T, T, \mathbb{V}) = 1$

**3.1.3. Definíció.** A  $t$  pillanatbeli,  $T$  időpontra vonatkozó kockázatmentes pillanatnyi rövid forward kamatláb

$$f(t, T, \mathbb{V}) = -\frac{\partial \ln P(t, T, \mathbb{V})}{\partial T}, \quad t \in [0, T].$$

**3.1.4. Definíció.** A  $t$  pillanatbeli kockázatmentes pillanatnyi rövid kamatláb

$$r(t, \mathbb{V}) = f(t, t, \mathbb{V}), \quad t \in [0, T].$$

A definícióból következik, hogy

$$P(t, T, \mathbb{V}) = e^{-\int_t^T f(t, s, \mathbb{V}) ds}, \quad t \in [0, T].$$

Vezessük be a kockázatos kötvényt, kockázatos kamatlábat is, legyen  $P^d(t, T, \mathbb{V})$  a  $T$ -ben lejáró kockázatos elemi kötvény  $t$  pillanatbeli ára.

**3.1.5. Definíció.** A  $t$  pillanatbeli,  $T$  időpontra vonatkozó kockázatos pillanatnyi rövid forward kamatláb

$$f^d(t, T, \mathbb{V}) = -\frac{\partial \ln P^d(t, T, \mathbb{V})}{\partial T}, \quad t \in [0, T].$$

**3.1.6. Definíció.** A  $t$  pillanatbeli kockázatos pillanatnyi rövid kamatláb

$$r^d(t, \mathbb{V}) = f^d(t, t, \mathbb{V}), \quad t \in [0, T].$$

**3.1.7. Definíció.** A  $t$  pillanatbeli folytonosan számított rövid forward credit spread

$$l(t, T, \mathbb{V}) = f^d(t, T, \mathbb{V}) - f(t, T, \mathbb{V}), \quad t \in [0, T].$$

**3.1.8. Definíció.** A  $t$  pillanatbeli folytonosan számított rövid credit spread

$$c(t, \mathbb{V}) = l(t, t, \mathbb{V}) = r^d(t, \mathbb{V}) - r(t, \mathbb{V}), \quad t \in [0, T].$$

Feltéve, hogy  $t$  időpillanatig nem következett be csőd, a kockázatos,  $T$ -ben lejáró elemi kötvény értéke  $t$ -ben:

$$\bar{P}^d(t, T, \mathbb{V}) = e^{-\int_t^T f^d(t, s, \mathbb{V}) ds}, \quad t \in [0, T].$$

Ez az érték tehát csak amellet a plusz feltétel mellett érvényes, hogy  $t$  pillanatig nem következett be csőd, nekünk azonban a  $P^d(t, T, \mathbb{V})$  feltétel nélküli ár kéne.

Tekintsük ezért azt a  $q(\tau) \in [0, 1]$  folyamatot, amelyik  $\tau$  időpontbeli csőd esetén megadja az elemi kötvény csökkentett értékét, azt az értéket, amit egységnyi kifizetés helyett kap a kötvény tulajdonosa. Megjegyezzük, hogy korábban ezzel szemben a recovery rate folyamatot definiáltuk, de ez nem jelent lényegi különbséget, ugyanis

$$\mathcal{R}(\tau) = 1 - q(\tau), \quad \tau \in [0, T].$$

**3.1.9. Megjegyzés.** A gyakorlatban gyakran a csőd vagy fizetéseképtelenség nem jelenti az adósság lejártát, mert a vállalatok átstrukturálják adósságaikat. Ezért célszerű lehet többszörös csődöt is megengedő modellt bevezetni. A recovery rate értelmezése is kissé megváltozik ebben az esetben, elég a kötvény lejáratokor értelmezni. Legyen egy  $\{\tau_i\}$  a csődidőpontok időben növekvő sorozata, és minden  $\tau_i$  csőd esetén a kötvény értéke a névértékének  $q(\tau_i)$ -szeresére csökken,  $q(\tau_i) \in [0, 1]$ . Így lejártakor a kockázatos kötvény értéke a sorozatos csődök miatt a következő kifizetést biztosítja egységnyi névértékre nézve:

$$\mathcal{R}(T) = \prod_{\tau_i \leq T} (1 - q(\tau_i)).$$

Ekkor már ki tudjuk fejezni a kockázatos kötvény értékét is:

$$P^d(t, T, \mathbb{V}) = \mathcal{R}(t) \bar{P}^d(t, T, \mathbb{V}) = \mathcal{R}(t) e^{-\int_t^T f^d(t, s, \mathbb{V}) ds}, \quad t \in [0, T].$$

A következőkben bevezetjük az  $f(t, T, \mathbb{V})$  kockázatmentes *rövid* forward kamatláb és a  $l(t, T, \mathbb{V})$  *rövid* forward credit spread dinamikájára vonatkozó feltételeket, amelyek miatt alapvetően Heath-Jarrow-Morton-féle modellnek nevezzük az ebben a fejezetben ismertetett modellt. Rögtön egy általánosabb, több kockázati faktort is megengedő, több dimenziós modellt vezetünk be.

Tegyük fel, hogy az  $f(t, T, \mathbb{V})$  kockázatmentes *rövid* forward kamatláb és a  $l(t, T, \mathbb{V})$  *rövid* forward credit spread folyamatok kielégítik az alábbi sztochasztikus integrálegyenleteket:

$$f(t, T, \mathbb{V}) = f(0, T, \mathbb{V}_0) + \int_0^t \alpha^f(u, T, \mathbb{V}) du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^f(u, T, V_i) dW_i^f(u), \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

$$l(t, T, \mathbb{V}) = l(0, T, \mathbb{V}_0) + \int_0^t \alpha^l(u, T, \mathbb{V}) du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^l(u, T, V_i) dW_i^l(u), \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

ahol a sztochasztikus volatilitásvektor-folyamatot  $\mathbb{V} = (V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t))$ ,  $t \in [0, T]$  jelöli, és amely volatilitás-folyamatokról feltesszük, hogy kielégítik a következő sztochasztikus differenciálegyenleteket

$$dV_i(t) = \alpha_i^{\mathbb{V}}(t, V_i)dt + \sigma_i^{\mathbb{V}}(t, V_i)dW_i^{\mathbb{V}}(t), \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.3)$$

és  $\mathbb{V}_0$  a volatilitás-folyamat kezdeti értéke,  $\mathbb{V}_0 = (V_1(0), V_2(0), \dots, V_n(0))$ .

Fontos megjegyezni a kockázatmentes *rövid forward kamatláb* és *rövid forward credit spread* dinamikájának feltevéséből, hogy míg  $\alpha^f(u, T, \mathbb{V})$  és  $\alpha^l(u, T, \mathbb{V})$  driftek a volatilitás vektor-folyamattól függnnek, addig  $\sigma_i^f(u, T, V_i)$  és  $\sigma_i^l(u, T, V_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) volatilitás függvények csak a megfelelő  $V_i$  volatilitás-folyamattól.

A  $V_i$  volatilitás-folyamatok definíciójából pedig azt érdemes kiemelni, hogy egy adott  $V_i$  volatilitás-folyamat  $\alpha_i^{\mathbb{V}}(t, V_i)$  driftje illetve  $\sigma_i^{\mathbb{V}}(t, V_i)$  volatilitása csak az adott  $V_i$  volatilitás-folyamat függvénye.

Most már azt is meg tudjuk határozni, pontosan milyen Wiener-folyamatok által generált szigma-algebrákat kell tekintenünk a filtrált valószínűségi mezőben:

$$\mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t^f \vee \mathcal{F}_t^l \vee \mathcal{F}_t^{\mathbb{V}}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

ahol  $\mathcal{F}_t^f = \sigma(W_i^f(s) : 0 \leq s \leq t)$ ,  $\mathcal{F}_t^l = \sigma(W_i^l(s) : 0 \leq s \leq t)$ ,  $\mathcal{F}_t^{\mathbb{V}} = \sigma(W_i^{\mathbb{V}}(s) : 0 \leq s \leq t)$ .

Csak az előbbi, kockázatmentes rövid forward kamatlábra (3.1), és rövid forward credit spreadre (3.2) vonatkozó feltételezéseket, illetve azok kapcsolatát a kockázatos rövid forward kamatlábbal (3.1.7) felhasználva, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} f^d(t, T, \mathbb{V}) &= f^d(0, T, \mathbb{V}_0) + \int_0^t \left( \alpha^f(u, T, \mathbb{V}) + \alpha^l(u, T, \mathbb{V}) \right) du + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^f(u, T, V_i) dW_i^f(u) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^l(u, T, V_i) dW_i^l(u), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.4)$$

ahol a kezdeti kockázatos rövid forward kamatláb  $f^d(0, T, \mathbb{V}_0) = f(0, T, \mathbb{V}_0) + l(0, T, \mathbb{V}_0)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Hasonlóan adódik az  $r(t, \mathbb{V})$  kockázatmentes pillanatnyi rövid kamatláb és a  $c(t, \mathbb{V})$  pillanatnyi rövid credit spread dinamikája is, még hozzá (3.1.4) és (3.1.8) feltevéseket felhasználva.

$$r(t, \mathbb{V}) = f(0, t, \mathbb{V}_0) + \int_0^t \alpha^f(u, t, \mathbb{V}) du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^f(u, t, V_i) dW_i^f(u), \quad t \in [0, T], \quad (3.5)$$

$$c(t, \mathbb{V}) = l(0, t, \mathbb{V}_0) + \int_0^t \alpha^l(u, t, \mathbb{V}) du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^l(u, t, V_i) dW_i^l(u), \quad t \in [0, T]. \quad (3.6)$$

Továbbá könnyen látható  $r^d(t, \mathbb{V})$  kockázatos pillanatnyi rövid kamatláb dinamikájának alakulása, ha tekintjük a definícióját (3.1.6) és az  $f^d(t, T, \mathbb{V})$  dinamikáját (3.4).

$$r^d(t, \mathbb{V}) = f^d(0, T, \mathbb{V}_0) + \int_0^t (\alpha^f(u, t, \mathbb{V}) + \alpha^l(u, t, \mathbb{V})) du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^f(u, t, V_i) dW_i^f(u) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^l(u, t, V_i) dW_i^l(u), \quad t \in [0, T], \quad (3.7)$$

### 3.1.1. Korrelációs struktúra bevezetése

Láthattuk, hogy  $3n$  véletlen-forrást használunk a modellben, ezek közül egyenként  $n$ - $n$  darab mozgattja  $f(t, T, \mathbb{V})$  kockázatmentes rövid forward kamatlábat, és  $l(t, T, \mathbb{V})$  rövid forward credit spreadet, így  $f^d(t, T, \mathbb{V})$  kockázatos rövid forward kamatlábra  $2n$  véletlen faktor hat. A sztochasztikus volatilitást összesen  $3n$  véletlenforrás mozgattja, melyek közül  $n$  db csak a kamatláb-, illetve hitelderivatívákra hat.

Ezzel a megközelítéssel egyrészt kiterjesztettük a kockázatmentes keretrendszert, és immár kockázatos eszközök és derivatívák árazásával is foglalkozhatunk, másrészt lehetőségünk nyílik a köztük lévő korrelációs struktúra modellezésére. Ezt nyilvánvalóan a folyamatokat meghajtó Wiener-folyamatok korrelációs struktúrájának meghatározásával tehetjük meg.

Legyen

$$\mathbb{E} \left[ dW_i^x \cdot dW_j^y \right] = \begin{cases} \delta_{ij} \rho_i^{xy} dt & \text{ha } x \neq y, \\ \delta_{ij} dt & \text{ha } x = y, \end{cases}$$

ahol  $\delta_{ij}$  az egységmátrix  $(i, j)$ -edik eleme,  $x, y \in \{f, l, \mathbb{V}\}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , és  $\rho_i^{xy} \in [-1, 1] \forall i = 1, \dots, n$ -re.

Látható, hogy egyrészt időben konstans korrelációs struktúrát feltételezünk, másrészt csak a megfelelő,  $i$ . faktorhoz tartozó  $W_i^f, W_i^l, W_i^{\mathbb{V}}$  Wiener-folyamatok között nem nulla a korreláció, ideértve azt is, hogy feltesszük rögzített  $x \in \{f, l, \mathbb{V}\}$  esetén  $W_i^x, i = 1, 2, \dots, n$  Wiener-folyamatok korrelálatlanságát is, tehát szétválasztjuk az  $n$  véletlen-forrást, amelyeket gyakran gazdasági faktorok hatásának leírására használnak.

Főleg programozási okokból egyszerűbb független Wiener-folyamatokkal dolgoznunk, ezért alakítsuk át a modellünket úgy, hogy a korrelált  $W_i^f, W_i^l, W_i^{\mathbb{V}}$  Wiener-folyamatok helyett  $W_i, i = 1, 2, \dots, 3n$  független Wiener-folyamatokkal hajtsuk meg a kockázatmentes rövid forward kamatláb, a rövid forward credit spread és a sztochasztikus volatilitás folyamatokat. Hogy érvényben maradjon az előbbieken feltett korrelációs struktúra, Cholecky-felbontást használva a követke-

zöképpen fejezhetjük ki a korrelált Wiener-folyamatokat:

$$dW_i^f(t) = z_i^{f1} dW_i(t), \quad (3.8)$$

$$dW_i^l(t) = z_i^{l1} dW_i(t) + z_i^{l2} dW_{n+i}(t), \quad (3.9)$$

$$dW_i^{\mathbb{V}}(t) = z_i^{\mathbb{V}1} dW_i(t) + z_i^{\mathbb{V}2} dW_{n+i}(t) + z_i^{\mathbb{V}3} dW_{2n+i}(t), \quad (3.10)$$

ahol a korrelációs paraméterek (feltesszük, hogy  $(\rho_i^{lf})^2 \neq 1$ ):

$$\begin{aligned} z_i^{f1} &= 1, \\ z_i^{l1} &= \rho_i^{lf}, \\ z_i^{l2} &= \sqrt{1 - (\rho_i^{lf})^2}, \\ z_i^{\mathbb{V}1} &= \rho_i^{\mathbb{V}f}, \\ z_i^{\mathbb{V}2} &= \frac{\rho_i^{\mathbb{V}l} - \rho_i^{lf} \rho_i^{\mathbb{V}f}}{\sqrt{1 - (\rho_i^{lf})^2}}, \\ z_i^{\mathbb{V}3} &= \sqrt{\frac{1 - (\rho_i^{lf})^2 - (\rho_i^{\mathbb{V}f})^2 - (\rho_i^{\mathbb{V}l})^2 + 2\rho_i^{lf} \rho_i^{\mathbb{V}f} \rho_i^{\mathbb{V}l}}{1 - (\rho_i^{lf})^2}}. \end{aligned}$$

Ekkor a kezdeti feltételeinket  $f(t, T, \mathbb{V})$  (3.1) dinamikájára,  $l(t, T, \mathbb{V})$  (3.2) dinamikájára, illetve  $V_i(t)$  3.3 dinamikájára a következő formára alakítjuk át:

$$f(t, T, \mathbb{V}) = f(0, T, \mathbb{V}_0) + \int_0^t \alpha^f(u, T, \mathbb{V}) du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \hat{\sigma}_i^f(u, T, V_i) dW_i(u), \quad t \in [0, T], \quad (3.11)$$

$$l(t, T, \mathbb{V}) = l(0, T, \mathbb{V}_0) + \int_0^t \alpha^l(u, T, \mathbb{V}) du + \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \hat{\sigma}_i^l(u, T, V_i) dW_i, \quad t \in [0, T], \quad (3.12)$$

$$dV_i(t) = \alpha_i^{\mathbb{V}}(t, V_i) dt + \hat{\sigma}_{i1}^{\mathbb{V}}(t, V_i) dW_i(t) + \hat{\sigma}_{i2}^{\mathbb{V}}(t, V_i) dW_{n+i}(t) + \hat{\sigma}_{i3}^{\mathbb{V}}(t, V_i) dW_{2n+i}(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.13)$$

minden  $i = 1, 2, \dots, n$ -re, és a volatilitás függvényeket a következőképpen definiáljuk:

$$\hat{\sigma}_i^f(t, T, V_i) = \begin{cases} z_i^{f1} \sigma_i^f(t, T, V_i) & i = 1, \dots, n \\ 0 \, dt & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}_i^l(t, T, V_i) = \begin{cases} z_i^{l1} \sigma_i^l(t, T, V_i) & i = 1, \dots, n \\ z_{i-n}^{l2} \sigma_{i-n}^l(t, T, V_{i-n}) & i = n+1, \dots, 2n \end{cases}$$

és  $j = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, \dots, n$  esetén

$$\hat{\sigma}_{ij}^{\mathbb{V}}(t) = z_i^{\mathbb{V}j} \sigma_i^{\mathbb{V}}(t, V_i).$$



Az előző (3.11) és (3.12) egyenlőségekből természetesen felírható  $f^d(t, T, \mathbb{V})$  kockázatos rövid forward kamatláb dinamikája is a független Wiener-folyamatokkal.

$$f^d(t, T, \mathbb{V}) = f^d(0, T, \mathbb{V}_0) + \int_0^t \alpha^d(u, T, \mathbb{V}) du + \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \hat{\sigma}_i^d(u, T, V_i) dW_i(u), \quad t \in [0, T], \quad (3.14)$$

ahol

$$\begin{aligned} \alpha^d(u, T, \mathbb{V}) &= \alpha^f(u, T, \mathbb{V}) + \alpha^l(u, T, \mathbb{V}), \\ \hat{\sigma}_i^d(u, T, V_i) &= \hat{\sigma}_i^f(u, T, V_i) + \hat{\sigma}_i^l(u, T, V_i). \end{aligned}$$

Az (3.11), (3.12), (3.13) felírásokból most már tisztán látszik, hogy a kockázatmentes rövid forward kamatlábat  $n$ , a kockázatos rövid forward kamatlábat  $2n$ , sztochasztikus volatilitásukat pedig  $3n$  Wiener folyamat hajtja meg, így minden kamatláb-, illetve hitelderivatívára is  $3n$  véletlenforrás hat.

Ez a kiterjesztés tehát úgynevezett átíveltlen volatilitás tulajdonságot is modellez, ami a kamatlábbpiacok jellemzője. Ez azt jelenti, hogy a volatilitás sztochasztikus, és tartalmaz olyan faktorokat, amelyeket nem lehet fedezni csak az alaptermékeket használva, tehát ezek a faktorok csak a kamatlábdérivatívákra hatnak, a hozamgörbére nem. Az előbbi felírásból jól látszik, hogy ebben a modellben valóban van  $n$  darab ilyen véletlen-forrás.

### 3.1.2. HJM feltétel

A HJM feltétel a rövid forward kamatlábak  $\alpha^f(u, T, \mathbb{V})$  driftje és  $\sigma^f(u, T, \mathbb{V})$  volatilitása közti kapcsolatot fogalmazza meg az arbitrázsmentesség következményeképpen.

Feltesszük, hogy nincs arbitrázs a piacon, ekkor következik, hogy van ekvivalens  $\mathbb{Q}$  martingálmérték vagy kockázatmentes mérték. Eszerint a mérték szerinti  $\widetilde{W}_i$  Wiener-folyamatokat az alábbiak alapján határozhatjuk meg: van olyan  $3n$  dimenziós  $\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_{3n}(t))$ ,  $t \in [0, T]$  folyamat, amelyre teljesül, hogy

$$\int_0^t \|\gamma_i(s)\|^2 ds < \infty \quad i = 1, 2, \dots, 3n,$$

és

$$d\widetilde{W}_i(t) = dW_i(t) - \gamma_i(t)dt \quad i = 1, 2, \dots, 3n.$$

A  $\mathbb{Q}$  martingálmérték szerint az  $M(t)$  Cox-folyamat intenzitása

$$\lambda(t) = \hat{\lambda}(t)\psi(t),$$

ahol

$$\int_0^t \hat{\lambda}(s)|\psi(s)|ds < \infty.$$

**3.1.10. Megjegyzés.**  $\gamma_i(t)$ -t a kamatláb kockázat piaci árának,  $\psi(t)$ -t a csőd kockázat piaci árának szokás nevezni.

**3.1.11. Megjegyzés.** A kockázatsemleges mérték alatt a rövid credit spread felírható, mint:

$$c(t, \mathbb{V}) = q(t)\lambda(t) = (1 - \mathcal{R}(t))\lambda(t). \quad (3.15)$$

A Girsanov-tételt használva megmutatható (lásd Heath et al [1992]), hogy a kockázatmentes és a kockázatos rövid forward kamatlábak driftjére a következő egyenlőségeknek kell teljesülniük, és ezek szükséges és elégséges feltételei a martingálmérték létezésének:

$$\alpha^f(t, T, \mathbb{V}) = - \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^f(t, T, V_i) \left( \gamma_i(t) - \int_t^T \hat{\sigma}_i^f(t, s, V_i) ds \right), \quad (3.16)$$

$$\alpha^d(t, T, \mathbb{V}) = - \sum_{i=1}^{2n} \hat{\sigma}_i^d(t, T, V_i) \left( \gamma_i(t) - \int_t^T \hat{\sigma}_i^d(t, s, V_i) ds \right), \quad (3.17)$$

felhasználva, hogy  $\hat{\sigma}_i^f(t, T, V_i) = 0$ , ha  $i = n + 1, \dots, 3n$ , illetve  $\hat{\sigma}_i^d(t, T, V_i) = 0$ , ha  $i = 2n + 1, \dots, 3n$ .

Mivel a kockázatos forward kamatláb driftjét és volatilitását így definiáltuk

$$\alpha^d(u, T, \mathbb{V}) = \alpha^f(u, T, \mathbb{V}) + \alpha^l(u, T, \mathbb{V}),$$

ezért (3.16) egyenlőséget kivonva (3.17) egyenlőségből, majd alkalmazva, hogy

$$\hat{\sigma}_i^d(u, T, V_i) = \hat{\sigma}_i^f(u, T, V_i) + \hat{\sigma}_i^l(u, T, V_i),$$

megkapjuk a rövid forward credit spread driftjére vonatkozó megszorítást is.

$$\begin{aligned} \alpha^l(t, T, \mathbb{V}) = & - \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i(t) \hat{\sigma}_i^l(t, T, V_i) + \sum_{i=1}^{2n} \hat{\sigma}_i^l(t, T, V_i) \int_t^T \hat{\sigma}_i^l(t, s, V_i) ds + \\ & + \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^l(t, T, V_i) \int_t^T \hat{\sigma}_i^f(t, s, V_i) ds + \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^f(t, T, V_i) \int_t^T \hat{\sigma}_i^l(t, s, V_i) ds. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Hogy megkapjuk a három alap-folyamatunk martingálmérték szerinti dinamikáját, a folyamatok független Wiener-folyamat segítségével felírt (3.11), (3.12), (3.13) dinamikájába helyettesítsük be egyenként az előzőleg felírt (3.16), (3.17), és (3.18) drift feltételeket. Felhasználjuk, hogy a martingálmérték szerinti Wiener-folyamat az eredetiből egy drift levonásával kapható – pont ez fog megjelenni a driftre vonatkozó feltételek behelyettesítésével.

$$\begin{aligned} f(t, T, \mathbb{V}) = & f(0, T, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \hat{\sigma}_i^f(u, T, V_i) \int_u^T \hat{\sigma}_i^f(u, s, V_i) ds du + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_0^t \hat{\sigma}_i^f(u, T, V_i) d\widetilde{W}_i(u), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
l(t, T, \mathbb{V}) &= l(0, T, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \hat{\sigma}_i^l(u, T, V_i) \int_u^T \hat{\sigma}_i^l(u, s, V_i) ds du + \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \hat{\sigma}_i^l(u, T, V_i) \int_u^T \hat{\sigma}_i^f(u, s, V_i) ds du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \hat{\sigma}_i^f(u, T, V_i) \int_u^T \hat{\sigma}_i^l(u, s, V_i) ds du + \\
&+ \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \hat{\sigma}_i^l(u, T, V_i) d\widetilde{W}_i(u), \quad t \in [0, T], \quad (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^d(t, T, \mathbb{V}) &= f^d(0, T, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \hat{\sigma}_i^d(u, T, V_i) \int_u^T \hat{\sigma}_i^d(u, s, V_i) ds du + \\
&+ \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \hat{\sigma}_i^d(u, T, V_i) d\widetilde{W}_i(u), \quad t \in [0, T]. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

**3.1.12. Jelölés.** Jelöljük a martingálmérték szerinti driftet, illetve volatilitást  $\tilde{\alpha}_i^f(t, T, V_i)$ -vel, illetve  $\tilde{\sigma}_i^f(t, T, V_i)$ -vel,

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_i^f(t, T, V_i) &= \hat{\sigma}_i^f(t, T, V_i) \int_u^T \hat{\sigma}_i^f(t, s, V_i) ds, \\
\tilde{\sigma}_i^f(t, T, V_i) &= \hat{\sigma}_i^f(t, T, V_i),
\end{aligned}$$

tehát

$$f(t, T, \mathbb{V}) = f(0, T, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \tilde{\alpha}_i^f(u, T, V_i) du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \tilde{\sigma}_i^f(u, T, V_i) d\widetilde{W}_i(u), \quad t \in [0, T]. \quad (3.22)$$

Hasonlóan bevezetjük  $\tilde{\alpha}_i^d(t, T, V_i) = \hat{\sigma}_i^d(t, T, V_i) \int_u^T \hat{\sigma}_i^d(t, s, V_i) ds$ -t, és  $\tilde{\sigma}_i^d(t, T, V_i) = \hat{\sigma}_i^d(t, T, V_i)$  martingálmérték szerinti kockázatos driftet, illetve volatilitást, így

$$f^d(t, T, \mathbb{V}) = f^d(0, T, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \tilde{\alpha}_i^d(u, T, V_i) du + \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \tilde{\sigma}_i^d(u, T, V_i) d\widetilde{W}_i(u), \quad t \in [0, T]. \quad (3.23)$$

Hogy teljes legyen az új jelölésrendszer, szükségünk van még  $\tilde{\alpha}_i^l(t, T, V_i)$ -re, és  $\tilde{\sigma}_i^l(t, T, V_i)$ -re.

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_i^l(t, T, V_i) &= \hat{\sigma}_i^l(t, T, V_i) \int_u^T \hat{\sigma}_i^l(t, s, V_i) ds + \\
&+ \hat{\sigma}_i^l(t, T, V_i) \int_u^T \hat{\sigma}_i^f(t, s, V_i) ds + \hat{\sigma}_i^f(t, T, V_i) \int_u^T \hat{\sigma}_i^l(t, s, V_i) ds, \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$\tilde{\sigma}_i^l(t, T, V_i) = \hat{\sigma}_i^l(t, T, V_i)$ , és így már a rövid credit spread martingálmérték szerinti dinamikája is felírható egyszerűbben:

$$l(t, T, \mathbb{V}) = l(0, T, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \tilde{\alpha}_i^l(u, T, V_i) du + \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \tilde{\sigma}_i^l(u, T, V_i) d\widetilde{W}_i(u), \quad t \in [0, T]. \quad (3.25)$$

A volatilitás-folyamatok dinamikája a következőképpen adódik a martingálmérték alatt, ha felhasználjuk a volatilitás folyamatok független Wiener-folyamatokkal felírt (3.13) dinamikáját, és a martingálmérték szerinti  $\widetilde{W}_i$  Wiener-folyamatok definícióját:

$$\begin{aligned} dV_i(t) = & \left( \alpha_i^{\mathbb{V}}(t, V_i) + \gamma_i(t) \hat{\sigma}_{i1}^{\mathbb{V}}(t) + \gamma_{n+i}(t) \hat{\sigma}_{i2}^{\mathbb{V}}(t) + \gamma_{2n+i}(t) \hat{\sigma}_{i3}^{\mathbb{V}}(t) \right) dt + \\ & + \hat{\sigma}_{i1}^{\mathbb{V}}(t) d\widetilde{W}_i(t) + \hat{\sigma}_{i2}^{\mathbb{V}}(t) d\widetilde{W}_{n+i}(t) + \hat{\sigma}_{i3}^{\mathbb{V}}(t) d\widetilde{W}_{2n+i}(t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

A korábbiakhoz hasonlóan  $r(t, \mathbb{V})$  és  $c(t, \mathbb{V})$  dinamikáját is felírhatjuk a martingálmérték alatt, méghozzá az új jelölésekkel, ehhez mindössze a (3.1.4), (3.1.8) definíciójukat, illetve a korábbi kockázatsemleges (3.22), (3.25) dinamikákat használjuk.

$$r(t, \mathbb{V}) = f(0, t, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \tilde{\alpha}_i^f(u, t, V_i) du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \tilde{\sigma}_i^f(u, t, V_i) d\widetilde{W}_i(u), \quad t \in [0, T]. \quad (3.27)$$

$$c(t, \mathbb{V}) = l(0, t, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \tilde{\alpha}_i^l(u, t, V_i) du + \sum_{i=1}^{2n} \int_0^t \tilde{\sigma}_i^l(u, t, V_i) d\widetilde{W}_i(u), \quad t \in [0, T]. \quad (3.28)$$

A rész lezárásaként kiemeljük, hogy az arbitrázsmentesség következményeképpen a kockázatmentes rövid forward kamatláb volatilitásszerkezete meghatározza a driftjét és így a kockázatsemleges dinamikáját is. Ugyanez érvényes a rövid forward credit spreadre, és a kockázatos rövid forward kamatlábra is.

### 3.2. Markov-tulajdonságú HJM kamatlábmodellek

Az előző részben levezetett martingálmérték szerinti dinamika kellemetlen tulajdonsága azonban, hogy általános volatilitás függvények mellett (ami tehát meghatározza a driftet, és így a folyamat teljes dinamikáját) nem Markov-tulajdonságú pillanatnyi forward, illetve pillanatnyi spot kamatláb realizációkhoz jutunk. Ehhez tekintsük (3.22) illetve (3.27) egyenlőségek differenciál alakját [10] alapján.

$$df(t, T, \mathbb{V}) = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i^f(t, T, V_i) dt + \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^f(t, T, V_i) d\widetilde{W}_i(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.29)$$

$$dr(t, \mathbb{V}) = \left. \frac{\partial f(t, T, \mathbb{V})}{\partial T} \right|_{T=t} dt + \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^f(t, t, V_i) d\widetilde{W}_i(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.30)$$

ahol

$$\left. \frac{\partial f(t, T, \mathbb{V})}{\partial T} \right|_{T=t} dt = \frac{\partial f(0, t, \mathbb{V})}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial \tilde{\alpha}_i^f(s, t, V_i)}{\partial t} ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial \tilde{\sigma}_i^f(s, t, V_i)}{\partial t} d\widetilde{W}_i(s). \quad (3.31)$$

Látható (3.29) egyenlőségből, hogy az  $f(t, T, \mathbb{V})$  rövid forward kamatláb folyamat (és hasonlóan felírhatnánk  $f(t, T, \mathbb{V})$  kockázatos rövid forward kamatlábra, illetve  $r^d(t, \mathbb{V})$  kockázatos

rövid kamatlábra) általában nem Markov-tulajdonságú, mert a  $\tilde{\sigma}_i^f(t, T, V_i)$  volatilitás folyamat útvonalfüggő és így a múlttól függ. Még ha  $\tilde{\sigma}_i^f(t, T, V_i)$  nem is függne a múlttól, (3.31) egyenlőségből<sup>2</sup> akkor is következik, hogy az  $r(t, \mathbb{V})$  rövid kamatláb semmiféleképpen sem lehet Markov-tulajdonságú. Ez gyakorlati szempontból nagyon hátrányos, ezzel ellentétben ha Markov-tulajdonságú rendszerré transzformálhatnánk a sztochasztikus volatilitású HJM modellünket, akkor az így kapott rendszerben könnyebben juthatnánk megoldáshoz, például  $P(t, T, \mathbb{V})$  elemi kötvény árára, amely igen fontos gyakorlati szempontból, hiszen arra van szükségünk a különböző hitelderivatívák árazása során, illetve gyakran annak az ára figyelhető meg a piacon.

Sokan adtak feltételt a  $\tilde{\sigma}_i^f(t, T, V_i)$  volatilitás függvény alakjára, hogy véges dimenziós Markov-tulajdonságú realizációhoz jussunk, a továbbiakban ezeket tekintjük át röviden.

Elsőként [1] adott feltételt a volatilitásfüggvényre

$$\tilde{\sigma}_i(t, T, V_i) = G(r(t, \mathbb{V}))p_m(T - t)e^{-\kappa(T-t)},$$

ahol  $p_m(t)$   $m$ -edfokú polinom. Később [10] K. Inui és M. Kijima felvetését általánosítva előre rögzített forward kamatlábak függvényeként írta fel a volatilitás függvényt

$$\tilde{\sigma}_i(t, T, V_i) = \tilde{\sigma}_i(t, T, f(t, t + d_1, \mathbb{V}), \dots, f(t, t + d_m, \mathbb{V})),$$

amelyeknek a  $\mathcal{D}_i \tilde{\sigma}_i(t, T, V_i) = 0$  differenciálegyenletet kell kielégítenie, ahol

$$\mathcal{D}_i = \frac{\partial^{m_i}}{\partial T^{m_i}} - \sum_{j=0}^{m_i-1} \kappa_{ij}(T) \frac{\partial^j}{\partial T^j}.$$

Így a megfelelő  $n$  dimenziós HJM modellt véges dimenziós Markov-tulajdonságú rendszerré lehet transzformálni. A [10] cikk megadta az állapotváltozókat, amelyek segítségével felírható ebben az új rendszerben a forward kamatláb, illetve meghatározta a rendszer maximális dimenzióját ( $m \sum_{i=1}^n m_i^2(m_i + 3)/2$ ) is.

A következő korlátozást [7] vezette be a volatilitásfüggvényre:

$$\tilde{\sigma}_i(t, T, V_i) = G(S(t))e^{-\int_t^T \kappa(s) ds},$$

ahol  $G(t)$  és  $\kappa(t)$  determinisztikus függvények és  $S(t)$  folyamatot  $r(u, \mathbb{V})$ ,  $f(u, s, \mathbb{V})$  és  $P(u, s, \mathbb{V})$  függvényeként határozta meg.

Míg [8] szerint

$$\tilde{\sigma}_i(t, T, V_i) = v_i^{\gamma_i}(t, \mathbb{V})G(t, f(t, t + d_1, \mathbb{V}), \dots, f(t, t + d_m, \mathbb{V}))e^{-\int_t^T \kappa(s) ds},$$

ahol  $G(t)$  és  $\kappa(t)$  determinisztikus függvények,  $\gamma_i$  valós szám és  $v_i(t, \mathbb{V})$  a következő sztochasztikus differenciálegyenletet elégíti ki

$$dv_i(t, \mathbb{V}) = \theta_i(t)(\bar{v}(t, \mathbb{V}) - v_i(t, \mathbb{V}))dt + \pi_i(t)v_i^{\epsilon_i}(t, \mathbb{V})d\widetilde{W}_i^v(t),$$

<sup>2</sup>amely láthatóan útvonalfüggő, hiszen az egész múltot integrálunk

ahol  $\theta_i(t)$ ,  $\pi_i(t)$  determinisztikus függvények,  $\epsilon_i$  valós szám.

Az eddigi cikkek mind egy-egy speciális formájú volatilitásfüggvény esetében mutatták meg, hogy lehetséges véges dimenziós Markov-tulajdonságú modellre áttérni. Ezzel szemben [3] általános, elméleti keretrendszerben azt ismerteti, hogy milyen szükséges és elégséges feltételek mellett létezik egy általános sztochasztikus volatilitású modellben véges dimenziójú Markov-tulajdonságú realizáció véges dimenziós diffúziós folyamat függvényében kifejezve. Ez a cikk Björk és Svensson [2001] munkáján alapszik, amely először nyújtott szükséges és elégséges feltételt a problémára. A fő eredménye, miszerint pontosan akkor létezik véges dimeziójú realizáció, ha a (Stratonovich) drift és volatilitás által generált Lie-algebra véges dimenziójú. Ezen felül speciálisan forward kamatláb modellekre a következő elégséges feltételt adja [3] véges dimenziós Markov-tulajdonságú realizációk létezésére, nevezetesen a volatilitásfüggvény alakja a következő kell legyen

$$\tilde{\sigma}_i(f(t, T, \mathbb{V}), \mathbb{V}, T - t) = \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}(f(t, T, \mathbb{V}), \mathbb{V}) \kappa_i(T - t),$$

ahol  $\kappa_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  kvázi exponenciálisak, azaz

$$\kappa_i(t) = \mathbf{c} e^{A t} \mathbf{b},$$

ahol  $\mathbf{c}$  sorvektor,  $\mathbf{b}$  oszlopvektor, és  $A$  mátrix.

A fejezet további részében, és majd a későbbiekben a számításokhoz azonban speciálisabb formájú volatilitásfüggvényeket fogunk használni. A volatilitásfüggvények e családja még mindig nagyfokú rugalmasságot tesz lehetővé a különböző alakú hozamgörbék modellezésekor, ezen kívül szintfüggő és átíveltlen sztochasztikus volatilitás faktort hoz magával, ami kívánatos tulajdonság, ahogy azt korábban is kifejtettük. Legyen tehát

$$\hat{\sigma}_i^f(t, T, V_i) = (a_{0i} + a_{1i}(T - t)) \sqrt{r(t)} \sqrt{V_i(t)} e^{-\kappa_i^f(T-t)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.32)$$

$$\hat{\sigma}_i^l(t, T, V_i) = (b_{0i} + b_{1i}(T - t)) \sqrt{c(t)} \sqrt{V_i(t)} e^{-\kappa_i^l(T-t)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.33)$$

ahol  $a_{0i}$ ,  $a_{1i}$ ,  $b_{0i}$ ,  $b_{1i}$ ,  $\kappa_i^f$ ,  $\kappa_i^l$  konstansok.

**3.2.1. Állítás.** *Az előbbi (3.32) és (3.33) feltételek mellett a kockázatmentes rövid forward kamatláb és a rövid forward credit spread alakulása felírható a következő  $B_{x_{ji}}(t)$  és  $B_{\phi_{ji}}(t)$  együtt-ható függvényekkel, illetve  $x_{ji}(t)$  és  $\phi_{ji}(t)$  állapotváltozókkal*

$$f(t, T, \mathbb{V}) = f(0, T, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^n B_{x_{1i}}(T - t) x_{1i}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^6 B_{\phi_{ji}}(T - t) \phi_{ji}(t), \quad (3.34)$$

$$l(t, T, \mathbb{V}) = l(0, T, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^3 B_{x_{ji}}(T - t) x_{ji}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=7}^{20} B_{\phi_{ji}}(T - t) \phi_{ji}(t), \quad (3.35)$$

és így a kockázatos rövid forward kamatláb is felírható, az előbbi együttható függvényekkel és állapotváltozókkal

$$f^d(t, T, \mathbb{V}) = f^d(0, T, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 B_{x_{ji}}(T-t)x_{ji}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{20} B_{\phi_{ji}}(T-t)\phi_{ji}(t). \quad (3.36)$$

Az együtthatók függvények pontos alakját és az állapotváltozók alakulására vonatkozó sztochasztikus differenciálegyenleteket lásd A. Függelék, illetve bizonyításért [6] és [20].

**3.2.2. Következmény.** Az előzőekből és  $r(t, \mathbb{V})$  (3.1.4) definíciójából, illetve  $c(t, \mathbb{V})$  (3.1.8) definíciójából következik, hogy

$$r(t, \mathbb{V}) = f(0, t, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} x_{1i}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^6 \beta_{ji} \phi_{ji}(t), \quad (3.37)$$

$$c(t, \mathbb{V}) = l(0, t, \mathbb{V}_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^3 \alpha_{ji} x_{ji}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=7}^{20} \beta_{ji} \phi_{ji}(t), \quad (3.38)$$

ahol  $\alpha_{ji} = B_{x_{ji}}(0)$ ,  $\beta_{ji} = B_{\phi_{ji}}(0)$ .

A most következő állítás – ami a [6] legjelentősebb eredménye – számunkra is igen fontos, ugyanis az egész HJM keretrendszer bevezetésének eredményeképpen  $P(t, T, \mathbb{V})$  és  $P^d(t, T, \mathbb{V})$  kockázatmentes és kockázatos elemi kötvény árára kapunk képletet, méghozzá az előbb bevezetett együttható függvények és állapotváltozók exponenciális affín függvényeként kifejezve. Ez a kényelmes forma nagy segítségünkre lesz a későbbiekben.

**3.2.3. Állítás.** *A kockázatmentes illetve kockázatos (pseudo) elemi kötvény ára felírható a következő formában:*

$$P(t, T, \mathbb{V}) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left( - \sum_{i=1}^n D_{x_{1i}}(T-t)x_{1i}(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^6 D_{\phi_{ji}}(T-t)\phi_{ji}(t) \right), \quad (3.39)$$

$$\bar{P}^d(t, T, \mathbb{V}) = \frac{\bar{P}^d(0, T)}{\bar{P}^d(0, t)} \exp \left( - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 D_{x_{ji}}(T-t)x_{ji}(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{20} D_{\phi_{ji}}(T-t)\phi_{ji}(t) \right), \quad (3.40)$$

ahol  $x_{ji}(t)$  és  $\phi_{ji}(t)$  állapotváltozókat az előzőekben definiáltuk,  $D_{x_{ji}}(t)$  és  $D_{\phi_{ji}}(t)$  együttható függvényekért pedig lásd A. Függelék.

Az előbbi (3.2.3) állításban szereplő  $D_{x_{ji}}(t)$  és  $D_{\phi_{ji}}(t)$  együttható függvények alakja valójában a

$$\bar{P}^d(t, T, \mathbb{V}) = e^{-\int_t^T f^d(t, s, \mathbb{V}) ds}$$

egyenlőséget, mint a (3.1.5) definíció következményét felhasználva a következőképpen adódik

$$D_{x_{ji}}(T-t) = \int_t^T B_{x_{ji}}(s-t) ds \quad \text{és} \quad D_{\phi_{ji}}(T-t) = \int_t^T B_{\phi_{ji}}(s-t) ds.$$

Láthatjuk, hogy a kockázatmentes elemi kötvény ára  $7n$  állapotváltozóval és  $n$  sztochasztikus volatilitás-folyamattal, míg a kockázatos (pseudo) elemi kötvény ára  $23n$  állapotváltozóval és  $n$  sztochasztikus volatilitás-folyamattal fejezhető ki, azonban mindössze  $3n$  véletlen-forrás hat az egész modellre, ami így kellőképpen rugalmas és alakítható, de mégis kezelhető méretű marad.



## 4. fejezet

# Implementáció, árazás szimulációval

Ebben a fejezetben a szakdolgozat első három fejezetében bevezetett és áttekintett modelleket és formulákat fogjuk össze, amivel így értelmet nyer a látszólag egymáshoz nem kapcsolódó modellek tanulmányozása.

Mint korábban már említettük, a hitelderivatívák árazásához több folyamatra is feltevéseket kell tennünk, hogy végül választ kaphassunk a következő kérdésre: hogyan alakul a hitelderivatíva fair ára? Ennek a kérdésnek a megválaszolásához azonban sok másik kérdést is meg kell válaszolnunk, például hogyan alakul a kockázatos referencia egység csődvalószínűsége? Hogyan alakul a sztochasztikus rövid forward kamatláb vagy az elemi kötvények ára? Hogyan alakul a rövid kamatláb?

Ezek a kérdések mind a hitelderivatíva árára ható tényezőkre és kockázati faktorokra, azaz a hitelkockázat elemeire céloznak, amelyeket korábban már felsoroltunk az első fejezetben.

Ezekre a kérdésekre válaszolnak a korábbi fejezetben ismertett modellek. Az első fejezetben néhány hitelderivatíva általános árazási elvét ismertettük, majd ezeket felhasználva a második fejezetben – már feltevéseket téve a referencia egység csődvalószínűségének változására, és főként intenzitás modelleket használva – megvizsgáltuk különböző intenzitás-függvényeket (sztochasztikus, determinisztikus, szakaszonként konstans) használó modellek keretein belül is a CDS-ek árazását.

A harmadik fejezetben pedig egy, szintén az intenzitás modellek családjába tartozó sztochasztikus volatilitású HJM modellt vezetünk be, hogy választ kaphassunk a rövid forward kamatlábak és elemi kötvények árának alakulására feltett kérdéseinkre is, és így már képesek vagyunk egy CDS árazó képletének minden elemét pontosan értelmezni, illetve a feltevéseink alapján szimulálni, vagy a modellünket a piaci adatokhoz igazítani.

Mindezt CDS opciók árazására fogjuk felhasználni, amelyek árazásának szükségességét és fontosságát főként likviditásuk hiánya indokolja. Ehhez szükségünk lesz az alapterméként is szolgáló CDS-ekből kinyerhető információkra, azaz az adott kockázatos vállalat csődvalószínűsége-

gére.

A továbbiakban két modell alapján is megvizsgáljuk egy CDS opció árát különböző kötési árfolyamok mellett, először a harmadik fejezetben tárgyalt sztochasztikus volatilitású HJM kamatlábmodellel, majd a forward CDS felárak lognormális eloszlását feltételező Black-modellel, és végül összehasonlítjuk a modellek által nyújtott árakat.

## 4.1. Árazás a sztochasztikus HJM modellel

### 4.1.1. A modell felépítése

A harmadik fejezetben bevezetett HJM modell még amellet a feltétel mellett is igen rugalmas, és sok lehetőséget hagy, hogy a Markov-tulajdonság érdekében megkötéseket tettünk a volatilitásfüggvényekre (3.32) és (3.33) keretében. Az implementáció során  $n = 1$  faktoros modellt fogunk használni a kezelhetőség kedvéért (ezért mostantól elhagyjuk az  $i$  indexet), és [6] alapján még további feltételezéseket teszünk, először a sztochasztikus volatilitás-folyamat driftjére és volatilitás függvényeire:

$$\begin{cases} \alpha^V(t, V) = \kappa^V(\bar{V} - V(t)), \\ \hat{\sigma}_1^V(t) = z^{V_1}\sigma\sqrt{V(t)}, \\ \hat{\sigma}_2^V(t) = z^{V_2}\sigma\sqrt{V(t)}, \\ \hat{\sigma}_3^V(t) = z^{V_3}\sigma\sqrt{V(t)}, \\ V(0) = 1 \end{cases}$$

ahol  $\kappa^V$ ,  $\bar{V}$ , és  $\sigma$  konstansok,  $\bar{V}, \sigma > 0$ , és a  $z^{V_j}$  korrelációs paramétereket a 3.1.1 részben vezettük be. Tegyük fel továbbá, hogy a kockázat piaci ára a következőképpen alakul

$$\gamma_j(t) = \sqrt{V(t)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Ezek segítségével egyszerűbb alakba írható a sztochasztikus volatilitás kockázatmentes, illetve valós mérték szerinti dinamikája is. Helyettesítsünk be ehhez (3.26) egyenlőségbe, majd használjuk fel, hogy  $d\widetilde{W}_j(t) = dW_j(t) - \gamma_j(t)dt$ ,  $j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} dV(t) &= \left( \kappa^V(\bar{V} - V(t)) + \sqrt{V(t)}z^{V_1}\sigma\sqrt{V(t)} + \sqrt{V(t)}z^{V_2}\sigma\sqrt{V(t)} + \sqrt{V(t)}z^{V_3}\sigma\sqrt{V(t)} \right) dt + \\ &\quad + z^{V_1}\sigma\sqrt{V(t)} d\widetilde{W}_1(t) + z^{V_2}\sigma\sqrt{V(t)} d\widetilde{W}_2(t) + z^{V_3}\sigma\sqrt{V(t)} d\widetilde{W}_3(t) = \\ &= \left( \kappa^V(\bar{V} - V(t)) + \sigma V(t)(z^{V_1} + z^{V_2} + z^{V_3}) \right) dt + \sigma\sqrt{V(t)} \left( z^{V_1}d\widetilde{W}_1(t) + z^{V_2}d\widetilde{W}_2(t) + z^{V_3}d\widetilde{W}_3(t) \right) = \\ &= \left( \kappa^V(\bar{V} - V(t)) \right) dt + \sigma\sqrt{V(t)} \left( z^{V_1}dW_1(t) + z^{V_2}dW_2(t) + z^{V_3}dW_3(t) \right), \quad (4.2) \end{aligned}$$

ahol  $\widetilde{W}_1(t)$ ,  $\widetilde{W}_2(t)$ ,  $\widetilde{W}_3(t)$  egymástól független,  $\mathbb{Q}$  mérték szerinti Wiener-folyamatok, és  $W_1(t)$ ,  $W_2(t)$ ,  $W_3(t)$  egymástól független,  $\mathbb{P}$  mérték szerinti Wiener-folyamatok. Látható, hogy kétféleképpen is fel tudjuk írni a sztochasztikus volatilitás-folyamat dinamikáját,  $\mathbb{P}$  mérték szerinti

Wiener-folyamatokkal, illetve  $\mathbb{Q}$  mérték szerinti Wiener-folyamatokkal is, és ugyanez érvényes a többi sztochasztikus állapotváltozó dinamikájára is. Mi a kockázatsemleges mérték szerinti felírást fogjuk használni a szimulációban, de a valós mérték szerinti felírás is hasznukra lesz, amint azt nemsokára látni fogjuk.

Megjegyezzük, hogy mivel  $n = 1$ , ezért  $3n = 3$  független Wiener-folyamattal tudjuk felírni a modellünket, ezek közül kettő még meg fog jelenni a kockázatmentes és kockázatos kamatlábak dinamikájának felírásakor, de a harmadik Wiener-folyamat csak a sztochasztikus volatilitást vezeti, így kapjuk az átíveltlen volatilitás tulajdonságot.

Ha megfigyeljük a sztochasztikus volatilitás-folyamat valós mérték szerinti felírását, látható, hogy igen hasonlít egy CIR-folyamatra, csak három független Wiener-folyamat hajtja meg. Alakítsuk át a következő módon:

$$\begin{aligned} dV(t) &= \left( \kappa^V (\bar{V} - V(t)) \right) dt + \sigma \sqrt{V(t)} \left( z^{\mathbb{V}_1} dW_1(t) + z^{\mathbb{V}_2} dW_2(t) + z^{\mathbb{V}_3} dW_3(t) \right) = \\ &= \left( \kappa^V (\bar{V} - V(t)) \right) dt + \sigma \sqrt{V(t)} dZ(t) = \\ &= \left( \kappa^V (\bar{V} - V(t)) \right) dt + \sigma \sqrt{V(t)} \left( dW'(t) \sqrt{(z^{\mathbb{V}_1})^2 + (z^{\mathbb{V}_2})^2 + (z^{\mathbb{V}_3})^2} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

felhasználva, hogy

$$dZ(t) = z^{\mathbb{V}_1} dW_1(t) + z^{\mathbb{V}_2} dW_2(t) + z^{\mathbb{V}_3} dW_3(t) \sim N\left(0, (z^{\mathbb{V}_1})^2 dt + (z^{\mathbb{V}_2})^2 dt + (z^{\mathbb{V}_3})^2 dt\right),$$

és így bevezetve  $W'(t)$  Wiener-folyamatot, amelyre

$$dZ(t) = dW'(t) \sqrt{(z^{\mathbb{V}_1})^2 + (z^{\mathbb{V}_2})^2 + (z^{\mathbb{V}_3})^2}.$$

Ekkor már alkalmazható  $V(t)$  sztochasztikus volatilitás-folyamatra a Feller-feltétel, mely szerint, ha az átlaghoz húzás sebessége és a hosszútávú átlag szorzatának kétszerese nem kisebb, mint a szórásnégyzet (itt  $(\sigma \sqrt{(z^{\mathbb{V}_1})^2 + (z^{\mathbb{V}_2})^2 + (z^{\mathbb{V}_3})^2})^2$ ), akkor a folyamat nem éri el a nullát. Erre fontos figyelniük az implementáció során is, tehát szükséges, hogy teljesüljön a paramétereinkre, hogy

$$2\kappa^V \bar{V} \geq \sigma^2 \left( (z^{\mathbb{V}_1})^2 + (z^{\mathbb{V}_2})^2 + (z^{\mathbb{V}_3})^2 \right). \quad (4.4)$$

Ezt a feltételt úgy alkalmaztuk az implementáció során, hogy  $\kappa^V$  paraméter értékét korlátoztuk a többi paraméter függvényében:

$$\kappa^V \geq \frac{\sigma^2 \left( (z^{\mathbb{V}_1})^2 + (z^{\mathbb{V}_2})^2 + (z^{\mathbb{V}_3})^2 \right)}{2\bar{V}}. \quad (4.5)$$

Ugyan mindezt a valós mérték szerinti dinamika esetén állapítottuk meg, de az ekvivalens átírás miatt az előbbi feltételt a martingálmérték szerinti szimulációkor is felhasználhatjuk.

Az implementáláshoz a Milstein-módszerrel<sup>1</sup> diszkrétizáltunk, így a sztochasztikus volatilitás korábban felírt (4.2) (kockázatsemleges mérték szerinti) alakjából kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} V(t_{i+1}) = & V(t_i) + \left( \kappa^V (\bar{V} - V(t_i)) + \sigma V(t_i) (z^{\mathbb{V}_1} + z^{\mathbb{V}_2} + z^{\mathbb{V}_3}) \right) \Delta t + \sigma z^{\mathbb{V}_1} \sqrt{V(t_i)} \Delta \widetilde{W}_1(t_i) + \\ & + \left( \frac{\sigma z^{\mathbb{V}_1}}{2} \right)^2 \left( (\Delta \widetilde{W}_1(t_i))^2 - \Delta t \right) + \sigma z^{\mathbb{V}_2} \sqrt{V(t_i)} \Delta \widetilde{W}_2(t_i) + \left( \frac{\sigma z^{\mathbb{V}_2}}{2} \right)^2 \left( (\Delta \widetilde{W}_2(t_i))^2 - \Delta t \right) + \\ & + \sigma z^{\mathbb{V}_3} \sqrt{V(t_i)} \Delta \widetilde{W}_3(t_i) + \left( \frac{\sigma z^{\mathbb{V}_3}}{2} \right)^2 \left( (\Delta \widetilde{W}_3(t_i))^2 - \Delta t \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

ahol a  $[0, T]$  intervallumot  $N$  részre osztottuk, és így  $\Delta t = \frac{T}{N}$ ,  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , továbbá  $\Delta \widetilde{W}_j(t_i) = \widetilde{W}_j(t_{i+1}) - \widetilde{W}_j(t_i) \sim N(0, \Delta t)$ .

Hasonlóan felírtuk az összes, (3.2.1) állításban szereplő, és A. Függelékben kifejtett állapotváltozó diszkrétizált formáját, így például

$$\begin{aligned} x_1(t_{i+1}) = & x_1(t_i) - \kappa^f x_1(t_i) \Delta t + \sqrt{r(t_i) V(t_i)} \Delta \widetilde{W}_1(t_i) = \\ = & x_1(t_i) - \kappa^f x_1(t_i) \Delta t + \sqrt{r(t_i) V(t_i)} \Delta W_1(t_i) - V(t_i) \sqrt{r(t_i)} \Delta t, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} x_2(t_{i+1}) = & x_2(t_i) - \kappa^\lambda x_2(t_i) \Delta t + \sqrt{c(t_i) V(t_i)} \Delta \widetilde{W}_1(t_i) = \\ = & x_2(t_i) - \kappa^\lambda x_2(t_i) \Delta t + \sqrt{c(t_i) V(t_i)} \Delta W_1(t_i) - V(t_i) \sqrt{c(t_i)} \Delta t, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} x_3(t_{i+1}) = & x_3(t_i) - \kappa^\lambda x_3(t_i) \Delta t + \sqrt{c(t_i) V(t_i)} \Delta \widetilde{W}_2(t_i) = \\ = & x_3(t_i) - \kappa^\lambda x_3(t_i) \Delta t + \sqrt{c(t_i) V(t_i)} \Delta W_2(t_i) - V(t_i) \sqrt{c(t_i)} \Delta t. \end{aligned} \quad (4.9)$$

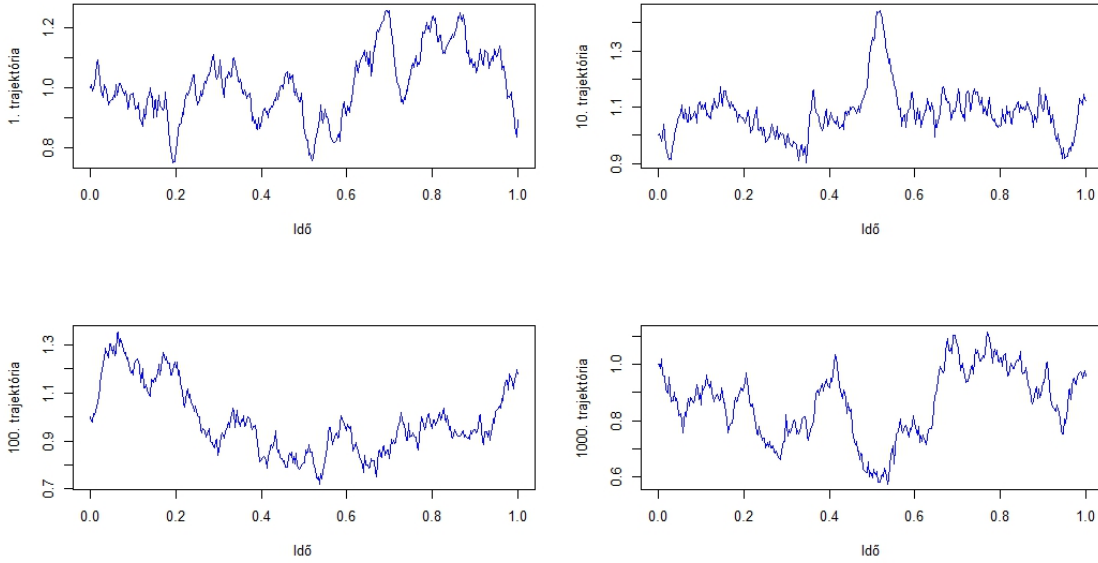
A program első lépéseként  $tr = 1000$  trajektórián szimuláltuk  $V(t)$  sztochasztikus volatilitás-folyamat alakulását, majd (3.2.1) állítás (3.39) egyenlőségét felhasználva kaptuk  $P(t, T, \mathbb{V})$   $tr = 1000$  darab realizációját. Ehhez szükséges volt az A. Függelékben közölt együttthatófüggvények kiszámítása és  $x_1(t)$ ,  $\phi_j(t)$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) állapotváltozók, valamint  $f(t, T, \mathbb{V})$  kockázatmentes rövid forward hozamgörbe és  $r(t, \mathbb{V})$  kockázatmentes rövid kamatláb (3.34) és (3.37) egyenlőségek szerinti alakulásának meghatározása. Mivel az utóbbiakat  $V(t)$  sztochasztikus volatilitás-folyamat hajtja meg a modellünk szerint, ezekhez használtuk fel az 1000 darab  $V(t)$  realizációt, így kapva  $P(t, T, \mathbb{V})$  kockázatmentes diszkontfaktorból is ennyit.

A modellben bemeneti adatként szerepel még egy kezdeti kockázatmentes  $P(0, T)$  diszkontgörbe, illetve  $f(0, T)$  kockázatmentes rövid forward hozamgörbe. A Bloomberg által közölt adatokat 2014.01.02-i<sup>2</sup> kezdettel használtuk fel.

A modell kezdetben használt paramétereit (nagyreszt [6] alapján), és a rájuk vonatkozó alsó, illetve felső korlátokat – amelyeket a korábbiak alapján elméleti, illetve praktikussági megfontolásokból tettünk – a következő 4.1-es táblázatban láthatjuk.

<sup>1</sup>Milstein scheme

<sup>2</sup>elszámolási nap 2014. 01. 06.



4.1. ábra. A sztochasztikus volatilitás néhány realizációja

| Paraméter     | $\kappa^V$ | $\bar{V}$ | $\sigma$ | $\rho^{Vf}$ | $\rho^{f\lambda}$ | $\rho^{V\lambda}$ | $\kappa^f$ | $a_0$     | $a_1$     |
|---------------|------------|-----------|----------|-------------|-------------------|-------------------|------------|-----------|-----------|
| Kezdeti érték | 2.1        | 1         | 0.5      | 0.6         | -0.2              | 0.4               | 0.3        | 0.135     | 0.035     |
| Felső határ   | $\infty$   | 1         | 1        | 1           | 1                 | 1                 | $\infty$   | $\infty$  | $\infty$  |
| Alsó határ    | $-\infty$  | 0         | 0        | -1          | -1                | -1                | $-\infty$  | $-\infty$ | $-\infty$ |

4.1. táblázat. Kezdeti paraméterek

Érdeemes megjegyezni még, hogy ezen kívül a korábban megmutatott (4.5) korlátot alkalmaztuk, és hogy ezekből a paraméterekből a harmadik fejezet alapján minden további paraméter kiszámítható.

A szimulációt 12 perióduson keresztül egy hónapos időtartamokra készítettük el, (tehát összességében a 2014.01.02. - 2015.01.02. intervallumon), napon belüli négy lépésközzel, és minden lépésben öt év hosszú diszkontgörbét szimuláltunk.

A szimuláció alapján kapott diszkontgörbét a periódus végén összehasonlítottuk a ténylegesen megvalósult diszkontgörbékkel, majd a következő periódusra léptünk, ahol már a periódus elején ismertnek tekintett piaci adatokat használtuk bemeneti adatként.

Hogy a valódi adatokat jobban közelítő modellt kapjunk, a paraméterekre nézve optimalizáltunk, a hibát a 12 periódus mindegyikében a periódus végén rendelkezésre álló diszkontgörbétől való abszolút eltéréssel mértük. Az optimalizáció során a paraméterek értékeire vonatkozó, korábban ismerttetett alsó és felső korlátokat használtuk.

Az előbbi 4.1-es táblázatban felsorolt paraméterek közül az első hatot historikus adatokból, mind a 12 periódus kalibrációját felhasználva határoztuk meg, ezek a sztochasztikus volatilitás paraméterei és a korrelációs paraméterek, mivel ezek azok a – sztochasztikus volatilitáshoz kapcsolódó – paraméterek, amelyeket közvetlenül nem tudunk megfigyelni.

Az utolsó három paramétert ( $\kappa^f$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ ), amelyek a kockázatmentes forward kamatláb volatilitásában jelennek meg, csak az utolsó periódusban kalibrált értékek alapján határoztuk meg, hogy a 2015. 01. 02-én kezdődő szimulációhoz a rendelkezésünkre álló adatok alapján a piaci árat lehetőleg jobban eltaláló modellt használhassuk.

A kalibrációval kapott, sztochasztikus volatilitás és korrelációs paraméterek 12 periódus alatti változását a 4.2-es táblázatban foglaltuk össze, és a 4.2-es ábra mutatja.

| Paraméter    | $\kappa^V$ | $\bar{V}$ | $\sigma$  | $\rho^{\nabla f}$ | $\rho^{f\lambda}$ | $\rho^{\nabla\lambda}$ |
|--------------|------------|-----------|-----------|-------------------|-------------------|------------------------|
| 1. periódus  | 0.9999366  | 0.7003739 | 0.4968816 | 0.4507530         | -0.4009729        | 0.2511202              |
| 2. periódus  | 0.9998462  | 0.7001654 | 0.5081141 | 0.4502683         | -0.3997596        | 0.2477014              |
| 3. periódus  | 0.9995875  | 0.7013726 | 0.5070622 | 0.4549887         | -0.4043965        | 0.2492411              |
| 4. periódus  | 0.9989992  | 0.7026715 | 0.5104213 | 0.4470573         | -0.3967623        | 0.2461668              |
| 5. periódus  | 0.9987317  | 0.7043763 | 0.5174339 | 0.4736657         | -0.4057877        | 0.2514213              |
| 6. periódus  | 0.9981084  | 0.7042873 | 0.5220166 | 0.4473058         | -0.3898803        | 0.2428259              |
| 7. periódus  | 0.9998299  | 0.7006277 | 0.5001082 | 0.4504650         | -0.4001673        | 0.2500910              |
| 8. periódus  | 0.9998415  | 0.7007097 | 0.4974225 | 0.4493301         | -0.3997541        | 0.2505874              |
| 9. periódus  | 1.0000000  | 0.6996524 | 0.4993612 | 0.4499655         | -0.4000945        | 0.2501786              |
| 10. periódus | 0.9979094  | 0.7043365 | 0.5565031 | 0.5099280         | -0.4213898        | 0.2492303              |
| 11. periódus | 0.9991461  | 0.7021022 | 0.4989335 | 0.4487933         | -0.4005614        | 0.2499955              |
| 12. periódus | 0.9995593  | 0.7012945 | 0.5019201 | 0.4564616         | -0.3997193        | 0.2511444              |

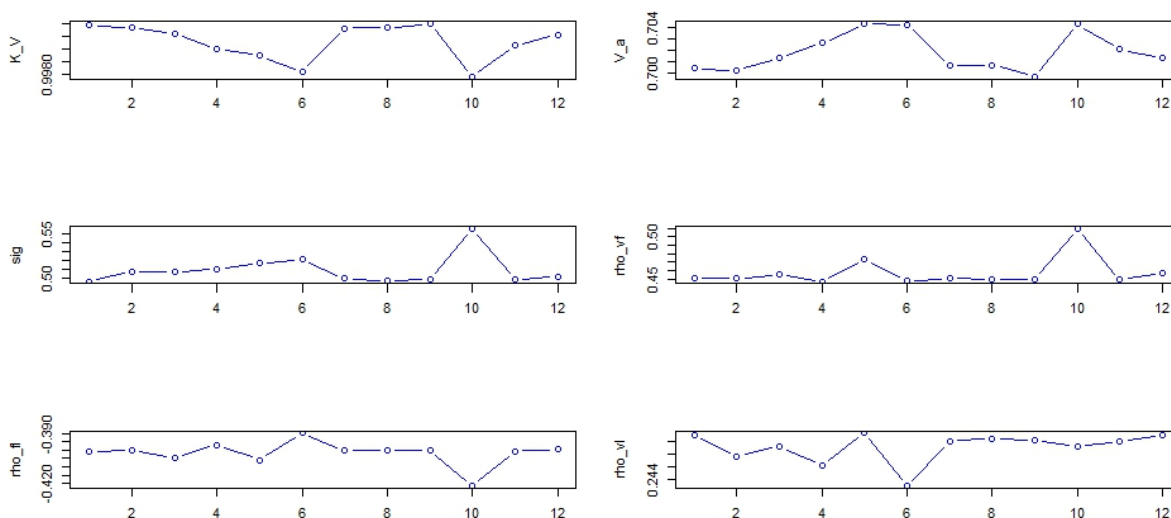
4.2. táblázat. Kalibrált volatilitás és korrelációs paraméterek változása

A paraméterek ingadozása nem volt jelentős, de néhány kiugró érték megjelent, ezért a kalibrált modell végső paramétereit a következőképpen határoztuk meg: hogy kiszűrjük az esetleges kiugró értékek hatását, kivettük a paraméter-készletből a legkisebb és legnagyobb értékeket, és a maradék 10 érték átlagát vettük. Az így kapott végleges paraméter értékek a következő 4.3-as táblázatban láthatóak.

| Paraméter       | $\kappa^V$ | $\bar{V}$  | $\sigma$   | $\rho^{\nabla f}$ | $\rho^{fl}$ | $\rho^{\nabla l}$ |
|-----------------|------------|------------|------------|-------------------|-------------|-------------------|
| Kalibrált érték | 0.99935864 | 0.70179413 | 0.50627935 | 0.45319970        | -0.40079756 | 0.24954566        |

4.3. táblázat. Kalibrált paraméterek – kockázatmentes hozamgörbe

A kockázatmentes forward kamatláb volatilitásáért felelős paraméterek utolsó rendelkezésre



4.2. ábra. Az időszakonként kalibrált paraméterek változása

álló piaci adatokhoz, azaz az utolsó periódusban (2014. 12. 02. - 2015. 01. 02.) kalibrált értékei a 4.4-es táblázatban láthatóak.

| Paraméter     | $\kappa^f$ | $a_0$       | $a_1$      |
|---------------|------------|-------------|------------|
| Kezdeti érték | 0.06352001 | -0.22169033 | 0.09103610 |

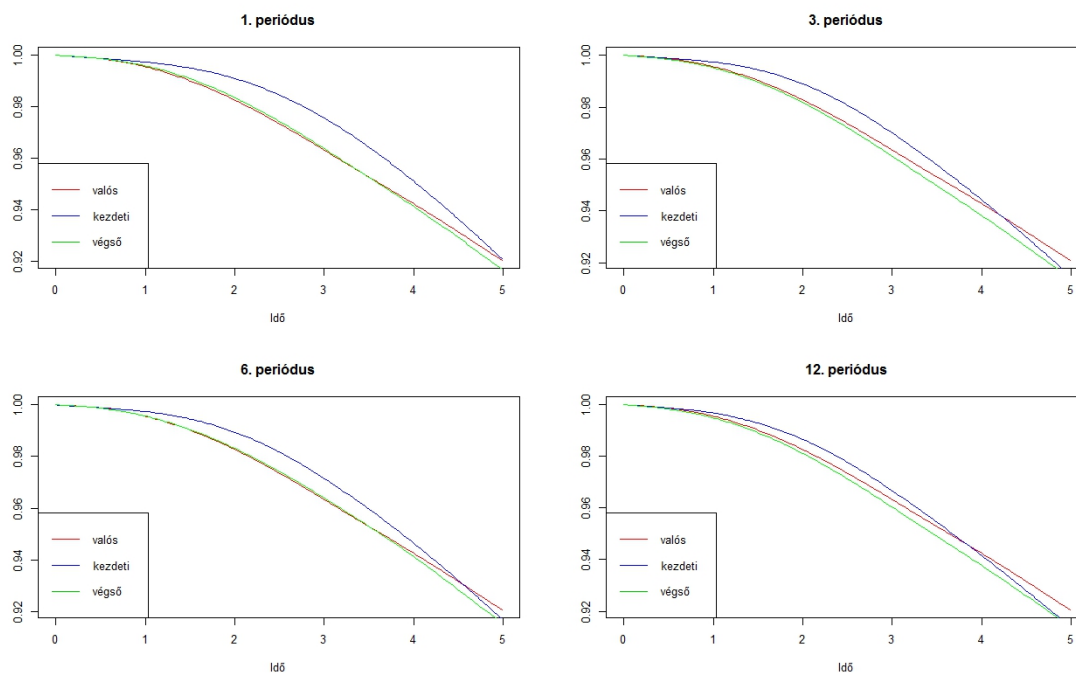
4.4. táblázat. Az kockázatmentes forward kamatláb kalibrált paraméterei

Ezeket a paramétereket alkalmazva a szimulált kockázatmentes diszkontgörbe már sokkal pontosabban illeszkedett, ezt láthatjuk a 4.3-as ábrán, ahol a valódi diszkontgörbét hasonlítottuk össze a kezdeti paraméterekkel szimulált kezdeti modell, és az általunk kalibrált modell által visszaadott diszkontgörbékkel, négy adott periódusban (1., 3., 6., 12.).

Ezután a modell kockázatos diszkontgörbét és forward görbét adó részét, és az ehhez szükséges, eddig nem szereplő paramétereket is kalibráltuk az International Business Machines (továbbiakban IBM) vállalatra vonatkozó forward felárakat használva, amelyeket szintén a Bloomberg rendszerből szereztünk.

Az előzőekben ismertetett paramétereket már fixen tartva az utolsó periódusban (2014. 12. 02. - 2015. 01. 02.) szimulálva összehasonlítottuk a valós forward felárakat a modell által adottakkal. A kezdeti modell paraméterei és rájuk vonatkozó, kalibrálás során felhasznált korlátok a 4.5-ös táblázatban láthatóak.

A kalibrálás során kapott, és így a piaci valós adatokat 2015. 01. 02-ig legjobban eltaláló



4.3. ábra. A kezdeti és kalibrált modell szerinti és valós diszkontgörbék összehasonlítása

| Paraméter     | $\kappa^l$ | $b_0$     | $b_1$     |
|---------------|------------|-----------|-----------|
| Kezdeti érték | 0.5        | 0.1       | 0.01      |
| Felső határ   | $\infty$   | $\infty$  | $\infty$  |
| Alsó határ    | $-\infty$  | $-\infty$ | $-\infty$ |

4.5. táblázat. Kezdeti paraméterek és a paraméterekre vonatkozó korlátok

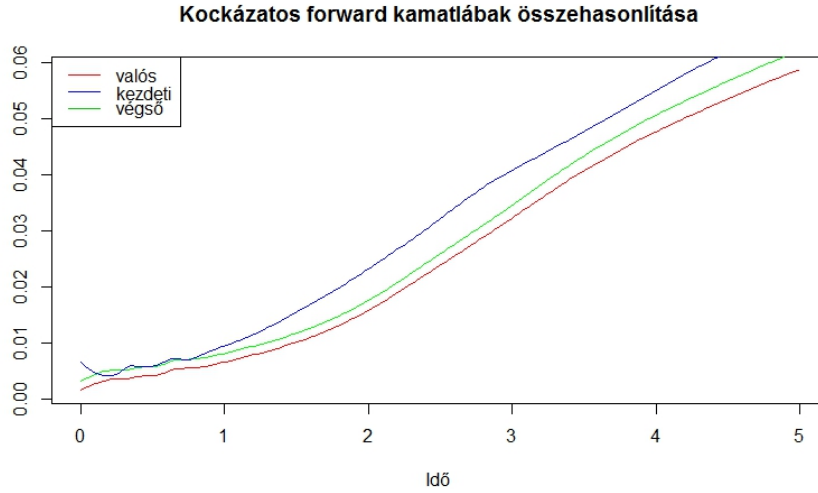
paramétereket a 4.6-os táblázatban közöljük.

| Paraméter       | $\kappa^l$  | $b_0$       | $b_1$       |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|
| Kalibrált érték | 0.410829990 | 0.070145361 | 0.002618766 |

4.6. táblázat. Kalibrált paraméterek - kockázatos hozamgörbe

Végül pedig a valós kockázatos forward kamatlábakat a kezdeti és kalibrált modellek által adott kockázatos forward kamatlábakkal hasonlítottuk össze az utolsó periódusban a 4.4-es ábrán, amelyen látható, hogy ahhoz a kezdeti modellhez képest, amelyben az összes paraméter a korábban már ismertetett kezdeti értékre volt beállítva, a végső modell – amelyben már az összes kalibrált paramétert használtuk – illeszkedése sokat javult a valódi adatokhoz hasonlítva.





4.4. ábra. A két modell szerinti és valós kockázatos forward hozamgörbék összehasonlítása

#### 4.1.2. CDS opció árazása

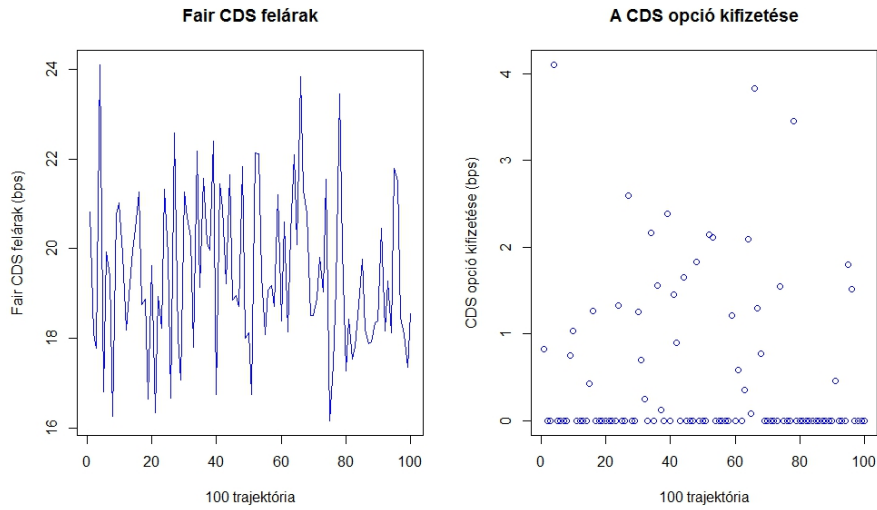
Egységnyi névértékű forward CDS-re vonatkozó opciók árát határoztuk meg különböző kötési árfolyamok mellett, a sztochasztikus HJM modellt használva.

Ehhez a 2014-es adatokhoz paraméterezett modellel 2015.01.02-i kezdettel, 5 évre előre készítettünk szimulációt, bemeneti adatként a korábbiakban leírt, de 2015 elején rendelkezésre álló kockázatmentes diszkontgörbét, és forward felárat használva. Az IBM-re vonatkozó recovery rate értékére 40%-os feltevést tettünk a *Moody's Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2010* tanulmány alapján.

A payer credit default swaption értékét  $t = 0$ -ban (tehát 2015.01.02-án) a (1.11) egyenlőség alapján számoltuk, ehhez felhasználva a  $tr = 1000$  trajektórán szimulált jövőbeli  $r(t)$  kockázatmentes rövid kamatlábakat és  $P(t, T)$  diszkontfaktorokat, valamint az IBM-re vonatkozó  $c(t)$  jövőbeli rövid credit spreadből (3.15) alapján számolt  $\lambda(t)$  kockázatmentes intenzitásfüggvényeket. A kifizetésfüggvényben szereplő  $\pi_f^*(T_E, T_E) = \pi^*(T_E)$  fair CDS spreadet és  $\mathbb{E}_Q(\bar{V}_{prem}^f(T_e) | \mathcal{L}_{T_E})$  értékeket (2.19) egyenlőség alapján határoztuk meg, figyelve rá, hogy a forward CDS  $T_E$  pillanatban kezdődik, és az első díjfizetés az ISDA által bevezetett sztenderdizálás miatt a  $T_E$  lehívási időt követő negyedéves sztenderdizált időpontban lesz esedékes. (A 2015-ös sztenderd dátumok: 2015.03.20., 2015.06.22., 2015.09.21., 2015.12.21.)

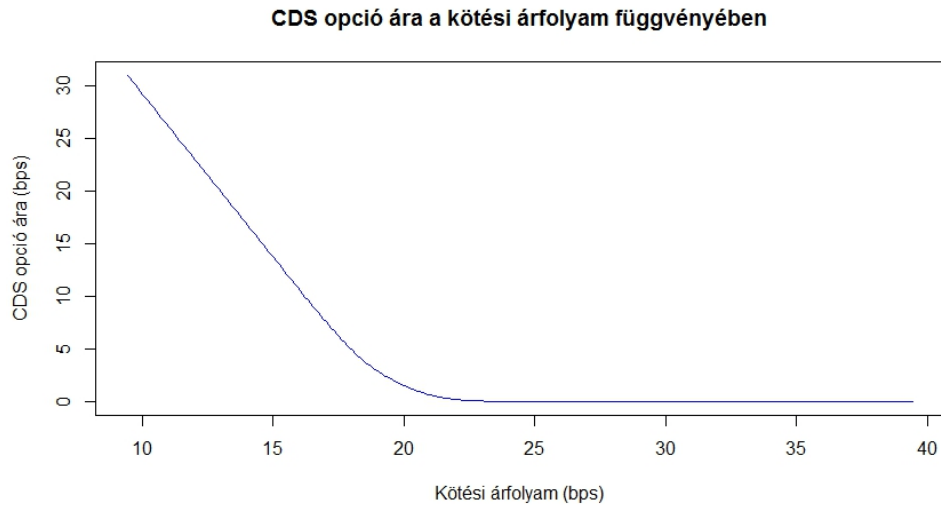
Az árazott CDS opció egy  $T_E = 0.5$  lejáratú időpontú, tehát 2015.07.02-án kezdődő forward CDS-re szól, amelynek így az első díjfizetési időpontja 2015.09.21-e, és  $T = 3$  év hosszú, tehát 2018.09.21-én jár le. Az opció alapjául szolgáló forward CDS fair díja a modell szerint 19.43437 bps.

A 2015.07.02-án kezdődő CDS lehetséges fair árait, és ezek különbségét a  $K = 20$  bps-os kötési árfolyamtól, tehát a  $(\pi^*(T_E) - K)^+$  "kifizetésfüggvényt" 100 trajektórián a 4.5-ös ábrán mutatjuk be.



4.5. ábra. A fair CDS felárak és CDS opció kifizetésfüggvény 100 trajektórián

Az opció ára különböző  $K$  kötési árfolyamok mellett a 4.6-os ábra alapján alakul a modell szerint. Az ATM opció értéke 2.275375 bps.



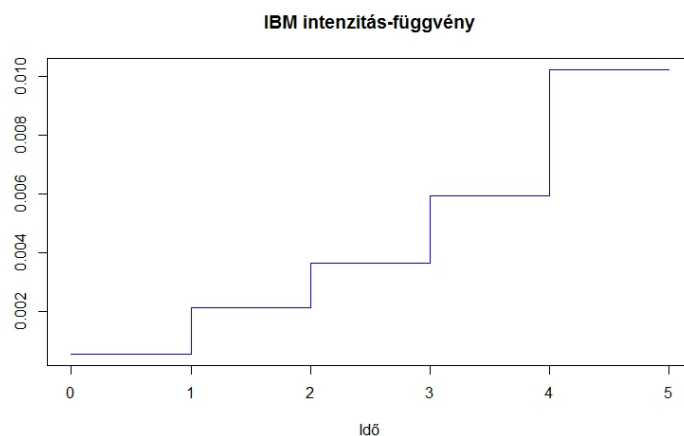
4.6. ábra. A CDS opció ára a kötési árfolyamok függvényében

## 4.2. Árazás a Black-moddal

### 4.2.1. A modell felépítése

Ebben a részben az előzőleg leírt CDS opció<sup>3</sup> egy egyszerűbb, a forward CDS felárak lognormális eloszlását feltételező modell szerinti árazását mutatjuk be. Az árakat különböző  $\sigma_{T_E}$  volatilitás paraméterek mellett, a kötési árfolyamok függvényében ismertetjük.

A modell bemeneti adatai között szerepel a 2015.01.02-án rendelkezésre álló kockázatmentes diszkontgörbe, és az IBM-re vonatkozó, szintén 2015.01.02-án rendelkezésre álló CDS felárak. Ezeket felhasználva először bootstrapping eljárással (2.33) alapján meghatároztuk az IBM-re vonatkozó, szakaszonként konstans intenzitás-függvényt, majd a vállalat túlélési és csődvalószínűségét a következő öt évre, amelyek alakulása a 4.7-es és 4.8-as ábrákon látható.



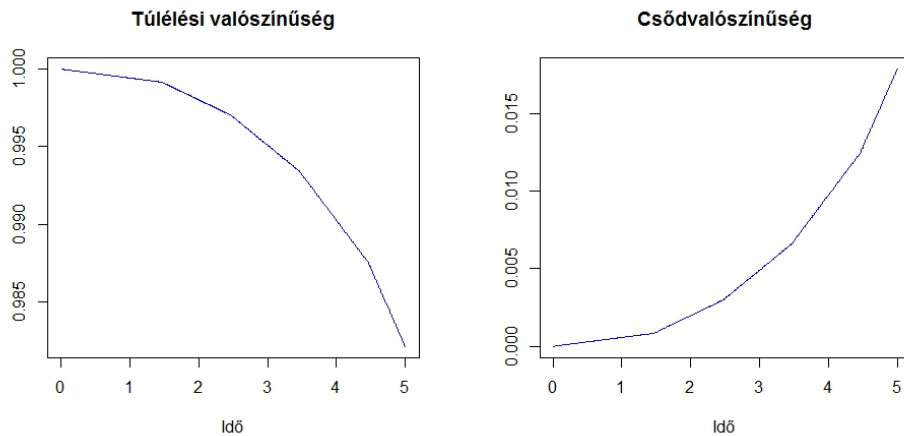
4.7. ábra. IBM intenzitás-függvény

### 4.2.2. CDS opció árazása

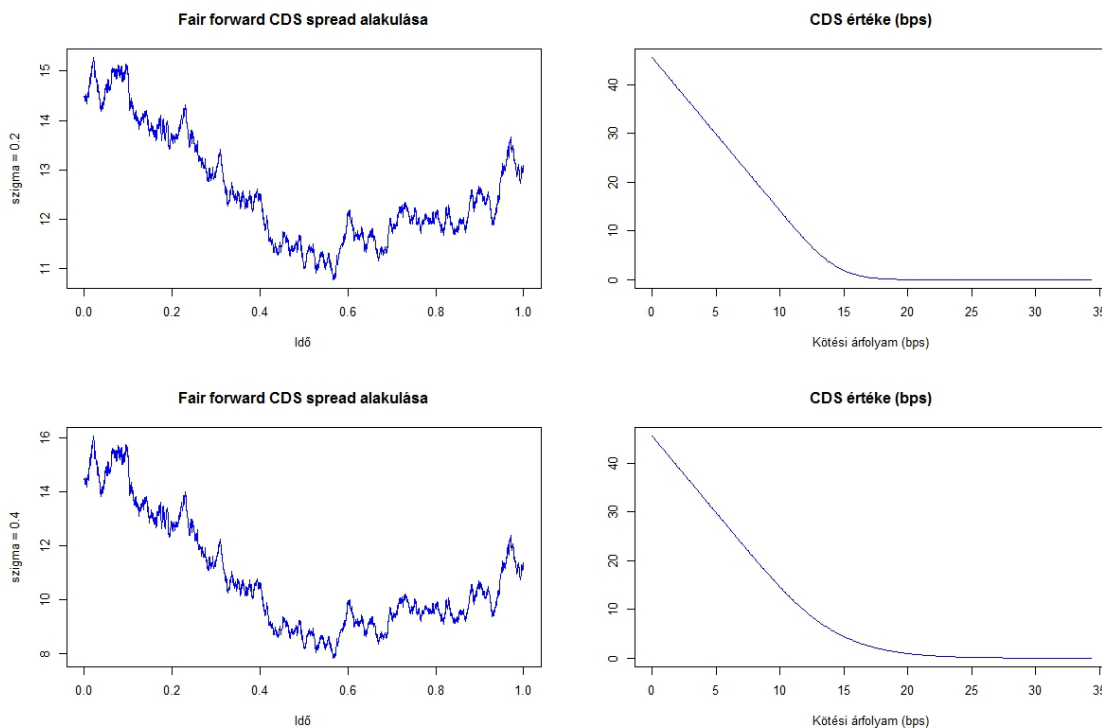
A fél év múlva kezdődő forward CDS Black-modell szerinti fair árát (14.49678 bps) szintén (2.33) alapján számoltuk ki, figyelembe véve, hogy az első díjfizetés időpontja 2015.09.21.

A fair forward CDS felárakra vonatkozó  $\bar{Q}$  mérték szerinti (1.17) lognormális eloszlás feltevés mellett a CDS opció értékét (1.18) egyenlőség alapján számoltuk. A 4.9-es ábrán látható a fair forward felárak lehetséges alakulása és a CDS opció értéke a kötési árfolyam függvényében  $\sigma_{T_E} = 0.2$  illetve  $\sigma_{T_E} = 0.4$  volatilitás paraméterek mellett. Ahogy várható volt, nagyobb volatilitást feltételezve az opciók ára magasabb, és a kötési árfolyam növekedésével a grafikon nem simul olyan gyorsan a nullához.

<sup>3</sup> $T_E = 0.5$  lejáratú időpontú, tehát 2015.07.02-án kezdődő forward CDS-re szól, amelynek így az első díjfizetési időpontja 2015.09.21-e, és  $T = 3$  év hosszú, tehát 2018.09.21-én jár le, recovery rate 40%.



4.8. ábra. IBM túlélési és csődvalószínűségek



4.9. ábra. Forward felárak lehetséges alakulása és CDS opció értéke a kötési árfolyam függvényében

Végül azt vizsgáltuk meg, hogy  $\sigma_{T_E}$  milyen értéke mellett kapunk az ATM opcióra – ami a HJM modell esetén 19.43437 bps-os, a Black-modell esetén 14.49678 bps-os kötési árfolyamot jelent – a kötési árfolyamhoz viszonyítva hasonló arányú CDS opció árat a két modellben. Az ATM opció bázispontban kifejezett értéke  $\sigma_{T_E}$  volatilitás függvényében a 4.7-es táblázatban

látható, amely alapján megállapítható, hogy körülbelül  $\sigma_{TE} = 15\%$ -os volatilitást<sup>4</sup> feltételezve kapunk hasonló arányú CDS opciót árat, mint a sztochasztikus HJM modellben.

| $\sigma_{TE}$    | 0.05      | 0.1      | 0.15    | 0.2      | 0.3      | 0.4      | 0.5      |
|------------------|-----------|----------|---------|----------|----------|----------|----------|
| ATM opció értéke | 0.6423142 | 1.284428 | 1.92614 | 2.567251 | 3.846871 | 5.121703 | 6.390177 |

4.7. táblázat. ATM CDS opciók értéke (bps) a volatilitás függvényében

### 4.3. Összehasonlítás, összefoglalás

A szakdolgozatban az elméleti háttér bevezetése és áttekintése után illikvid credit default swaption-ök árazására két modellt használtunk.

Az első fejezetben általánosan, csupán a hitelderivatívák struktúráját felhasználva tárgyaltuk a credit default swapp-ok és credit default swaption-ök árazását, majd a második fejezetben bevezetett, hitelkockázat kezelésére alkalmas két keretrendszerben –strukturális és intenzitás modellek – pontosítottuk ezeket, felhasználva az adott modell feltevéseit és tulajdonságait.

A harmadik fejezetben bevezettünk egy sztochasztikus volatilitást használó Heath-Jarrow-Morton modellt, amelyben különválasztottuk a kockázatmentes forward hozamot az ezen felüli, kockázatért kompenzáló forward credit spreadtől, és ezek dinamikájára tettünk feltevéseket a HJM-típusú modellek feltevéseivel konzisztensen, de egy extra sztochasztikus volatilitás-folyamatot is használva, amely a forward kamatlábak driftjére és volatilitására hat.

A negyedik fejezetben a korábbiakban ismertett modelleket összefogva és a levezetett árazóképletek felhasználásával credit default swaption-ök árazására két modellt is használtunk: elsőként a harmadik fejezetben tárgyalt sztochasztikus HJM modellt, majd az alaptermék árának lognormális fejlődését feltevő Black-modellt.

A két modell által adott árak kissé különböztek ugyan, de a modellek alapvető feltevéseinek különbségeit figyelembe véve ez egyáltalán nem meglepő.

A két modellt elsősorban azért nehéz összehasonlítani, mert különböző – az IBM kockázatoságát kifejező – bemeneti adatokat használtunk hozzájuk – mindkettőhöz olyanokat, amelyek a modell fő tulajdonságaihoz a legjobban illettek – így a sztochasztikus volatilitású HJM modellhez forward credit spreadet, amelyből folytonos sztochasztikus intenzitás-függvényt szimulálhattunk. Az egyszerűbb Black-modellhez a CDS felárakból visszszámolható szakaszonként konstans intenzitás-függvényt használtuk, amelynek már a meghatározásához is egyszerűsítéseket tettünk (diszkretizálás). A két modell eredményeinek eltérését tehát a különböző adatok is magyarázhatják.

<sup>4</sup>egészen pontosan 13.22%-os volatilitást

Ezenkívül a Black-modellben a forward CDS felárak  $\mathbb{Q}$  mérték szerinti lognormális eloszlását tettük fel, amit már többen is elvetettek, mert a piacon megfigyelt adatokhoz képest túlságosan ferdének és csúcsosnak bizonyultak az árak. Azonban a drift nélküli, geometriai Brown-mozgást követő felárak hasznos következménye a Black-formulával számolható ár, ami a modell egyszerűsége mellett is igen vonzó.

A sztochasztikus HJM modellt ugyan kalibráltuk a 2014-es piaci adatokhoz, és sok érv szól mellette<sup>5</sup>, illetve sokan megmutatták már, hogy jól visszaadja a piaci jellegzetességeket, de kérdéses lehet természetesen magának a modellnek az alapfelvetése a rövid forward kamatlábak és credit spreadek dinamikájáról, vagy alkalmassága CDS opciók árazására. A kalibráció és az árak szempontjából is meghatározó még a szimuláció során használt trajektóriaszám, amit tovább emelve még pontosabban meghatározhatóak a modell paraméterei és így a modell által számolt ár.

Mivel a két modell szerinti, alaptermékül szolgáló fair forward CDS felárak is némileg eltértek (19.43437 bps és 14.49678 bps), ezért a rájuk szóló opció értéke is különbözött azonos kötési árfolyamokat vizsgálva. Azonban a CDS opciók likviditásának hiánya miatt nem volt lehetőségünk az árak ellenőrzésére, csak azt állapíthattuk meg, hogy mindkét forward CDS felár körülbelül a várt tartományba esik (a rendelkezésünkre álló, fair CDS díjakhoz hasonlítva).

Hogy valamilyen módon mégis összehasonlíthassuk a két modellt, megvizsgáltuk, hogy ATM credit default swaptiont tekintve, a Black-modell körülbelül 15%-os volatilitása mellett kapunk hasonló opció ár/kötési árfolyam arányt a két modellben.

---

<sup>5</sup>lásd 3. fejezet

# A. Függelék - Együttható függvények és állapotváltozók

A (3.2.1) állításban szereplő  $B_{xji}(t)$  és  $B_{\phi ji}(t)$  együttható függvények, illetve  $x_{ji}(t)$  és  $\phi_{ji}(t)$  állapotváltozók pontos alakját ismertetjük a továbbiakban, bizonyításért lásd [6] és [20].

$$\begin{cases} B_{x1i}(T-t) = (a_{0i} + a_{1i}(T-t))e^{-\kappa_i^f(T-t)}, \\ B_{x2i}(T-t) = z_i^{l1}(b_{0i} + b_{1i}(T-t))e^{-\kappa_i^l(T-t)}, \\ B_{x3i}(T-t) = z_i^{l2}(b_{0i} + b_{1i}(T-t))e^{-\kappa_i^l(T-t)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{\phi1i}(T-t) = z_i^{f1}a_{1i}e^{-\kappa_i^f(T-t)}, \\ B_{\phi2i}(T-t) = \frac{a_{1i}}{\kappa_i^f} \left( \frac{1}{\kappa_i^f} + \frac{a_{0i}}{a_{1i}} \right) (a_{0i} + a_{1i}(T-t))e^{-\kappa_i^f(T-t)}, \\ B_{\phi3i}(T-t) = - \left( \frac{a_{1i}a_{1i}}{\kappa_i^f} \left( \frac{1}{\kappa_i^f} + \frac{a_{0i}}{a_{1i}} \right) + \frac{a_{1i}}{\kappa_i^f} \left( \frac{a_{1i}}{\kappa_i^f} + 2a_{0i} \right) (T-t) + \frac{a_{1i}a_{1i}}{\kappa_i^f} (T-t)^2 \right) e^{-2\kappa_i^f(T-t)}, \\ B_{\phi4i}(T-t) = \frac{a_{1i}a_{1i}}{\kappa_i^f} \left( \frac{1}{\kappa_i^f} + \frac{a_{0i}}{a_{1i}} \right) e^{-\kappa_i^f(T-t)}, \\ B_{\phi5i}(T-t) = - \frac{a_{1i}}{\kappa_i^f} \left( \frac{a_{1i}}{\kappa_i^f} + 2a_{0i} + 2a_{1i}(T-t) \right) e^{-2\kappa_i^f(T-t)}, \\ B_{\phi6i}(T-t) = - \frac{a_{1i}a_{1i}}{\kappa_i^f} e^{-2\kappa_i^f(T-t)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{\phi7i}(T-t) = z_i^{l1} \left( \frac{a_{0i}b_{0i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{1i}b_{0i}}{(\kappa_i^f)^2} + \left( \frac{a_{0i}b_{1i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{1i}b_{1i}}{(\kappa_i^f)^2} \right) (T-t) \right) e^{-\kappa_i^l(T-t)}, \\ B_{\phi8i}(T-t) = -z_i^{l1} \left( \frac{a_{0i}b_{0i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{1i}b_{0i}}{(\kappa_i^f)^2} + \left( \frac{a_{1i}b_{0i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{0i}b_{1i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{1i}b_{1i}}{(\kappa_i^f)^2} \right) (T-t) + \frac{a_{1i}b_{1i}}{\kappa_i^f} (T-t)^2 \right) e^{-(\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t)}, \\ B_{\phi9i}(T-t) = z_i^{l1} \left( \frac{a_{0i}b_{0i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{1i}b_{0i}}{(\kappa_i^f)^2} \right) e^{-\kappa_i^l(T-t)}, \\ B_{\phi10i}(T-t) = -z_i^{l1} \left( \frac{a_{1i}b_{0i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{0i}b_{1i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{1i}b_{1i}}{(\kappa_i^f)^2} - 2 \frac{a_{1i}b_{1i}}{\kappa_i^f} (T-t) \right) e^{-(\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t)}, \\ B_{\phi11i}(T-t) = -z_i^{l1} \frac{a_{1i}b_{1i}}{\kappa_i^f} e^{-(\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t)}, \\ B_{\phi12i}(T-t) = z_i^{l1} \left( \frac{a_{0i}b_{0i}}{\kappa_i^l} + \frac{a_{0i}b_{1i}}{(\kappa_i^l)^2} + \left( \frac{a_{1i}b_{0i}}{\kappa_i^l} + \frac{a_{1i}b_{1i}}{(\kappa_i^l)^2} \right) (T-t) \right) e^{-\kappa_i^f(T-t)}, \\ B_{\phi13i}(T-t) = z_i^{l1} \left( \frac{a_{0i}b_{0i}}{\kappa_i^l} + \frac{a_{1i}b_{1i}}{(\kappa_i^l)^2} \right) e^{-\kappa_i^f(T-t)}. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{\phi 14i}(T-t) = \frac{b_{1i}}{\kappa_i^f} \left( \frac{1}{\kappa_i^l} + \frac{b_{0i}}{b_{1i}} \right) (b_{0i} + b_{1i}(T-t)) e^{-\kappa_i^l(T-t)}, \\ B_{\phi 15i}(T-t) = \left( \frac{b_{1i}b_{1i}}{\kappa_i^l} \left( \frac{1}{\kappa_i^l} + \frac{b_{0i}}{b_{1i}} \right) + \frac{b_{1i}}{\kappa_i^l} (b_{1i} + 2b_{0i})(T-t) + \frac{b_{1i}b_{1i}}{\kappa_i^l} (T-t)^2 \right) e^{-2\kappa_i^l(T-t)}, \\ B_{\phi 16i}(T-t) = \frac{b_{1i}b_{1i}}{\kappa_i^l} \left( \frac{1}{\kappa_i^l} + \frac{b_{0i}}{b_{1i}} \right) e^{-\kappa_i^l(T-t)}, \\ B_{\phi 17i}(T-t) = -\frac{b_{1i}}{\kappa_i^l} \left( \frac{b_{1i}}{\kappa_i^l} + 2b_{0i} + 2b_{1i}(T-t) \right) e^{-2\kappa_i^l(T-t)}, \\ B_{\phi 18i}(T-t) = -\frac{b_{1i}b_{1i}}{\kappa_i^l} e^{-2\kappa_i^l(T-t)}, \\ B_{\phi 19i}(T-t) = z_i^{l1} b_{1i} e^{-\kappa_i^l(T-t)}, \\ B_{\phi 20i}(T-t) = z_i^{l2} b_{1i} e^{-\kappa_i^l(T-t)}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_{1i}(t) = -\kappa_i^f x_{1i}(t) dt + \sqrt{r(t)V_i(t)} d\widetilde{W}_i(t), \\ dx_{2i}(t) = -\kappa_i^l x_{2i}(t) dt + \sqrt{c(t)V_i(t)} d\widetilde{W}_i(t), \\ dx_{3i}(t) = -\kappa_i^l x_{3i}(t) dt + \sqrt{c(t)V_i(t)} d\widetilde{W}_{n+i}(t). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\phi_{1i}(t) = (x_{1i}(t) - \kappa_i^f \phi_{1i}(t)) dt, \\ d\phi_{2i}(t) = (r(t)V_i(t) - \kappa_i^f \phi_{2i}(t)) dt, \\ d\phi_{3i}(t) = (r(t)V_i(t) - 2\kappa_i^f \phi_{3i}(t)) dt, \\ d\phi_{4i}(t) = (\phi_{2i}(t) - \kappa_i^f \phi_{4i}(t)) dt, \\ d\phi_{5i}(t) = (\phi_{3i}(t) - 2\kappa_i^f \phi_{5i}(t)) dt, \\ d\phi_{6i}(t) = (2\phi_{5i}(t) - 2\kappa_i^f \phi_{6i}(t)) dt. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\phi_{7i}(t) = (V_i(t)\sqrt{r(t)c(t)} - \kappa_i^l \phi_{7i}(t)) dt, \\ d\phi_{8i}(t) = (V_i(t)\sqrt{r(t)c(t)} - (\kappa_i^l + \kappa_i^f) \phi_{8i}(t)) dt, \\ d\phi_{9i}(t) = (\phi_{9i}(t) - \kappa_i^l \phi_{9i}(t)) dt, \\ d\phi_{10i}(t) = (\phi_{10i}(t) - (\kappa_i^l + \kappa_i^f) \phi_{10i}(t)) dt, \\ d\phi_{11i}(t) = (2\phi_{12i}(t) - (\kappa_i^l + \kappa_i^f) \phi_{11i}(t)) dt, \\ d\phi_{12i}(t) = (V_i(t)\sqrt{r(t)c(t)} - \kappa_i^f \phi_{12i}(t)) dt, \\ d\phi_{13i}(t) = (\phi_{14i}(t) - \kappa_i^f \phi_{13i}(t)) dt. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\phi_{14i}(t) = (c(t)V_i(t) - \kappa_i^l \phi_{14i}(t)) dt, \\ d\phi_{15i}(t) = (c(t)V_i(t) - 2\kappa_i^l \phi_{15i}(t)) dt, \\ d\phi_{16i}(t) = (\phi_{16i}(t) - \kappa_i^l \phi_{16i}(t)) dt, \\ d\phi_{17i}(t) = (\phi_{15i}(t) - 2\kappa_i^l \phi_{17i}(t)) dt, \\ d\phi_{18i}(t) = (2\phi_{17i}(t) - 2\kappa_i^l \phi_{18i}(t)) dt, \\ d\phi_{19i}(t) = (x_{2i}(t) - \kappa_i^l \phi_{19i}(t)) dt, \\ d\phi_{20i}(t) = (x_{3i}(t) - \kappa_i^l \phi_{20i}(t)) dt. \end{array} \right.$$



Továbbá a kezdeti feltételek  $x_{ji}(0) = \phi_{ji}(0) = 0$ , minden  $i = 1, \dots, n$  és  $j = 1, \dots, 20$  esetén. Ezen kívül a differenciálegyenlet rendszert még ki kell bővíteni a  $V_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) dinamikájára vonatkozó sztochasztikus differenciálegyenletekkel, lásd (3.26).

A (3.39) és (3.40) állításokban szereplő determinisztikus együtttható függvények a következő alakúak:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{x1i}(T-t) = \frac{z_i^{f1}}{(\kappa_i^f)^2} \left( a_{0i}\kappa_i^f + a_{1i} - e^{-\kappa_i^f(T-t)} (a_{0i}\kappa_i^f + a_{1i} + a_{1i}\kappa_i^f(T-t)) \right), \\ D_{x2i}(T-t) = \frac{z_i^{l1}}{(\kappa_i^l)^2} \left( a_{0i}\kappa_i^l + a_{1i} - e^{-\kappa_i^l(T-t)} (a_{0i}\kappa_i^l + a_{1i} + a_{1i}\kappa_i^l(T-t)) \right), \\ D_{x3i}(T-t) = \frac{z_i^{l2}}{(\kappa_i^l)^2} \left( a_{0i}\kappa_i^l + a_{1i} - e^{-\kappa_i^l(T-t)} (a_{0i}\kappa_i^l + a_{1i} + a_{1i}\kappa_i^l(T-t)) \right), \\ \\ D_{\phi1i}(T-t) = \frac{z_i^{f1} a_{1i}}{\kappa_i^f} (1 - e^{-\kappa_i^f(T-t)}), \\ D_{\phi2i}(T-t) = \left( \frac{a_{1i}}{\kappa_i^f} \right)^2 \left( \left( \frac{1}{\kappa_i^f} + \frac{a_{0i}}{a_{1i}} \right) (e^{-\kappa_i^f(T-t)} - 1) + (T-t)e^{-\kappa_i^f(T-t)} \right), \\ D_{\phi3i}(T-t) = -\frac{a_{1i}}{(\kappa_i^f)^2} \left( \left( \frac{a_{1i}}{2(\kappa_i^f)^2} + \frac{a_{0i}}{\kappa_i^f} + \frac{(a_{0i})^2}{2a_{1i}} \right) (e^{-2\kappa_i^f(T-t)} - 1) + \right. \\ \left. + \left( \frac{a_{1i}}{\kappa_i^f} + a_{0i} \right) (T-t)e^{-2\kappa_i^f(T-t)} + \frac{a_{1i}}{2} (T-t)^2 e^{-2\kappa_i^f(T-t)} \right), \\ D_{\phi4i}(T-t) = \left( \frac{a_{1i}}{\kappa_i^f} \right)^2 \left( \frac{1}{\kappa_i^f} + \frac{a_{0i}}{a_{1i}} \right) (e^{-\kappa_i^f(T-t)} - 1), \\ D_{\phi5i}(T-t) = -\frac{a_{1i}}{(\kappa_i^f)^2} \left( \left( \frac{a_{1i}}{\kappa_i^f} + a_{0i} \right) (e^{-2\kappa_i^f(T-t)} - 1) + a_{1i}(T-t)e^{-2\kappa_i^f(T-t)} \right), \\ D_{\phi6i}(T-t) = -\frac{1}{2} \left( \frac{a_{1i}}{\kappa_i^f} \right)^2 (e^{-2\kappa_i^f(T-t)} - 1) \\ \\ D_{\phi7i}(T-t) = \frac{z_i^{l1}}{\kappa_i^f \kappa_i^l} \left( (a_{0i} + \frac{a_{1i}}{\kappa_i^f}) b_{1i}(T-t) e^{-\kappa_i^l(T-t)} \right), \\ D_{\phi8i}(T-t) = -\frac{z_i^{l1}}{\kappa_i^f + \kappa_i^l} \left( \left( \frac{a_{0i} b_{0i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{1i} b_{0i}}{(\kappa_i^f)^2} \right) (e^{-(\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t)} - 1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\kappa_i^f + \kappa_i^l} \left( \frac{a_{1i} b_{0i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{0i} b_{1i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{1i} b_{1i}}{(\kappa_i^f)^2} \right) (1 - e^{-(\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t)} - (\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t) e^{-(\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t)}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\kappa_i^f + \kappa_i^l} \frac{a_{1i} b_{1i}}{\kappa_i^f} \left( 2 - e^{-(\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t)} (2 - (\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t) (2 - (\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t))) \right) \right), \\ D_{\phi9i}(T-t) = \frac{z_i^{l1}}{\kappa_i^l} \left( \frac{a_{0i} b_{0i}}{\kappa_i^f} + \frac{a_{1i} b_{1i}}{(\kappa_i^f)^2} \right) (1 - e^{-\kappa_i^l(T-t)}) \\ D_{\phi10i}(T-t) = -\frac{z_i^{l1}}{(\kappa_i^f + \kappa_i^l) \kappa_i^f} \left( (a_{0i} b_{1i} + \frac{a_{1i} b_{1i}}{\kappa_i^f}) (b_{0i} - 2 \frac{b_{1i}}{(\kappa_i^f + \kappa_i^l)}) (1 - e^{-(\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t)}) + \right. \\ \left. + 2b_{1i}(T-t) e^{-(\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t)} \right), \\ D_{\phi11i}(T-t) = -\frac{z_i^{l1}}{\kappa_i^f + \kappa_i^l} \frac{a_{1i} b_{1i}}{\kappa_i^f} (1 - e^{-(\kappa_i^f + \kappa_i^l)(T-t)}), \\ D_{\phi12i}(T-t) = \frac{z_i^{l1}}{\kappa_i^f \kappa_i^l} \left( (b_{0i} \frac{b_{0i}}{\kappa_i^f}) a_{1i}(T-t) e^{-\kappa_i^f(T-t)} \right), \\ D_{\phi13i}(T-t) = \frac{z_i^{l1}}{\kappa_i^f} \left( \frac{a_{0i} b_{0i}}{\kappa_i^l} + \frac{a_{1i} b_{1i}}{(\kappa_i^l)^2} \right) (1 - e^{-\kappa_i^f(T-t)}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
B_{\phi 14i}(T-t) = \left(\frac{b_{1i}}{\kappa_i^l}\right)^2 \left(\frac{1}{\kappa_i^l} + \frac{b_{0i}}{b_{1i}}\right) \left(\left(\frac{1}{\kappa_i^l} + \frac{b_{0i}}{b_{1i}}\right) (e^{-\kappa_i^l(T-t)} - 1) + (T-t)e^{-\kappa_i^l(T-t)}\right), \\
B_{\phi 15i}(T-t) = -\left(\frac{b_{1i}}{(\kappa_i^l)^2}\right) \left(\left(\frac{b_{1i}}{2(\kappa_i^l)^2} + \frac{b_{0i}}{\kappa_i^l} + \frac{(b_{1i})^2}{2b_{1i}}\right) (e^{-2\kappa_i^l(T-t)} - 1) + \right. \\
\left. + \left(\frac{b_{1i}}{\kappa_i^l} + b_{0i}\right) (T-t)e^{-2\kappa_i^l(T-t)} + \frac{b_{1i}}{2}(T-t)^2 e^{-2\kappa_i^l(T-t)}\right), \\
B_{\phi 16i}(T-t) = \left(\frac{b_{1i}}{\kappa_i^l}\right)^2 \left(\frac{1}{\kappa_i^l} + \frac{b_{0i}}{b_{1i}}\right) (e^{-\kappa_i^l(T-t)} - 1), \\
B_{\phi 17i}(T-t) = -\left(\frac{b_{1i}}{(\kappa_i^l)^2}\right) \left(\left(\frac{b_{1i}}{\kappa_i^l} + b_{0i}\right) (e^{-2\kappa_i^l(T-t)} - 1) + b_{1i}(T-t)e^{-2\kappa_i^l(T-t)}\right), \\
B_{\phi 18i}(T-t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{b_{1i}}{\kappa_i^l}\right)^2 (e^{-2\kappa_i^l(T-t)} - 1), \\
B_{\phi 19i}(T-t) = \frac{z_i^{l1} b_{1i}}{\kappa_i^l} (1 - e^{-\kappa_i^l(T-t)}), \\
B_{\phi 20i}(T-t) = \frac{z_i^{l2} b_{1i}}{\kappa_i^l} (1 - e^{-\kappa_i^l(T-t)})
\end{array} \right.$$

## B. Függlék - Programkód

```
##### function Vsim #####
Vsim <-function(V_0, K_V, V_a, dt, z_V1, z_V2, z_V3, dW, dW2, sig, traj){
  v=rep(0,(n*d+1))
  v[1]=V_0
  for (i in 1:(n*d)){
    v[i+1] = v[i] + (K_V*(V_a - v[i]) + sig * v[i] * (z_V1+z_V2+z_V3))*dt + z_V1*sig*sqrt(v[i])
      *dW[i,1,traj]+ (sig*z_V1/2)^2 * dW2[i,1,traj]+ z_V2*sig*sqrt(v[i])*dW[i,2,traj]+
      (sig*z_V2/2)^2 * dW2[i,2,traj]+z_V3*sig*sqrt(v[i])*dW[i,3,traj]+ (sig*z_V3/2)^2 * dW2[i,3,traj] }
    return(v)
  }
##### B coeff functions #####
Bx1func <- function(a_0, a_1, K_f, t){
  return(a_0+a_1*t)*exp(-K_f*t)
}
Bx2func <- function(b_0, b_1, K_l, z_l1, t){
  return(z_l1*(b_0+b_1*t)*exp(-K_l*t))
}
Bx3func <- function( b_0, b_1, K_l, z_l2, t){
  return(z_l2*(b_0+b_1*t)*exp(-K_l*t))
}
Bphi_1_6_func <- function(a_0, a_1, K_f, t){
  b=rep(0,6)
  b[1]=a_1*exp(-K_f*t)
  b[2]=a_1/K_f*(1/K_f+a_0/a_1)*(a_0+a_1*t)*exp(-K_f*t)
  b[3]=- (a_1^2/K_f*(1/K_f+a_0/a_1)+a_1/K_f*(a_1/K_f+2*a_0)*t+a_1^2/K_f*t^2)*exp(-2*K_f*t)
  b[4]=a_1^2/K_f*(1/K_f+a_0/a_1)*exp(-K_f*t)
  b[5]=-a_1/K_f*(a_1/K_f+2*a_0+2*a_1*t)*exp(-2*K_f*t)
  b[6]=- (a_1)^2/K_f*exp(-2*K_f*t)
  return(b)
}
Bphi_7_20_func <- function(a_0, a_1, b_0, b_1, K_f, K_l, z_l1, z_l2, t){
  b=rep(0,14)
  b[1]= z_l1*(a_0*b_0/K_f + a_1*b_0 / (K_f)^2 + (a_0*b_1/K_f + a_1*b_1/ (K_f)^2)*t)*exp(-K_l*t)#7
  b[2]= -z_l1*(a_0*b_0/K_f + a_1*b_0 / (K_f)^2 + (a_1*b_0/K_f + a_0*b_1/K_f+ a_1*b_1/ (K_f)^2)*t
    + a_1*b_1/K_f*t^2 )*exp(-(K_f+K_l)*t)#8
  b[3]= z_l1*(a_0*b_0/K_f + a_1*b_1 / (K_f)^2) *exp(-K_l*t)#9
  b[4]= -z_l1*(a_1*b_0/K_f + a_0*b_1/K_f + a_1*b_1 / (K_f)^2 - 2* a_1*b_1/K_f*t)*exp(-(K_f+K_l)*t)#10
  b[5]= -z_l1*a_1*b_1/K_f *exp(-(K_f+K_l)*t)#11
  b[6]= z_l1*(a_0*b_0/K_l + a_0*b_1 / (K_l)^2 + (a_1*b_0/K_l + a_1*b_1 / (K_l)^2) *t)*exp(-K_f*t) #12
  b[7]= z_l1*(a_0*b_0/K_l + a_1*b_1 / (K_l)^2)*exp(-K_f*t) #13
  b[8]= b_1/K_l * (1/K_l+b_0/b_1)*(b_0+b_1*t)*exp(-K_l*t) #14
  b[9]= (b_1 ^2 /K_l * (1/K_l+b_0/b_1) +b_1/K_l*(b_1/K_l + 2* b_0)*t +b_1 ^2 /K_l *t^2)*exp(-2*K_l*t)
  b[10]= (b_1 ^2 /K_l * (1/K_l+b_0/b_1))*exp(-K_l*t) #16
  b[11]= -b_1/K_l*(b_1/K_l + 2*b_0 + 2*b_1*t)*exp(-2*K_l*t) #17
  b[12]= -b_1 ^2 /K_l *exp(-2*K_l*t) #18
```

```

b[13]= z_l1 * b_1 * exp(-K_l*t)#19
b[14]= z_l2 * b_1 * exp(-K_l*t)#20
return(b)
}
##### D coeff functions #####
Dx1func <- function(a_0, a_1, K_f, t){
  return(1/ K_f^2 *(a_0*K_f+a_1 - exp(-K_f*t)*(a_0*K_f + a_1 + a_1*K_f*t)))
}
Dx2func <- function(a_0, a_1, K_l, z_l1, t){
  return(z_l1/ K_l^2 *(a_0*K_l+a_1 - exp(-K_l*t)*(a_0*K_l + a_1 + a_1*K_l*t)))
}
Dx3func <- function(a_0, a_1, K_l, z_l2, t){
  return(z_l2/ K_l^2 *(a_0*K_l+a_1 - exp(-K_l*t)*(a_0*K_l + a_1 + a_1*K_l*t)))
}
Dphi_1_6_func <- function(a_0, a_1, K_f, t){
  b=rep(0,6)
  b[1]=a_1/K_f *(1-exp(-K_f*t))
  b[2]=(a_1/K_f)^2 *(1/K_f+a_0/a_1)*((1/K_f+a_0/a_1) *(exp(-K_f*t)-1) + t*exp(-K_f*t))
  b[3]=- (a_1/K_f^2)*((a_1/(2*K_f^2)+a_0/K_f+a_0^2/(2*a_1))*(exp(-2*K_f*t)-1)
  + (a_1/K_f+a_0)*t*exp(-2*K_f*t)+a_1/2*t^2 *exp(-2*K_f*t))
  b[4]=(a_1/K_f)^2*(1/K_f + a_0/a_1)*(exp(-K_f*t)-1)
  b[5]=- (a_1/K_f^2)*((a_1/K_f+a_0)*(exp(-2*K_f*t)-1)+a_1*t*exp(-2*K_f*t))
  b[6]=-1/2*(a_1/K_f)^2 *(exp(-2*K_f*t)-1)
  return(b)
}
Dphi_7_20_func <- function(a_0, a_1, b_0, b_1, K_f, K_l, z_l1, z_l2, t){
  b=rep(0,14)
  b[1]= z_l1/(K_f*K_l)*((a_0+a_1/K_f)*b_1*t*exp(-K_l*t)) #7
  b[2]= -z_l1/(K_f+K_l)*((a_0*b_0/K_f+a_1*b_0/K_f^2)*(exp(-(K_f+K_l)*t)-1)+1/(K_f+K_l)
  *(a_1*b_0/K_f+a_0*b_1/K_f+a_1*b_1/K_f^2)*(1-exp(-(K_f+K_l)*t)-(K_f+K_l)*t* exp(-(K_f+K_l)*t))
  +1/(K_f+K_l)*a_1*b_1/K_f*(2- exp(-(K_f+K_l)*t)*(2- (K_f+K_l)*t*(2-(K_f+K_l)*t)))) #8
  b[3]= z_l1/K_l * (a_0*b_0/K_f + a_1*b_1/K_f^2) *(1-exp(-K_l*t)) #9
  b[4]= -z_l1/(K_f*(K_f+K_l))*((a_0*b_1 + a_1*b_1/K_f)*(b_0-2*b_1/(K_f+K_l))
  *(1-exp(-1*(K_f+K_l)*t))+2*b_1*t*exp(-1*(K_f+K_l)*t)) #10
  b[5]= -z_l1/(K_f+K_l)*a_1*b_1/K_f*(1-exp(-1*(K_f+K_l)*t)) #11
  b[6]= z_l1/(K_f*K_l)*((b_0+b_1/K_f)*a_1*t*exp(-K_f*t)) #12
  b[7]= z_l1/K_f * (a_0*b_0/K_l+ a_1*b_1/K_l^2)*(1-exp(-K_f*t)) #13
  b[8]= (b_1/K_l)^2 *(1/K_l + b_0/b_1)*((1/K_l + b_0/b_1)*(exp(-K_l*t)-1)+t*exp(-K_l*t)) #14
  b[9]= -b_1/K_l^2 *( (b_1/(2*K_l^2)+b_0/K_l+b_0 ^2 / (2*b_1))*(exp(-2*K_l*t)-1)
  +(b_1/K_l+b_0)*t*exp(-2*K_l*t)+b_1/2*t^2*exp(-2*K_l*t)) #15
  b[10]= (b_1/K_l)^2 * (1/K_l+ b_0/b_1)*(exp(-K_l*t)-1) #16
  b[11]= -b_1/K_l^2 * ((b_1/K_l+b_0)*(exp(-2*K_l*t)-1)+b_1*t*exp(-2*K_l*t)) #17
  b[12]= -1/2 * (b_1/K_l)^2 *(exp(-2*K_l*t)-1) #18
  b[13]=z_l1*b_1/K_l*(1-exp(-K_l*t)) #19
  b[14]= z_l2 *b_1/K_l*(1-exp(-K_l*t)) #20
  return(b)
}
##### function P sim #####
Psim <- function(K_f, V, B_x1, Bphi_16, D_x1, Dphi_16, P_OT, f_OT, traj){
  x_1=rep(NA, (n*d+1))
  phi_16=matrix(NA, (n*d+1),6)
  P=matrix(NA, (n*d+1),length(time_diff))
  k_vec=seq(1, n*D+1, k)
  x_1[1]=0
  phi_16[1,]=0
  P[1,]=P_OT[k_vec]
  f=matrix(NA, (n*d+1),length(time_diff))

```

```

r=rep(NA, (n*d+1))
f[1,]=f_OT[k_vec]
r[1]=f[1,1]
for (i in 1:(n*d)){
  x_1[i+1]=x_1[i]-K_f*x_1[i]*dt+sqrt(r[i]*V[i, traj])*dW[i,1, traj]
  phi_16[i+1,1]=phi_16[i,1]+(x_1[i]-K_f*phi_16[i,1])*dt
  phi_16[i+1,2]=phi_16[i,2]+(r[i]*V[i, traj]-K_f*phi_16[i,2])*dt
  phi_16[i+1,3]=phi_16[i,3]+(r[i]*V[i, traj]-2*K_f*phi_16[i,3])*dt
  phi_16[i+1,4]=phi_16[i,4]+(phi_16[i,2]-K_f*phi_16[i,4])*dt
  phi_16[i+1,5]=phi_16[i,5]+(phi_16[i,3]-2*K_f*phi_16[i,5])*dt
  phi_16[i+1,6]=phi_16[i,6]+(2*phi_16[i,3]-2*K_f*phi_16[i,6])*dt
  t_tT=seq(1+i, n*D+1+i, k)
  f[i+1,]=f_OT[t_tT] + colSums(rbind(B_x1, t(Bphi_16))*c(x_1[i+1], phi_16[i+1,1],
phi_16[i+1,2], phi_16[i+1,3], phi_16[i+1,4], phi_16[i+1,5], phi_16[i+1,6]))
  r[i+1]=f[i+1,1]
  P[i+1,]=P_OT[t_tT]/P_OT[i+1]*exp(-1*colSums(rbind(D_x1, t(Dphi_16))*c(x_1[i+1],
phi_16[i+1,1], phi_16[i+1,2], phi_16[i+1,3], phi_16[i+1,4], phi_16[i+1,5], phi_16[i+1,6])))
}
}
return(P)
}
##### function l sim #####
l_sim <- function( K_f, K_l, V, B_x1, B_x2, B_x3, Bphi_16, Bphi_720, D_x1, D_x2, D_x3,
  Dphi_16, Dphi_720, P_OT, Pd_OT, l_OT, f_OT, traj){
  x_1=rep(NA, (n*d+1))
  phi_16=matrix(NA, (n*d+1),6)
  x_2=rep(NA, (n*d+1))
  x_3=rep(NA, (n*d+1))
  phi_720=matrix(NA, (n*d+1),14)
  P=matrix(NA, (n*d+1),length(time_diff))
  P_d=matrix(NA, (n*d+1),length(time_diff))
  k_vec=seq(1, n*D+1, k)
  x_1[1]=0
  phi_16[1,]=0
  x_2[1]=0
  x_3[1]=0
  phi_720[1,]=0
  P[1,]=P_OT[k_vec]
  P_d[1,]=Pd_OT[k_vec]
  l=matrix(NA, (n*d+1),length(time_diff))
  c=rep(NA, (n*d+1))
  l[1,]=l_OT[k_vec]
  c[1]=1[1,1]
  f=matrix(NA, (n*d+1),length(time_diff))
  r=rep(NA, (n*d+1))
  f[1,]=f_OT[k_vec]
  r[1]=f[1,1]
  for (i in 1:(n*d)){
    x_1[i+1]=x_1[i]-K_f*x_1[i]*dt+sqrt(r[i]*V[i, traj])*dW[i,1, traj]
    phi_16[i+1,1]=phi_16[i,1]+(x_1[i]-K_f*phi_16[i,1])*dt
    phi_16[i+1,2]=phi_16[i,2]+(r[i]*V[i, traj]-K_f*phi_16[i,2])*dt
    phi_16[i+1,3]=phi_16[i,3]+(r[i]*V[i, traj]-2*K_f*phi_16[i,3])*dt
    phi_16[i+1,4]=phi_16[i,4]+(phi_16[i,2]-K_f*phi_16[i,4])*dt
    phi_16[i+1,5]=phi_16[i,5]+(phi_16[i,3]-2*K_f*phi_16[i,5])*dt
    phi_16[i+1,6]=phi_16[i,6]+(2*phi_16[i,3]-2*K_f*phi_16[i,6])*dt
    x_2[i+1]=x_2[i]-K_l*x_2[i]*dt+sqrt(c[i]*V[i, traj])*dW[i,1, traj]
    x_3[i+1]=x_3[i]-K_l*x_3[i]*dt+sqrt(c[i]*V[i, traj])*dW[i,2, traj]
    phi_720[i+1,1]=phi_720[i,1]+ (V[i, traj]*sqrt(c[i]*r[i])-K_l* phi_720[i,1])*dt #7

```

```

phi_720[i+1,2]=phi_720[i,2]+ (V[i,traj]*sqrt(c[i]*r[i])-(K_f+K_l)* phi_720[i,2])*dt #8
phi_720[i+1,3]=phi_720[i,3]+ (phi_720[i,3]- K_l* phi_720[i,3])*dt #9
phi_720[i+1,4]=phi_720[i,4]+ (phi_720[i,4]- (K_l+K_f)* phi_720[i,4])*dt #10
phi_720[i+1,5]=phi_720[i,5]+ (2*phi_720[i,6]- (K_l+K_f)* phi_720[i,5])*dt #11
phi_720[i+1,6]=phi_720[i,6]+ (V[i,traj]*sqrt(c[i]*r[i])-K_f* phi_720[i,6])*dt#12
phi_720[i+1,7]=phi_720[i,7]+ (phi_720[i,8]- K_f*phi_720[i,7])*dt#13
phi_720[i+1,8]=phi_720[i,8]+ (c[i]*V[i,traj]- K_l *phi_720[i,8])*dt #14
phi_720[i+1,9]=phi_720[i,9]+ (c[i]*V[i,traj]- 2* K_l *phi_720[i,9])*dt#15
phi_720[i+1,10]=phi_720[i,10]+ (phi_720[i,10]- K_l*phi_720[i,10])*dt#16
phi_720[i+1,11]=phi_720[i,11]+ (phi_720[i,9]- 2*K_l*phi_720[i,11])*dt#17
phi_720[i+1,12]=phi_720[i,12]+ (phi_720[i,11]- 2*K_l*phi_720[i,12]) #18
phi_720[i+1,13]=phi_720[i,13]+ (x_2[i]- K_l*phi_720[i,13])*dt#19
phi_720[i+1,14]=phi_720[i,14]+ (x_3[i]- K_l*phi_720[i,14])*dt #20
t_tT=seq(1+i, n*D+1+i, k)
f[i+1,]=f_OT[t_tT] + colSums(rbind(B_x1, t(Bphi_16))*c(x_1[i+1], phi_16[i+1,1],
  phi_16[i+1,2], phi_16[i+1,3], phi_16[i+1,4], phi_16[i+1,5], phi_16[i+1,6]))
r[i+1]=f[i+1,1]
l[i+1,]=l_OT[t_tT] + colSums(rbind(B_x2, B_x3, t(Bphi_720))*c(x_2[i+1], x_3[i+1],
  phi_720[i+1,1], phi_720[i+1,2], phi_720[i+1,3], phi_720[i+1,4], phi_720[i+1,5],
  phi_720[i+1,6], phi_720[i+1,7], phi_720[i+1,8], phi_720[i+1,9], phi_720[i+1,10],
  phi_720[i+1,11], phi_720[i+1,12], phi_720[i+1,13], phi_720[i+1,14]))
c[i+1]=l[i+1,1]
P[i+1,]=P_OT[t_tT] /P_OT[i+1]*exp(-1*colSums(rbind(D_x1, t(Dphi_16))*c(x_1[i+1], phi_16[i+1,1],
  phi_16[i+1,2], phi_16[i+1,3], phi_16[i+1,4], phi_16[i+1,5], phi_16[i+1,6])))
P_d[i+1,]=Pd_OT[t_tT] /Pd_OT[i+1]*exp(-1*colSums(rbind(D_x1, D_x2, D_x3, t(Dphi_16), t(Dphi_720))
  *c(x_1[i+1], x_2[i+1], x_3[i+1], phi_16[i+1,1], phi_16[i+1,2], phi_16[i+1,3], phi_16[i+1,4],
  phi_16[i+1,5], phi_16[i+1,6], phi_720[i+1,1], phi_720[i+1,2], phi_720[i+1,3], phi_720[i+1,4],
  phi_720[i+1,5], phi_720[i+1,6], phi_720[i+1,7], phi_720[i+1,8], phi_720[i+1,9], phi_720[i+1,10],
  phi_720[i+1,11], phi_720[i+1,12], phi_720[i+1,13], phi_720[i+1,14])))
}
return(l)
}
##### function P error #####
P_error_fun <- function(param_P, V_0, n, d, dt, tr, dW, dW2, f_OT, P_OT, P_real){
  V_a=param_P[1]
  sig=param_P[2]
  rho_vf=param_P[3]
  rho_fl=param_P[4]
  rho_vl=param_P[5]
  K_f=param_P[6]
  a_0=param_P[7]
  a_1=param_P[8]
  K_V=param_P[9]
  z_V1=rho_vf
  z_V2=(rho_vf-rho_fl*rho_vf)/sqrt(1-(rho_fl)^2)
  z_V3=sqrt((1-rho_fl^2 - rho_vf^2 - rho_vl^2 + 2* rho_fl*rho_vf*rho_vl)/sqrt(1-(rho_fl)^2))
  z_l1=rho_fl
  z_l2=sqrt(1-(rho_fl)^2)
  traj=c(1:tr)
  V=mapply(Vsim, traj, MoreArgs = list(V_0=V_0, K_V=K_V, V_a=V_a, dt=dt, z_V1=z_V1, z_V2=z_V2,
  z_V3=z_V3, dW=dW, dW2=dW2, sig=sig))
  B_x1=t(mapply(Bx1func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0, a_1=a_1, K_f=K_f)))
  B_phi_16=t(mapply(Bphi_1_6_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0, a_1=a_1, K_f=K_f)))
  D_x1=t(mapply(Dx1func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0, a_1=a_1, K_f=K_f)))
  D_phi_16=t(mapply(Dphi_1_6_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0, a_1=a_1, K_f=K_f)))
  P_temp=mapply(Psim, traj, MoreArgs = list(K_f=K_f, V=V, B_x1=B_x1, Bphi_16=B_phi_16, D_x1=D_x1,
  Dphi_16=D_phi_16, P_OT=P_OT, f_OT=f_OT))

```

```

P=array(P_temp, dim=c((n*d+1), length(time_diff), tr))
P_avg=rowMeans(P, dims=2)
P_tocom=P_avg[31,]
e = P_tocom-P_real #matrix
error=sum(abs(e))
if (is.na(error) || error==Inf) {error=100}
if (K_V < ((sig*z_V1)^2 + (sig*z_V2)^2 + (sig*z_V2)^2)/(2*V_a) ) {error=100}
return(error)
}
##### function l error #####
l_error_fun <- function(param_l, V, B_x1, D_x1, B_phi_16, D_phi_16, n, d, dt, tr,
  dW, dW2, f_OT, P_OT, fd_OT, Pd_OT, l_real){
  param_l[1]=K_l
  param_l[2]=b_0
  param_l[3]=b_1
  traj=c(1:tr)
  B_x2=t(mapply(Bx2func, t=time_diff, MoreArgs = list(b_0=b_0, b_1=b_1, K_l=K_l, z_l1=z_l1o)))
  B_x3=t(mapply(Bx3func, t=time_diff, MoreArgs = list(b_0=b_0, b_1=b_1, K_l=K_l, z_l2=z_l2o)))
  B_phi_720=t(mapply(Bphi_7_20_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, b_0=b_0,
b_1=b_1, K_f=K_fo, K_l=K_l, z_l1=z_l1o, z_l2=z_l2o)))
  D_x2=t(mapply(Dx2func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, K_l=K_l, z_l1=z_l1o)))
  D_x3=t(mapply(Dx3func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, K_l=K_l, z_l2=z_l2o)))
  D_phi_720=t(mapply(Dphi_7_20_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, b_0=b_0,
  b_1=b_1, K_f=K_fo, K_l=K_l, z_l1=z_l1o, z_l2=z_l2o)))
  l_temp=mapply(l_sim, traj, MoreArgs = list(K_f=K_fo, K_l=K_l, V=V, B_x1=B_x1, B_x2=B_x2, B_x3=B_x3,
Bphi_16=B_phi_16, Bphi_720=B_phi_720 ,D_x1=D_x1, D_x2=D_x2, D_x3=D_x3, Dphi_16=D_phi_16,
Dphi_720=D_phi_720, P_OT=P_OT, Pd_OT=Pd_OT, l_OT=l_OT, f_OT=f_OT))
  l=array(l_temp, dim=c((n*d+1), length(time_diff), tr))
  l_avg=rowMeans(l, dims=2)
  l_tocom=l_avg[31,]
  e = l_tocom-l_real #matrix
  error=sum(abs(e))
  if (is.na(error) || error==Inf) {error=1000}
  return(error)
}
##### calibration P #####
n=4 # in one day
m=3 #3 independent Wiener
tr=1000 #trajectories
d=30 #t for how many days
y=d/365
dt=y/d/n
D=1825
Y=D/365 #5 years
k=10
dT=dt*k
t_seq=seq(0,y, dt)
time_diff=seq(0,Y, dT) #T-t!!
sd=sqrt(dt)
dW=replicate(tr, replicate(m,rnorm(n*d, 0, sd)))
dW2=dW*dW-dt
V_0=1
K_V=2.1
V_a=1
sig=0.5
rho_vf=0.6
rho_fl=-0.2

```

```

rho_v1=0.4
z_V1=rho_vf
z_V2=(rho_vf-rho_fl*rho_vf)/sqrt(1-(rho_fl)^2)
z_V3=sqrt((1-rho_fl^2 - rho_vf^2 - rho_v1^2 + 2* rho_fl*rho_vf*rho_v1)/sqrt(1-(rho_fl)^2))
K_f=0.3
a_0=0.135
a_1=0.035
z_l1=rho_fl
z_l2=sqrt(1-(rho_fl)^2)
traj=c(1:tr)
V=mapply(Vsim, traj, MoreArgs = list(V_0=V_0, K_V=K_V, V_a=V_a, dt=dt, z_V1=z_V1, z_V2=z_V2,
  z_V3=z_V3, dW=dW, dW2=dW2, sig=sig))
B_x1=t(mapply(Bx1func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0, a_1=a_1, K_f=K_f)))
B_phi_16=t(mapply(Bphi_1_6_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0, a_1=a_1, K_f=K_f)))
D_x1=t(mapply(Dx1func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0, a_1=a_1, K_f=K_f)))
D_phi_16=t(mapply(Dphi_1_6_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0, a_1=a_1, K_f=K_f)))
##### input data #####
Ddata = read.table("discountdata_0102b.txt",header=T,sep="")
dates=as.Date(Ddata[,1])
settle=as.Date("2014-01-06")
x=(dates-settle)/365
DF=splinefun(x, Ddata[,4])
library("numDeriv")
logDF <- function(x){
  return(log(DF(x), base=exp(1))) }
Tp_seq=seq(0,Y+y, dt)
P_0T=DF(Tp_seq)
f_0T=-grad(logDF, Tp_seq)
timediff_temp=c((as.Date(Ddata2[,1])-settle[1])/365, (as.Date(Ddata2[,3])-settle[2])/365,
  (as.Date(Ddata2[,5])-settle[3])/365, (as.Date(Ddata2[,7])-settle[4])/365, (as.Date(Ddata2[,9])
  -settle[5])/365, (as.Date(Ddata2[,11])-settle[6])/365, (as.Date(Ddata2[,13])-settle[7])/365,
  (as.Date(Ddata2[,15])-settle[8])/365, (as.Date(Ddata2[,17])-settle[9])/365, (as.Date(Ddata2[,19])
  -settle[10])/365, (as.Date(Ddata2[,21])-settle[11])/365, (as.Date(Ddata2[,23])-settle[12])/365)
timediff=matrix(timediff_temp, nrow=33, ncol=12)
P_real_m=matrix(NA, nrow=12, ncol=length(time_diff))
for (i in 1:12){
  DF1=splinefun(timediff[,i], Ddata2[,i*2])
  P_real_m[i,]=DF1(time_diff) }
##### optimization #####
param_P=c(V_a, sig, rho_vf, rho_fl, rho_v1, K_f, a_0, a_1, K_V)
lower=c(0 ,0, -1,-1,-1,-Inf, -Inf, -Inf, -Inf)
upper=c(1, 1, 1,1,1, Inf, Inf, Inf, Inf)
pars=matrix(NA, 12, 9)
for (i in 1:12){
  if (i==1) {DFi= DF} else{
    DFi=splinefun(timediff[,i-1], Ddata2[, (i-1)*2])
    logDFi <- function(x){
      return(log(DFi(x), base=exp(1))) }
    P_0Ti=DFi(Tp_seq)
    f_0Ti=-grad(logDFi, Tp_seq)
    P_reali=P_real_m[i,]
    dWi=replicate(tr, replicate(m,rnorm(n*d, 0, sd)))
    dW2i=dWi*dWi-dt
    opt_param<- optim(param_P, P_error_fun, V_0=V_0, n=n, d=d, dt=dt, tr=tr, dW=dWi,
      dW2=dW2i, f_0T=f_0Ti, P_0T=P_0Ti, P_real=P_reali, method="L-BFGS-B", lower=lower,
      upper=upper, control=list(trace=5, REPORT=1, factr = 1e+02, maxit=50))
    pars[i,]=opt_param$par
  }
}

```



```

}
par_veg=rep(NA, 9)
for (i in 1:9){
par_veg[i]=(sum(pars[,i])-min(pars[,i])-max(pars[,i]))/10 }
V_ao=par_veg[1]
sigo=par_veg[2]
rho_vfo=par_veg[3]
rho_flo=par_veg[4]
rho_vlo=par_veg[5]
K_fo=pars[12,6]
a_0o=pars[12,7]
a_1o=pars[12,8]
K_Vo=par_veg[9]
opt_param=c(V_ao, sigo, rho_vfo, rho_flo, rho_vlo, K_fo, a_0o, a_1o, K_Vo)
opt_param=c(0.70179413, 0.50627935, 0.45319970, -0.40079756, 0.24954566,
0.06352001, -0.22169033, 0.09103610, 0.99935864)
z_V1o=rho_vfo
z_V2o=(rho_vfo-rho_flo*rho_vfo)/sqrt(1-(rho_flo)^2)
z_V3o=sqrt((1-rho_flo^2 - rho_vfo^2 - rho_vlo^2 + 2* rho_flo*rho_vfo*rho_vlo)/sqrt(1-(rho_flo)^2))
z_l1o=rho_flo
z_l2o=sqrt(1-(rho_flo)^2)
##### calibration 1 #####
IBMspread_m = read.table("IBM_spread_monthly.txt",header=T,sep="")
mats=c(1,2,3,4,5)
l_real=rep(NA, length(time_diff))
SP_real=splinefun(mats, IBMspread_m[12,2:6], method="natural")
l_real=SP_real(time_diff)
K_l=0.5
b_0=0.1
b_1=0.01
B_x2=t(mapply(Bx2func, t=time_diff, MoreArgs = list(b_0=b_0, b_1=b_1, K_l=K_l, z_l1=z_l1o)))
B_x3=t(mapply(Bx3func, t=time_diff, MoreArgs = list(b_0=b_0, b_1=b_1, K_l=K_l, z_l2=z_l2o)))
B_phi_720=t(mapply(Bphi_7_20_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, b_0=b_0,
b_1=b_1, K_f=K_fo, K_l=K_l, z_l1=z_l1o, z_l2=z_l2o)))
D_x2=t(mapply(Dx2func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, K_l=K_l, z_l1=z_l1o)))
D_x3=t(mapply(Dx3func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, K_l=K_l, z_l2=z_l2o)))
D_phi_720=t(mapply(Dphi_7_20_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, b_0=b_0,
b_1=b_1, K_f=K_fo, K_l=K_l, z_l1=z_l1o, z_l2=z_l2o)))
##### optimization #####
lower=c(-Inf, -Inf, -Inf)
upper=c(Inf, Inf, Inf)
pars_l=rep(NA, 3)
DFi=splinefun(timediff[,12-1], Ddata2[, (12-1)*2])
logDFi <- function(x){
return(log(DFi(x), base=exp(1))) }
P_0Ti=DFi(Tp_seq)
f_0Ti=-grad(logDFi, Tp_seq)
SPi=splinefun(mats, IBMspread_m[(12-1),2:6], method="natural")
l_0Ti=SPi(Tp_seq)
fd_0Ti=f_0Ti+l_0Ti
SP2i=splinefun(Tp_seq, fd_0Ti, method="natural")
Pd_0Ti=rep(NA, length(Tp_seq))
for (i in 1:length(Tp_seq)){
Pd_0Ti[i]=exp(-1*integrate(SP2i, lower=0, upper=Tp_seq[i])$value) }
Vi=mapply(Vsim, traj, MoreArgs = list(V_0=V_0, K_V=K_Vo, V_a=V_ao, dt=dt,
z_V1=z_V1o, z_V2=z_V2o, z_V3=z_V3o, dW=dW, dW2=dW2, sig=sigo))
opt_param<- optim(param_l, l_error_fun, V=Vi, B_x1=B_x1, D_x1=D_x1, B_phi_16=B_phi_16,

```

```

D_phi_16=D_phi_16, n=n, d=d, dt=dt, tr=tr, dW=dWi, dW2=dW2i, f_OT=f_OTi, P_OT=P_OTi,
  fd_OT=fd_OTi, Pd_OT=Pd_OTi, l_real=l_real, method="L-BFGS-B", lower=lower,
  upper=upper, control=list(trace=5, REPORT=1, factr = 1e+02))
pars_l=opt_param$par
}
param_l=pars_l=c(0.410829990, 0.070145361, 0.002618766)
##### Swaption pricing with HJM #####
d=5*365
y=d/365
dt=y/d/n
D=1825
Y=D/365
k=10
dT=dt*k
dtp=dt
Tp_seq=seq(0,Y+y, dtp)
t_seq=seq(0,y, dt)
time_diff=seq(0,Y, dT) #T-t!!
##### simulation P #####
sd=sqrt(dt)
dW=replicate(tr, replicate(m,rnorm(n*d, 0, sd)))
W2=dW*dW-dt
V=mapply(Vsim, traj, MoreArgs = list(V_0=V_0, K_V=K_Vo, V_a=V_ao, dt=dt, z_V1=z_V1o, z_V2=z_V2o,
z_V3=z_V3o, dW=dW, dW2=dW2, sig=sigo))
B_x1=t(mapply(Bx1func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, K_f=K_fo)))
B_phi_16=t(mapply(Bphi_1_6_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, K_f=K_fo)))
D_x1=t(mapply(Dx1func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, K_f=K_fo)))
D_phi_16=t(mapply(Dphi_1_6_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, K_f=K_fo)))
##### input data 2015 #####
Ddata2 = read.table("P_monthly.txt",header=T,sep="")
settle_15=as.Date(Ddata2[1,23])
time_diff_15=(as.Date(Ddata2[,23])-settle_15)/365
DF_15=splinefun(time_diff_15, Ddata2[,12*2])
logDF_15 <- function(x){
  return(log(DF_15(x), base=exp(1))) }
library("numDeriv")
f_OT_150102=-grad(logDF_15, Tp_seq)
P_temp=mapply(Psim, traj, MoreArgs = list(K_f=K_fo, V=V, B_x1=B_x1, Bphi_16=B_phi_16, D_x1=D_x1,
  Dphi_16=D_phi_16, P_OT=P_OT_150102, f_OT=f_OT_150102))
P_15=array(P_temp, dim=c((n*d+1), length(time_diff), tr))
r_15=mapply(r_sim, traj, MoreArgs = list(K_f=K_fo, V=V, B_x1=B_x1, Bphi_16=B_phi_16, D_x1=D_x1,
  Dphi_16=D_phi_16, P_OT=P_OT_150102, f_OT=f_OT_150102))
IBMsread_m = read.table("IBM_spread_monthly.txt",header=T,sep="")
mats=c(1,2,3,4,5)
SP_15=splinefun(mats, IBMsread_m[12,2:6], method="natural")
l_OT_150102=SP_15(Tp_seq)
fd_OT_150102=f_OT_150102+l_OT_150102
SP2_15=splinefun(Tp_seq, fd_OT_150102/100, method="natural")
Pd_OT_150102=rep(NA, length(Tp_seq))
for (i in 1:length(Tp_seq)){
  Pd_OT_150102[i]=exp(-1*integrate(SP2_15, lower=0, upper=Tp_seq[i])$value) }
##### simulation 2015 #####
B_x2=t(mapply(Bx2func, t=time_diff, MoreArgs = list(b_0=b_0, b_1=b_1, K_l=K_l, z_l1=z_l1o)))
B_x3=t(mapply(Bx3func, t=time_diff, MoreArgs = list(b_0=b_0, b_1=b_1, K_l=K_l, z_l2=z_l2o)))
B_phi_720=t(mapply(Bphi_7_20_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, b_0=b_0,
b_1=b_1, K_f=K_fo, K_l=K_l, z_l1=z_l1o, z_l2=z_l2o)))
D_x2=t(mapply(Dx2func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, K_l=K_l, z_l1=z_l1o)))

```

```

D_x3=t(mapply(Dx3func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, K_l=K_l, z_l2=z_l2o)))
D_phi_720=t(mapply(Dphi_7_20_func, t=time_diff, MoreArgs = list(a_0=a_0o, a_1=a_1o, b_0=b_0,
b_1=b_1, K_f=K_fo, K_l=K_l, z_l1=z_l1o, z_l2=z_l2o)))
l_temp=mapply(l_sim, traj, MoreArgs = list(K_f=K_fo, K_l=K_l, V=V, B_x1=B_x1, B_x2=B_x2, B_x3=B_x3,
Bphi_16=B_phi_16, Bphi_720=B_phi_720 ,D_x1=D_x1, D_x2=D_x2, D_x3=D_x3, Dphi_16=D_phi_16,
Dphi_720=D_phi_720, P_OT=P_OT_150102, Pd_OT=Pd_OT_150102, l_OT=l_OT_150102, f_OT=f_OT_150102))
c_15_temp=mapply(c_sim, traj, MoreArgs = list(K_f=K_fo, K_l=K_l, V=V, B_x1=B_x1, B_x2=B_x2, B_x3=B_x3,
Bphi_16=B_phi_16, Bphi_720=B_phi_720 ,D_x1=D_x1, D_x2=D_x2, D_x3=D_x3, Dphi_16=D_phi_16,
Dphi_720=D_phi_720, P_OT=P_OT_150102, Pd_OT=Pd_OT_150102, l_OT=l_OT_150102, f_OT=f_OT_150102))
##### function pi(t, Te) #####
CDS_forward_s <- function (t, l, Pt, TE, Tf, pay, LGD){
  szam <- function (z){
    a=l(z)*exp(-integrate(l, TE, z, subdivisions=1000)$value)*Pt(z)
    return(a) }
  s=(integrate(szam, TE, Tf, subdivisions=1000)$value)*LGD
  pay_b=c(TE, pay)
  n=0
  for (i in 2:length(pay_b)){
    nev <- function(z){
      b=(z-pay_b[i-1])*szam(z)
      return (b) }
    n=n+integrate(nev, pay_b[i-1], pay_b[i], subdivisions=1000)$value }
  for (i in 1:length(pay)){
    n=n+exp(-integrate(l, TE, pay[i], subdivisions=1000)$value)*Pt(pay[i])*(pay_b[i+1]-pay_b[i])}
  pi=s/n
  return(pi)
}
##### function forward Vprem #####
CDS_forward_Vprem <- function (t, l, Pt, TE, Tf, pay){
  szam <- function (z){
    a=l(z)*exp(-integrate(l, TE, z, subdivisions=1000)$value)*Pt(z)
    return(a) }
  pay_b=c(TE, pay)
  n=0
  for (i in 2:length(pay_b)){
    nev <- function(z){
      b=(z-pay_b[i-1])*szam(z)
      return (b) }
    n=n+integrate(nev, pay_b[i-1], pay_b[i], subdivisions=1000)$value }
  for (i in 1:length(pay)){
    n=n+exp(-integrate(l, TE, pay[i], subdivisions=1000)$value)*Pt(pay[i])*(pay_b[i+1]-pay_b[i])}
  return(n)
}
##### input data #####
Q1=as.Date("2015-03-20")
Q2=as.Date("2015-06-22")
Q3=as.Date("2015-09-21")
Q4=as.Date("2015-12-21")
date=as.Date("2015-01-02")
TE=0.5
TEindate=date+TE*360
mat=3
firstp=0
if(TEindate <= Q1) { firstp=Q1 }
if(TEindate > Q1 & TEindate <= Q2) { firstp=Q2 }
if(TEindate > Q2 & TEindate <= Q3) { firstp=Q3 }
if(TEindate > Q3 & TEindate <= Q4) { firstp=Q4 }

```

```

if(TEindate > Q4 & TEindate <= Q1+360) { firstp=Q1+360 }
fp=seq(0.25, mat, 0.25)
pay=c(as.numeric(firstp-date)/360, as.numeric(firstp-date)/360+fp)
Tf=pay[length(pay)]
##### pi(0, TE) #####
pi0M=rep(NA, tr)
for (i in 1:tr){
  l=approxfun(t_seq, c_15_temp[,i]/0.6, rule=2)
  pi0M[i]=CDS_forward_s(0, l, DF_15, TE, Tf, pay, LGD) }
pi0=mean(pi0M)
##### pricing #####
CDSF=rep(NA, tr)
for (i in 1:tr){
  l=approxfun(t_seq, c_15_temp[,i]/0.6, rule=2)
  PTE=splinefun(time_diff,P_15[366*TE, ,i])
  CDSF[i]=CDS_forward_s(TE, l, PTE, TE, Tf, pay, LGD) }
Vpremf=rep(NA, tr)
for (i in 1:tr){
  l=approxfun(t_seq, c_15_temp[,i]/0.6, rule=2)
  PTE=splinefun(time_diff,P_15[366*TE, ,i])
  Vpremf[i]=CDS_forward_Vprem(TE, l, PTE, TE, Tf, pay) }
d=rep(NA, tr)
for (i in 1:tr){
  r=splinefun(t_seq, r_15[,i])
  d[i]=exp(-integrate(r, 0, TE, subdivisions=1000)$value) }
def=rep(NA, tr)
for (i in 1:tr){
  l=approxfun(t_seq, c_15_temp[,i]/0.6, rule=2)
  survprob=exp(-integrate(l, 0, TE, subdivisions=1000)$value)
  surv=NA
  if (runif(1)>survprob) {surv=0} else {surv=1}
  def[i]=surv }
Ks=seq(pi0-0.002, pi0+0.002, 0.00001)
kif=matrix(NA, length(Ks), tr)
for (j in 1:length(Ks)){
  for (i in 1:tr){
    kif[j,i]=max(0,CDSF[i]-Ks[j]) } }
V_modell_swaption=matrix(NA, length(Ks), tr)
for (j in 1:length(Ks)){
  V_modell_swaption[j,]=kif[j,]*def*d*Vpremf }
V=rowMeans(V_modell_swaption)
##### Black-model #####
IBMdata = read.table("IBMCDSspread.txt",header=T,sep="")
IBMSpread = data.frame(IBMdata[1, 2:6])/10000
maturities=c(1,2,3,4,5)
##### function bootstrapping #####
CDS_value_btst <- function(lambda, lambda_prev, pi, mat, date, Pcurve, LGD){
  firstp=0
  if(date <= Q1) { firstp=Q1 }
  if(date > Q1 & date <= Q2) { firstp=Q2 }
  if(date > Q2 & date <= Q3) { firstp=Q3 }
  if(date > Q3 & date <= Q4) { firstp=Q4 }
  if(date > Q4 & date <= Q1+360) { firstp=Q1+360 }
  value=0
  index=rep(NA, (2*mat+1))
  if (mat < 1) {
    delta=as.numeric((firstp-date))/360

```

```

index[1]<-lambda*delta
value<-value+pi*lambda*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+1]*exp(-index[1])
+pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+1]*exp(-index[1])-LGD*lambda*delta
delta=0.25
index[2]<-index[1]+lambda*delta
value<-value+pi*lambda*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+91]*exp(-index[2])
+pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+91]*exp(-index[2])-LGD*lambda*delta
index[3]<-index[2]+lambda*delta
value<-value+pi*lambda*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+181]*exp(-index[3])
+pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+181]*exp(-index[3])-LGD*lambda*delta }
else {
if (is.na(lambda_prev[1])){
delta=as.numeric((firstp-date))/360
index[1]<-lambda*delta
value<-value+pi*lambda*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+1]*exp(-index[1])
+pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+1]*exp(-index[1])-LGD*lambda*delta
delta=0.25
for (i in 1:mat){
for (j in 1:4){
index[(i-1)*4+1+j]<-index[(i-1)*4+j]+lambda*delta
value<-value+pi*lambda*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+(i-1)*360+j*90+1]
*exp(-index[(i-1)*4+1+j])+pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+(i-1)*360+j*90+1]
*exp(-index[(i-1)*4+1+j])-LGD*lambda*delta } } }
else {
delta=as.numeric((firstp-date))/360
index[1]<-lambda_prev[1]*delta
value<-value+pi*lambda_prev[1]*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+1]*exp(-index[1])+
pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+1]*exp(-index[1])-LGD*lambda_prev[1]*delta
delta=0.25
prev_mat=(length(lambda_prev)-1)/4
if (prev_mat==0.5){
index[2]<-index[1]+lambda_prev[2]*delta
value<-value+pi*lambda_prev[2]*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+91]*exp(-index[2])
+pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+91]*exp(-index[2])-LGD*lambda_prev[2]*delta
index[3]<-index[2]+lambda_prev[3]*delta
value<-value+pi*lambda_prev[3]*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+181]*exp(-index[3])
+pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+181]*exp(-index[3])-LGD*lambda_prev[3]*delta
index[4]<-index[3]+lambda*delta
value<-value+pi*lambda*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+271]*exp(-index[4])
+pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+271]*exp(-index[4])-LGD*lambda*delta
index[5]<-index[4]+lambda*delta
value<-value+pi*lambda*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+361]*exp(-index[5])
+pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))+361]*exp(-index[5])-LGD*lambda*delta }
else{
for (i in 1:prev_mat){
for (j in 1:4){
index[(i-1)*4+1+j]<-index[(i-1)*4+j]+lambda_prev[(i-1)*4+1+j]*delta
value<-value+pi*lambda_prev[(i-1)*4+1+j]*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))
+(i-1)*360+j*90+1]*exp(-index[(i-1)*4+1+j])+pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))
+(i-1)*360+j*90+1]*exp(-index[(i-1)*4+1+j])-LGD*lambda_prev[(i-1)*4+1+j]*delta } }
ll=length(lambda_prev)
miss=(mat*4+1)-ll
for (i in 1:miss){
index[ll+i]<-index[ll+i-1]+lambda*delta
value<-value+pi*lambda*delta^2*Pcurve[as.numeric((firstp-date))
+prev_mat*360+i*90+1]*exp(-index[ll+i])+pi*delta*Pcurve[as.numeric((firstp-date))
+prev_mat*360+i*90+1]*exp(-index[ll+i])-LGD*lambda*delta }
}
}
}

```

```

    } } }
  return(value)
}
##### lambda #####
IBM_lambda=rep(0, maturities[length(maturities)]*4+1)
IBM_lambda[5]=IBM_lambda[4]= IBM_lambda[3]= IBM_lambda[2]=IBM_lambda[1]=
  uniroot(CDS_value_btst, c(-2,4), maxiter = 1000, mat=maturities[1], date=settle_15,
  pi=IBMSpread[[1]], lambda_prev=c(NA), Pcurve=P_150102, LGD=0.6)$root
for (i in 2:maturities[length(maturities)]){
  j=4*i+1
  IBM_lambda[j-3]= IBM_lambda[j-2]=IBM_lambda[j-1]=IBM_lambda[j]=uniroot(CDS_value_btst,
  c(-2,6), maxiter = 1000, mat=maturities[i], date=settle_15, pi=IBMSpread[[i]],
  lambda_prev=IBM_lambda[1:((i-1)*4+1)], Pcurve=P_150102, LGD=0.6)$root }
lambda_seq=seq(0.25, maturities[length(maturities)], 0.25)
lambda_seq_tot=c(as.numeric(Q1-date)/360, lambda_seq+as.numeric(Q1-date)/360)
ff=approxfun(c(0,lambda_seq_tot), c(IBM_lambda[1],IBM_lambda), method="constant", rule=1)
surv=rep(1,500)
def=rep(0,500)
for (i in 2:length(surv)){
  surv[i]=exp(-integrate(ff, 0, i/100, subdivisions=1000)$value)
  def[i]=1-surv[i]}
##### pi(0, TE) #####
fCDS_value_0 <- function(mat, TE, pays, lambda, Pcurve, LGD){
  pay_b=c(TE, pays)
  Vprem=0
  Vprot=0
  for (i in 1:length(pays)){
    Vprem=Vprem+ (pay_b[i+1]-pay_b[i])*integrate(lambda, pay_b[i], pay_b[i+1])$value
    *exp(-integrate(lambda, TE, pay_b[i+1])$value)*Pcurve(pay_b[i+1]) +(pay_b[i+1]-pay_b[i])
    *Pcurve(pay_b[i+1])*exp(-integrate(lambda, TE, pay_b[i+1])$value)
    Vprot=Vprot+ LGD*integrate(lambda, pay_b[i], pay_b[i+1])$value
    *exp(-integrate(lambda, TE, pay_b[i+1])$value)*Pcurve(pay_b[i+1]) }
  return(Vprot/Vprem)
}
##### lognormal dynamics #####
pi0=fCDS_value_0(mat, TE, pays, ff, DF_15, 0.6)
sigTE=0.4
df=0.1/360
sdB=sqrt(df)
dWB=replicate(tr, rnorm(3600, 0, sdB))
dW2B=dWB*dWB-df
pi_fcds=matrix(NA, 3601, tr)
pi_fcds[1,]=rep(pi0, tr)
for ( i in 1:3600){
  pi_fcds[i+1,]=pi_fcds[i,]+pi_fcds[i,]*sigTE*dWB[i,]+0.5*sigTE*sigTE*pi_fcds[i,]*dW2B[i,]}
##### function swaption Black #####
Vspwt_B <- function(K, pi_fcds, sigTE, lambda, TE, pays, LGD, Pcurve){
  pay_b=c(TE, pays)
  Vprem=0
  for (i in 1:length(pays)){
    Vprem=Vprem+ (pay_b[i+1]-pay_b[i])*(integrate(lambda, pay_b[i], pay_b[i+1])$value)
    *exp(-integrate(lambda, TE, pay_b[i+1])$value)*Pcurve(pay_b[i+1])+(pay_b[i+1]-pay_b[i])
    *Pcurve(pay_b[i+1])*exp(-integrate(lambda, TE, pay_b[i+1])$value) }
  A=exp(-integrate(lambda, 0, 0)$value)*Vprem
  d1=((log(pi_fcds/K))+((sigTE^2)/2 *TE))/(sigTE*sqrt(TE))
  d2=d1-sigTE*sqrt(TE)
  value=A*(pnorm(d1)*pi_fcds-K*pnorm(d2))
}

```

```
    return(value)
  }
##### swaption pricing #####
Ks=seq(0, pi0+0.002, 0.00001)
price_Bk=rep(NA, length(Ks))
sigTE=0.4
for (i in 1:length(price_Bk)){
  price_Bk[i]=Vspwt_B(Ks[i], pi0, sigTE, ff, TE, pays, 0.6, DF_15) }
}
```

# Irodalomjegyzék

- [1] BHAR, Ram; CHIARELLA, Carl. *Transformation of Heath-Jarrow-Morton models to Markovian systems*, The European Journal of Finance, 1997, 3.1: 1-26.
- [2] BIELECKI, Tomasz R.; RUTKOWSKI, Marek. *Credit risk: modeling, valuation and hedging*, Springer Science & Business Media, 2002.
- [3] BJÖRK, Tomas; LANDÉN, Camilla; SVENSSON, Lars. *Finite-dimensional Markovian realizations for stochastic volatility forward-rate models*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2004, 460.2041: 53-83
- [4] BRIGO, Damiano, MORINI, Massimo. *CDS market formulas and models*, Proceedings of the 18th annual Warwick options conference, 2005
- [5] BRIGO, Damiano. *Candidate market models and the calibrated CIR++ stochastic intensity model for credit default swap options and callable floaters* Available at SSRN 508922, 2004.
- [6] CHIARELLA, Carl; MAINA, Samuel Chege; NIKITIPOULOS SKLIBOSIOS, Christina. *Credit Derivative Pricing with Stochastic Volatility Models*, University of Technology Sydney Quantitative Finance Research Centre Research Paper, 2011, 293.
- [7] CHIARELLA, Carl; KWON, Oh Kang. *A complete Markovian stochastic volatility model in the HJM framework*, Asia-Pacific Financial Markets, 2000, 7.4: 293-304.
- [8] CHIARELLA, Carl; KWON, Oh Kang *A class of Heath-Jarrow-Morton term structure models with stochastic volatility*, School of Finance and Economics, University of Technology, Sydney, 2000.
- [9] CHIARELLA, Carl; KWON, Oh Kang. *Finite dimensional affine realisations of HJM models in terms of forward rates and yields*, Review of Derivatives Research, 2003, 6.2: 129-155.
- [10] CHIARELLA, Carl; KWON, Oh Kang (1998a), *Forward Rate Dependent Markovian Transformations of the Heath- Jarrow-Morton Term Structure Model*, Working paper, School of Finance and Economics, University of Techonology Sydney.



- [11] CHIARELLA, Carl; KWON, Oh Kang (1998b), *Square Root Affine Transformations of the Heath-Jarrow-Morton Term Structure Model and Partial Differential Equations*, Working paper, School of Finance and Economics, University of Technology Sydney.
- [12] GASPAR, Raquel M. *Finite dimensional Markovian realizations for forward price term structure models*, In: Stochastic Finance. Springer US, 2006. p. 265-320.
- [13] HULL, John C.; WHITE, Alan. *Valuing credit default swaps I: No counterparty default risk* 2000.
- [14] HULL, John C.; WHITE, Alan D. *The valuation of credit default swap options*, The journal of derivatives, 2003, 10.3: 40-50.
- [15] JARROW, Robert A.; LANDO, David; TURNBULL, Stuart M. *A Markov model for the term structure of credit risk spreads*, Review of financial studies, 1997, 10.2: 481-523.
- [16] JARROW, Robert A.; PROTTER, Philip. *Structural vs reduced form models: a new information based perspective*, Journal of Investment Management, 2004, 2.2: 1-10.
- [17] LAN, Yi. *Survival Probability and Intensity Derived from Credit Default Swaps*, 2011. PhD Thesis. Worcester Polytechnic Institute.
- [18] LANDO, David. *On Cox processes and credit risky securities*, Review of Derivatives research, 1998, 2.2-3: 99-120.
- [19] LANDO, David. *Credit risk modeling: theory and applications*, Princeton University Press, 2009.
- [20] MAINA, Samuel Chege. *Credit Risk Modelling in Markovian HJM Term Structure Class of Models with Stochastic Volatility*, PhD Thesis, 2011.
- [21] O'KANE, Dominic. *Modelling single-name and multi-name credit derivatives*, John Wiley & Sons, 2011.
- [22] RUTKOWSKI, Marek. *Valuation of Credit Default Swaptions and Credit Default Index Swaptions*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2009, 12.7: 1027-1053.
- [23] SCHÖNBUCHER, Philipp J. *Credit derivatives pricing models: models, pricing and implementation*, John Wiley & Sons, 2003.
- [24] TROLLE, Anders B.; SCHWARTZ, Eduardo S. *A general stochastic volatility model for the pricing of interest rate derivatives*, Review of Financial Studies, 2009, 22.5: 2007-2057.