Sztochasztikus mezők a pénzügyekben

Szakdolgozat

Írta: Drahos Csaba

Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc

Kvantitatív Pénzügyek szakirány

Témavezető:

Dr. Márkus László

egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

2016

Köszönetnyilvánítás

Hálával tartozom családomnak, barátaimnak és témavezetőmnek, Dr. Márkus Lászlónak, aki precíz figyelmével és tanácsaival segítette munkámat. Köszönettel tartozom barátnőmnek, aki végtelen türelemével és hasznos ötleteivel támogatott e dolgozat megírásában.

Budapest, 2016. május 17.

Drahos Csaba

Tartalomjegyzék

Bevezető

Szakdolgozatomban célul tűztem ki, hogy bemutassam a többdimenziós paraméterű sztochasztikus folyamatok elméletét, valamint ezek néhány pénzügyi alkalmazását. Ehhez bevezetem a pénzügyekben jól ismert Wiener-folyamat többparaméteres konstrukcióját a Wiener mezőt, illetve megvizsgálom annak részletes tulajdonságait, ezzel feltárva az egyparaméteres esettel megegyező, illetve attól eltérő vonásokat. Az alkalmazások közt megjelenik egy sztochasztikus mező által meghajtott kötvény modell, egy olyan európai típusú a Black-Scholes-Merton modell szerint felírt európai típusú opció árának többparaméteres szimulációja, illetve egy ázsiai típusú opció értékének analitikus elemzése. Az alkalmazások során felhasznált elmélet elengedhetetlen kelléke a többdimenziós paraméterű martingálok sztochasztikus integrálokkal történő reprezentációja. Ennek megismeréséhez áttekintem a Wiener mező szerinti sztochasztikus integrál felépítését, mely által kitekintést nyerhetünk a többparaméteres szemimartingálok világába.

1. fejezet

Sztochasztikus mezők és tulajdonságaik

Az (egyparaméteres) sztochasztikus folyamatok kézenfekvő általánosításai a többparaméteres sztochasztikus folyamatok, vagyis a vektorparaméterű sztochasztikus folyamatok, azaz **sztochasztikus mező**k, melyekre gyakran a szakirodalomban a véletlen mezők (*random fields*) elnevezést használják.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $p \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^p$ a **paramétertér**, ekkor p a **paraméterszám**, hasonlóan legyen $d \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ az **állapottér** és d az állapottér **dimenziószám**a. Legyen $X \colon \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{X}$ függvény, ha minden $\boldsymbol{t} \in \mathbb{T}$ esetén $\omega \mapsto X(\omega, \boldsymbol{t})$ valószínűségi változó, akkor az X függvényt **sztochasztikus mező**nek nevezzük. Rögzített $\omega \in \Omega$ esetén az $\omega \mapsto X(\omega, \boldsymbol{t})$ függvényt az X trajektóriájának nevezzük, ha X trajektóriái 1 valószínűséggel folytonosak, akkor X folytonos trajekóriájú. Ahogy az analízisben a függvényeket értelmezési tartományuk és értékkészletük szerint csoportosítjuk, úgy a sztochasztikus mezők típusait is meghatározhatjuk a paraméterterük és állapotterük szerint. Ha $p = 1$, akkor visszakapjuk a sztochasztikus folyamat definícióját, ha $p > 1$, akkor X valódi sztochasztikus mező. A továbbiakban megengedjük a sztochasztikus mező definíciójában a $p = 1$ esetet is, ebben az értelemben sztochasztikus mező alatt sztochasztikus folymatot is érthetünk. Ha $\boldsymbol{t} \in \mathbb{T}$ diszkrét (folytonos) paraméter, akkor X **diszkrét** (**folytonos**) **paraméterű**. Hasonlóan, ha $d = 1$, akkor X egydimenziós (állapotterű), azaz skalár értékű, ha $d > 1$, akkor $\boldsymbol{X}$ többdimenziós (állapotterű), azaz vektor értékű sztochasztikus mező.

1.1. Részben rendezés az $\mathbb{R}^p$ téren

Lássuk el az $\mathbb{R}^p$ halmazt a következő részben rendezési relációval, legyen $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ és $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \dots, t_p)$, ha minden $s_j \leq t_j$, akkor azt mondjuk, hogy $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$. Az intervallumok definíciójához hasonlóan, ha $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$, akkor legyen $[\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}] = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p \mid \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{t}\}$ az $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{t}$ vektorok által határolt p dimenziós **zárt tégla**, (hasonlóan definiálhatjuk a p dimenziós nyílt téglákat, valamint a balról zárt és jobbról nyílt, illetve a balról nyílt és jobbról zárt p dimenziós tégla fogalmát). Jelölje $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$ a nullvektort és hasonlóan $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$ az azonosan 1 vektort. Legyen bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x \wedge y = \min\{x, y\}$ és $x \vee y = \max\{x, y\}$, ehhez hasonlóan jelölje $\boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{t} = (s_1 \wedge t_1, s_2 \wedge t_2, \dots, s_p \wedge t_p)$ a koordinátánkénti minimumot és $\boldsymbol{s} \vee \boldsymbol{t} = (s_1 \vee t_1, s_2 \vee t_2, \dots, s_p \vee t_p)$ a koordinátánkénti maximumot. Bevezetjük a következő jelöléseket a többparaméteres összegzésre és integrálásra:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} x_{\boldsymbol{k}} &= \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{k_p=1}^{n_p} x_{k_1, k_2, \dots, k_p}, \\
\int_{\boldsymbol{s}}^{\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{s_p}^{t_p} \int_{s_{p-1}}^{t_{p-1}} \cdots \int_{s_1}^{t_1} f(x_1, x_2, \dots, x_p) \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{p-1} \, \mathrm{d}x_p.
\end{aligned}
$$

1.2. Filtráció

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **teljes** valószínűségi mező, azaz minden $A \in \mathcal{A}$ esetén, ha $\mathbb{P}(A) = 0$, akkor minden $A_0 \subseteq A$ esetén $A_0 \in \mathcal{A}$ és $\mathbb{P}(A_0) = 0$. A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathbb{T} = [0, \infty)^p$, ha ettől eltérünk akkor azt jelezzük.

1.1. Definíció (Filtráció). *Legyen minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $\mathcal{F}(\boldsymbol{t}) \subseteq \mathcal{A}$ σ-algebra, ha minden $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$ esetén $\mathcal{F}(\boldsymbol{s}) \subseteq \mathcal{F}(\boldsymbol{t})$, akkor $\mathcal{F}$* ***filtráció****.*

Legyen minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén az $\mathcal{F}$ filtráció j-edik **marginális filtráció**ja

$$\mathcal{F}_j(t_j) = \sigma\Big(\mathcal{F}(\boldsymbol{s}) \;\Big|\; s_j \leq t_j,\ \forall i \neq j\colon s_i \geq 0\Big). \tag{1.1}$$

Ha egy Z valószínűségi változó mérhető a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ σ-algebrára nézve, akkor azt úgy jelöljük, hogy $Z \sim \mathcal{G}$.
Legyen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ σ-algebra, ha minden $Z_j \sim \mathcal{G}_j$ korlátos valószínűségi változó esetén

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} Z_j \;\middle|\; \mathcal{G}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\big(Z_j \,\big|\, \mathcal{G}\big), \tag{1.2}$$

akkor a $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n$ σ-algebrák feltételesen függetlenek a $\mathcal{G}$ σ-algebrától.

1.2. Definíció (Kommutáló filtráció). *Legyen $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(\boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ filtráció, ha minden $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ és $Z \sim \mathcal{F}(\boldsymbol{t})$ korlátos valószínűségi változó esetén*

$$\mathbb{E}\big(Z \,\big|\, \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\big) = \mathbb{E}\big(Z \,\big|\, \mathcal{F}(\boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{t})\big), \tag{1.3}$$

akkor az $\mathcal{F}$ filtrációt ***kommutáló filtráció****nak nevezzük.*

$\mathcal{F}$ pontosan akkor kommutáló filtráció, ha minden $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $\mathcal{F}(\boldsymbol{s})$ és $\mathcal{F}(\boldsymbol{t})$ feltételesen függetlenek az $\mathcal{F}(\boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{t})$ σ-algebrától [Khoshnevisan (2002)].

Ha $\mathcal{F}$ kommutáló filtráció, akkor minden Z korlátos valószínűségi változó esetén

$$\mathbb{E}\big(Z \,\big|\, \mathcal{F}(\boldsymbol{t})\big) = \mathbb{E}\Bigg(\cdots \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(Z \,\big|\, \mathcal{F}_1(t_1)\big) \,\Big|\, \mathcal{F}_2(t_2)\Big) \cdots \,\Bigg|\, \mathcal{F}_p(t_p)\Bigg) \tag{1.4}$$

és az $\mathcal{F}_1(t_1), \mathcal{F}_2(t_2), \ldots, \mathcal{F}_p(t_p)$ marginális filtrációk σ-algebrái feltételesen függetlenek az $\mathcal{F}(\boldsymbol{t})$ σ-algebrától. Ha minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{t}) = \sigma\big(A \cup A_0 \,\big|\, A \in \mathcal{F}(\boldsymbol{t}), A_0 \in \mathcal{A} \colon \mathbb{P}(A_0)\big) = 0,$$

akkor az $\mathcal{F}$ filtráció **teljes**. Ha $\mathcal{F}(\boldsymbol{t}) = \bigcap\limits_{\boldsymbol{u} > \boldsymbol{t}} \mathcal{F}(\boldsymbol{u})$, akkor az $\mathcal{F}$ filtráció **jobbról folytonos**. Ha $\mathcal{F}$ jobbról folytonos teljes kommutáló filtráció, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}$ filtrációra teljesülnek a **szokásos feltételek**, azaz szokásos filtrációnak nevezzük.

1.3. Növekmény folyamat

Legyen $X = \big(X(\boldsymbol{t}) \colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}\big)$ folytonos trajektóriájú sztochasztikus mező, határozzuk meg a növekményeit bármely $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$ esetén az $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}]$ téglán, jelölje $\tilde{X}\big((\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}]\big)$ a növekményt.

Ha $p = 1$, akkor $\boldsymbol{s} = (s_1)$, $\boldsymbol{t} = (t_1)$ és

$$\tilde{X}\big((\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}]\big) = X(t_1) - X(s_1). \tag{1.5}$$

Ha $p = 2$, akkor $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2)$ és

$$\tilde{X}\big((\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}]\big) = X(t_1, t_2) - X(t_1, s_2) - X(s_1, t_2) + X(s_1, s_2). \tag{1.6}$$

Ha $p = 3$, akkor $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)$ és

$$\begin{aligned} \tilde{X}\big((\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}]\big) = \quad & X(t_1,t_2,t_3) - \\ & - X(t_1,t_2,s_3) - X(t_1,s_2,t_3) - X(s_1,t_2,t_3) + \\ & + X(t_1,s_2,s_3) + X(s_1,t_2,s_3) + X(s_1,s_2,t_3) - \\ & - X(s_1,s_2,s_3) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Legyen $C \subseteq \{1, 2, \ldots, p\}$ és jelölje $\varphi_C(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{u}$ azt a paramétert, amelynek j-edik koordinátája, ha $j \in C$, akkor s_j, egyébként t_j, azaz

$$u_j = \begin{cases} s_j, \text{ ha } j \in C \\ t_j, \text{ ha } j \notin C. \end{cases} \tag{1.8}$$

Ekkor minden C esetén $\boldsymbol{s} \le \varphi_C(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) \le \boldsymbol{t}$ és $\varphi_\emptyset(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}$, $\varphi_{\{1,2,\ldots,p\}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{s}$. Ezekkel a kifejezésekkel már felírhatjuk a növekményeket,

$$\tilde{X}\big((\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}]\big) = \sum_{C\subseteq\{1,2,\ldots,p\}} (-1)^{|C|} X\big(\varphi_C(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\big). \tag{1.9}$$

A téglák halmazán megkonstruált $\tilde{X}$ kiterjeszthető a $\mathcal{B}\big([0,\infty)^p\big)$ σ-algebrára. Jelölje a kiterjesztést is $\tilde{X}$, ekkor $\tilde{X} = \Big(\tilde{X}(B) \colon B \in \mathcal{B}\big([0,\infty)^p\big)\Big)$ σ-véges előjeles véletlen mérték.

Ha minden $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \subset [0,\infty)^p$ páronként diszjunkt téglák esetén $\tilde{X}(\Delta_1), \tilde{X}(\Delta_2), \ldots, \tilde{X}(\Delta_1)$ függetlenek, akkor X **független növekményű**.

Tegyük fel, hogy az X sztochasztikus mező a tengelyeken azonosan $X_{\boldsymbol{0}}$. Legyen $\boldsymbol{0} \le \boldsymbol{s} \le \boldsymbol{t}$, ekkor valamely tengellyel párhuzamos, a többi tengellyel merőleges szakaszon vett növekmény felírható, mint

$$\tilde{X}\Big(\big(\boldsymbol{s}, \varphi_{\{j\}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s})\big]\Big) = X\big(\varphi_{\{j\}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s})\big) - X(\boldsymbol{s}) = \tag{1.10}$$

$$= X(s_1,\ldots,s_{j-1},t_j,s_{j+1},\ldots,s_p) - X(s_1,\ldots,s_{j-1},s_j,s_{j+1},\ldots,s_p),$$

ami nem más, mint rögzített $s_1, s_2, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_p$ esetén az $s_j \mapsto X(\boldsymbol{s})$ sztochasztikus folyamat növekménye az $(s_j, t_j]$ szakaszon.

Tekintsük azon $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{t}$ paraméterek halmazát, amelyek valamely koordinátája nagyobb, mint egy $\boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}$ paramétervektor megfelelő koordinátája, (de nem feltétlenül mindegyik nagyobb). Az ilyen $\boldsymbol{u}$ paramétereket tartalmazza a $(\mathbf{0}, \boldsymbol{t}] \setminus (\mathbf{0}, \boldsymbol{s}]$ halmaz, amelyen X növekménye éppen

$$\tilde{X}\Big((\mathbf{0}, \boldsymbol{t}] \setminus (\mathbf{0}, \boldsymbol{s}]\Big) = X(\boldsymbol{t}) - X(\boldsymbol{s}). \tag{1.11}$$

1.4. Véletlen bolyongás

Első példánk diszkrét sztochasztikus mezőre a véletlen bolyongás többparaméteres általánosítása. Ismert tény, hogy az egyparaméteres véletlen bolyongás martingál a természetes filtrációjában, ha 0 várható értékű (és véges szórású).

1.3. Definíció (Véletlen bolyongás). *Legyen $X = (X_{\boldsymbol{n}} \colon \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^p)$ független azonos eloszlású valószínűségi változókból álló diszkrét sztochasztikus mező, ha minden $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^p$ esetén*

$$S_{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} \sum\limits_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} X_{\boldsymbol{k}}, & \text{ha } \boldsymbol{n} > \mathbf{0} \\ 0, & \text{ha } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^p \setminus \mathbb{N}^p, \end{cases} \tag{1.12}$$

akkor $S = (S_{\boldsymbol{n}} \colon \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^p)$ ***véletlen bolyongás****.*

Vezessük be a következő jelölést, legyen minden $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^p$ esetén

$\langle \boldsymbol{n} \rangle = \big|\{\boldsymbol{k} > \mathbf{0} \,|\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^p, \boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{n}\}\big|$ a $(\mathbf{0}, \boldsymbol{n}]$ téglában lévő rácspontok száma.

Ha $p = 1$ és $\boldsymbol{n} = (n_1)$, akkor

$$\langle \boldsymbol{n} \rangle = \big|\{\boldsymbol{k} > 0 \,|\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{n}\}\big| = \big|\{1, 2, \ldots, n_1\}\big| = n_1.$$

Ha $p = 2$ és $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$, akkor

$$\langle \boldsymbol{n} \rangle = \big|\{\boldsymbol{k} > \boldsymbol{0} \,|\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^2, \boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{n}\}\big| = \big|\{1, 2, \ldots, n_1\} \times \{1, 2, \ldots, n_2\}\big| = n_1 \cdot n_2$$

és hasonlóan, minden $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^p$ esetén $\langle \boldsymbol{n} \rangle = \prod\limits_{j=1}^{p} n_j$.

Legyen $p = 1$, ekkor a **nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye** szerint, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}\left(|X_n|\right) < \infty$, akkor $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(X_1)$. Többparaméteres véletlen bolyongásra hasonló állítást fogalmazhatunk meg.

1.1. Tétel (Nagy számok Smythe-féle erős törvénye). *Legyen S véletlen bolyongás, ha minden $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^p$ esetén*

$$\mathbb{E}\Big(|X_{\boldsymbol{n}}| \cdot \ln^{p-1}\big(|X_{\boldsymbol{n}}| \vee 1\big)\Big) < \infty, \tag{1.13}$$

akkor $\lim\limits_{\boldsymbol{n} \to \infty} \frac{S_{\boldsymbol{n}}}{\langle \boldsymbol{n} \rangle} = \mathbb{E}\left(X_{\boldsymbol{1}}\right)$.

Azaz, a nagy számok Smythe-féle erős törvénye [Khoshnevisan (2002)] $p = 1$ esetén éppen a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvényét adja.

1.5. Wiener mező

Ebben a fejezetben a Wiener folyamat vagy Brown mozgás többdimenziós paraméterre vonatkozó általánosítását a Wiener mezőt (*Wiener sheet, multiparameter Wiener process*) mutatjuk be, amelyre a szakirodalomban a Brown lepedő (*Brownian sheet*) elnevezés is használatos. Azonban mielőtt ezt megtennénk, bevezetünk egy jelölést. Legyen minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $\lambda\big((\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]\big) = \prod\limits_{j=1}^{p} t_j$ a $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]$ tégla Lebesgue mértéke, mivel minden $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^p$ esetén $\langle \boldsymbol{n} \rangle = \prod\limits_{j=1}^{p} n_j$, ezért ezt a jelölést kiterjeszthetjük. A továbbiakban legyen minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $\langle \boldsymbol{t} \rangle = \prod_{j=1}^{p} t_j$ és $\mathrm{Axes}(\mathbb{T}) = \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{T} \mid \langle \boldsymbol{t} \rangle = 0\}$ a $\mathbb{T}$ tengelypontjainak halmaza. Ha $p = 1$, akkor $\mathrm{Axes}(\mathbb{R}) = \{0\}$, ha $p = 2$, akkor $\mathrm{Axes}(\mathbb{R}^2) = \{(t_1, 0), (0, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ és hasonlóan, minden $p \geq 2$ esetén a tengelypontok éppen a tengelyeken lévő pontok, vagyis amelyek valamely koordinátája 0, ilyen értelemben a 0 az egyetlen tengelypontja a valós számok halmazának. Egy sztochasztikus mező kezdőértékeit megadhatjuk azzal, hogy a paraméterterének tengelypontjaiban meghatározzuk az értékeit, ahogy ezt az 1.3 definíció esetén tettük.

1.4. Definíció (Wiener mező). *Legyen* $W = \big(W(\boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}\big)$ *folytonos trajektóriájú sztochasztikus mező, ha* W *független növekményű, minden* $\boldsymbol{t}_0 \in \mathrm{Axes}\big([0,\infty)^p\big)$ *esetén* $W(\boldsymbol{t}_0) = 0$ *és minden* $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$ *esetén* $W(\boldsymbol{t}) - W(\boldsymbol{s}) \sim \mathrm{N}(0, \langle \boldsymbol{t} \rangle - \langle \boldsymbol{s} \rangle)$, *akkor* W ***Wiener mező***.

Megmutatható, hogy rögzített $t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_p > 0$ esetén

$$t_j \mapsto \frac{1}{\sqrt{t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_{j-1} \cdot t_{j+1} \cdot \ldots \cdot t_p}} W(\boldsymbol{t}) \tag{1.14}$$

Wiener folyamat, tehát azonnal adódik, hogy a Wiener mező trajektóriái 1-valószínűséggel nem differenciálhatók. Hasonlóan, a Wiener folyamat időinverziós tulajdonsága is általánosítható tetszőleges $p \in \mathbb{N}$ paraméterre. Speciálisan $p = 2$ esetén

$$(t_1, t_2) \mapsto t_1 \cdot W\left(\frac{1}{t_1}, t_2\right),\ t_2 \cdot W\left(t_1, \frac{1}{t_2}\right),\ t_1 \cdot t_2 \cdot W\left(\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}\right)$$

is Wiener mező. Látszik, hogy p praraméter esetén az időinverzióra $2^p - 1$ lehetőség van, ugyanis kiválasztunk néhány, (de legalább 1) paramétert, ezek szorzata kerül a mezőérték elé és a kiválasztott paraméterek helyett a paraméterek reciprokát helyettesítjük be, a ki nem választott paraméterek változatlanul hagyjuk és a Wiener mezőt az így meghatározott paraméterek mellett értékeljük ki.

A következő tétel [Khoshnevisan (2002)] kiemelkedő fontosságú a folytonos paraméterű sztochasztikus mezők elméletében, bár jelentőségét a bizonyítások során látnánk.

1.2. Tétel (Cairoli-Walsh kommutációs tétel). *Ha $W = (W(\boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0})$ Wiener mező, akkor W természetes filtrációja kommutáló filtráció.*

1.6. Martingál tulajdonság

A martingálok többparaméteres általánosítására számos lehetőség kínálkozik. Egydimenziós paraméter esetén, ha X martingál az $\mathcal{F}$ filtrációban, akkor minden $s \leq t$ esetén $\mathbb{E}\left(X(t) \mid \mathcal{F}(s)\right) = X(s)$, viszont $X(s) \sim \mathcal{F}(s)$, tehát $X(s) = \mathbb{E}\left(X(s) \mid \mathcal{F}(s)\right)$, ezért

$$\mathbb{E}\left(X(t) \mid \mathcal{F}(s)\right) - X(s) = \mathbb{E}\left(X(t) - X(s) \mid \mathcal{F}(s)\right) = 0. \tag{1.15}$$

Nyilvánvaló, hogy az (1.15) szerint egy martingál növekményének a megfelelő σ-algebrára vonatkozó feltételes várható értéke 0, de milyen többdimenziós halmazon vett növekménnyel helyettesíthető az $X(t) - X(s)$ (egydimenziós halmazon vett) növekmény és milyen többparaméteres filtrációval helyettesíthető az $\mathcal{F}$ filtráció. Természetesen az általánosítás során fontos szempont, hogy a többparaméteres definíció egyparaméteres megszorítása visszaadja az (1.15) tulajdonságot. Emlékezzünk vissza az (1.5), (1.10) és (1.11) összefüggésekre, ezeket figyelembe véve helyettesíthetjük az $X(t) - X(s)$ növekményt

- az $X(\boldsymbol{t}) - X(\boldsymbol{s})$ növekménnyel, azaz az $(s, t]$ intervallumot helyettesíthetjük az $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}]$ téglával vagy

- az $\tilde{X}\big((\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}]\big)$ növekménnyel, azaz az s és t közti növekményt helyettesíthetjük az $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{t}$ közti növekménnyel vagy
- rögzített $s_1, s_2, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_p \geq 0$ esetén az $s_j \mapsto X(\boldsymbol{s})$ sztochasztikus folyamat $(s_j, t_j]$ szakaszon vett növekményével, azaz az $(s,t]$ intervallumot helyettesíthetjük az $(s_j, t_j]$ intervallummal.

Világos, hogy az első két esetben az egyparaméterre vonatkozó megszorítás visszaadja az (1.15) összefüggést, az utolsó esetet tekintsük úgy, hogy egyetlen paraméter kivételével a többit rögzítjük és az így kapott sztochasztikus folyamat növekményét vesszük a megfelelő szakaszon. Egyparaméter esetén, ha egy paraméter kivételével az összes többit rögzítjük, akkor egyetlen paramétert sem rögzítettünk, tehát a megszorított (egyparaméteres) folyamat éppen a valódi folyamat lesz, így az utolsó esetben is visszakapjuk az (1.15) feltételt. Azonban ebben az esetben valamely s_j paraméter kivételével a többi s_i $(i \neq j)$ paramétert tetszőlegesen megválaszthatjuk és az ezen megszorított paraméterek mellett kell az $s_j \mapsto X(s)$ folyamatnak martingálnak lennie, a kérdés a megfelelő filtráció megválasztása. Megtehetnénk, hogy a sztochasztikus mező megszorítását alkalmazzuk a filtráció megszorítására is, vagyis tekinthetnénk a megszorított folyamatot az $s_j \mapsto \mathcal{F}(\boldsymbol{s})$ filtrációban, viszont ebben az esetben a rögzített paraméterek megváltoztatása esetén le kellene cserélnünk a filtrációt is. Ezt azonban elkerülhetjük, ha az $\mathcal{F}_j$ marginális filtrációt választjuk, ekkor a rögzített paramétereket tetszőlegesen megválaszthatjuk és a filtrációt nem kell lecserélnünk ahhoz, hogy martingált kapjunk, ráadásul az egyparaméteres esetben a marginális filtráció és a valódi filtráció egybeesik. A filtráció megválasztására is adódik további lehetőség a többparaméteres esetben, ugyanis az $\mathcal{F}^*(\boldsymbol{s}) = \bigvee_{j=1}^{p} \mathcal{F}_j(s_j)$ generált σ-algebra egyetlen $\boldsymbol{s} = (s_1)$ paraméter esetén éppen az $\mathcal{F}_1(s_1) = \mathcal{F}(\boldsymbol{s})$ σ-algebrával egyezik meg. Az egyparaméteres esettel megegyezően, ha minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

esetén $X(\boldsymbol{t}) \sim \mathcal{F}(\boldsymbol{t})$, akkor X **adaptált** az $\mathcal{F}$ filtrációhoz. A továbbiakban lerögzítjük a filtrációt és azt mondjuk, hogy X adaptált mező, (ahelyett, hogy azt mondanánk, hogy X adaptált az $\mathcal{F}$ filtrációhoz). Az imént felírt tulajdonságok szerint a következő lehetőségek adódnak a martingál definíciójának általánosítására:

1.5. Definíció (Martingál). *Legyen X adaptált mező, ha minden $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$ esetén $\mathbb{E}\big(|X(\boldsymbol{t})|\big) < \infty$ és*

$$\mathbb{E}\left(X(\boldsymbol{t}) \mid \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\right) = X(\boldsymbol{s}), \tag{1.16}$$

*akkor X **martingál** az $\mathcal{F}$ filtrációban.*

1.6. Definíció (Ortomartingál). *Legyen $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(\boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ filtráció és $X = (X(\boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ sztochasztikus mező, ha minden $1 \leq j \leq p$ és $t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_p \geq 0$ esetén $t_j \mapsto X(\boldsymbol{t})$ martingál az $\mathcal{F}_j$ marginális filtrációban, akkor X **ortomartingál** az $\mathcal{F}$ filtrációban.*

Ha M martingál, akkor M ortomartingál is, a megfordítás akkor teljesül, ha $\mathcal{F}$ kommutáló filtráció [Cairoli, Walsh (1975)].

1.7. Definíció (Gyenge martingál). *Legyen X adaptált mező, ha minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{s}$ esetén $\mathbb{E}\big(|X(\boldsymbol{t})|\big) < \infty$ és*

$$\mathbb{E}\left(\tilde{X}\big((\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}]\big) \,\Big|\, \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\right) = 0, \tag{1.17}$$

*akkor X **gyenge martingál** az $\mathcal{F}$ filtrációban.*

Ha M martingál, akkor gyenge martingál is. Azonban, ha M gyenge martingál, akkor nem feltétlenül martingál.

1.8. Definíció (Erős martingál). *Legyen X adaptált mező, ha minden $\boldsymbol{t}_0 \in \mathrm{Axes}\big([0,\infty)^p\big)$ esetén $X(\boldsymbol{t}_0) = X(\boldsymbol{0})$, minden $\boldsymbol{0} \le \boldsymbol{s} \le \boldsymbol{t}$ esetén $\mathbb{E}\big(|X(\boldsymbol{t})|\big) < \infty$ és*

$$\mathbb{E}\left(\tilde{X}\big((\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}]\big) \,\Big|\, \mathcal{F}^*(\boldsymbol{s})\right) = 0, \tag{1.18}$$

*akkor X **erős martingál** az $\mathcal{F}$ filtrációban.*

Világos, hogy egydimenziós paramétertér esetén, a martingál és a gyenge martingál definíciója egybeesik, valamint $\mathcal{F}^*(\boldsymbol{s}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{s})$ és

$$\tilde{X}\big((\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}]\big) = X(t_1) - X(s_1) = X(\boldsymbol{t}) - X(\boldsymbol{s}), \tag{1.19}$$

azaz a martingál és az erős martingál definíciója is egybeesik. Azonban ez többdimenziós paramétertér esetén nem teljesül. Ha M erős martingál, akkor M martingál [Cairoli, Walsh (1975)]. Arra később mutatunk példát, hogy ha M martingál, akkor nem feltétlenül erős martingál. A Wiener mező erős martingál a saját természetes filtrációjában. Mutassuk meg, hogy $W^2(\boldsymbol{t})-\langle\boldsymbol{t}\rangle$ martingál az $\mathcal{F}(\boldsymbol{t}) = \sigma(W(\boldsymbol{u})\colon \boldsymbol{u} \le \boldsymbol{t})$ filtrációban, ehhez határozzuk meg a következő feltételes várható értéket:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(W^2(\boldsymbol{t}) \,|\, \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\right) = \mathbb{E}\Big((W(\boldsymbol{t}) - W(\boldsymbol{s}) + W(\boldsymbol{s}))^2 \,\big|\, \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\Big) = \\
&= \mathbb{E}\Big((W(\boldsymbol{t}) - W(\boldsymbol{s}))^2 + 2W(\boldsymbol{s})(W(\boldsymbol{t}) - W(\boldsymbol{s})) + W^2(\boldsymbol{s}) \,\big|\, \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\Big) = \\
&= \mathbb{D}^2\Big(W(\boldsymbol{t}) - W(\boldsymbol{s})\Big) + 2W(\boldsymbol{s})\mathbb{E}\Big(W(\boldsymbol{t}) - W(\boldsymbol{s})\Big) + W^2(\boldsymbol{s}) = \\
&= W^2(\boldsymbol{s}) + \langle\boldsymbol{t}\rangle - \langle\boldsymbol{s}\rangle.
\end{aligned}$$

Tehát átrendezve az egyenletet, megkapjuk a martingál tulajdonságot, azaz

$$\mathbb{E}\Big(W^2(\boldsymbol{t}) - \langle\boldsymbol{t}\rangle \,\Big|\, \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\Big) = W^2(\boldsymbol{s}) - \langle\boldsymbol{s}\rangle. \tag{1.20}$$

Hasonló számolással megmutatható, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $e^{aW(\boldsymbol{t})-\frac{1}{2}a^2\langle \boldsymbol{t}\rangle}$ martingál.

Megvizsgálhatjuk, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkezik egy olyan egyparaméteres folyamat, amelyet úgy kapunk, hogy egy sztochasztikus mező paraméteréreire vonatkozóan különböző feltevéseket teszünk, illetve ezek a feltárt tulajdonságok milyen összefüggéseket állítanak az eredeti sztochasztikus mezőre vonatkozóan. Legyen bármely $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $\boldsymbol{p}\colon [0,1] \to [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]$ folytonos függvény, ha minden $0 \leq q \leq r \leq 1$ esetén $\boldsymbol{p}(q) \leq \boldsymbol{p}(r)$, akkor a $\boldsymbol{p}$ függvényt **útvonal függvény**nek (*path function*) nevezzük. Ha $\boldsymbol{t} \mapsto M(\boldsymbol{t})$ folytonos trajektóriájú és $\boldsymbol{p}$ folytonos függvény, akkor $r \mapsto M(\boldsymbol{p}(r))$ is folytonos trajektóriájú. Ha $\boldsymbol{t} \mapsto \mathcal{F}(\boldsymbol{t})$ filtráció és $\boldsymbol{p}$ monoton növekvő, akkor $r \mapsto \mathcal{F}(\boldsymbol{p}(r))$ is (egyparaméteres) filtráció, mivel, ha $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{p}(q)$ és $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}(r)$, akkor $q \leq r$, mert $\boldsymbol{p}$ monoton növekvő és ekkor $\mathcal{F}(\boldsymbol{p}(q)) = \mathcal{F}(\boldsymbol{s}) \subseteq \mathcal{F}(\boldsymbol{t}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{p}(r))$. Világos, hogy ha $M = (M(\boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ martingál az $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(\boldsymbol{t})\colon \ \geq \boldsymbol{0})$ filtrációban és minden $\boldsymbol{p}\colon [0,1] \to [0,\infty)^p$ útvonal függvény esetén $r \mapsto M(\boldsymbol{p}(r))$ (egyparaméteres) martingál az $r \mapsto \mathcal{F}(\boldsymbol{p}(r))$ filtrációban, mivel

$$\mathbb{E}\Big(M\big(\boldsymbol{p}(r)\big)\,\Big|\,\mathcal{F}\big(\boldsymbol{p}(q)\big)\Big) = \mathbb{E}\Big(M(t)\,\Big|\,\mathcal{F}\big(\boldsymbol{p}(q)\big)\Big) = M\big(\boldsymbol{p}(q)\big)$$

Tehát egy többparaméteres martingál minden útvonal mentén meghatároz egy egyparaméteres martingált. Megfordítva, legyen $\boldsymbol{t} \mapsto M(\boldsymbol{t})$ sztochasztikus mező, ha minden $\boldsymbol{p}$ útvonal függvény mentén $r \mapsto M(\boldsymbol{p}(r))$ egyparaméteres martingál az $r \mapsto \mathcal{F}(\boldsymbol{p}(r))$ filtrációban, akkor bármely $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$ esetén választhatjuk a $\boldsymbol{p}(r) = \boldsymbol{s} + r \cdot (\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s})$ útvonal függvényt, ekkor

$$\mathbb{E}\Big(M(\boldsymbol{t})\,\Big|\,\mathcal{F}(\boldsymbol{s})\Big) = \mathbb{E}\Big(M\big(\boldsymbol{p}(1)\big)\,\Big|\,\mathcal{F}\big(\boldsymbol{p}(0)\big)\Big) = M\big(\boldsymbol{p}(0)\big) = M(\boldsymbol{s}),$$

tehát $\boldsymbol{t} \mapsto M(\boldsymbol{t})$ martingál.

Az alkalmazások során persze nem tudjuk garantálni, hogy a filtráció nem bővebb, mint a Wiener mező természetes filtrációja, viszont a filtráció bővítése el tudja rontani a martingál tulajdonságot, ahhoz, hogy ezt megmutassuk, legyen $\mathcal{F}(\boldsymbol{t}) = \sigma\,(W(\boldsymbol{s})\colon \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t} + \boldsymbol{1})$, ekkor ugyan W adaptált az $\mathcal{F}$ filtrációhoz, de bármely $\boldsymbol{r} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ esetén

$$\mathbb{E}\Big(W(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}) \;\Big|\; \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\Big) = W(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}) \neq W(\boldsymbol{s}),$$

tehát W nem martingál az $\mathcal{F}$ filtrációban. Ezért természetesen merülhet fel a kérdés, hogy a filtráció milyen jellegű bővítése rontja el vagy őrzi meg a martingál tulajdonságot? Ennek a kérdésnek a megválaszolásához meg kell vizsgálnunk a Wiener mező néhány olyan tulajdonságát, amelyek segítségével kiterjeszthetjük a definícióját bármely olyan filtrációra, amelyben a martingál tulajdonság érvényben marad.

Legyen X sztochasztikus mező, ha minden $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n \in \mathbb{T}$ esetén $\big(X(\boldsymbol{t}_1), X(\boldsymbol{t}_2), \ldots, X(\boldsymbol{t}_n)\big)$ (együttesen) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó, akkor X **Gauss mező**. A Wiener mező kovariancia struktúrája minden $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $\operatorname{cov}(W(\boldsymbol{s}), W(\boldsymbol{t})) = \langle \boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{t} \rangle$.

Mivel a Wiener mező olyan folytonos trajektóriájú Gauss mező, amely martingál a természetes filtrációjában és minden $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$ esetén $W(\boldsymbol{t}) - W(\boldsymbol{s})$ független a $\sigma(W(\boldsymbol{u})\colon \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{s})$ σ-algebrától, ezért ha ezek a tulajdonságok megőrződnek valamely tetszőleges $\mathcal{F}$ filtráció esetén, akkor azt mondjuk, hogy W Wiener mező az $\mathcal{F}$ filtrációban. A továbbiakban, amennyiben ez nem okoz félreértést, ahogy az adaptáltság és a martingál tulajdonság esetén is tettük, rögzítjük az $\mathcal{F}$ filtrációt és azt mondjuk, hogy W Wiener mező (ahelyett, hogy azt mondanánk, hogy W Wiener mező az $\mathcal{F}$ filtrációban).

1.9. Definíció (Gauss fehér zaj). *Legyen* $\widetilde{W}\colon \Omega \times \mathcal{B}\big([0,\infty)^p\big) \to \mathbb{R}$*, ha* *minden* $B, B_1, B_2 \in \mathcal{B}\big([0,\infty)^p\big)$ *Borel halmaz esetén* $\mathbb{E}\big(\tilde{W}(B)\big) = 0$ *és* $\operatorname{cov}\big(\tilde{W}(B_1), \tilde{W}(B_2)\big) = \lambda(B_1 \cap B_2)$, *akkor* $\tilde{W}$ ***Gauss fehér zaj***.

Legyen $\tilde{W} : \Omega \times \mathcal{B}\big([0,\infty)^p\big) \to \mathbb{R}$ Gauss fehér zaj, ekkor

- minden $B \in \mathcal{B}\big([0,\infty)^p\big)$ esetén $\tilde{W}(B) \sim \mathrm{N}(0, \lambda(B))$,
- minden $B_1, B_2 \in \mathcal{B}\big([0,\infty)^p\big)$ diszjunkt halmaz esetén $\tilde{W}(B_1)$ és $\tilde{W}(B_2)$ függetlenek és $\tilde{W}(B_1 \cup B_2) = \tilde{W}(B_1) + \tilde{W}(B_2)$,
- minden $B_1, B_2 \in \mathcal{B}\big([0,\infty)^p\big)$ esetén

$$\tilde{W}(B_1 \cup B_2) + \tilde{W}(B_1 \cap B_2) = \tilde{W}(B_1) + \tilde{W}(B_2),$$

- valamint, ha $(B_n) \subset \mathcal{B}\big([0,\infty)^p\big)$ olyan páronként diszjunkt halmazok sorozata, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) < \infty$, akkor $\tilde{W}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{W}(B_n)$,

tehát $\tilde{W}$ **σ-véges előjeles véletlen mérték**.

A Gauss fehér zaj és a Wiener mező növekményeinek kapcsolatát fogalmazza meg a következő tétel [Khoshnevisan (2002)].

1.3. Tétel (Csencov reprezentáció). *Legyen* $\tilde{W}$ *Gauss fehér zaj és minden* $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ *esetén* $W(\boldsymbol{t}) = \tilde{W}\big((\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]\big)$, *ha* W *folytonos trajektóriájú sztochasztikus mező, akkor* W *Wiener mező.*

2. fejezet

Többparaméteres sztochasztikus integrál

Ebben a fejezetben felépítjük a folytonos trajektóriájú négyzetesen integrálható martingálok szerinti sztochasztikus integrált. Először speciális esetként a Wiener folyamat szerinti sztochasztikus integrál többparaméteres változatát. Legyen $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^p$, minden $1 \leq j \leq p$ esetén

$$0 = t_{j,0} < t_{j,1} < t_{j,2} < \cdots < t_{j,n_j}$$

és minden $\boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}$ esetén $\boldsymbol{t_i} = (t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \ldots, t_{p,i_p})$, ekkor $\Pi = \{\boldsymbol{t_i} \geq \boldsymbol{0} \colon \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}\}$ **rács** (*grid*). Ha $\boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{t}$, akkor a Π rácsot a $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]$ tégla **felosztás**ának nevezzük. Ha minden $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^p$ esetén $\Pi_{\boldsymbol{n}} = \left\{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{n})} \geq \boldsymbol{0} \colon \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}\right\}$ a $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]$ tégla felosztása, ha $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty} \max\limits_{\boldsymbol{1}\leq\boldsymbol{i}\leq\boldsymbol{n}} \left\|\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{n})} - \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i-1}}^{(\boldsymbol{n})}\right\| = 0$, akkor $\Pi_{\boldsymbol{n}}$ a $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]$ tégla végtelenül finomodó felosztássorozata. Speciálisan, ha $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{n})} = \left(\frac{i_1}{n_1} \cdot t_1, \frac{i_2}{n_2} \cdot t_2, \ldots, \frac{i_p}{n_p} \cdot t_p\right)$, akkor a $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]$ tégla ekvidisztáns felosztását kapjuk. Vagyis a többdimenziós tér ekvidisztáns felosztása a tengelyenként ekvidisztáns felosztások direkt szorzata.

2.1. Wiener mező szerinti integrál

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ teljes valószínűségi mező, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(\boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ szokásos filtráció, $W = (W(\boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ Wiener mező az $\mathcal{F}$ filtrációban a $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték szerint.

2.1. Definíció (Egyszerű mező). *Legyen $X = (X(\boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ sztochasztikus mező és $\{\boldsymbol{t_i} \geq \boldsymbol{0}\colon \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}\}$ rács, ha léteznek olyan $X_{\boldsymbol{i}} \sim \mathcal{F}(\boldsymbol{t_i})$ korlátos valószínűségi változók, amelyekre minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén*

$$X(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} X_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1}} \cdot \mathbb{1}_{(\boldsymbol{t_{i-1}}, \boldsymbol{t_i}]}(\boldsymbol{t}), \tag{2.1}$$

akkor X ***egyszerű mező****.*

A 2.1 definíció szerint egy egyszerű sztochasztikus mező adaptált a filtrációhoz. Ha X egyszerű mező (2.1) szerint, akkor X integrálható a W Wiener mező szerint, tegyük fel, hogy $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_k}$, ekkor

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u}) \,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{k}} X_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1}} \cdot \tilde{W}\Big((\boldsymbol{t_{i-1}}, \boldsymbol{t_i}]\Big). \tag{2.2}$$

Tekintsük speciálisan a $p = 2$ esetet, azaz legyen $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n$ és $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, ekkor minden $s \geq 0$ és $t \geq 0$ esetén

$$X(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} X_{i-1,j-1} \cdot \mathbb{1}_{(s_{i-1}, s_i] \times (t_{j-1}, t_j]}(s,t), \tag{2.3}$$

tegyük fel, hogy $s = s_k$ és $t = t_l$, ekkor

$$\int_{u=0}^{s} \int_{v=0}^{t} X(u,v) \,\mathrm{d}W(u,v) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} X_{i-1,j-1} \cdot \Big(W(s_i, t_j) - W(s_{i-1}, t_j) - W(s_i, t_{j-1}) + W(s_{i-1}, t_{j-1})\Big).$$

Ha minden $\overline{\boldsymbol{t}} \geq \mathbf{0}$ esetén az $(\omega, \boldsymbol{t}) \mapsto X(\omega, \boldsymbol{t}) \cdot \mathbb{1}_{(\mathbf{0}, \overline{\boldsymbol{t}}]}(\boldsymbol{t})$ mérhető az $\mathcal{F}\left(\overline{\boldsymbol{t}}\right) \otimes \mathcal{B}\big((\mathbf{0}, \overline{\boldsymbol{t}}]\big)$ σ-algebrára nézve, akkor az X **progresszíven mérhető**.

Legyen $\mathrm{Prog}_1 = \big\{H \subseteq \Omega \times [0,\infty)^p \;\big|\; \mathbb{1}_H \text{ progresszíven mérhető}\big\}$, ekkor $X \sim \mathrm{Prog}_1$ pontosan akkor, ha X progresszíven mérhető. Ha X folytonos trajektóriájú, adaptált mező, akkor progresszíven mérhető. A Wiener mező szerinti sztochasztikus integrált az egyparaméteres esettel teljesen analóg módon terjesztjük ki [Wong, Zakai (1974)] alapján. Vezessük be a következő jelölést:

$$\mathcal{S}_1(W) = \left\{X \sim \mathrm{Prog}_1 \;\middle|\; \forall \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0} \colon \mathbb{E}\left(\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} X^2(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right) < \infty\right\}.$$

Ha $X \in \mathcal{S}_1(W)$, akkor létezik olyan (X_n) egyszerű mezők sorozata, amelyre minden $\boldsymbol{t} \geq \mathbf{0}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \big(X_n(\boldsymbol{u}) - X(\boldsymbol{u})\big)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right) = 0$, ekkor jelölje $\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})$ az $\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} X_n(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})$ sorozat határértékét az $L_2(\Omega)$ térben, azaz

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} X_n(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) \to \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) \text{ az } L_2(\Omega) \text{ térben.}$$

Vezessük be a progresszíven mérhető, lokálisan 1-valószínűséggel négyzetesen integrálható sztochasztikus mezők osztályára a következő jelölést:

$$\mathcal{L}_1(W) = \left\{X \sim \mathrm{Prog}_1 \;\middle|\; \forall \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0} \colon \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} X^2(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} < \infty\right\}.$$

Ha $X \in \mathcal{L}_1(W)$, akkor létezik olyan (X_n) egyszerű mezők sorozata, amelyre minden $\boldsymbol{t} \geq \mathbf{0}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \big(X_n(\boldsymbol{u}) - X(\boldsymbol{u})\big)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = 0$, ekkor jelölje $\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})$ az $\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} X_n(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})$ sorozat sztochasztikus határértékét, azaz $\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} X_n(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) \xrightarrow{p} \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})$.

A Wiener mező szerinti sztochasztikus integrál fontosabb tulajdonságait később, a martingálok szerinti integrál tilajdonságainak speciális eseteként foglaljuk össze.

2.2. Definíció (Kvadratikus kovariáció). *Legyen* X_1, X_2 *sztochasztikus mező és minden* $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ *esetén* $\left\{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{n})} \geq \boldsymbol{0} \colon \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}\right\}$ *a* $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]$ *tégla végtelenül finomodó felosztássorozata, ha létezik olyan* $\langle X_1, X_2\rangle(\boldsymbol{t})$*, amelyre*

$$\sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{X}_1\left(\left(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{n})}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{n})}\right]\right) \cdot \tilde{X}_2\left(\left(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{n})}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{n})}\right]\right) \xrightarrow{p} \langle X_1, X_2\rangle(\boldsymbol{t}), \tag{2.4}$$

akkor az $\langle X_1, X_2\rangle = \big(\langle X_1, X_2\rangle(\boldsymbol{t}) \colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}\big)$ *sztochasztikus mezőt az* X_1 *és* X_2 ***kvadratikus kovariáció****jának nevezzük.*

Ha $X_1 = X_2 = X$, akkor $\langle X\rangle = \langle X, X\rangle$ az X **kvadratikus variáció**ja. Számítsuk ki a Wiener mező kvadratikus variációját.

2.1. Állítás. *A* W *Wiener mező kvadratikus variációja* $\langle W\rangle(\boldsymbol{t}) = \langle \boldsymbol{t}\rangle$.

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ rögzített és $\left\{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{n})} \geq \boldsymbol{0} \colon \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}\right\}$ a $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]$ tégla végtelenül finomodó ekvidisztáns felosztássorozata. A jelölések egyszerűsítése érdekében rögzített $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^p$ esetén legyen

$$\tilde{W}_{\boldsymbol{i}} = \tilde{W}\left(\left(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{n})}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{n})}\right]\right) \sim \mathrm{N}\left(0, \tfrac{\langle \boldsymbol{t}\rangle}{\langle \boldsymbol{n}\rangle}\right), \text{ és } X_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}}^2.$$

Meg kell mutatni, hogy ha $X_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) \to X(\boldsymbol{t})$ az $L^2(\Omega)$ térben, akkor $X(\boldsymbol{t}) = \langle \boldsymbol{t}\rangle$, vagyis $\lim_{\boldsymbol{n}\to\boldsymbol{\infty}} \mathbb{E}\big(X_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) - X(\boldsymbol{t})\big)^2 = 0$, ekkor a teljes négyzetet kibontva és az egyenletet átrendezve elég megmutatni, hogy

$$\langle \boldsymbol{t}\rangle \lim_{\boldsymbol{n}\to\boldsymbol{\infty}} \mathbb{E}\big(X_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})\big) - \tfrac{1}{2} \lim_{\boldsymbol{n}\to\boldsymbol{\infty}} \mathbb{E}\big(X_{\boldsymbol{n}}^2(\boldsymbol{t})\big) = \tfrac{1}{2}\langle \boldsymbol{t}\rangle^2. \tag{2.5}$$

Legyen $\tilde{W}_{\boldsymbol{i}} = \frac{\langle \boldsymbol{t} \rangle}{\langle \boldsymbol{n} \rangle} \cdot Z_{\boldsymbol{i}}$, ahol $Z_{\boldsymbol{i}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ $(\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^p, \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n})$ függetlenek, ekkor

$$\mathbb{E}\big(X_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})\big) = \mathbb{E}\left(\sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}}^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\langle \boldsymbol{t} \rangle}{\langle \boldsymbol{n} \rangle} \cdot Z_{\boldsymbol{i}}^2\right) = \frac{\langle \boldsymbol{t} \rangle}{\langle \boldsymbol{n} \rangle} \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbb{E}\big(Z_{\boldsymbol{i}}^2\big) = \langle \boldsymbol{t} \rangle.$$

A (2.5) egyenlet bal oldalának kiszámításához határozzuk meg $X_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})$ szórásnégyzetét.

$$\mathbb{D}^2\big(X_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})\big) = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \left(\frac{\langle \boldsymbol{t} \rangle}{\langle \boldsymbol{n} \rangle}\right)^2 \cdot \mathbb{D}^2\big(Z_{\boldsymbol{i}}^2\big),$$

mivel $Z_{\boldsymbol{i}} \sim \mathrm{N}(0,1)$, ezért $\mathbb{D}^2(Z_{\boldsymbol{i}}^2) = \mathbb{E}(Z_{\boldsymbol{i}}^4) + \mathbb{E}^2(Z_{\boldsymbol{i}}^2) = 3!! + 1!! = 4$, így $\mathbb{E}\big(X_{\boldsymbol{n}}^2(\boldsymbol{t})\big) = \mathbb{D}^2(X_{\boldsymbol{n}}) + \mathbb{E}^2(X_{\boldsymbol{n}}) = 4\langle \boldsymbol{n} \rangle \frac{\langle \boldsymbol{t} \rangle^2}{\langle \boldsymbol{n} \rangle^2} + \langle \boldsymbol{t} \rangle^2$, ekkor

$$\langle \boldsymbol{t} \rangle \lim_{\boldsymbol{n} \to \infty} \mathbb{E}\big(X_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})\big) - \frac{1}{2} \lim_{\boldsymbol{n} \to \infty} \mathbb{E}\big(X_{\boldsymbol{n}}^2(\boldsymbol{t})\big) = \langle \boldsymbol{t} \rangle^2 - \frac{1}{2} \lim_{\boldsymbol{n} \to \infty} \left(4\frac{\langle \boldsymbol{t} \rangle^2}{\langle \boldsymbol{n} \rangle} + \langle \boldsymbol{t} \rangle^2\right) = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{t} \rangle,$$

tehát beláttuk, hogy $X_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) \to \langle \boldsymbol{t} \rangle$ az $L^2(\Omega)$ térben, így sztochasztikusan is. $\square$

Az egyparaméteres esetben a martingál reprezentációs tétel kimondja, hogy a négyzetesen integrálható martingálok előállíthatók Wiener folyamat szerinti integrálok alakjában. Vajon a többparaméteres martingálokra vonatkozóan megfogalmazható-e hasonló állítás? Láttuk, hogy $W^2(\boldsymbol{t}) - \langle \boldsymbol{t} \rangle$ martingál, tehát próbáljuk meg előállítani (az egyparaméteres esethez hasonlóan), Wiener mező szerinti integrál alakjában. Ehhez írjuk fel a közelítö összegek sorozatát, használjuk a 2.1 állításban szereplő jelöléseket, valamint legyen $W_{\boldsymbol{i}} = W\left(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}\right)$ és vizsgáljuk meg a következő közelítő összegek sztochasztikus határértékét:

$$\sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} W_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1}} \cdot \tilde{W}_{\boldsymbol{i}} \xrightarrow{p} ? \tag{2.6}$$

A (2.6) határérték meghatározásához felírjuk, hogy $\sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}} \xrightarrow{p} W(\boldsymbol{t})$, így

$\left(\sum\limits_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}}\right)^2 \xrightarrow{p} W^2(\boldsymbol{t})$, ezért

$$\left(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}}\right)^2 - \langle \boldsymbol{t} \rangle = \left(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}}\right)^2 - \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}-\mathbf{1}}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}]} \, \mathrm{d}\lambda = (*) \xrightarrow{p} W^2(\boldsymbol{t}) - \langle \boldsymbol{t} \rangle.$$

A teljes négyzetet felbontva

$$\left(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}}\right) \cdot \left(\sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{j}}\right) = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}}^2 + 2 \sum_{\substack{\boldsymbol{i}=\mathbf{1} \\ \boldsymbol{i}\leq\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}}}^{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}} \tilde{W}_{\boldsymbol{j}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{i}=\mathbf{1} \\ \boldsymbol{i}\not\leq\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}\not\leq\boldsymbol{i}}}^{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}} \tilde{W}_{\boldsymbol{j}}$$

$$(*) = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \left(\tilde{W}_{\boldsymbol{i}}^2 - \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}-\mathbf{1}}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}]} \, \mathrm{d}\lambda\right) + 2 \sum_{\substack{\boldsymbol{i}=\mathbf{1} \\ \boldsymbol{i}\leq\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}}}^{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}} \tilde{W}_{\boldsymbol{j}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{i}=\mathbf{1} \\ \boldsymbol{i}\not\leq\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}\not\leq\boldsymbol{i}}}^{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}} \tilde{W}_{\boldsymbol{j}}. \qquad (2.7)$$

Mivel $\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}-\mathbf{1}}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}]} \, \mathrm{d}\lambda \to 0$, így $\sum\limits_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \left(\tilde{W}_{\boldsymbol{i}}^2 - \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}-\mathbf{1}}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}}]} \, \mathrm{d}\lambda\right) \xrightarrow{p} 0$ és
$\sum\limits_{\substack{\boldsymbol{i}=\mathbf{1} \\ \boldsymbol{i}\leq\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}}}^{\boldsymbol{n}} \sum\limits_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}} \tilde{W}_{\boldsymbol{j}} \xrightarrow{p} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} W(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{u})$, ezért

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{i}=\mathbf{1} \\ \boldsymbol{i}\not\leq\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}\not\leq\boldsymbol{i}}}^{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \tilde{W}_{\boldsymbol{i}} \tilde{W}_{\boldsymbol{j}} \xrightarrow{p} W^2(\boldsymbol{t}) - \langle \boldsymbol{t} \rangle - 2 \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} W(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{u}), \qquad (2.8)$$

viszont a (2.8) bal oldalán lévő mennyiség tekinthető egy olyan sztochasztikus integrál közelítő összegeként, amelyben az integrációs tartomány része a p-dimenziós tér **rendezhetetlen pár**jai halmazának. Erre bevezetjük a következő jelölést:

$$\boldsymbol{\Xi} = \left\{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \in [0, \infty)^p \times [0, \infty)^p \,\middle|\, \boldsymbol{s} \not\leq \boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \not\geq \boldsymbol{t}\right\}. \qquad (2.9)$$

Ekkor jelölje $2 \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{v})$ a (2.8) bal oldalán szereplő közelítő összeg sztochasztikus határértékét, mivel az összegzésben minden tag éppen kétszer szerepel. Ezzel

$$W^2(\boldsymbol{t}) - \langle \boldsymbol{t} \rangle = 2\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) + 2\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{v}). \tag{2.10}$$

Az így definiált kettős integrált szokás második típusú (sztochasztikus) integrálnak [Wong, Zakai (1974)] nevezni. Ebben a terminológiában az egyváltozós sztochasztikus integrált szokás első típusúnak nevezni. Míg az egyparaméteres esetben csak az első típusú integrál jelenik meg, addig a kétparaméteres esetben megjelenik a másodík típusú intergrál is, azonban többdimenziós paraméterek esetén már nem jelennek meg további (harmadik, negyedik, stb.) típusú integrálok [Wong, Zakai (1974)], mivel az integrálközelítő összegek felbonthatók rendezhető és rendezhetetlen párok halmazán vett összegekre, ahogy azt a (2.7) esetén tettük a $W^2(\boldsymbol{t}) - \langle \boldsymbol{t} \rangle$ közelítő összegekkel való felírása során. Mivel egydimenziós paraméter esetén a martingálok nem tartalmaznak idő szerinti integrált és (2.10) szerint $W^2(\boldsymbol{t}) - \langle \boldsymbol{t} \rangle$ integrálokkal való reprezentációja szintén nem tartalmaz közvetlenül $\boldsymbol{t}$ szerinti integrált, azonban (2.10) alapján úgy tűnik a martingál reprezentációhoz is szükség van a kettős sztochasztikus integrálokra. Mivel

$$\Xi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \{(s,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,|\, s \ngeq t, s \nleq t\} = \emptyset, \tag{2.11}$$

ezért (2.10) szerint $W(\boldsymbol{t}) - \langle \boldsymbol{t} \rangle$ csak $p > 1$ esetén tartalmaz kettősintegrált, mivel $p = 1$ esetén a kettősintegrálban szereplő integrációs tartomány az üres halmaz, tehát visszakapjuk, a következő jólismert formulát

$$W^2(t) - t = 2\int\limits_0^t W(u)\,\mathrm{d}W(u). \tag{2.12}$$

Legyen $Y = (Y(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ kétváltozós sztochasztikus mező, ha minden $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $Y(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \sim \mathcal{F}(\boldsymbol{s} \vee \boldsymbol{t})$, akkor Y **adaptált kétváltozós mező**. Megjegyezzük, hogy az $\boldsymbol{s}$ és $\boldsymbol{t}$ vektorokat Y változóinak nevezzük, $s_1, s_2, \ldots, s_p$ és $t_1, t_2, \ldots, t_p$ az Y paraméterei.

2.3. Definíció (Egyszerű kétváltozós mező). *Legyen* $\{\boldsymbol{t_i} \geq \boldsymbol{0}\colon \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}\}$ *rács és* $Y = (Y(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ *sztochasztikus mező, ha léteznek olyan* $Y_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}} \sim \mathcal{F}(\boldsymbol{t_i} \vee \boldsymbol{t_j})$ *korlátos valószínűségi változók, amelyekre minden* $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ *esetén*

$$Y(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{t_i}, \boldsymbol{t_j}) Y_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1},\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1}} \cdot \mathbb{1}_{(\boldsymbol{t_{i-1}}, \boldsymbol{t_i}] \times \left(\boldsymbol{t_{j-1}}, \boldsymbol{t_j}\right]}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}), \tag{2.13}$$

akkor Y ***egyszerű kétváltozós mező***.

Ha Y egyszerű kétváltozós mező (2.13) szerint, akkor Y integrálható a W Wiener mező szerint, tegyük fel, hogy $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_k}$, ekkor

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{v}) =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{k}} \sum_{\boldsymbol{j}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{k}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{t_i}, \boldsymbol{t_j}) Y_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1},\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1}} \cdot \tilde{W}\Big((\boldsymbol{t_{i-1}}, \boldsymbol{t_i}]\Big) \cdot \tilde{W}\Big((\boldsymbol{t_{j-1}}, \boldsymbol{t_j}]\Big).$$

Ha minden $\overline{\boldsymbol{s}}, \overline{\boldsymbol{t}} \geq \boldsymbol{0}$ esetén az $(\omega, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \mapsto Y(\omega, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \cdot \mathbb{1}_{(\boldsymbol{0}, \overline{\boldsymbol{s}}] \times \left(\boldsymbol{0}, \overline{\boldsymbol{t}}\right]}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ mérhető az $\mathcal{F}\left(\overline{\boldsymbol{t}}\right) \otimes \mathcal{B}\big((\boldsymbol{0}, \overline{\boldsymbol{s}}]\big) \otimes \mathcal{B}\big((\boldsymbol{0}, \overline{\boldsymbol{t}}]\big)$ σ-algebrára nézve, akkor Y **progresszíven mérhető**. Legyen

$$\mathrm{Prog}_2 = \big\{ H \subseteq \Omega \times [0, \infty)^p \times [0, \infty)^p \;\big|\; \mathbb{1}_H \text{ progresszíven mérhető} \big\},$$

ekkor $Y \sim \mathrm{Prog}_2$ pontosan akkor, ha Y progresszíven mérhető. Ha Y folytonos trajektóriájú, adaptált mező, akkor progresszíven mérhető. Legyen az egyváltozós esethez hasonlóan

$$\mathcal{S}_2(W) = \left\{ Y \sim \mathrm{Prog}_2 \;\middle|\; \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0} \colon \mathbb{E}\left(\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} \right) < \infty \right\}.$$

Ha $Y \in \mathcal{S}_2(W)$, akkor létezik olyan (Y_n) egyszerű kétváltozós mezők sorozata, amelyre minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \big(Y_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\big)^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} \right) = 0$ és ekkor $\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{v}) \to \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{v})$ az $L_2(\Omega)$ térben.

Vezessük be a progresszíven mérhető, lokálisan 1-valószínűséggel négyzetesen integrálható kétváltozós sztochasztikus mezők osztályára a következő jelölést:

$$\mathcal{L}_2(W) = \left\{ Y \sim \mathrm{Prog}_2 \;\middle|\; \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0} \colon \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} < \infty \right\}.$$

Ha $Y \in \mathcal{L}_2(W)$, akkor létezik olyan (Y_n) egyszerű kétváltozós mezők sorozata, amelyre minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \big(Y_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\big)^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = 0$ és ekkor $\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{v}) \xrightarrow{p} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{v})$.

2.1. Tétel (Martingál reprezentáció). *Legyen $M = (M(\boldsymbol{t}) \colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ négyzetesen integrálható martingál, ekkor létezik olyan $X \in \mathcal{S}_1(W)$ és $Y \in \mathcal{S}_2(W)$, amely esetén*

$$M(\boldsymbol{t}) = M(\boldsymbol{0}) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}W(\boldsymbol{v}). \tag{2.14}$$

Ekkor $\langle M \rangle(\boldsymbol{t}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X^2(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{u} + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}$

2.2. Tétel (Erős martingál reprezentáció). *Legyen $M = (M(\boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ sztochasztikus mező, ekkor M pontosan akkor négyzetesen integrálható martingál, ha létezik olyan $X \in \mathcal{S}_1(W)$, amely esetén*

$$M(\boldsymbol{t}) = M(\boldsymbol{0}) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}). \tag{2.15}$$

Az egyparaméteres esetben a martingál és az erős martingál definíciója megegyezik, azonban többparaméteres esetben eltérnek. Láthatjuk, hogy valójában a többparaméteres eset azért tér el lényegesen az egyparaméteres esettől, mert $\Xi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, s \not\geq t, s \not\leq t\} = \emptyset$, azaz az egyparaméteres esetben a kettős integrálban szereplő integrációs tartomány az üres halmaz.

2.2. Martingál szerinti integrál

A folytonos trajektóriájú négyzetesen integrálható martingál szerinti sztochasztikus integrál felépítését a [Cairoli, Walsh (1975)] alapján végezzük.

Legyen $M = (M(\boldsymbol{t})\colon \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0})$ folytonos trajektóriájú négyzetesen integrálható martingál, ha X egyszerű mező (2.1) szerint, akkor X integrálható az M martingál szerint, tegyük fel, hogy $\boldsymbol{t_k} = \boldsymbol{t}$, ekkor

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{u}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{k}} X_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1}} \cdot \tilde{M}\big((\boldsymbol{t_{i-1}}, \boldsymbol{t_i}]\big). \tag{2.16}$$

Legyen

$$\mathcal{S}_1(M) = \left\{ X \sim \mathrm{Prog}_1 \;\middle|\; \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}\colon \mathbb{E}\left(\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X^2(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{u}) \right) < \infty \right\}.$$

Ha $X \in \mathcal{S}_1(M)$, akkor létezik olyan (X_n) egyszerű mezők sorozata, amelyre minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \big(X_n(\boldsymbol{u}) - X(\boldsymbol{u})\big)^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle \boldsymbol{u}\Big) = 0$ és ekkor $\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X_n(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{u}) \to \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{u})$ az $L_2(\Omega)$ térben. Legyen

$$\mathcal{L}_1(M) = \Big\{ X \sim \mathrm{Prog}_1 \ \Big|\ \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0} \colon \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X^2(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{u}) < \infty \Big\}.$$

Ha $X \in \mathcal{L}_1(M)$, akkor létezik olyan (X_n) egyszerű mezők sorozata, amelyre minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \big(X_n(\boldsymbol{u}) - X(\boldsymbol{u})\big)^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{u}) = 0$ és ekkor $\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X_n(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{u}) \xrightarrow{p} \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{u})$.

Legyen $X \in \mathcal{L}_1(M)$ és $I_1(X,M)(\boldsymbol{t}) = \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{u})$, ekkor $I_1(X,M)(\boldsymbol{0}) = 0$, $I_1(X,M)$ folytonos trajektóriájú, ha $X \in \mathcal{S}_1(M)$, akkor $I_1(X,W)$ martingál, azaz minden $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$ esetén

$$\mathbb{E}\Big(I_1(X,M)(\boldsymbol{t}) \ \Big|\ \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\Big) = I_1(X,M)(\boldsymbol{s}).$$

Ha $X \in \mathcal{S}_1(M)$ és M erős martingál, akkor $I_1(X,M)$ is erős martingál. Legyen $X_1, X_2 \in \mathcal{L}_1(M)$, ekkor

$$\mathbb{E}\Big(I_1(X_1,M)(\boldsymbol{t}) \cdot I_1(X_2,M)(\boldsymbol{t})\Big) = \mathbb{E}\Big(\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X_1(\boldsymbol{u})X_2(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{u})\Big),$$

így

$$\Big\langle I_1(X_1,M), I_1(X_2,M)\Big\rangle(\boldsymbol{t}) = \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X_1(\boldsymbol{u})X_2(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{u})$$

és minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$I_1(a \cdot X_1 + b \cdot X_2, M)(\boldsymbol{t}) = a \cdot I_1(X_1,M)(\boldsymbol{t}) + b \cdot I_1(X_2,M)(\boldsymbol{t}).$$

Ha M_1 és M_2 folytonos trajektóriájú négyzetesen integrálható martingál és

$X \in \mathcal{L}_1(M_1) \cap \mathcal{L}_1(M_2)$, akkor

$$I_1(X, a \cdot M_1 + b \cdot M_2)(\boldsymbol{t}) = a \cdot I_1(X, M_1)(\boldsymbol{t}) + b \cdot I_1(X, M_2)(\boldsymbol{t}),$$

azaz I_1 bilineáris.

Ha Y egyszerű kétváltozós mező (2.13) szerint és $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_k}$, akkor

$$\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{v}) = \\ = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{k}} \sum_{\boldsymbol{j}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{k}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{t_i}, \boldsymbol{t_j}) Y_{\boldsymbol{i-1},\boldsymbol{j-1}} \cdot \tilde{M}\Big((\boldsymbol{t_{i-1}}, \boldsymbol{t_i}]\Big) \cdot \tilde{M}\Big((\boldsymbol{t_{j-1}}, \boldsymbol{t_j}]\Big).$$

Legyen

$$\mathcal{S}_2(M) = \Bigg\{ Y \sim \mathrm{Prog}_2 \;\Bigg|\; \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}\colon \\ \mathbb{E}\Bigg(\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) Y^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{v}) \Bigg) < \infty \Bigg\}.$$

Ha $Y \in \mathcal{S}_2(M)$, akkor létezik olyan (Y_n) egyszerű kétváltozós mezők sorozata, amelyre minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Bigg(\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \big(Y_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\big)^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{v}) \Bigg) = 0$$

és ekkor $\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{v}) \to \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{v})$ az $L_2(\Omega)$ térben.

Legyen

$$\mathcal{L}_2(M) = \Bigg\{ Y \sim \mathrm{Prog}_2 \,\Bigg|\, \forall \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0} \colon \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) Y^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{v}) < \infty \Bigg\}.$$

Ha $Y \in \mathcal{L}_2(M)$, akkor létezik olyan (Y_n) egyszerű kétváltozós mezők sorozata, amelyre minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \big(Y_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\big)^2 \, \mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{v}) = 0$$

és ekkor $\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}M(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}M(\boldsymbol{v}) \xrightarrow{p} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}M(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}M(\boldsymbol{v})$. Legyen $Y \in \mathcal{L}_2(M)$ és $I_2(Y, M)(\boldsymbol{t}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \cdot Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}M(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}M(\boldsymbol{v})$, ekkor $I_2(Y, M)(\boldsymbol{0}) = 0$, $I_2(Y, M)$ folytonos trajektóriájú, ha $Y \in \mathcal{S}_2(M)$, akkor $I_2(Y, M)$ martingál, azaz minden $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$ esetén

$$\mathbb{E}\Big(I_2(Y, M)(\boldsymbol{t}) \,\Big|\, \mathcal{F}(\boldsymbol{s}) \Big) = I_2(Y, M)(\boldsymbol{s}).$$

Legyen $Y_1, Y_2 \in \mathcal{L}_2(M)$, ekkor

$$\mathbb{E}\Big(I_2(Y_1, M)(\boldsymbol{t}) \cdot I_2(Y_2, M)(\boldsymbol{t}) \Big) = \\ = \mathbb{E}\Bigg(\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \cdot Y_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) Y_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{v}) \Bigg),$$

így

$$\Big\langle I_2(Y_1, M), I_2(Y_2, M)\Big\rangle(\boldsymbol{t}) = \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \cdot Y_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) Y_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\langle M\rangle(\boldsymbol{v})$$

és minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$I_2(a \cdot Y_1 + b \cdot Y_2, M)(\boldsymbol{t}) = a \cdot I_2(Y_1, W)(\boldsymbol{t}) + b \cdot I_2(Y_2, M)(\boldsymbol{t}).$$

Ha $X \in \mathcal{L}_1(M)$ és $Y \in \mathcal{L}_2(M)$, akkor

$$\mathbb{E}\Big(I_1(X, M)(\boldsymbol{t}) \cdot I_2(Y, M)(\boldsymbol{t})\Big) = 0 \text{ és } \Big\langle I_1(X, M), I_2(Y, M)\Big\rangle(\boldsymbol{t}) = 0.$$

Ha M_1 és M_2 folytonos trajektóriájú négyzetesen integrálható martingál és $Y \in \mathcal{L}_2(M_1) \cap \mathcal{L}_2(M_2)$, akkor

$$I_2(Y, a \cdot M_1 + b \cdot M_2)(\boldsymbol{t}) = a \cdot I_2(Y, M_1)(\boldsymbol{t}) + b \cdot I_2(Y, M_2)(\boldsymbol{t}),$$

azaz I_2 is bilineáris.

2.3. Többparaméteres szemimartingálok

Egydimenziós paraméter esetén azt mondjuk hogy Z szemimartingál, ha előáll időparaméter szerinti és Wiener folyamat szerinti integrálok összegeként. Ekkor viszont alkalmasan megválválasztva egy szemimartingál és egy megfelelő időparaméter szerinti integrál különbsége martingál. Azonban láttuk (2.10), hogy többdimenziós paraméter esetén a martingálok tartalmazhatnak Wiener mező szerinti kettősintegrált is, tehát feltételezhetjük, hogy többdimenzós paraméter esetén a szemimartingálok szintén tartalmazhatnak Wiener mező szerinti kettősintegrált. Kettősintegrálokat azonban definiálhatunk időparaméter és Wiener mező szerint vegyes értelemben is.

Legyen Y egyszerű kétváltozós mező (2.13) szerint és $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_k}$, ekkor

$$\begin{aligned} J_1(Y,M)(\boldsymbol{t}) &= \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{v}) = \\ &= \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{k}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{t_i},\boldsymbol{t_j}) Y_{\boldsymbol{i-1},\boldsymbol{j-1}} \cdot \lambda\Big((\boldsymbol{t_{i-1}},\boldsymbol{t_i}]\Big) \cdot \tilde{M}\Big((\boldsymbol{t_{j-1}},\boldsymbol{t_j}]\Big). \end{aligned}$$

és hasonlóan definiálható a fordított esetben, jelölje $J_2(Y,M)$ az így kapott integrált. Ekkor a Wiener mező szerinti kettősintegrálhoz teljesen hasonlóan a vegyes kettősintegrálok is kiterjeszthetők az $\mathcal{L}_2(M)$ térbeli integrandusokra [Linn (2009)] szerint.

2.3. Tétel (Gyenge martingál reprezentáció). *Legyen M négyzetesen integrálható gyenge martingál, ekkor létezik olyan $X \in \mathcal{S}_1(W)$ és $Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}_2(W)$, amely esetén*

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{t}) = M(\boldsymbol{0}) &+ \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) + \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{v}) + \\ &+ \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{v}) + \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

A gyenge martingálok reprezentációja világossá teszi, hogy éppen az időparaméter szerinti integrálokat tartalmazó tagok rontják el a martingál tulajdonságot, valamint a 1.7 definícióban éppen azokon a halmazokon lévő növekményekre vonatkozóan nem tettünk feltételt, amelyek a vegyes integrálokban megjelennek.

2.4. Definíció (Gyenge szemimartingál). *Legyen* $V, X_1 \in \mathcal{L}_1(W)$ *és* $Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{L}_2(W)$*, ha* $Z(0) \sim \mathcal{F}(0)$ *és minden* $t \geq 0$ *esetén*

$$Z(\boldsymbol{t}) = Z(\boldsymbol{0}) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} V(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} X_1(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{v}) + \\ + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{v}) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Y_2\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

akkor Z ***gyenge szemimartingál***.

Ha $Y_1 = 0$ és $Y_2 = 0$, akkor Z **szemimartingál**. Ha Z szemimaringál és $Y = 0$, akkor Z **erős szemimartingál**.

Megjegyzés: A sztochasztikus integrál kiterjeszthető a Z szemimartingál szerint integrálható integrandusok osztályára [Wong, Zakai (1978)], azonban ez meghaladja ennek a szakdolgozatnak a kereteit, viszont általánosítjuk többparaméterre az Itô formulát abban az esetben, amikor az integrátor erős szemimartingál, a többparaméteres martingál szerinti sztochasztikus integrál és az egyparaméteres szemimartingál szerinti sztochasztikus integrál alapján definiálhatjuk az $\mathcal{L}_1(Z)$ osztályt.

2.4. A többparaméteres Itô-formula

A sztochasztikus folyamatok elméletében központi szerepet játszik az Itô-formula, amely segítségével bizonyos sztochasztikus folyamatok megváltozását felírhatjuk integrálok alakjában. Hasonló formulát mutatunk be sztochasztikus mezők esetén [Wong, Zakai (1974)], [Wong, Zakai (1978)] és [Imkeller (1985)] alapján. Jelölje $\mathcal{C}^4$ a negyedrendben folytonosan deriválható függvények osztályát.

2.4. Tétel (Többparaméteres Itô formula). *Legyen Z erős szemimartingál, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ha $f \in \mathcal{C}^4$, akkor*

$$\begin{aligned} f\big(Z(\boldsymbol{t})\big) = (-1)^{p+1} f\big(Z(\boldsymbol{0})\big) + \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} f'\big(Z(\boldsymbol{u})\big)\,\mathrm{d}Z(\boldsymbol{u}) + \tfrac{1}{2}\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} f''\big(Z(\boldsymbol{u})\big)\,\mathrm{d}\langle Z\rangle(\boldsymbol{u}) + \\ + \int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) f''\big(Z(\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{v})\big)\,\mathrm{d}Z(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}Z(\boldsymbol{v}) + \\ + \tfrac{1}{2}\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) f^{(3)}\big(Z(\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{v})\big)\,\mathrm{d}\langle Z\rangle(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}Z(\boldsymbol{v}) + \\ + \tfrac{1}{2}\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) f^{(3)}\big(Z(\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{v})\big)\,\mathrm{d}Z(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\langle Z\rangle(\boldsymbol{v}) + \\ + \tfrac{1}{4}\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\int\limits_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) f^{(4)}\big(Z(\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{v})\big)\,\mathrm{d}\langle Z\rangle(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\langle Z\rangle(\boldsymbol{v}) \qquad (2.17) \end{aligned}$$

$$(2.18)$$

Az imént felírt formula bal oldalát több cikkben helytelenül említik. Ugyan az origón kívül a tengelyeken lévő értékek kiejtik egymást (ha Z a tengelyeken azonos értéket vesz fel), ráadásul az origóban lévő $f(0)$ függvényérték sem feltétlenül 0, így az páros p esetén negatív előjellel kerül át az egyenlet jobb oldalára és nem úgy, mint a [Wong, Zakai (1978)] cikkben. Ugyanis az a $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}]$ téglán vett növekmény, amelyet az (1.9) szerint kell kiszámítani. Továbbá megjegyezzük, hogy a [Wong, Zakai (1974)] cikkben a formulában szereplő Z szerinti kettősintegrál $\frac{1}{2}$ együtthatóval szerepel, azonban az előzőekben hivatkozott többi forrás, valamint Wong és Zakai egy későbbi közös cikkében [Wong, Zakai (1978)] szereplő általánosabb formula speciális eseteként kapott formulában már egységnyi együtthatóval szerepel. A többparaméteres Itô formulát felhasználhatjuk arra, hogy többparaméteres martingálokat keressünk integrálok alakjában.

2.5. Többparaméteres Girszanov tétel

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, W Wiener mező és M erős martingál az $\mathcal{F}$ filtrációban (a $\mathbb{P}$ mérték szerint). Tegyük fel, hogy M martingál reprezentációja a 2.2 tétel szerint

$$M(\boldsymbol{t}) = M(\boldsymbol{0}) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \Lambda(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}), \tag{2.19}$$

ekkor M kvadratikus variációja és a Wiener mezővel vett kvadratikus kovariációja $\langle M\rangle(\boldsymbol{t}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \Lambda^2(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ és $\langle M, W\rangle(\boldsymbol{t}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \Lambda(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}$. Legyen

$$Z(\boldsymbol{t}) = e^{-M(\boldsymbol{t}) - \frac{1}{2}\langle M\rangle(\boldsymbol{t})}, \tag{2.20}$$

ekkor

$$\begin{aligned}
Z(\boldsymbol{t}) = Z(\boldsymbol{0}) &- \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \tfrac{1}{2}\Lambda^2(\boldsymbol{u})Z(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} - \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Z(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{u}) + \tfrac{1}{2}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Z(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\langle M\rangle\boldsymbol{u} + \\
&+ \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \cdot Z(\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}M(\boldsymbol{v}) = \\
&= Z(\boldsymbol{0}) - \tfrac{1}{2}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \Lambda^2(\boldsymbol{u})Z(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} - \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Z(\boldsymbol{u})\Lambda(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) + \\
&+ \tfrac{1}{2}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Z(\boldsymbol{u})\Lambda^2(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} + \\
&+ \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \cdot Z(\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{v})\Lambda(\boldsymbol{u})\Lambda(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{v}) = \\
&= Z(\boldsymbol{0}) - \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} Z(\boldsymbol{u})\Lambda(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) + \\
&+ \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \mathbb{1}_{\Xi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \cdot Z(\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{v})\Lambda(\boldsymbol{u})\Lambda(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{v}),
\end{aligned}$$

tehát Z előáll Wiener mező szerinti integrálok alakjában, ha minden $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ esetén $\mathbb{E}(Z(\boldsymbol{t})) = 1$, akkor Z martingál [Körezlioglu *et* al. (1983)]. A többdimenziós paraméterre általánosított Novikov feltétel biztosítja a martingál tulajdonságot [Allouba, Goodman (2003)], a többparaméteres Girszanov tétel ugyanezen cikkben található.

2.5. Tétel (Általánosított Novikov feltétel). *Ha minden* $\boldsymbol{t} \geq \mathbf{0}$ *esetén*

$$\mathbb{E}\left(e^{\frac{1}{2}\langle M\rangle(\boldsymbol{t})}\right) < \infty, \tag{2.21}$$

akkor Z *martingál és minden* $\boldsymbol{t} \geq \mathbf{0}$ *esetén* $\mathbb{E}\big(Z(\boldsymbol{t})\big) = 1$.

Legyen $\boldsymbol{T} \geq \mathbf{0}$ és minden $A \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}\Big(Z(\boldsymbol{T}) \cdot \mathbb{1}_A\Big), \tag{2.22}$$

ha Z martingál, akkor $\mathbb{P}$ és $\mathbb{P}^*$ ekvivalens valószínűségi mértékek ($\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^*$) és a Radon-Nikodym derivált

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^*}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = e^{-M(\boldsymbol{T}) - \frac{1}{2}\langle M\rangle(\boldsymbol{T})} = e^{-\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} \Lambda(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}W(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} \Lambda^2(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}}. \tag{2.23}$$

2.6. Tétel (Többparaméteres Girszanov tétel). *Legyen* M *erős martingál és tegyük fel, hogy* M *kielégíti az általánosított Novikov feltételt* (2.21). *Legyen minden* $\boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{T}$ *esetén*

$$W^*(\boldsymbol{t}) = W(\boldsymbol{t}) - \langle -M, W\rangle(\boldsymbol{t}) = W(\boldsymbol{t}) + \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \Lambda(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}, \tag{2.24}$$

ekkor W^* *Wiener mező a* $\mathbb{P}^*$ *valószínűségi mérték szerint a* $[\mathbf{0}, \boldsymbol{T}]$ *téglán.*

3. fejezet

Pénzügyi alkalmazások

A Black-Scholes-Merton modellben feltételezzük, hogy a részvényárfolyam eleget tesz a

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t) \tag{3.1}$$

sztochasztikus differenciálegyenletnek és a bankbetét dinamikája

$$\mathrm{d}B(t) = rB(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Legyen $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ a **Sharpe-mutató** és $M(t) = \lambda W(t)$ martingál, valamint

$$Z(t) = e^{-M(t) - \frac{1}{2}\langle M\rangle(t)} = e^{-\lambda W(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t} \tag{3.3}$$

exponenciális martingál. Legyen $T > 0$ rögzített és minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}\big(Z(T) \cdot \mathbb{1}_A\big)$, ekkor $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^*$ és a Radon-Nikodym derivált

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^*}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = Z(T) = e^{-\lambda W(T) - \frac{1}{2}\lambda^2 T}. \tag{3.4}$$

Legyen minden $0 \leq t \leq T$ esetén

$$W^*(t) = W(t) - \langle W, -M \rangle(t) = W(t) - \langle W, -\lambda W \rangle(t) = W(t) + \lambda t, \quad (3.5)$$

ekkor a Girszanov tétel szerint W^* Wiener folyamat a $\mathbb{P}^*$ mérték szerint a $[0, T]$ intervallumon.

A $T \geq 0$ időpontban lejáró elemi kötvény értéke a $t \leq T$ időpontban

$$P(t, T) = B(t) \cdot \mathbb{E}^* \left(\frac{1}{B(T)} \,\middle|\, \mathcal{F}(t) \right) = \frac{B(t)}{B(T)} = e^{-r \cdot (T-t)}, \quad (3.6)$$

mivel a kamatláb konstans. A kockázatsemleges mérték szerinti Wiener folyamattal felírva a részvényárfolyam dinamikája

$$\mathrm{d}S(t) = rS(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W^*(t) \quad (3.7)$$

A $T \geq 0$ időpontban lejáró európai típusú call opció kifizetés függvénye

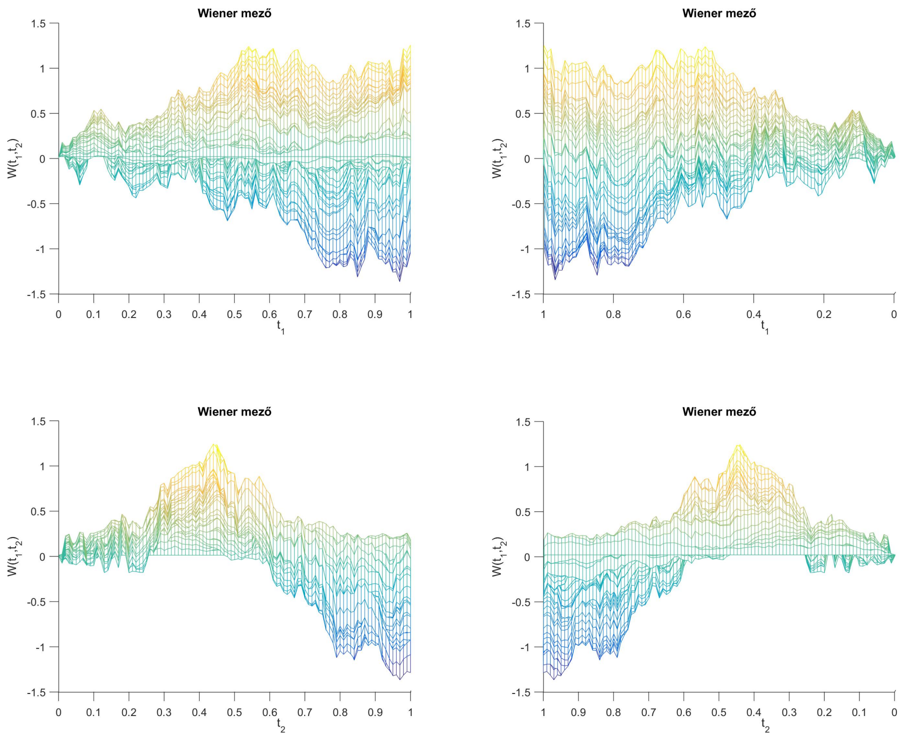
$$X = (S(T) - K)^+ \quad (3.8)$$

és az opció értéke a $t \geq 0$ időpontban $T \geq t$ lejárat esetén

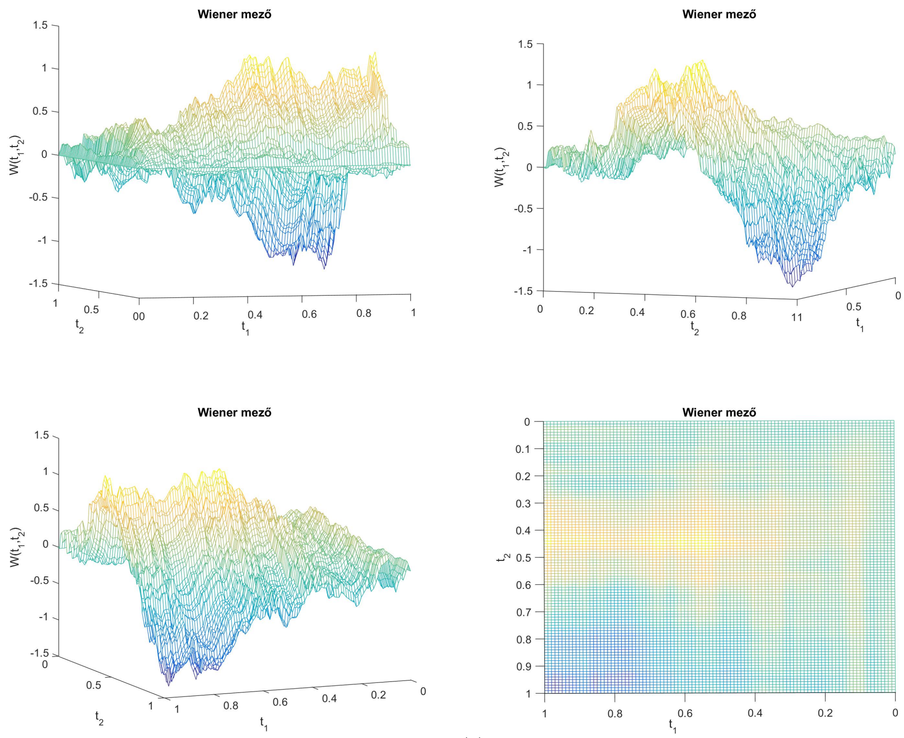
$$\begin{aligned} c_{\mathrm{eu}}(T) &= B(t) \cdot \mathbb{E}^* \left(\frac{(S(T) - K)^+}{B(T)} \,\middle|\, \mathcal{F}(t) \right) = \\ &= S(t) \cdot \Phi\big(d_1(t)\big) - K \cdot P(t, T) \cdot \Phi\big(d_2(t)\big), \end{aligned} \quad (3.9)$$

ahol $d_1(t) = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ és $d_2(t) = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$.

Legyen $\tilde{W}^*$ Wiener mező a $\mathbb{P}^*$ mérték szerint. Mielőtt rátérnénk az opcióárazás további vizsgálatára, bemutatjuk Wiener mező szimulációját a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzeten a következő ábrák segítségével.



Az ábrákon a Wiener mezőt láthatjuk az a négyzet két szemközti oldaláról nézve.



Az utóbbi négy ábrán pedig felülnézetből láthatjuk, illetve a különböző térbeli perspektívákból figyelhetjük meg.

Az opció árazása során kihasználhatjuk, hogy $\tilde{W}^*(\boldsymbol{t}) \stackrel{d}{=} W^*(\langle \boldsymbol{t} \rangle)$ (azonos eloszlásúak). Nyilvánvalóan a Wiener folyamat és a Wiener mező is a saját filtrációjában martingál, azonban az árazás szempontjából csak a megfelelő eloszlások egyezése lényeges. Legyen $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ és tegyük fel, hogy $\tilde{S}(\boldsymbol{t})$ és $\tilde{B}(\boldsymbol{t})$ olyan (többparaméteres) sztochasztikus mezők amelyre $\tilde{S}(\boldsymbol{t}) \stackrel{d}{=} S(\langle \boldsymbol{t} \rangle)$ és $\tilde{B}(\boldsymbol{t}) = B(\langle \boldsymbol{t} \rangle)$. Ha $\langle \boldsymbol{t} \rangle = t$, akkor $\tilde{S}(\boldsymbol{t}) \stackrel{d}{=} S(t)$ és $\tilde{B}(\boldsymbol{t}) = B(t)$, ekkor

$$\mathrm{d}\tilde{B}(\boldsymbol{t}) = r\tilde{B}(\boldsymbol{t})\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}, \tag{3.10}$$

$$\mathrm{d}\tilde{S}(\boldsymbol{t}) = r\tilde{S}(\boldsymbol{t})\,\mathrm{d}\boldsymbol{t} + \sigma\tilde{S}(\boldsymbol{t})\,\mathrm{d}\tilde{W}^*(\boldsymbol{t}). \tag{3.11}$$

Legyen $\langle \boldsymbol{T} \rangle = T$, ekkor

$$c_{\mathrm{eu}}(T) = B(\boldsymbol{0}) \cdot \mathbb{E}^* \left(\frac{(S(\boldsymbol{T}) - K)^+}{B(\boldsymbol{T})} \right). \tag{3.12}$$

Határozzuk meg, hogy $S(0) = 1000$, $r = 5\%$, $\sigma = 20\%$ és $K = 800$ esetén mennyit ér most egy $T = 0,4$ év múlva lejáró európai call opció. Az opció elméleti értéke a Black-Scholes-Merton modellben a (3.9) szerint

$$\mathrm{c} = 1000 \cdot \Phi(1.9855) - 800 \cdot 0.9802 \cdot \Phi(1.8590) = 217,0078.$$

Az így kapott összefüggést összehasonlíthatjuk a (3.10) és (3.11) szerinti szimulációval kapott értékkel, tetszőlegesen megválaszthatjuk T_1 és T_2 értékét, amennyiben $T_1 \cdot T_2 = T = 0,4$. Monte-Carlo szimuláció esetén az intervallumok felosztásának finomsága és a szimulált trajektóriák száma függvényében meghatározhatjuk az opció értékét, azonban a trajektóriák végessége miatt a szimulált opcióár egy valószínűségi változó egyetlen realizációja. A szimulációt újra lefuttatva ugyanezen eloszlásból egy újabb realizációt kapunk, amelynek a várható értéke ismert, azonban a szórása ismeretlen. 1000 lefuttatott szimuláció mellett a következő eredményeket kaptuk:

call1 szimuláció

mean

		dt			
		0,1	0,01	0,001	0,0001
m	10	217,702	217,175	217,492	215,444
	100	217,176	217,148	217,201	217,451
	1000	217,273	216,965	216,949	
	10000	217,149	217,011	217,000	
	100000	217,188	217,029		
	1000000	217,155			
	10000000	217,162			

std

		dt			
		0,1	0,01	0,001	0,0001
m	10	38,357	38,527	38,650	40,040
	100	12,492	12,128	11,778	12,571
	1000	3,876	4,022	4,031	
	10000	1,190	1,245	1,228	
	100000	**0,392**	**0,386**		
	1000000	**0,123**			
	10000000	**0,039**			

elapsed

		dt			
		0,1	0,01	0,001	0,0001
m	10	12	12	19	77
	100	12	13	21	122
	1000	12	15	55	
	10000	16	52	456	
	100000	54	438		
	1000000	660			
	10000000	4450			

0,694239	0,167699	0,484014	1,563349
0,168247	0,13979	0,193339	0,44331
0,265455	0,042618	0,058431	
0,140737	0,003664	**0,007788**	
0,180707	0,021616		
0,147312			
0,154035			

call2 szimuláció

mean

	dt	dt	
		0,1	0,01
m	10	216,122	218,214
	100	217,772	217,233
	1000	217,605	
	10000	217,667	

std

	dt	dt	
		0,1	0,01
m	10	37,585	40,954
	100	11,793	12,090
	1000	3,780	
	10000	1,231	

elapsed

		dt	
		0,1	0,01
m	10	13	255
	100	13	2473
	1000	18	
	10000	107	

0,885449	1,206079
0,763799	0,224823
0,597586	
0,659654	

A táblázatok alapján mindkét szimuláció teljesen hasonlóan árazta be az opciót, a várható érték és a szórás a különböző szimulációk esetén teljesen azonos nagyságrendben változik. A Wiener mezővel való szimuláció egy lehetséges megoldást ad az opció értékének meghatározására, viszont jelentősen gyorsabb a Wiener folyamat szerinti szimuláció. Azonban az analitikus számításokban még segítségünkre lehet ez az ötlet az ázsiai típusú opció árazásában.

3.1. Ázsiai opció értéke a lejárat függvényében

Tegyük fel hogy az $S = (S(t), t \geq 0)$ részvényárfolyam eleget tesz a (3.7) egyenletnek. Legyen bármely $T > 0$ lejárat esetén

$$A(T) = \frac{1}{T} \int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.13}$$

Tegyük fel, hogy, a kockázatmentes kamatláb $r = 0\%$, ekkor behelyettesítve a (3.7) egyenlet megoldását

$$A(T) = S(0) \cdot \tfrac{1}{T} \int_0^T e^{\sigma W^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t}\, \mathrm{d}t, \tag{3.14}$$

ekkor elvégezve a $t = u \cdot T$ helyettesítést

$$A(T) = S(0) \cdot \tfrac{1}{T} \int_0^1 e^{\sigma W^*(u \cdot T) - \frac{1}{2}\sigma^2 u \cdot T}\, \mathrm{d}(u \cdot T) = S(0) \int_0^1 e^{\sigma W^*(u \cdot T) - \frac{1}{2}\sigma^2 u \cdot T}\, \mathrm{d}u.$$

Mivel $\tilde{W}^*(t,T) \stackrel{d}{=} W^*(t \cdot T)$, ezért

$$A(T) = S(0) \int_0^1 e^{\sigma W^*(u \cdot T) - \frac{1}{2}\sigma^2 u \cdot T}\, \mathrm{d}u \stackrel{d}{=} S(0) \int_0^1 e^{\sigma \tilde{W}^*(u,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 u \cdot T}\, \mathrm{d}u,$$

mivel $X(t,T) = e^{\sigma \tilde{W}^*(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 t \cdot T}$ martingál az $\mathcal{F}(t,T) = \sigma(\tilde{W}^*(u,v), u, v \geq 0)$ filtrációban, ezért $I(T) = \int_0^1 X(t,T)\, \mathrm{d}t$, martingál az $\mathcal{F}_2$ marginális filtrációban, mivel minden $U \leq T$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\Big(I(T) \,\Big|\, \mathcal{F}_2(U)\Big) &= \mathbb{E}^*\left(\int_0^1 X(t,T)\, \mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}_2(U)\right) = \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}^*\Big(X(t,T) \,\Big|\, \mathcal{F}_2(U)\Big)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 X(t,U)\, \mathrm{d}t = I(U).\end{aligned}$$

Ekkor $A(T) \stackrel{d}{=} S(0) \cdot I(T)$ és létezik olyan filtrált valószínűségi mező, amelyen $S(0) \cdot I(T)$ martingál. Legyen $g \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ konvex függvény, ha minden $T > 0$ esetén $\mathbb{E}^*\Big(\big|g(A(T))\big|\Big) < \infty$ és $G(T) = \mathbb{E}^*\Big(g(A(T))\Big)$ növekvő függvény, akkor azt mondjuk, hogy $A = (A(T), T > 0)$ növekvő folyamat a konvex rendezés szerint. Ekkor rögzített $t \geq 0$ esetén

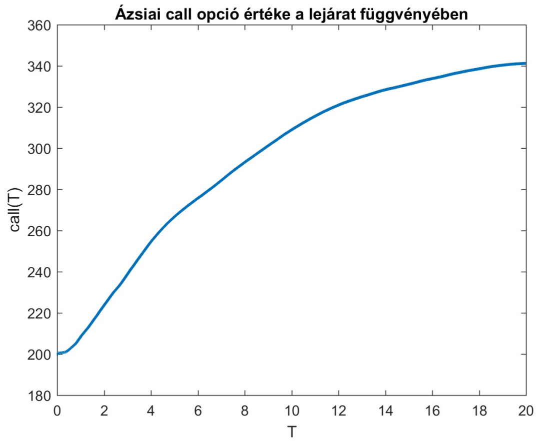
$$c_{\mathrm{as}}(t,T) = B(t) \cdot \mathbb{E}^*\left(\frac{(A(T) - K)^+}{B(T)} \,\middle|\, \mathcal{F}(t)\right)$$

a T időpontban lejáró ázsiai call opció értéke és

$$p_{\text{as}}(t,T) = B(t) \cdot \mathbb{E}^* \left(\frac{(K - A(T))^+}{B(T)} \,\middle|\, \mathcal{F}(t) \right)$$

a T időpontban lejáró ázsiai put opció értéke a lejárat függvényében monoton növekvő függvények [Baker, Yor (2009)].

Az európai call opció árazása során megadott paraméterekkel 10000 trajektórián ekvidisztáns felosztás mellett $t_i - t_{i-1} = \frac{1}{100}$ lépésközzel szimuláltuk az ázsiai call opció $t = 0$ pillanatbeli értékének alakulását a T lejárat függvényében.



Az ábra alapján a szimuláció is alátámasztja, hogy az ázsiai opció értéke a lejárat függvényében növekszik.

3.2. Kötvény modell

A Heath-Jarrow-Morton modellben az elemi kötvény árfolyamra és a határidős kamatlábra feltételezett dinamikákban közös Wiener folyamat jelenik meg. Ezt a modellosztályt általánosíthatjuk, amennyiben feltételezzük, hogy a különböző lehetséges $T > 0$ lejáratok esetén különböző Wiener folyamatok hajtják meg az árfolyamokat. Persze azt feltételezzük, hogy ha a lejárat időpontja kicsit megváltozik, akkor a meghajtó Wiener folyamat is csak kicsit változik, tehát egymáshoz minél közelebbi lejáratokat tekintünk annál inkább korrelált Wiener folyamatok hajtják meg a megfelelő árfolyamokat. Ezt a tulajdonságot egy kézenfekvő módon a Wiener mezővel ragadjuk meg. Legyen $W = (W(t,T)\colon t \geq 0, T \geq 0)$ Wiener mező és minden $T > 0$ esetén

$$Z(t,T) = \tfrac{1}{\sqrt{T}} W(t,T). \tag{3.15}$$

Ekkor $\operatorname{cov}\Big(Z(t_1,T_1), Z(t_2,T_2)\Big) = \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}(t_1 \wedge t_2) \cdot (T_1 \wedge T_2) = (*)$.

- Ha $T_1 \leq T_2$, akkor

$$(*) = (t_1 \wedge t_2) \cdot \sqrt{\tfrac{T_1^2}{T_1 \cdot T_2}} = (t_1 \wedge t_2) \cdot \sqrt{\tfrac{T_1}{T_2}} = (t_1 \wedge t_2) \cdot \sqrt{\tfrac{T_1 \wedge T_2}{T_1 \vee T_2}}.$$

- Ha $T_1 \geq T_2$, akkor

$$(*) = (t_1 \wedge t_2) \cdot \sqrt{\tfrac{T_2^2}{T_1 \cdot T_2}} = (t_1 \wedge t_2) \cdot \sqrt{\tfrac{T_2}{T_1}} = (t_1 \wedge t_2) \cdot \sqrt{\tfrac{T_1 \wedge T_2}{T_1 \vee T_2}}.$$

Tehát bármely $T_1, T_2 > 0$ esetén

$$\operatorname{cov}\Big(Z(t_1,T_1), Z(t_2,T_2)\Big) = (t_1 \wedge t_2) \cdot \sqrt{\tfrac{T_1 \wedge T_2}{T_1 \vee T_2}}.$$

Tehát ebből adódik, hogy rögzített $t > 0$ esetén, minél közelebb van egymáshoz T_1 és T_2, annál közelebb lesz a két lejárati időponthoz tartozó Wiener folyamat korrelációja 1-hez. Hasonlóan kiszámolható, hogy

$$\operatorname{corr}\Big(Z(t_1,T_1), Z(t_2,T_2)\Big) = \tfrac{1}{T_1 \vee T_2} \cdot \sqrt{\tfrac{t_1 \wedge t_2}{t_1 \vee t_2}}.$$

Legyen az elemi kötvényárfolyam dinamikája

$$\mathrm{d}_1 P(t,T) = \mu(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}_1 Z(t,T) \tag{3.16}$$

és tegyük fel, hogy létezik olyan $\lambda(t,T)$ *ismeretlen* sztochasztikus mező, amely segítségével az elemi kötvényár driftje előállítható

$$\mu(t,T) = r(t) + \lambda(t,T)\sigma(t,T) \tag{3.17}$$

alakban. Legyen $\mathbb{P}^*$ a kockázatsemleges valószínűségi mérték, $\overline{T} > 0$ egy rögzített legvégső lejárati időpont és $M(t,T)$ az az erős martingál, amely esetén a Girszanov tétel szerint

$$W^*(t,T) = W(t,T) - \langle -M, W\rangle(t,T) \tag{3.18}$$

Wiener mező a $\mathbb{P}^*$ mérték szerint a $[0,\overline{T}] \times [0,\overline{T}]$ téglalapon. Legyen az erős martingál reprezentációs tétel (2.15) szerint

$$M(t,T) = \int\limits_{v=0}^{T} \int\limits_{u=0}^{t} \Lambda(u,v)\,\mathrm{d}W(u,v), \tag{3.19}$$

tegyük fel, hogy $\lambda(t,T)$, a **kockázat piaci ára** parciálisan deriválható T szerint és jelölje a deriváltját

$$\lambda'_T(t,T) = \frac{\partial \lambda(t,T)}{\partial T}. \tag{3.20}$$

Megmutatható [Allouba, Goodman (2003)], hogy

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^t \Lambda(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{T} \int\limits_0^T \int\limits_0^t \lambda'_T(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

továbbá ekkor M kielégíti az általánosított Novikov feltételt, vagyis $\mathbb{P}^*$ ekvivalens a $\mathbb{P}$ mértékkel és a Radon-Nikodym derivált

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^*}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = e^{-\int\limits_0^{\overline{T}}\int\limits_0^{\overline{T}} \Lambda(t,T)\,\mathrm{d}W(t,T) - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\overline{T}}\int\limits_0^{\overline{T}} \Lambda^2(t,T)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}T}. \tag{3.21}$$

[Allouba, Goodman (2003)] szerint, ha

$$\mathbb{E}\left(e^{\frac{5}{4}\overline{T}\int\limits_0^{\overline{T}}\int\limits_0^{\overline{T}}(\lambda'_T)^2(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}\right) < \infty, \tag{3.22}$$

akkor a kötvény modell **arbitrázsmentes**.

Legyen Z definíciójához hasonlóan $Z^*(t,T) = \frac{1}{\sqrt{T}}W^*(t,T)$, ekkor Z^* kifejezhető a kockázat piaci árával a következőképpen:

$$\begin{aligned} Z^*(t,T) = \tfrac{1}{\sqrt{T}}W^*(t,T) = \tfrac{1}{\sqrt{T}}\left(W(t,T) + \int\limits_0^T\int\limits_0^t \Lambda(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right) = \\ = \tfrac{1}{\sqrt{T}}W(t,T) + \int\limits_0^T\int\limits_0^t \lambda'_T(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ = Z(t,T) + \int\limits_0^t \lambda(u,T)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Ekkor minden rögzített $T > 0$ esetén $T \mapsto Z^*(t,T)$ Wiener folyamat a $\mathbb{P}^*$ mérték szerint és a kötvényárfolyam dinamikája felírható a kockázatsemleges mérték szerinti Wiener folyamat segítségével.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_1P(t,T) &= \mu(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}_1Z(t,T) \\ &= \mu(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,T)P(t,T)\left(\mathrm{d}_1Z^*(t,T) - \lambda(t,T)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \left(\mu(t,T) - \lambda(t,T)\sigma(t,T)\right)P(t,T)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}_1Z^*(t,T) \\ &= r(t)P(t,T)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}_1Z^*(t,T) \end{aligned}$$

Tehát az elemi kötvényárfolyam kockázatsemleges mérték szerinti driftje a pillanatnyi kamatláb.

3.3. Összegzés

A sztochasztikus mezők bevezetése és a tulajdonságaik áttekintése számos tekintetben örökölte a sztochasztikus folyamatok tulajdonságait, azonban a részletes elemzés során több lényeges különbséget fedeztem fel. A filtráció, a véletlen bolyongás, a Wiener folyamat szinte azonnal átültethető volt a többparaméteres világba. Az első lényeges nehézséget a martingál tulajdonság megőrzése jelentette, amely esetén számos lehetőség adódott a kiterjesztésre. Ugyan a sztochasztikus integrál többparaméteres kiterjesztése is tartogatott váratlan akadályokat, a kettősintegrálok megjelenése végül nem gátolta a többparaméteres Girszanov tétel és az Itô formula felírását ugyan utóbbit kevésbé általános módon tehettem csak meg, mint amire számítottam.

Megállapítottam, hogy az opcióárazás megvalósítható a Wiener mező szimulációjával, azonban a futásidő drasztikus növekedése miatt csak az analitikus elemzésben hasznosíthattam az ötletet. Később egy olyan kötvénymodellt vizsgáltam, amelyben minden lejárathoz különböző Wiener folyamat tartozott, de az egymáshoz közeli lejáratok esetén erősen korrelált folyamatokat alkalmaztunk, erre a Wiener mező alkalmas eszköznek bizonyult. A modell felírása után kiválóan alkalmazhattuk a Girszanov formula többdimenzós paraméterre felírt változatát, amely az általánosított Novikov feltétellel együtt hatékony eszköznek bizonyult a kockázat piaci árának meghatározásában.

Irodalomjegyzék

[Khoshnevisan (2002)] Davar Khoshnevisan: *Multiparameter Resources: An Introduction to Random Fields. University of Utah, Salt Lake City (2002).*

[Wong, Zakai (1974)] E. Wong, M. Zakai: *Martingales and stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.* **29**, 109-122 (1974).

[Cairoli, Walsh (1975)] R. Cairoli and J. B. Walsh: *Stochastic integrals in the plane. Acta Math*, **134**, 111-183 (1975).

[Wong, Zakai (1978)] E. Wong, M. Zakai: *Differentiation Formulas for Stochastic Integrals in the Plane. Stoch Pr. Appl.* **6**, 339-349 (1978).

[Wong, Zakai (1976)] E. Wong, M. Zakai: *Weak martingales and stochastic integrals in thle plane. Ann. Prob.*, **4**, 570-586. (1976).

[Allouba, Goodman (2003)] H. Allouba, V. Goodman: *Market price of risk and random field driven models of term structure: a space-time change of measure look.*, Contemp. Math., **317**, Amer. Math. Soc., 37-44. (2003).

[Körezlioglu *et* al. (1983)] H. Körezlioglu, G. Mazzioto, J. Szpirglas: *Nonlinear filtering equations for two parameter semimartingales.*, Stoch. Proc. and Their Appl., **15**, 239-269. (1983).

[Linn (2009)] M. P. Linn: *Nonlinear Filtering of Random Fields in the Presence of Long-memory Noise and Related Problems in Stochastic Analysis.* Diss. The University of Michigan, (2009).

[Santa-Clara, Sornette (2001)] P. Santa-Clara, D. Sornette: *The dynamics of the forward interest rate curve with stochastic string shocks.* Review of Financial Studies, **14**, 149-85. (2001).

[Imkeller (1985)] P. Imkeller: *A stochastic Calculus for continuous N-parameter strong martingales.* Stochastic Process. Appl., **20**, 1-40. (1985).

[Baker, Yor (2009)] D. Baker, M. Yor: *A brownian sheet martingale with the same marginals as the arithmetic average of geometric brownian motion.* Electronic Journal of Probability, **14**, 1532-1540. (2009).