

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

KATASZTRÓFAKOCKÁZAT TŐKESZÜKSÉGLETE

Készítette: **Kis Mihály**

Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc

Aktuárius szakirány

Témavezető: **Kováts Antal**

Nyugalmazott egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Konzulens: **Zempléni András**

Habilitált egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Budapest, 2016

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Kováts Antalnak a szakdolgozat témavezetését, és, hogy bármilyen kérdéssel fordulhattam hozzá és mindig türelemmel, segítőkész tanácsaival fogadott. Továbbá köszönöm Zempléni Andrásnak a segítségét, mely nélkül a jelen dolgozat nem készülhetett volna el, valamint köszönöm családomnak, barátaimnak és kollégáimnak a támogatást és bátorítást.

„Nem értek egyet azzal, amit mondasz, de életem végéig harcolni fogok azért, hogy mondhasd”

Voltaire

Bevezetés

A katasztrófák világunk szerves részét képezik. Az efféle kockázatok kezelése izgalmas feladat a biztosítási piac számára. Azért, mert morális kockázat szempontjából igazán jó kockázatsökkentő technikák nem léteznek. Mégis fontos és szükséges ezen veszélyek elleni védelem, biztosítás, hiszen egy-egy természeti-katasztrófa bekövetkeztekor jelentős méretű vagyoni és személyi károk keletkeznek. Ha egy biztosítónak ilyen fajta kockázata van a portfóliójában, akkor felmerül a szolvencia kérdése. Kötelessége tőkét tartania olyan esetekre is, amikre a biztosítástechnikai tartalékok nem nyújtanak kellő fedezetet. Ennek a tőkének a számítása történhet a Szolvencia 2 rendelet szerint és 2016. január 1-jétől minden Európai Unió tagállambeli biztosítónak e szerint kell megképeznie. Jelen dolgozat is e rendelet szellemében készült, és Magyarország természeti adottságait tekintve az árvíz-kockázat tőkeszükségletének vizsgálatát tűztük ki célul. A téma azért is érdekes, mert a hazai kockázati szorzók a szakma számára nehezen elfogadhatóak, és aktuális problémát jelenthet a túltőkésítés fennállása is.

A szakdolgozat 2 részből áll. Az első rész a biztosítástechnikai tartalékokról, tőkeszükségletről és a katasztrófa-kockázatról¹ szól, tehát a kockázatok kvantitatív jellemzése történik itt. Végül pedig a magyarországi árvíz-kockázat egy kvantitatív megközelítését mutatjuk be aktuáriusi eszközökkel.

¹Megjegyezve, hogy a dolgozatban kimondottan a nem-életbiztosítási ággal foglalkozunk.

Tartalomjegyzék

1. Szavatoló tőke és biztosítástechnikai tartalék	6
1.1. Biztosítástechnikai tartalékok	7
1.2. Szavatoló tőke	7
2. Szavatoló tőkeszükséglet és Katasztrófa-kockázat	9
2.1. Szavatoló tőkeszükséglet	9
2.2. Katasztrófa-kockázat	11
3. Árvíz kockázat Magyarországon	16
3.1. Extrémérték-elmélet	16
3.1.1. Stacionaritás	19
3.2. Előzetes adatfeldolgozás	21
3.3. Árvíz adatok elemzése	22
4. Összefoglalás	33
A. Táblázatok és R kódok	37

1. fejezet

Szavatoló tőke és biztosítástechnikai tartalék

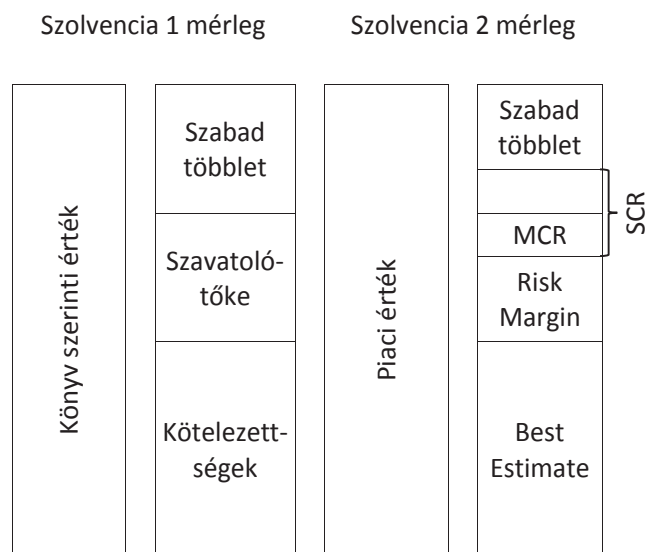
A magyarországi biztosítók részére a Szolvencia 2 (továbbiakban S2) irányelv teljes körű alkalmazása 2016. január 1-től kötelező. Három pillérből tevődik össze: kockázatok kvantitatív tulajdonsága, kvalitatív tulajdonsága azaz a külső-belső kockázatkezelési rendszerek szerkezete, és a piaci fegyelemből vagyis jelentések és közzététel a szereplők számára. Ebben a fejezetben az első pillért tárgyaljuk. Tartalék alatt a biztosítástechnikai tartalékokat értjük. Ahhoz, hogy tőkéről vagy tartalékról tárgyalni lehessen értelmes keretek között, meg kell említeni az eszközöket is. A Szolvencia 2 keretrendszer megfogalmazza, hogy egy biztosítótársaságnak az eszközeinek és kötelezettségeinek értékelését abban a szellemben kell megtennie, hogy az üzleti tevékenység folyamatosan fennáll. Tehát a vállalkozásnak nem csak az adott időpillanatban kell fizetőképesnek lennie, hanem egy jövőbeli időpontig tartó intervallumban is. Ezért a biztosító az ALM (Assets to Liability Method) módszer alkalmazásával elérheti, hogy kötelezettségeihez mérten kellő mennyiségben és összetételben tartsa és fektesse be eszközeit. A dolgozatban a biztosító eszköz oldalával nem foglalkozunk részletesen, néhol megemlítjük, ha szükséges. A következőkben az S2-es irányelv szerinti biztosítástechnikai tartalékokról lesz szó. Ebben a fejezetben az [1] rendelet III. és IV. fejezeteire támaszkodtunk.

1.1. Biztosítástechnikai tartalékok

Az új szabályozás megkülönbözteti a tőke megfeleléség számításához használt biztosítástechnikai tartalékokat (S2 tartalék) és az eredmény-kimutatáshoz használt számviteli biztosítástechnikai tartalékokat. A számviteli tartalékokat lényegében a korábbi szabályozásnak megfelelő struktúrában és módszertannal kell számolni. Az S2 megkülönböztet **díj-** és **kártartalékot**. Díjtartalékot a jövőbeni szolgáltatásokra, kártartalékot a már bekövetkezett károkra kell megképezni. Az utóbbi szemlélet többé-kevésbé magába foglalja a számviteli előírást, viszont vannak kivételek, amiket nem igazán lehet besorolni a díj- vagy kártartalékok közé, ilyen az eredménytől független díj-visszatérítési vagy a káringadozási tartalék. A Szolvencia 2 szerint a biztosítástechnikai tartalékokat a legjobb becslés (Best Estimate) és a kockázati marzs (Risk Margin) összegeként kell előállítani. A legjobb becslés a biztosító pénzáramlásának (cash-flow) előrejelzése, a biztosító életében bekövetkező materiális események figyelembevételével (pl. törlések bekövetkezése, vezetői döntések hatása). A kockázati marzs vagy ráhagyás a biztosító a jelen- és jövőbeni szavatoló tőkeszükségleteinek jelenértékének egy biztonsági szintje, ezt a szintet tőkekölség-rátának nevezik és általában 6%-nak tekintik. A rendelet azt mondja, hogy a kockázati marzs számítása történjen egy referenciabiztosító bevezetésével, ami fiktív másolata a biztosítónak, ebben a modellben bizonyos sokkoknak kitéve a referenciabiztosítót kell megállapítani, hogy a szavatoló tőkeszükséglet hogyan változik, és ehhez mérten számítható a ráhagyás. Ahhoz, hogy tisztább képet kaphassunk a szavatoló tőkeszükségletről, meg kell említenünk a szavatoló tőkét, mint mérlegelemet.

1.2. Szavatoló tőke

A szavatoló tőke a saját tőke részét képezi. Célja a nem várt és váratlan kockázatok fedezése, vagyis az olyan káros események bekövetkezésének hatása ellen nyújt védelmet, amikről a biztosítónak vagy nincs tudomása (váratlan) vagy csak nagyon kicsi valószínűséggel következik be (nem várt). A Szolvencia 2 rendelet olyan mértékű szavatoló tőkét ír elő, hogy – ezen kockázatok bekövetkezése során – a csődvalószínűsége 0,005 legyen.



1.1. ábra. Stilizált mérlegek

Forrás: Hanák Gábor előadásai (4)

Az 1.1 ábrán látható, hogy hogyan alakult át a biztosító forrás oldala, valamint, az is, hogy az eszközöket a bekerülési érték helyett a piaci értéken kell bemutatni. Ez a rugalmasság a kötelezettségek értékelésénél okozhat komoly gondokat. Hiszen az eszközök piaci értéke valószínűségi változó, amelynek pozitív szórása van, tehát ingadozik, ezt a volatilitást a forrás oldalon is szükséges valamilyen módon kezelni. A már említett ALM módszerrel ezt a problémát igyekszik orvosolni, azzal a különbséggel, hogy abban az eszközöket igazítják a kötelezettségekhez, és nem fordítva. A szavatoló tőke nemzetközi elnevezése **Net Asset Value (NAV)**, azaz nettó eszközérték, és pontosan akkora a nagysága, mint a mérlegben szereplő eszközök értékéből levonva a kötelezettségeket (biztosítástechnikai tartalékok, egyéb tartalékok), tehát SCR + szabad többlet (surplus). A rendelet előírja, hogy mik lehetnek a szavatoló tőkeelemek, ilyenek például a törzsrészcénytőke, induló tőke, alárendelt tőke, elsőbbségi részvények. Ezek az elemek csak bizonyos jellemzők teljesítése esetén kerülhetnek az alapvető szavatoló tőkébe. Világos, hogy likvid eszközöknek kell lenniük, és nem okozhatnak fizetéseképtelenséget a vállalat számára.

2. fejezet

Szavatoló tőkeszükséglet és Katasztrófa-kockázat

Az I. pillér fontos része a szavatoló tőke megfelelő szinten tartása. A következő részben erről a feladatkörrel lesz szó. A tőkeszükségletről szóló bekezdésnél az [1] V. fejezete, és a [3] kiadvány 40-48. oldalai alapján, az árvíz-kockázatról szólónál pedig a [2] és a [3] 48-53. oldalai alapján dolgoztunk.

2.1. Szavatoló tőkeszükséglet

A szavatoló tőkeszükséglet a nettó eszközérték 99,5%-os kockázatosított értéke, vagyis a NAV-ra úgy gondolhatunk, mint egy valószínűségi változó, aminek keressük a $VaR(99,5\%)$ -ját. Számítása történhet az ún. Standard-formula szerint, illetve belső modell alkalmazásával is. Többféle ilyen tőke követelmény létezik, ilyenek az alapvető és minimális szavatoló tőkeszükségletek. Azért létezik több tőkeszükséglet is, mert egy lehetséges csőd esetén, ha a biztosító az alapvető szintjével nem rendelkezik, de a minimálissal igen, akkor még van esély, hogy kilábal belőle, viszont ha a minimális sincs megképezve, akkor az súlyos felügyeleti szankciókat, továbbá csődeljárást von(hat) maga után. A rendelet olyan mértékű alapvető szintű szükségletet ír elő, mely megelégetésén a biztosító 200 évente egyszer mehet csődbe.

A nem-élet ág alapvető szavatoló tőkeszükségletének összetétele az alábbi:

- Díj- és tartalékkockázat
- Törléskockázat
- **Katasztrófakockázat**

A Standard-formula által szolgáltatott képlet:

$$SCR_{nl} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrNL_{(i,j)} \cdot SCR_i \cdot SCR_j},$$

ahol $CorrNL_{(i,j)}$ a tőkeszükséglet fentebb felsorolt összetevőinek (SCR_i -k) Pearson-féle korreláció-mátrixának az (i, j) -edik elemét jelöli.

	Díj- és tartalék	Törlés	Katasztrófa
Díj- és tartalék	1	0	0,25
Törlés	0	1	0
Katasztrófa	0,25	0	1

2.1. táblázat. Az alapvető tőkeszükséglet részmoduljainak korreláció-mátrixa

Forrás: Szolvencia 2 rendelet

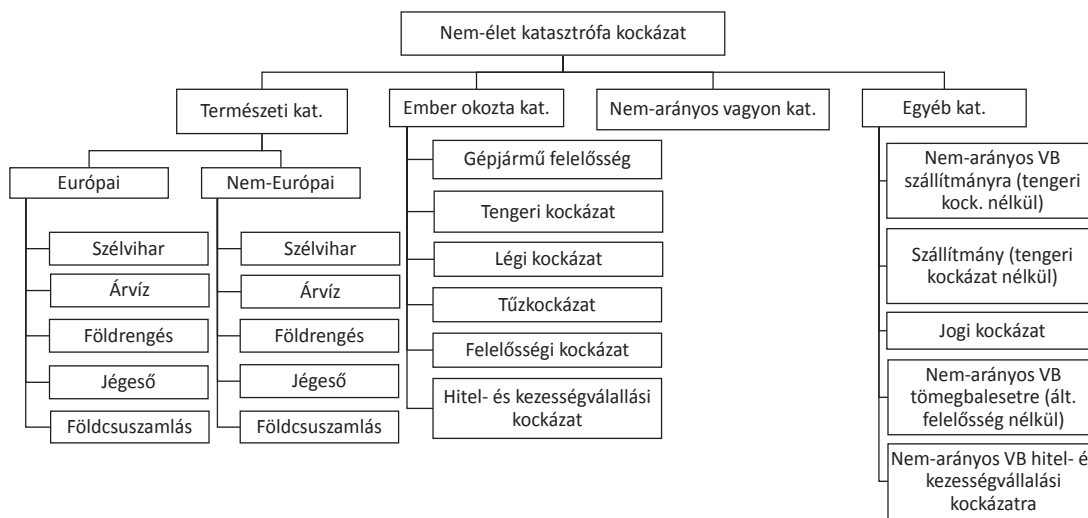
A Standard formula alkalmazhatóságához a biztosítónak igazolnia kell, hogy teljesülnek rá a formula feltételezései. Díj- és tartalék kockázatnál kizárólag olyan szerződésekkel kell foglalkoznia, melyek kárai rendszeres gyakorisággal következnek be, vagyis a katasztrófa-kockázatot ki kell zárni a számításnál. Feltételek közé tartozik az, hogy a mögöttes kockázat – amit a biztosító átvállal – lognormális eloszlást követ, vagy, hogy a felmerülő költségek arányosak a kockázattal, az eltelt idő függvényében. Törlés kockázat tőkeszükséglet számításának feltételezése többek között az, hogy a törlések hatását a biztosítástechnikai tartalékoknál nem veszi figyelembe a biztosító, esetleg, ha mégis figyelembe veszi, akkor csak abban az esetben, ha nem lényeges ez a hatás. Megjegyezzük, hogy a biztosítóknak lehetőségükben áll a Standard formulától részben eltérni¹, viszont ezeket az eseteket is részletezni és indokolni kell az ún. ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) jelentésben. Érdekes helyzet állhat

¹Teljes eltérésről akkor beszélünk, amikor a biztosító saját belső modellt alkalmaz. A magyar biztosítók túlnyomó része a Standard formulát használja.

fenn egy olyan társaság esetében, aki nem rendelkezik még kellő információval (pl. új biztosító esetén) a kockázatait tekintve, ebben az esetben igazolni a Standard formula feltételeit, vagy az attól való modellbeli eltérést, ez egy aktuáriust nem kímélő feladat.

2.2. Katasztrófa-kockázat

A nem-életbiztosításbeli katasztrófa-kockázat több részmodulból épül fel. Legfontosabb része a természeti és emberi kockázat, ezek mondhatók a leggyakoribbaknak.



2.1. ábra. Nem-élet ág katasztrófa kockázat részmodulok

Forrás: [5] 24. o.

A nem-életbiztosítási katasztrófa-kockázat tőkeszüksége az alábbiak szerint számítható:

$$SCR_{nlCAT} = \sqrt{(SCR_{natCAT} + SCR_{npproperty})^2 + SCR_{mmCAT}^2 + SCR_{CATother}^2}$$

ahol:

- SCR_{natCAT} : természeti katasztrófa-kockázat tőkeszüksége,
- $SCR_{npproperty}$: nem-arányos vagyon-viszontbiztosítás katasztrófa-kockázat tőkeszüksége,

- SCR_{mmCAT} : ember okozta katasztrófakockázat (háború, terror cselekmények, stb.) tőkeszükséglete,
- $SCR_{CATother}$: egyéb katasztrófakockázat tőkeszükséglete.

A **természeti katasztrófa** részmodul tőkeszükséglete az egyszerű

$$SCR_{natCAT} = \sqrt{\sum_i SCR_i^2}$$

képlettel számolható, ahol az egyes típusok (szélvihar, földrengés, stb.) szerint történik az összegzés. A képletet továbbfejtvé:

Szélvihar

$$SCR_{windstorm} = \sqrt{\left(\sum_{r,s} CorrWS_{r,s} \cdot SCR_{ws,r} \cdot SCR_{ws,s} \right) + SCR_{ws,other}^2}$$

Földrengés

$$SCR_{earthquake} = \sqrt{\left(\sum_{r,s} CorrEQ_{r,s} \cdot SCR_{eq,r} \cdot SCR_{eq,s} \right) + SCR_{eq,other}^2}$$

Árvíz

$$SCR_{flood} = \sqrt{\left(\sum_{r,s} CorrFL_{r,s} \cdot SCR_{fl,r} \cdot SCR_{fl,s} \right) + SCR_{fl,other}^2} \quad (2.1)$$

Jégeső

$$SCR_{hail} = \sqrt{\left(\sum_{r,s} CorrHL_{r,s} \cdot SCR_{hl,r} \cdot SCR_{hl,s} \right) + SCR_{hl,other}^2}$$

Földcsuszamlás és talajsüllyedés²

$$L_{subsidence} = 0,0005 \cdot \sqrt{\sum_{r,s} CorrSUB_{r,s} \cdot WSI_{sub,r} \cdot WSI_{sub,s}}$$

A dolgozat fő célja az árvíz kockázat tárgyalása, ezért a többi katasztrófára nem térünk ki.

²Ennek a kockázatnak a tőkeszükségletét csak Franciaország területeire kell megképezni

Árvíz

Az árvíz kockázat tőkeszükségletére adott (2.1) képletben szereplő jelölések a következőképpen értendők:

Kiszámítjuk a régiónkénti (országokénti) szavatoló tőkeszükségleteket (SCR_r), majd vesszük az aggregált négyzetösszeget. Ezek kiszámításához az A és B forgatókönyvek szerinti árvízveszteségek maximumát kell venni. Az árvízveszteséget írja le a:

$$L_{flood,r} = Q_{flood,r} \cdot \sqrt{\sum_{i,j} CorrFL_{r,i,j} \cdot WSI_{fl,r,i} \cdot WSI_{fl,r,j}},$$

formula, ahol:

- $Q_{flood,r}$: az r régió árvíz kockázati tényezője,
- $CorrFL_{r,i,j}$: az r régió i és j árvízzónájának korrelációs együtthatója,
- $WSI_{fl,r,i}$: az r régió i zónájának árvíz kockázathoz tartozó súlyozott biztosítási összegét jelöli.

Ezeket a súlyozott biztosítási összegeket a $WSI_{fl,r,i} = W_{fl,r,i} \cdot SI_{fl,r,i}$ összefüggés alapján értelmezzük, ahol $W_{fl,r,i}$ az i zónához tartozó árvíz kockázati szorzót jelöli és $SI_{fl,r,i}$ pedig a hozzá tartozó összes biztosítási összeget. Az $SI_{fl,r,i}$ tényezők kiszámításához, azt tovább bontva, az $SI_{fl,r,i} = SI_{property,r,i} + SI_{onshore-property,r,i} + 1,5 \cdot SI_{motor,r,i}$ formulán keresztül jutunk el. Azaz egy kockázati zónán belül az árvíz kockázatra is kiterjedő tűz- és egyéb vagyoni károk, tengeri, légi és szállítási (marine), valamint gépjármű károk fedezeteit magába foglaló szerződésekre kell a kalkulációt elvégezni. A már részben megemlített két forgatókönyv külön-külön két egymást követő eseményt ír le, melyek bekövetkezésénél a biztosító állománya által megképzett árvízveszteségeket ($L_{flood,r}$) különböző szintű sokkok érik, és ezeknek megfelelően alakul a biztosító vagyoni helyzete. Ezen scenáriók segítségével készíthető fel a vállalat extrém természeti károk készülségére.

- „A” forgatókönyv:
 - $L_{flood,r}$ 65%-ával egyenlő azonnali veszteség,
 - majd $L_{flood,r}$ 45%-ával egyenlő veszteség.

- „B” forgatókönyv:

- $L_{flood,r}$ 100%-ával egyenlő azonnali veszteség,
- majd $L_{flood,r}$ 10%-ával egyenlő veszteség.

A sokkokban szereplő veszteségeket nettó módon kell megképezni, vagyis a viszontbiztosításba adott részek levonásra kerülnek. Tehát az „A” eseménysorozatból a:

$$L_{flood,r}^A = 0,65 \cdot L_{flood,r} - VB_1^A + 0,45 \cdot L_{flood,r} - VB_2^A$$

szükséglet, a „B”-ből pedig a:

$$L_{flood,r}^B = 1 \cdot L_{flood,r} - VB_1^B + 0,1 \cdot L_{flood,r} - VB_2^B,$$

ahol VB_i^A és VB_i^B ($i = 1, 2$) a kötelezettség viszontbiztosításba adott része. Az árvíz-kockázatra vonatkozó szavatoló tőkeszükséglet pedig ennek a két értéknek a maximuma, azaz $SCR_{flood,r} = \max\{L_{flood,r}^A, L_{flood,r}^B\}$. Világos, hogy a két scenárió közötti különbség a viszontbiztosításokból fakadhat. Magyarországra vonatkozó adatok:

1. $Q_{flood,r=HU} = 0,4\%$,
2. Árvíz-kockázati zónákhoz tartozó súlyok ($W_{f,r=HU,i}$, lásd: A.2 táblázat),
3. $CorrFL_{r=HU,i,j}$ (lásd: A.3 táblázat).

A katasztrófa-kockázatok uniformizálásához megalakult az ún. CTF (Catastrophe Task Force - Katasztrófa munkacsoport) aminek tagja volt számos nagy viszontbiztosító. Hosszas egyeztetések után 3 dolgot fogalmaztak meg. Az egyik az, hogy a kockázatok alaplértéke a biztosítási díj helyett, a kitétség legyen, valamint, hogy a régiónkénti kitétségek ismerete nem elégséges a katasztrófa rizikójának méréséhez. Ezért a CRESTA (Catastrophe Risk Evaluation and Standardizing Target Accumulations) nevezetű alapítvány – mely a SwissRe, a MunichRe és a Gerling-Konzern Globale Reinsurance Company vállalatok összefogásának eredménye – által meghatározott kockázati zónákat alapul véve kell meghatározni (Magyarország 24 ilyen zónából áll lsd: A.1 táblázat). Elfogadták az általános $L = Q \cdot \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot WSI_i \cdot WSI_j}$ alakú modellt, ahol a Q érték a biztosítási ipart ért 200 évenkénti esemény általi veszteség az egész országra vonatkozó biztosítási összeg arányában. Fontos megemlíteni, hogy a szorzók helyes

értelmezéséhez tartozik annak a figyelembe vétele, hogy a kockázatos országok jobban fel vannak készülve bizonyos katasztrófákra. Így például azoknál a területeknél, ahol magas az árvíz esélye, ott magasabbak a gátak, ezért az árvíz kockázat kisebb. A $W_{r,i}$ szorzók a zónák kockázatának relatív szintjei az előző 200 évenkénti eseményre vetítve. Ezen szintek meghatározásához 2 módszert vizsgáltak: az egyik az, hogy megnézték, hogy egy kockázati, 200 év visszatérési szintű országos esemény milyen mértékű károkat okoz zónákra vetítve. A másik pedig, hogy ún. kockázati-térképeket vizsgáltak, ami szintén 200 éves visszatérési szintű, zóna szintű károokra volt fókuszálva. A módszerek részletei árvíz vonatkozásában nincsenek kifejtve, konkrét számításokat nem közölnek [2]-ben. Viszont Magyarország Győr és Csongrád árvíz kockázati zónáinak súlyai a többihez képest sokkal nagyobbak. A következő fejezetben ezeket az arányokat járjuk körbe.

3. fejezet

Árvíz kockázat Magyarországon

Magyarország árvíz kockázati zónái közül Győrhez, és Csongrád-megyéhez tartozó súlyok, a többi zónához képest kiugróan magas értéket kaptak. A dolgozat fő feladata ezen kockázati faktorok aktuáriusi jellemzése. Egy katasztrófa bekövetkezése nyilvánvalóan szélsőséges eset, nem mindennapos, vagyis ahhoz, hogy tárgyalni tudjuk ezen eseményeket, úgy gondolunk rájuk, mint egy valószínűségi változó, egy bizonyos küszöbértéket meghaladó (feltételes) eloszlása. Ebben a fejezetben a [6]-[10] anyagok segítettek munkánkat. A számítások elvégzésére az R program állt rendelkezésünkre.

3.1. Extrémérték-elmélet

Az extrémális értékek eloszlásának történetében elsőként egy minta maximumának eloszlását próbálták meg jellemezni. Fisher, Tippett és Gnedenko tétele szolgáltatja ennek a témakörnek a megoldását.

3.1. Definíció. (Általánosított extrém érték eloszlás - *Generalized Extreme Value distribution*)

Azt mondjuk, hogy X általánosított extrém érték eloszlással bír $\xi \in \mathbb{R}$ alak, $\mu \in \mathbb{R}$ eltolás és $\sigma > 0$ skála paraméterrel, ha eloszlásfüggvénye az alábbi:

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} e^{-(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma})^{-1/\xi}} & , \text{ ha } \xi \neq 0, \\ e^{-e^{-\frac{x - \mu}{\sigma}}} & , \text{ ha } \xi = 0, \end{cases} \quad \text{és} \quad 1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} > 0.$$

A gyakorlatban nehéz megállapítani egy mintáról, hogy extrém értékei milyen eloszlást követnek. A következő tétel azt mondja, hogy ha van egy független, azonos eloszlású mintánk, akkor a minta maximumának eloszlása lényegében 3 típusú lehet. Ez fontos tény, hiszen nem kell a minta alapeloszlását ismernünk, ahhoz, hogy megkapjuk az extrémális érték eloszlását.

3.2. Tétel. (Fisher–Tippett–Gnedenko, 1928)

Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n független, azonos eloszlású valószínűségi változók és $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Ha léteznek $\{a_n\}, \{b_n\}$ valós számsorozatok úgy, hogy $\{a_n\} > 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = H(x)$, ahol $H(x)$ nem elfajuló eloszlásfüggvény, akkor $H = H_{\xi, \mu, \sigma}(x)$ és ez Gumbel, Fréchet vagy Weibull eloszlás lehet.

3.2.1. Megjegyzés. Egy F eloszlás H maximum vonzás tartományában van ($F \in MDA(H)$), ha F -re teljesül a Fisher-Tippett-Gnedenko tétel, vagyis, hogy léteznek megfelelő a_n, b_n normáló sorozatok, hogy az F eloszlású minta maximumát (M_n) normálva, az eloszlásban H -hoz konvergál.

Az általánosított extrém érték eloszlás speciális esetei:

- 1. típus: Gumbel ($\xi = 0$)

$$H_{0, \mu, \sigma}(x) = e^{-e^{-(x-\mu)/\sigma}}$$

- 2. típus: Fréchet ($\xi > 0$)

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-1/\xi}), & \text{ha } 1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} > 0, \\ 0, & \text{ha } 1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} \leq 0 \end{cases}$$

- 3. típus: Weibull ($\xi < 0$)

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} \exp(-(-1 - \xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-1/\xi}), & \text{ha } 1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} > 0, \\ 1, & \text{ha } 1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} \leq 0 \end{cases}$$

Gnedenko 1943-ban megmutatta, hogy $\xi > 0$ -ra $F \in MDA(H_\xi)$, akkor és csak akkor, ha $1 - F(x) = x^{-1/\xi}L(x)$, ahol $L(x)$ lassú változású, azaz $\forall x > 0 \quad \frac{L(tx)}{L(x)} \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow \infty)$. Ez annyit jelent, hogy ha F jobb széle hatvány-sebességgel cseng le, akkor F a Fréchet típusú extrém eloszlás maximum vonzás tartományában van. Ezek a vastagfarkú eloszlások, ilyen például a Pareto, loggamma, Cauchy. A $\xi < 0$ esetre $F \in MDA(H_\xi)$ akkor és csak akkor, ha létezik \hat{x} , hogy $F(\hat{x}) = 1$ és $F(\hat{x} - \epsilon) < 1$, valamely pozitív ϵ -ra

és $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-F(kx+\hat{x})}{1-F(x+\hat{x})} = k^{-1/\xi}$, ($k > 0$). Ekkor az alapeloszlás rövidfarkú, hiszen a tartója felülről korlátos, ilyen például a Béta eloszlás.

Az extrém érték elmélet egy másik eszköze a küszöbátlépések eloszlásának vizsgálata. Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n független, azonos eloszlású valószínűségi változók $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} \leq \infty$, az eloszlás jobb végpontja (végtelen is lehet). Ekkor az $u \leq x_0$ küszöbértéket meghaladó pontok eloszlása a következő:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad \text{ahol } 0 \leq x < x_0 - u.$$

3.3. Definíció. Általánosított Pareto eloszlás (Generalized Pareto Distribution)

Egy X valószínűségi változó általánosított Pareto eloszlást követ $\xi, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ paraméterekkel, ha eloszlásfüggvénye az alábbi alakú:

$$G_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-1/\xi}, & \text{ha } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}, & \text{ha } \xi = 0, \end{cases}$$

ahol $x \geq \mu$, ha $\xi \geq 0$ és $\mu \leq x \leq \mu - \sigma/\xi$, ha $\xi < 0$.

Balkema, de Haan (1974) és Pickands (1975) tétele szolgáltatja a küszöbátlépések és az általánosított Pareto eloszlás közötti kapcsolatot, amely a gyakorlati alkalmazás széleskörű felhasználásához nyújt lehetőséget.

3.4. Tétel. (Balkema, de Haan (1974) és Pickands (1975))

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq x < x_0 - u} |F_u(x) - G_{\xi, 0, \sigma(u)}(x)| = 0 \iff F(x) \in MDA(H_{\xi, \mu, \sigma}),$$

ahol $\sigma(u) = \sigma + \xi(u - \mu)$. (μ, σ a $H_{\xi, \mu, \sigma}$ eloszlás paraméterei.)

Tehát, ha a minta eloszlása $H_{\xi, \mu, \sigma}$ maximum vonzási tartományában van, akkor a feltételes farokeloszlás az általánosított Pareto eloszláshoz konvergál és fordítva. A gyakorlatban a GPD-hez való konvergenciát az eloszlás illesztés vizsgálatával szokták ellenőrizni, aminek feltétele egy nagy u megléte. A következő feladat a megfelelő küszöb megtalálása. Ilyen eljárás az átlagos küszöbátlépések módszere. Vagyis a küszöböt meghaladó értékek átlaga, formailag:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - u|^+}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i > u\}}}$$

Nyilvánvaló, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(u) = \mathbb{E}(X - u | X > u) =: e(u)$. Mivel $e(u)$ GPD-eloszlás esetén lineáris, ezért ha $e_n(u)$ közel lineáris, akkor elfogadható a GDP modell feltevése, azaz, ha egy bizonyos u -tól kezdve lineáris, akkor onnantól választhatjuk meg az értékét. A küszöb megtalálásához célszerű $e_n(u)$ azon pontjait számba venni, ahol sűrűn helyezkednek el az értékek. A 3.4 tétel segítségével és a megfelelő u ismeretében a minta farokeloszlására tudunk egy közelítő eloszlást illeszteni. A feltételes küszöbátlépés eloszlás ismeretében pedig fel tudjuk írni az alap eloszlást is $x \geq u$ -ra. Nézzük meg ezt részletesebben:

$$F(x) = (1 - F(u)) \cdot F_u(x - u) + F(u),$$

a Glivenko-Cantelli tétel miatt $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} |F_n(x) - F(x)| = 0) = 1$, továbbá 3.4 tétel értelmében $G_{\xi, \mu=u, \sigma}(x)$ eloszlásban tart $F_u(x - u)$ -hoz. Így már konkrétan felírhatjuk a minta eloszlásfüggvényének egy becslését $x \geq u$ -kra, ami a következő alakot ölti:

$$\hat{F}(x) = (1 - F_n(u)) \cdot G_{\xi, u, \sigma}(x) + F_n(u).$$

$G_{\xi, u, \sigma}(x)$ -et kibontva azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \hat{F}(x) &= (1 - F_n(u)) \cdot \left(1 - \left(1 + \xi \frac{x - u}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right) + F_n(u) = 1 - (1 - F_n(u)) \cdot \left(1 + \xi \frac{x - u}{\sigma} \right)^{-1/\xi} = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{(1 + F_n(u))^\xi} + \xi \frac{x - u}{\sigma(1 + F_n(u))^\xi} \right)^{-1/\xi}. \end{aligned}$$

Ezt $1 - \left(1 + \tilde{\xi} \frac{x - \tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}} \right)^{-1/\tilde{\xi}}$ alakban keresve adódik, hogy:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \xi \\ \tilde{\sigma} &= \sigma(1 + F_n(u))^\xi \\ \tilde{\mu} &= u + \frac{\sigma(1 + F_n(u))^\xi - \sigma}{\xi}. \end{aligned}$$

Tehát a minta eloszlása $x \geq \tilde{\mu}$ -re jól becsülhető általánosított Pareto-eloszlással $\tilde{\xi}, \tilde{\sigma}, \tilde{\mu}$ paraméterekkel.

3.1.1. Stacionaritás

A gyakorlatban sok esetben nem független adatokból dolgoznak, de ez nem zárja ki az időtől való függetlenséget. Dolgozatunkban feltételeztük, hogy adatainkra teljesül

a következő feltétel. A következőket [6] alapján dolgoztuk ki.

3.5. Definíció. Az X_1, X_2, \dots stacionárius sorozat kielégíti a $D(u_n)$ feltételt, ha minden $i_1 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_q$ és $j_1 - i_p > l$ esetén

$$\begin{aligned} & |P(X_{i_1} < u_n, \dots, X_{i_p} < u_n, X_{j_1} < u_n, \dots, X_{j_q} < u_n) - \\ & P(X_{i_1} < u_n, \dots, X_{i_p} < u_n) \cdot P(X_{j_1} < u_n, \dots, X_{j_q} < u_n)| \leq \alpha(n, l). \end{aligned}$$

Ahol $\alpha(n, l_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) és l_n olyan sorozat, amire $l_n/n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Tehát, ha egy X_n stacionárius sorozat teljesíti az előzőeket egy alkalmasan megválasztott u_n küszöbsorozat esetén, akkor ebben az esetben is kimondhatunk a 3.2 tételhez hasonló állítást. Erről szól a következő tétel.

3.6. Tétel. Legyen X_1, X_2, \dots egy stacionárius sorozat és $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Ha léteznek $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$ valós sorozatok, hogy

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \rightarrow G(z),$$

ahol $G(z)$ nem elfajult eloszlás és teljesül a $D(u_n)$ feltétel ($u_n = a_n z + b_n$, $z \in \mathbb{R}$ választással), akkor $G(z)$ GEV-eloszlás.

A lényeg, hogy elég távoli időpontokra a szintmeghaladás eseménye közel független. Az árvizek is ilyen tulajdonságúak, hiszen árvizek több napig tartanak, és ebben az időszakban az egymást követő napok nem függetlenek. A következő tétel azt mondja ki, hogy a stacionárius sorozatok maximumainak eloszlása olyan, mint a független maximum-klaszterek eloszlása.

3.7. Tétel. Legyenek X_1, X_2, \dots stacionárius és X_1^*, X_2^*, \dots független sorozatok ugyanazzal az eloszlásfüggvénnyel és X_i -re ($i = 2, 3, \dots$) teljesül a $D(u_n)$ feltétel. Legyenek $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ és $M_n^* = \max\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$. Ekkor, ha léteznek $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$ sorozatok úgy, hogy

$$P\left(\frac{M_n^* - b_n}{a_n} \leq z\right) \rightarrow G_1(z) \quad n \rightarrow \infty,$$

ahol $G_1(z)$ nem elfajuló eloszlásfüggvény, akkor és csak akkor, ha

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \rightarrow G_2(z),$$

ahol $G_2(z) = G_1(z)^\theta$ ($0 < \theta \leq 1$).

Az, hogy G_1^θ is GEV eloszlásfüggvény egyszerű átalakításokkal belátható. A θ -t extrémális indexnek nevezik. Szemléletes jelentése a küszöbátlépések klasztereinek átlagos méretének reciproka, egyre magasabb u_n küszöb mellett. Tehát, ha tudjuk, hogy az adataink független esetben milyen eloszlást követnek, akkor meg tudjuk azt is mondani, hogy gyengén összefüggő, de stacionárius esetben milyen. Ez fontos, hiszen a mi esetünkben sem függetlenek az egymás utáni napok adatai. Bár egyszerű technikával (csak az árvizek maximumát tekintve) elérhetjük, hogy független mintánk legyen, viszont ekkor sokkal kevesebb adatunk marad. Az extrémális index segítségével az összes adatra vonatkozó becslést tudunk adni.

3.2. Előzetes adatfeldolgozás

Egy zónára 5114 napi vízmagasság állt rendelkezésünkre. Célunk az általánosított Pareto modell alkalmazása, ennek érdekében a felhasználás előtt pár adatszelekciós technikát meg kell fontolunk, hiszen adataink nem függetlenek. A viszonylag kevés időtáv miatt feltehető, hogy a vízszintek stacionárius eloszlást követnek, tehát időtől függetlenek, mivel éves szinten vizsgáltuk az árvizeket, ezért a szezonalitással nem foglalkoztunk. Coles [6]-ban azt tanácsolja, hogy a küszöb feletti értékeket rendezzük csoportokba úgy, hogy egy klaszterbe kerüljenek az elemek addig, amíg a következő elem a küszöb alá nem megy. Majd ezen csoportok maximumait használjuk fel a modellhez. Ezen klaszterek minimális távolságára is tanácsol egy r értéket, melyet se túl nagyra, se túl kicsire nem ajánlott választani, hiszen túl nagy lesz a variancia, nem mellesleg értékes adatokat veszíthetünk, illetve az egymást követő klaszterek függetlensége nem teljesül. Általános szabály nincsen, r és u kalibrálása zónánként eltér, de próbáltuk tartani $1 \leq r \leq 5$ és $Var(75\%) \leq u$ választást. Természetesen a modell teljesülésének feltétele, hogy $u \rightarrow x_0$, és a 75%-os kvantilis nem minden esetben mondható elégségesnek, viszont a rendelkezésre álló minta is kevés, általában 50-100 éves adatokból szoktak dolgozni, ezért kénytelenek voltunk az előbb említett kompromisszumot meghozni. A modellezés legfontosabb szempontja a visszatérési értékek (z_m) becslése, mivel a küszöböt meghaladó értékeket csoportokba soroltuk, valósabb

képet kapunk, ha a konkrét értékek helyett az u feletti klasztereket vizsgáljuk, azaz:

$$G_{\xi, \mu=u, \sigma}(z_m) = 1 - \left(1 + \xi \frac{z_m - u}{\sigma}\right)^{-1/\xi} \Rightarrow z_m = u + \sigma \frac{p^{-\xi} - 1}{\xi} \quad (\xi \neq 0),$$

ahol $p = 1 - G_{\xi, 0, \sigma}(u) = 1/m$. Ekkor z_m az m megfigyeléshez (árvízhez) tartozó visszatérési szint. Tehát ennek egy kiegészített változatát célszerű vizsgálni:

$$z_m = u + \sigma \frac{(m \zeta_u \theta)^\xi - 1}{\xi}.$$

Ahol ζ_u a küszöbátlépés valószínűsége, θ az extrémális index, a mintából az alábbi módon becsülhetők:

$$\hat{\zeta}_u = \frac{n_u}{n}; \quad \hat{\theta} = \frac{n_c}{n_u},$$

ahol n a minta, n_u a küszöb feletti értékek, n_c pedig a klaszterek száma.

3.3. Árvíz adatok elemzése

9 zóna árvíz kockázatát becsüljük az GPD eloszlás segítségével. Az adatok a www.hydroinfo.hu/html/archivum/archiv_tabla.html oldalról származnak, 2002-2015-ig lévő időtartamot ölelik fel. Magyarországon főként a Duna és a Tisza folyók és azok mellékágai jöhetnek szóba, mint az árvizek okozói és a választott 9 zóna is ezek valamelyikének van kitéve. Mivel a honlapon nincs Győr városról információ, ezért a Dunához közelebb fekvő Gönyű település adataival prudens módon becsültük annak kockázatát. Tolna megyét Pakssal modelleztük, ugyanis itt található Magyarország egyetlen atomerőműve, ezért kockázatát tekintve jelentős kitévőséggel bír. Csongrád megyét Szeged és Csongrád települések adataival becsültük, a Szolvencia 2 irányelvben ennek a megyének igen nagy árvíz kockázati szorzója van. A modellezésben használt összes települést a 3.1 táblázat tartalmazza.

Minden zónához 3 árvíz kockázati fokozat tartozik, melyek fontossági és veszélyességi sorrendben következnek. Az I. fokozat elérése azt jelenti, hogy az adott folyószelvény-nél a víz előnti az árteret, ez nem szokott komoly károkat okozni, ilyen esemény, amikor Budapesten lezárják a rakpartot, mert víz alatt van. A II. fokozat körülbelül 100-120 cm-rel az I. szint felett kezdődik, ennél a szintnél kezdődik a védekezés, majd a III. fokozatot – további 200-250 cm – elérő víz már fokozott védekezést igényel és

Zóna	Folyó	Becsléshez használt város
Budapest város	Duna	Budapest
Győr város	(Rába)	Gönyű (Duna)
Komárom-Esztergom megye	Duna	Komárom
Tolna megye	Duna	Paks
Pest megye	Duna	Nagymaros
Bács-Kiskun megye	Duna	Baja
Jász-Nagykun-Szolnok megye	Tisza	Szolnok
Csongrád megye	Tisza	Csongrád
Csongrád megye	Tisza	Szeged
Szabolcs-Szatmár-Bereg megye	Tisza	Vásárosnamény

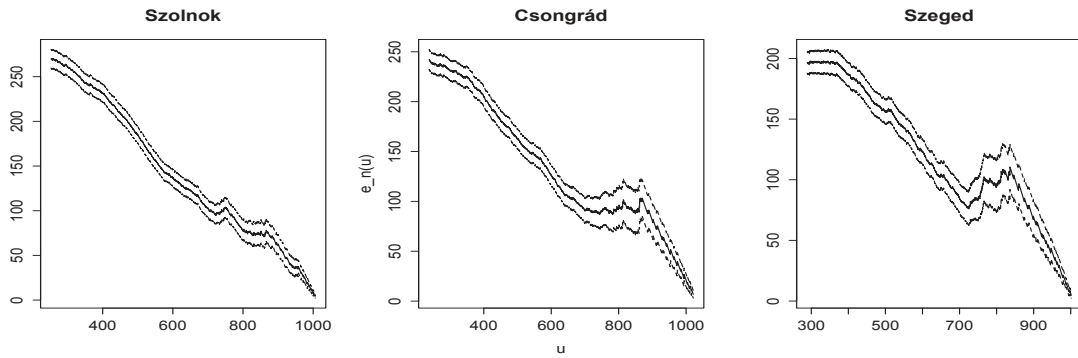
3.1. táblázat. Modellezett zónák

a nagy károk e felett keletkeznek. Az árvíz bekövetkezésének szintjét, a jogszabályban (74/2014. (XII. 23.) BM rendelet) meghatározott mértékadó árvízszint (legnagyobb mért vízszint) meghaladásához kötöttük, melyek nagyjából a megfelelő vízszint 100 éves visszatérési szintjének felelnek meg. A használt módszert a következő 4 zónán mutatjuk be: *Csongrád megye, Jász-Nagykun-Szolnok megye, Győr és Budapest*.

Csongrád-és Jász-Nagykun-Szolnok megye

Csongrád megye árvíz nagyságát Csongrád és Szeged városokkal modelleztük, Jász-Nagykun-Szolnok megyét pedig Szolnokkal. Első lépésként a megfelelő küszöbértékeket kerestük meg, a már említett $e_n(u)$ függvény segítségével. A 3.1 ábra ezen függvényeket mutatja.

A szakirodalom szerint ([6]-[8]) a közel lineáris grafikon esetén indokolt az általánosított Pareto-eloszlás használata. Szolnok és Csongrád ábráján látható, hogy az $e_n(u)$ függvény 820 cm-től nagyjából lineáris, ezért első próbálkozásra jónak tűnik az $u = 820$ -as érték, viszont ekkor túl kicsi lesz a minta. Néhány próbálkozás után Szolnokhoz 405 cm-es, Csongrádhoz pedig a 400 cm-es küszöböt választottuk. Előbbi város u feletti értékeit 41 csoportba tudtuk sorolni, $r = 5$ mellett, ez viszonylag jónak



3.1. ábra. Átlagos küszöbátlépés függvények

Forrás: R <evd> csomag

mondható. Csongrádra azonos r mellett már csak 30 klaszter adódott, még éppen elegendő a minta a modellhez. Szeged esetében is hasonló a helyzet, itt a 300 cm-es szintmeghaladás mellett döntöttünk, és $r = 3$ mellett 57 osztály keletkezett, mindent beleértve ez a modell is jónak ígérkezik. Az eredeti minták helyett az u -val csökkentett mintákkal dolgoztunk, ugyanis ebben az esetben $\mu_i = 0$ adódik, ami megkönnyíti a feladatot. Az *evd* R programcsomag *fpot* függvényének segítségével maximum likelihood becsléssel kiszámítottuk az eloszlás paramétereit. Az így kapott paramétereket felhasználva Anderson-Darling illeszkedéstesztet végeztünk. Jelen esetben az A-D próbastatisztika nem eloszlásmentes, ezért bootstrap szimulációval becsültük meg a 95%-hoz tartozó kritikus értékeket. Pontosabban az

$$A^2 = -N - \sum_{i=1}^N \frac{2i-1}{N} (\log F(X_i) + \log(1 - F(X_{N+1-i}))),$$

ahol N a minta elemszáma, F pedig a vizsgált eloszlás eloszlásfüggvénye, és $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_N$ a minta elemei. A kritikus értékeket 1000 db 50 elemszámú, a megfelelő eloszlásból vett véletlen rendezett mintából becsültük. Az ML becslés által szolgáltatott adatok és az illeszkedés-vizsgálat eredményeit a 3.1 táblázatban foglaltuk össze.

Az illeszkedést mindhárom esetben elfogadjuk 5%-os szignifikancia szinten. Mivel $\xi_1, \xi_2, \xi_3 < 0$, ezért a 3.4 tétel következtében a minta eloszlása $MDA(H_\xi)$ -beli, vagyis Weibull-típusú. Árvizek esetében a negatív (vagy kicsi pozitív) alakparaméter egyáltalán nem meglepő, hiszen ez pontosan azt jelenti, hogy a nagyon nagy szinteket ritkán éri el a víz. Az adatokra illesztett feltételes sűrűségfüggvények és azok GPD

Város	Paraméterek	A-D teszt	p-érték
Szolnok	$\xi_1 = -0,2904$ $\sigma_1 = 240,0936$	0,2228	>0,95
Csongrád	$\xi_2 = -0,1419$ $\sigma_2 = 130,8601$	0,4222	>0,80
Szeged	$\xi_3 = -0,2173$ $\sigma_3 = 218,0834$	0,4458	>0,80

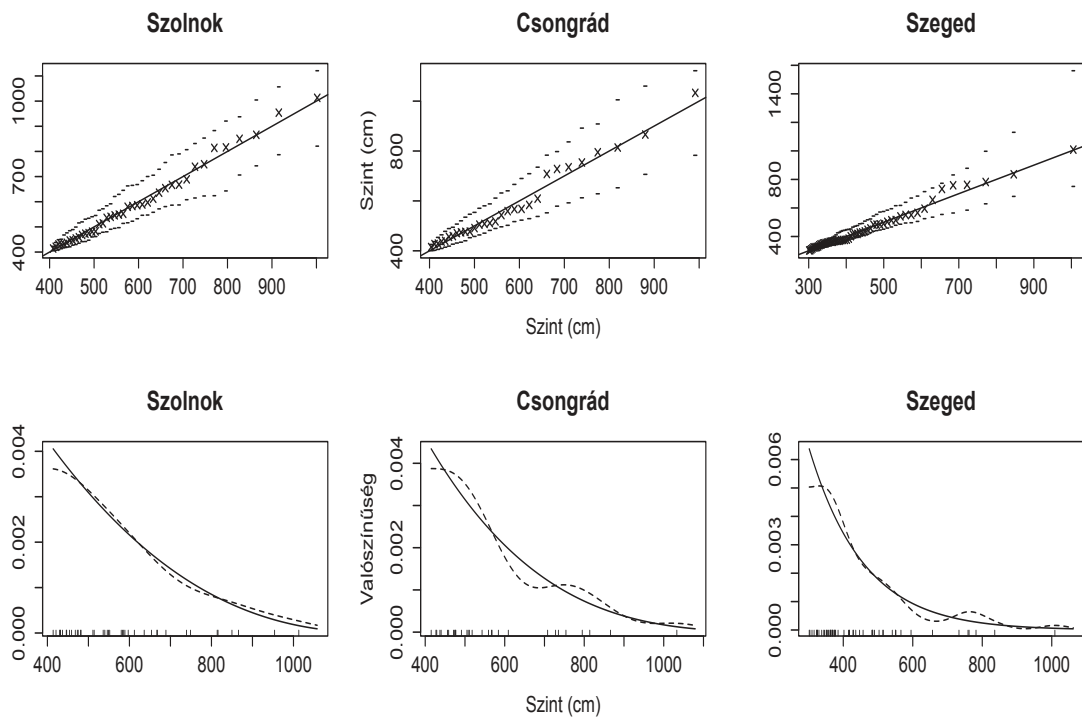
3.2. táblázat. GPD illeszkedés vizsgálat

Forrás: saját számítás

becslései vizuálisan is elfogadhatóak, nagy értékek esetén a tapasztalati és elméleti értékek nagyon közel vannak egymáshoz. Szeged Q-Q ábráján (3.2 ábra) látható, hogy a 900 cm feletti érték 90%-os konfidencia intervalluma sokkal szélesebb, mint a kisebb értékeké, ez a kevés adatból fakadó bizonytalanságot tükrözi. Ez nem meglepő, hiszen minél magasabb az érték, annál kevesebb az információ, így tehát nagyobb a bizonytalanság. A megbízhatóság számszerűsítésére az alak-, skálaparaméterekre, valamint a visszatérési értékekre konfidencia intervallumot adtunk meg. A tapasztalati és várt Fisher-információs megközelítés helyett, [6] nyomán profil likelihood alapú megbízhatósági tartomány becslést alkalmaztunk, ami a következőt jelenti: adott egy eloszlás $\theta = (\xi, \sigma)$ paramétere, melynek jelen esetben az első koordinátájára szeretnénk intervallumot adni. A mintából kiszámolt log-likelihood függvény legyen $\mathcal{L}_\theta = \log(f_\theta(X_i))$ ($i = 1, \dots, m$), ekkor a profil log-likelihood függvény $\mathcal{L}_P(\theta_i) = \max_{\theta_{-i}} \{\mathcal{L}_\theta\} = \max_{\theta_{-i}} \{\mathcal{L}_{\theta_i, \theta_{-i}}\}$, ahol θ_{-i} a becsülni kívánt k dimenziós (paraméter)vektor kihagyásával kapott $n - k$ dimenziós vektor, most $n = 2$, $k = 1$. Legyen $\tilde{\theta} = \operatorname{argmax}\{\mathcal{L}_\theta\}$, ekkor X_1, X_2, \dots, X_m független, azonos eloszlású változókból származó minta, és $m \rightarrow \infty$ esetén igaz a következő összefüggés:

$$2 \cdot (\mathcal{L}_{\tilde{\theta}} - \mathcal{L}_P(\theta_i)) \stackrel{d}{=} \chi_k^2. \quad (3.1)$$

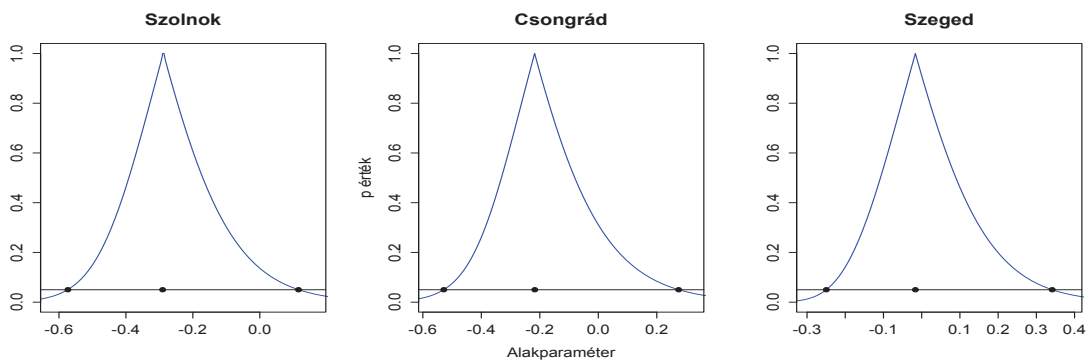
Felosztottuk a $[\xi - 5, \xi + 5]$ intervallumot 2000 egyenlő részre és ezeken az értékeken a *Bhat* csomag *dfp* függvényének segítségével σ szerint numerikusan maximalizáltuk a likelihood függvényt, majd 3.1 szerint meghatároztuk a $C_\alpha = \{\theta_i : 2 \cdot (\mathcal{L}_{\tilde{\theta}} - \mathcal{L}_P(\theta_i)) \leq c_\alpha\}$



3.2. ábra. Q-Q ábrák és eloszlások konfidencia intervallumai

Forrás: R <evd> csomag

halmazt, ahol c_α a χ_1^2 eloszás $1 - \alpha$ szintű kvantilise, $\alpha = 5\%$ értékkel dolgoztunk. Vagyis 90%-os konfidencia intervallumot számítottunk, ezt az indokolta, hogy több adat bevonásához u -t csökkentenünk kellene, ami a modell teljesülését sértené. A 3.3 ábrán



3.3. ábra. 90%-os konfidencia intervallumok

Forrás: saját számítás

láthatjuk a már említett bizonytalanságot az alakparaméter becslésében. Általában a p értékek helyett a maximum-likelihood függvényt szokás ábrázolni, viszont akkor nem érzékelhető olyan jól a paraméterek szignifikanciája. A skálaparaméterre hasonlóan kapjuk az intervallumokat. Ahhoz, hogy a visszatérési értékekre is konfidencia inter-

Város	Becslés	$c_{0,05}$	Becsült érték	$c_{0,95}$
Szolnok	ξ	-0,5734	-0,2904	0,1156
$u = 405cm$	σ	151,8936	240,0936	364,7436
Csongrád	ξ	-0,5283	-0,2173	0,2747
$u = 400cm$	σ	127,9834	218,0834	355,7834
Szeged	ξ	-0,2495	-0,0165	0,3415
$u = 300cm$	σ	103,8829	154,7829	225,5829

3.3. táblázat. Becsült paraméterek 90%-os konfidencia intervallumai

Forrás: saját számítás

vallumot tudjunk adni, a profil likelihood függvényt át kell paraméterezni.

$$z_m = u + \sigma \frac{(m\xi_u\theta)^\xi - 1}{\xi} \Rightarrow \sigma = \xi \frac{z_m - u}{(m\xi_u\theta)^\xi - 1},$$

így elértük, hogy az eloszlás már $(\xi, 0, \sigma)$ helyett $(\xi, 0, z_m)$ paraméterektől függ, ezáltal már ki tudjuk számítani a konfidencia intervallumot z_m -re is. A modellre minden esetben véges variancia adódott, hiszen $\xi < 0,5$. A megbízhatóságon több adat bevonásával lehetne segíteni, ugyanakkor ez csak alacsonyabb u esetén lehetséges, ami növeli a torzítást. A legjobb megoldás, ha vissza megyünk az időben és hosszabb tartamot lefedő adatokból dolgozunk. A 3.3 táblázat alapján láthatjuk, hogy Szolnok és Csongrád esetében z_{100} közel van az árvízküszöbhez, ami azt jelenti, hogy megfelelő az óvintézkedés szintje. Egyedül Szegednél tapasztalható alulbecsült árvízküszöb. Vagyis az eddigiek alapján Szegedet árvíz tekintetében kockázatosabbnak mondhatjuk a többi kettővel szemben.

Város	Árvízküszöb	Becslés	$c_{0,05}$	Becsült érték	$c_{0,95}$
Szolnok	1041	z_{20}	767,7	978,2	1275,2
		z_{100}	827,3	1072,8	1418,8
		z_{200}	845,8	1101,8	1462,8
Csongrád	1037	z_{20}	729,0	960,0	1313,0
		z_{100}	805,5	1091,0	1527,0
		z_{200}	831,2	1134,7	1598,7
Szeged	1009	z_{20}	740,7	956,7	1256,7
		z_{100}	894,3	1185,3	1590,3
		z_{200}	959,0	1282,0	1731,0

3.4. táblázat. Éves megfigyelések visszatérési szintjei centiméterben

Forrás: saját számítás

Győr és Budapest

Győrt, mint zónát a már említett Gönyű város adataival modelleztük. Az $e_n(u)$ függvény ábrája nagyjából 450 cm-től lineáris, vagyis jó küszöbszám jelölt lenne, viszont ebben az esetben nincs meg a szükséges minta elemszáma, ezért az $u = 400$ érték mellett döntöttünk. 38 küszöb feletti klaszter adódott $r = 5$ mellett. Ezen küszöbmeghaladás mellett, a mintára $\xi = -0,0637$, $\sigma = 130,2388$ paraméterekkel illesztünk GPD-eloszlást. Az Anderson-Darling illeszkedésvizsgálat p-értékére 0,75 körüli érték adódott, tehát elfogadjuk a nullhipotézist, vagyis a GPD-modell létjogosultságát nem tudjuk elvetni.

Budapest átlagos küszöbátlépés függvénye körülbelül az $u = 550$ -es érték után lineáris, hogy kellő adattal tudjunk dolgozni, a 410-es küszöb mellett döntöttünk. Összesen 62 klaszter adódott $r = 5$ -re. A illesztett GPD eloszlás paramétereire $\xi = 0,0228$, $\sigma = 112,9876$ adódott. Az illeszkedést a 0,9 feletti p-érték miatt szintén elfogadjuk. A két város paramétereinek konfidencia intervallumait a 3.5 táblázatban foglaltuk össze. Látható, hogy a 100 évnyi megfigyelések visszatérési értékei „jóval” az árvízküszöb felett helyezkednek el, ezt tükrözi az alakparaméterek konfidencia intervallumai is, hiszen azok is igen szélesek. Összességében elmondhatjuk, hogy Szolnok és Csongrád megye zónákra megbízhatóbb a modell által kapott becslés, ellenben Budapest és „Győr”

Város	Árvízküszöb	Becslés	$c_{0,05}$	Becsült érték	$c_{0,95}$
Gönyű	857	z_{100}	744,3	1000,8	1452,8
		ξ	-0,4597	-0,0637	0,4793
		σ	74,6188	130,2388	228,3388
Budapest	939	z_{100}	899,1	1148,6	1489,6
		ξ	-0,2352	0,0228	0,3990
		σ	74,7676	112,9876	165,1876

3.5. táblázat. Gönyű és Budapest modellbeli megbízhatósága

Forrás: saját számítás

zónákra fenntartással kell kezelnünk az illesztett eloszlásokat.

3.7.1. Megjegyzés. Az előzőekben tárgyalt z_m m megfigyelés visszatérési szintből az éves árvíz-szám figyelembevétel értelmezhető az éves visszatérési szint. Például, ha évente 2-szer következik be árvíz, akkor a 200 éves visszatérési szint $z_{200 \cdot 2 \cdot 365}$ -nek felel meg. Ez főként az árvíz kockázat szimulációjánál fontos.

A modell

A többi zónára is elfogadhatóak voltak az illeszkedések. Tehát mind a 9 zónára kapunk árvíz nagyság-eloszlást, vagyis, ha tudjuk, hogy bekövetkezett az árvíz, akkor meg tudjuk mondani, hogy milyen eloszlású lesz a víz magassága. Az árvizek gyakoriságának modellezéséhez azzal az általános feltevessel éltünk, hogy az árvíz homogén Poisson-folyamatot követ.

3.8. Definíció. Ha $\{N(t), t \geq 0\}$ -re igaz, hogy:

- $N(0) = 0$,
- független növekményű,
- stacionárius növekményű,
- egy időben legfeljebb 1 esemény következik be,

akkor $N(t)$ egy homogén Poisson-folyamat λ intenzitás mértékkel, azaz

$$P(N(t + \tau) - N(t) = k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} \quad (k \in \mathbb{N}, t, \tau > 0),$$

$$\mathbb{E}(N(t)) = \lambda t.$$

A maximum-likelihood becslésből $\lambda = \frac{n_c}{n}$ elégséges statisztika adódik, vagyis a küszöb-átlépés relatív gyakorisága ([6]), ezt később fogjuk felhasználni. Kockázatot szeretnénk mérni, ezért szükségünk van árvíz okozta károk ismeretére. Mivel egyetlen biztosító adatai sem álltak rendelkezésünkre, ezért egy kárfüggvény segítségével modelleztük az árvízkárokat. Egy 2016 januárjában megjelent tanulmányban ([11]) az ausztráliai Queenslandben történt 2013-as árvíz idején az épületekben bekövetkezett károkat egy matematikailag roppant egyszerű képlettel írják le a vízmagasság függvényében. A formula a következő:

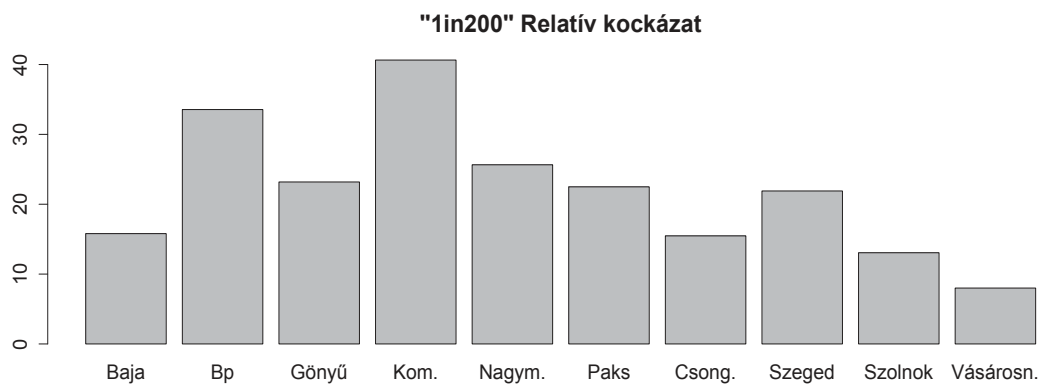
$$d_h = \left(\frac{h}{H}\right)^r \cdot D_{max},$$

ahol:

- d_h : az épületben bekövetkezett kár %-ban megadott értéke a vízmagasság függvényében,
- h : vízmagasság,
- H : az épület magassága,
- D_{max} : a maximális károsodás %-os mértéke ($\leq 100\%$),
- r : növekedési ütem.

[11]-ben foglaltak szerint a téглаépületek maximális megrongálódása körülbelül 60-80%, és $r \in [1, 1.2]$. Magyar káradatok hiánya miatt feltételezzük, hogy egy átlagos téглаépület esetén $D_{max} = 100\%$ és $r = 1.5$. Tegyük fel, hogy egy biztosító állománynak S_i az i . zónában lévő lakásainak a teljes biztosítási összege. Minden lakást 5 m magasságúnak feltételezzük, 5000 évet szimulálunk az illesztett GPD eloszlások és a Poisson-folyamat felhasználása által. A Poisson-folyamatnak megfelelően Poisson-eloszlású véletlen küszöbátlépéseket generáltunk, amely lényege az, hogy két esemény bekövetkezése között eltelt idő exponenciális-eloszlású, ezáltal független, $Exp(\lambda)$ eloszlású időközöket szimuláltunk addig míg el nem értük a $[0; 1]$ intervallum jobb végét,

továbbá számon tartottuk a bekövetkezett események számát ([13]). Ha bekövetkezett egy esemény (küszöbátlépés), akkor ott szimuláltunk egy véletlen, általánosított Pareto-eloszlású vízszintet, természetesen a megfelelő zónára, majd megmértük a kárfüggvény segítségével a roncsolódás arányát S_i -re mérten. A bekövetkezett veszteségeket 10, egyenlő, balról nyitott, jobbról zárt intervallumra osztottuk (0,0-10%,10-20%,...,80%<), majd kerestük a 200 évenkénti kárnagyságot. Volt eset amikor pontosan 200 éves bekövetkezés nem történt, viszont hozzá közeli (201 év) volt. Ekkor lineárisan becsültük a $Var(99,5\%)$ -ot. Az így végrehajtott szimulációval relatív árvíz kockázatot becsültünk, melynek eredményei a következők lettek:



3.4. ábra. Károk $Var(99,5\%)$ -jai a biztosítási összeg %-ban

Forrás: saját számítás

A 3.4 ábra azt mutatja, hogy a már említett zónákban az árvizek mekkora mértékű rongálást okoznak 200 évente. Csongrád és Győr zónák nem, hogy kiugróak, de még csak nem is tartoznak a legkockázatosabb zónák közé. Ebből kifolyólag van okunk megkérdőjelezni a rendelet szerinti szorzók hitelességét. Látható, hogy a legmagasabb károsodást Komáromnál becsültük körülbelül 40%-kal, míg a legkisebbet Vásárosnaménynél tapasztaltuk, ott a kár nagyjából 8%-os. Azaz mondhatjuk, hogy 5-ször kockázatosabb az utóbbi az előzőhöz képest. A becslésekből legfontosabb tanulság az egymáshoz viszonyított kockázatok aránya, hiszen a Szolovencia 2 rendelet szerint Csongrád (19,9) és Pest (0,2) zónák között 99,5-szeres ez az arány. Saját számításaink szerint az árvíz kockázatok között nincs ekkora különbség, ami természetesen nem

azt jelenti, hogy a valóságban nincs különbség, csak azt, hogy nem ekkora mértékben van jelen. Hidrológus körökben ismert tény, hogy ha magas árvízveszély áll fenn, akkor a szükséges zsilipek szabályozásával elérhető, hogy a víz az árteret árassza el, így csökkentve az árvíz kockázatot. Nem állíthatjuk, hogy modellünk tökéletes, hiszen a vagyoni károk feltételezésen alapulnak, valamint a rendelkezésre álló adatok mennyisége is lehetne több. A kidolgozott modell alapján azt tapasztaltuk, hogy a visszatérési szinteket prudens módon becsültük, tehát a tényleges kockázatot rendre túlértékeltük. Azt viszont beláthatjuk, hogy a biztosítók szemszögéből a rendeletben szereplő súlyok rendkívül aggályosak és szükséges lenne a felülvizsgálatuk.

4. fejezet

Összefoglalás

Dolgozatom témája a magyarországi árvíz-kockázat. Konkrétabban ennek a Szolvencia 2 szerinti szavatoló tőkeszükségletének kiszámításához meghatározott biztosítási kockázati súlyok jellemzése és modellezése. A könnyebb tájékozódás érdekében szót ejtettem a biztosító (S2-es) mérlegének idetartozó elemeiről. Vagyis az árvíz-kockázat tőke szükségletének megértéséhez és kiszámításához szükséges fogalmakat vezettem be. Ilyenek a biztosítástechnikai tartalékok, nem összetévesztendő a biztosító eredmény-kimutatásához és szavatoló tőkeszükséglet számításához használt biztosítástechnikai tartalék. A mérlegben szereplő eszközök piaci értékéből levont S2-es biztosítástechnikai tartalék adja a szavatoló tőkeszükségletet, ami a szavatoló tőke 99,5%-os kockázatos értéke. A tőkeigény kapcsán ismertettem a nem-élet ág katasztrófa-kockázatát, különös hangsúlyt fektetve a természeti-katasztrófákra, azon belül is az árvízre. Tárgyaltam a kockázati súlyok megállapításához létrejött katasztrófa munkacsoport munkáját, a $W_{fl,r,i}$ súlyokkal való problémát, és eljutottam a velük kapcsolatos problémára. Vagyis az arányosság kérdéséhez. Mi indokolja Csongrád és Győr zónák kiugróan nagy árvíz-kockázati súlyait? Mint azt a katasztrófa munkacsoport is kiemeli, a gyakori árvíz veszélyeztette területeken maga a kockázat általában kisebb a megelőzésnek (vízszabályozás, gátak) köszönhetően. Kiválasztottam 9 zónát és ezek adataival saját elemzést készítettem árvíz-kockázatukat tekintve. Küszöb feletti értékek módszerét alkalmazva általánosított Pareto-eloszlást illesztettem az adatokra és vizsgáltam a visszatérési szinteket stacionaritást feltételezve. Poisson-folyamatot feltételezve szimuláltam 5000 évnyi árvizet, és egy kárfüggvény segítségével megállapítottam a 200

évente bekövetkező kárnagyságokat. Kiderült, hogy Csongrád és Győr zónákhoz tartozó nagy szorzók használata nem feltétlenül jogos. Összességében elmondhatom, hogy a Szolvencia 2 rendelet szerinti súlyok részletesebb közzétételére lenne szükség mind a felügyelet, mind a biztosítók számára.

Irodalomjegyzék

- [1] Official Journal of the European Union, L2 REGULATIONS *Commission Delegated Regulation (EU) 2015/35 of 10 October 2014 supplementing Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II)*
- [2] Catastrophe task force report on standardised scenarios for the catastrophe risk module in the standard formula, CEIOPS-DOC-79/10, 2010.
- [3] The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation, EIOPA-14-322, 2014.
- [4] Hanák Gábor Szolvencia előadásai, 2016
- [5] Clemens Frey: *12th Fall school of the Hungarian Actuarial Society*, 2015
- [6] Stuart Coles: *An introduction to statistical modeling of extreme values*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2001.
- [7] Alexander J. McNeil: *Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory*, 1997.
- [8] Alexander J. McNeil, Thomas Saladin: *The Peaks over Thresholds Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions*, 1997.
- [9] Jin S. Choi: *Estimation of the Tail Behavior of Mutual Fund Returns: An EVT-based Approach* (szakdolgozat), 2011.
- [10] www.hydroinfo.hu/Html/archivum/archiv_tabla.html

- [11] R. Hasanzadeh Nafari, T. Ngo, and W. Lehman: *Calibration and validation of $FLFA_{rs}$ – a new flood loss function for Australian residential structures*, Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2016
- [12] Par B. Gnedenko: *Sur la distribution limite di terme maximum d'une série aléatoire*, Annals of Mathematics Vol. 44, 1943
- [13] Donald E. Knuth: *The art of computer programming, volume 2 (3rd ed.): seminumerical algorithms*, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA, USA 1997

A. függelék

Táblázatok és R kódok

Táblázatok

A.1. táblázat. Árvízcockázati zónák

Sorszám	1	2	3	4	5	6
Zóna	Budapest (város)	Győr- Moson- Sopron	Győr (vá- ros)	Vas	Zala	Veszprém
Sorszám	7	8	9	10	11	12
Zóna	Somogy	Komárom- Esztergom	Fejér	Tolna	Baranya	Pécs (vá- ros)
Sorszám	13	14	15	16	17	18
Zóna	Nógrád	Pest	Bács- Kiskun	Borsod- Abaúj- Zemplén	Miskolc (város)	Heves
Sorszám	19	20	21	22	23	24
Zóna	Jász- Nagykun- Szolnok	Csongrád	Szabolcs- Szatmár- Bereg	Hajdú- Bihar	Debrecen (város)	Békés

A.2. táblázat. Árvíz kockázati súlyok

Zóna sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Súly	0,6	0,9	13,7	0,6	0,0	0,0	0,2	0,2	0,0	0,3	0,1	0,0
Zóna sorszáma	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Súly	0,0	0,2	0,3	0,7	0,0	0,1	2,4	19,9	0,7	0,3	0,0	0,4

A.3. táblázat. Magyarország árvíz kockázati zónáihoz tartozó korrelációs-mátrix

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
1	1	0,5	0	0,25	0,25	0,25	0,25	1	1	0,75	0,75	0,5	0	1	1	0,25	0,25	0	0	0	0,25	0,25	0	0,25	
2	0,5	1	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25	0,5	0,75	0,5	0,5	0,25	1	0,5	0,5	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0	0
3	0	0,5	1	1	0,25	0,75	0,25	0	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0,25	0,5	1	1	0,25	0,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0
5	0,25	0,25	0,25	0,25	1	0	0,75	0,25	0	0	0,5	0,25	0	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0
6	0,25	0,5	0,75	0,75	0	1	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0,25	0	0,75	0,5	0	0
7	0,25	0,25	0,25	0	0,75	0,5	1	0	0	0,25	0,75	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0
8	1	0,5	0	0	0,25	0,25	0	1	1	0,75	0,75	0,5	0,25	1	1	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0	0
9	1	0,75	0,25	0	0	0,25	0	1	1	0,5	0,5	0,25	0,25	1	1	0	0	0	0,25	0,25	0	0	0	0	0
10	0,75	0,5	0,25	0	0	0,5	0,25	0,75	0,5	1	0,5	0,25	0	0,75	0,75	0,5	0,75	0	0,25	0,25	0	0	0	0	0
11	0,75	0,5	0,25	0	0,5	0,5	0,75	0,75	0,5	0,5	1	0,75	0,25	0,75	0,75	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0	0	0
12	0,5	0,25	0	0	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,75	1	0	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	1	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0	0,25	0	1	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0	0	0
14	1	0,5	0	0	0,25	0,25	0	1	1	0,75	0,75	0,5	0	1	1	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0	0
15	1	0,5	0	0	0,25	0,25	0	1	1	0,75	0,75	0,5	0	1	1	0	0	0	0,25	0,25	0	0	0	0	0
16	0,25	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	1	0,5	0,75	1	0,25	0,5	0	0	0	0
17	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0,75	0	0	0	0	0	0,5	1	0	0,25	0,25	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0	0	0,75	0	1	1	0,25	0,5	0,25	0	0	0
19	0	0,25	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0,25	0,25	1	0,25	1	1	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25
20	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0,25	0,25	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1	0,5	0,5	0,25	0,25
21	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0	0,5	0	0,5	0,5	0,5	1	0,5	0,25	0,5	0,5
22	0,25	0	0	0	0	0,75	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0	0	0,25	0,5	0,5	0,5	1	0,75	0,5	0,5
23	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0,75	1	0,25	0,25
24	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	1	0,25

A.4. táblázat. Árvízcockázati fokozatok (centiméterben)

Város	I. fokozat	II. fokozat	III. fokozat	Árvízküszöb
Baja	700	800	900	1037
Budapest	620	700	800	939
Csongrád	650	750	800	1037
Gönyű	500	600	650	857
Komárom	500	620	680	845
Nagymaros	520	620	670	763
Paks	650	800	900	1006
Szeged	650	750	850	1009
Szolnok	650	750	800	1041
Vásárosnamény	600	750	800	943

A.5. táblázat. GPD-modellek paraméterei

Város	ξ	$\mu = u$	σ
Baja	-0,1924	600	146,0498
Budapest	0,0228	410	112,9876
Csongrád	-0,2173	400	218,0834
Gönyű	-0,0637	400	130,2388
Komárom	0,0831	350	98,8616
Nagymaros	-0,1123	350	131,4434
Paks	0,0099	410	125,9
Szeged	-0,0165	300	154,7829
Szolnok	-0,2904	405	240,0936
Vásárosnamény	-0,3034	585	123,884

R kódok

Anderson-Darling illeszkedésvizsgálat

```
x=szolnok.gpd #zóna
```

```

d=x$exceedances
loc=x$threshold
sc=x$estimate[1] #skálaparaméter
sh=x$estimate[2] #alakparaméter
Y=x$exceedances
Ys=0
Yb=0
csere=0
N=length(Y)
D=rep(0,50)
DN=length(D)
cr=rep(0,1000)
#Kritikus érték becslése
for (k in (1:length(cr))) {
  for (l in (1:DN)) {
    D[l]=qgpd(p = runif(1,0,1),loc = loc,scale = sc,shape = sh)
  }
  repeat {
    for (i in (1:(DN-1))) {
      if (D[i] > D[i+1]) {
        Ys=D[i+1]
        D[i+1]=D[i]
        D[i]=Ys
        csere=csere+1
      }
    }
    if(csere==0){
      break
    }
    csere=0
  }
  for (j in (1:DN)) {

```

```

    cr[k]=cr[k]+(2*j-1)/DN*(log(pgpd(q = D[j],loc = loc, shape = sh, scale = sc))+
        log(1-pgpd(q = D[DN+1-j],loc = loc, shape = sh, scale = sc)))
}
cr[k]=-DN-cr[k]
}
repeat{
  for (i in (1:(N-1))){
    if (Y[i] > Y[i+1]){
      Ys=Y[i+1]
      Y[i+1]=Y[i]
      Y[i]=Ys
      csere=csere+1
    }
  }
  if(csere==0){
    break
  }
  csere=0
}
S=0
for (i in (1:N)){
  S=S+(2*i-1)/N*(log(pgpd(q = Y[i],loc = loc, shape = sh, scale = sc))+
    log(1-pgpd(q = Y[N+1-i],loc = loc, shape = sh, scale = sc)))
}

A2=-N-S
A2
#kritikus értékek
quantile(cr,probs = seq(0,1,0.05))

```

Profile likelihood estimation of the xi parameter value

```
library(evd)
```



```

library(Bhat)
x=szolnok.gpd
d=x$exceedances
loc=x$threshold
sc=x$estimate[1]
sh=x$estimate[2]
ciklus=(c(-1000:0))/1000
pr1=rep(0,times=length(ciklus))
params1=rep(0,times=length(ciklus))
chi=rep(0,times=length(ciklus))
prof11=rep(0,times=length(ciklus))
k=1
ll=-log(prod(dgpd(d,loc = loc,scale = sc,shape = sh)))
for (i in ciklus){
  lkh=function(z){
    return(-log(prod(dgpd(d,loc = loc,scale = z,shape = sh+i))))
  }
  r=optimize(f=lkh,interval = c(0,9999))
  chi[k]=2*(r$objective-ll)
  prof11[k]=-r$minimum
  params1[k]=sh+i
  pr1[k]=1-pchisq(chi[k],df=1) #p.value
  k=k+1
}
# konf int bal szélének megkeresése
k=0
min=9999
ind=0
for (i in pr1){
  if (i<min & i>0.05){
    ind=k+1
    min=i
  }
}

```

```

    }
    k=k+1
}
also=params1[ind]
#konf. int jobb széle
d=x$exceedances
loc=x$threshold
sc=x$estimate[1]
sh=x$estimate[2]
ciklus=(c(0:1000))/1000
pr2=rep(0,times=length(ciklus))
params2=rep(0,times=length(ciklus))
chi=rep(0,times=length(ciklus))
prof12=rep(0,times=length(ciklus))
k=1
for (i in ciklus){
  lkh=function(z){
    return(-log(prod(dgpd(d,loc = loc,scale = z,shape = sh+i))))
  }
  r=optimize(f=lkh,interval = c(0,9999))
  chi[k]=2*(r$objective-ll)
  prof12[k]=-r$minimum
  params2[k]=sh+i
  pr2[k]=1-pchisq(chi[k],df=1)
  k=k+1
}
#konfidencia intervallum jobb szélének megkeresése
k=0
ind=0
min=9999
for (i in pr2){
  if (i<min & i>0.05){

```

```

        ind=k+1
        min=i
    }
    k=k+1
}
felso=params2[ind]

```

Profile likelihood becslés a sigma paraméter értékére

```

library(evd)
library(Bhat)
x=gonyu.gpd
d=x$exceedances
loc=x$threshold
sc=x$estimate[1]
sh=x$estimate[2]
ciklus=(c(-1000:0))/1000*60
pr1=rep(0,times=length(ciklus))
params1=rep(0,times=length(ciklus))
chi=rep(0,times=length(ciklus))
profl1=rep(0,times=length(ciklus))
k=1
ll=-log(prod(dgpd(d,loc = loc,scale = sc,shape = sh)))
for (i in ciklus){
    lkh=function(z){
        return(-log(prod(dgpd(d,loc = loc,scale = sc+i,shape = z))))
    }
    r=optimize(f=lkh,interval = c(-9999,9999))
    chi[k]=2*(r$objective-ll)
    profl1[k]=-r$minimum
    params1[k]=sc+i
    pr1[k]=1-pchisq(chi[k],df=1)
    k=k+1
}

```

```

}
# konf int bal szélének megkeresése
k=0
min=9999
ind=0
for (i in pr1){
  if (i<min & i>0.05){
    ind=k+1
    min=i
  }
  k=k+1
}
also=params1[ind]
#konf. int jobb széle
d=x$exceedances
loc=x$threshold
sc=x$estimate[1]
sh=x$estimate[2]
ciklus=(c(0:1000))/1000*150
pr2=rep(0,times=length(ciklus))
params2=rep(0,times=length(ciklus))
chi=rep(0,times=length(ciklus))
prof12=rep(0,times=length(ciklus))
k=1
for (i in ciklus){
  lkh=function(z){
    return(-log(prod(dgpd(d,loc = loc,scale = sc+i,shape = z))))
  }
  r=optimize(f=lkh,interval = c(-9999,9999))
  chi[k]=2*(r$objective-11)
  prof12[k]=-r$minimum
  params2[k]=sc+i
}

```

```

    pr2[k]=1-pchisq(chi[k],df=1)
    k=k+1
}
#konfidencia intervallum jobb szélének megkeresése
k=0
ind=0
min=9999
for (i in pr2){
  if (i<min & i>0.05){
    ind=k+1
    min=i
  }
  k=k+1
}
felso=params2[ind]

```

Profile likelihood becslés a visszatérési szintekre

```

library(evd)
library(Bhat)
x=szolnok.gpd
d=x$exceedances
loc=x$threshold
sc=x$estimate[1]
sh=x$estimate[2]
ciklus=(c(-1000:0))/10*5
pr1=rep(0,times=length(ciklus))
params1=rep(0,times=length(ciklus))
chi=rep(0,times=length(ciklus))
k=1
m=100*365
p=1/m
zetau=x$pat

```

```

theta=x$extind
ll=-log(prod(dgpd(d,loc = loc,scale = sc,shape = sh)))
zp=loc+sc*((m*theta*zetau)^sh-1)/sh
for (i in ciklus){
  lkh=function(z){
    return(-log(prod(dgpd(d,loc = loc,scale = sh*(zp+i-loc)/
      ((m*theta*zetau)^sh-1),shape = z))))
  }
  r=optimize(f=lkh,interval = c(-9999,9999))
  chi[k]=2*(r$objective-ll)
  params1[k]=zp+i
  pr1[k]=1-pchisq(chi[k],df=1)
  k=k+1
}
# konf int bal szélének megkeresése
k=0
min=9999
ind=0
for (i in pr1){
  if (i<min & i>0.05){
    ind=k+1
    min=i
  }
  k=k+1
}
also=params1[ind]
#konf. int jobb széle
d=x$exceedances
loc=x$threshold
sc=x$estimate[1]
sh=x$estimate[2]
ciklus=(c(0:1000))/10*10

```

```

pr2=rep(0,times=length(ciklus))
params2=rep(0,times=length(ciklus))
chi=rep(0,times=length(ciklus))
prof12=rep(0,times=length(ciklus))
k=1
for (i in ciklus){
  lkh=function(z){
    return(-log(prod(dgpd(d,loc = loc,scale = sh*(zp+i-loc)/
      ((m*theta*zetau)^sh-1),shape = z))))
  }
  r=optimize(f=lkh,interval = c(-9999,9999))
  chi[k]=2*(r$objective-11)
  params2[k]=zp+i
  pr2[k]=1-pchisq(chi[k],df=1)
  k=k+1
}
#konfidencia intervallum jobb szélének megkeresése
k=0
ind=0
min=9999
for (i in pr2){
  if (i<min & i>0.05){
    ind=k+1
    min=i
  }
  k=k+1
}
felso=params2[ind]

```

Szimuláció

```

library(evd)
library(Bhat)

```

```

x=szolnok.gpd
fok=1041 #Ez az árvízküszöb
d=x$exceedances
loc=x$threshold
fok2=loc
sc=x$estimate[1]
sh=x$estimate[2]
zetau=x$pat
theta=x$extind
n=length(x$data)
gyak=x$nhigh/n
ido=365*5000
w=rep(0,ido)
v=rep(0,ido)
options(scipen = 50)
H=500
D_max=1
r=1.5
d_h=function(m){
  if (m>fok){
    s=D_max*((m-fok)/H)^r
  }else{
    s=0
  }
  return(s)
}
for (i in (1:ido)){
  kk=0
  tt=0
  repeat{
    kk=kk+1
    uu=runif(1,0,1)

```



```

    tt=tt+log(1/uu)/gyak
    if(tt>1){
        break
    }
}
w[i]=(loc+sc/sh*((1/runif(1,0,1)/gyak*zetau*theta)^sh-1))*(kk-1)
v[i]=d_h(w[i])
}
sz=rep(0,ido)
ar=0
qv=seq(0,0.9,0.1)
for (i in (1:ido)){
    if (v[i]==0){
        sz[i]=0
    } else {
        for (k in (2:length(qv))){
            if (v[i]<=qv[k] & v[i]>qv[k-1]){
                sz[i]=qv[k]*100
            }
        }
    }
}
db_sz=rep(0,length(qv))
for (i in (1:ido)){
    if (sz[i]==0){
        db_sz[1]=db_sz[1]+1
    } else {
        for (k in qv){
            if (sz[i]==k*100){
                db_sz[k*10+1]=db_sz[k*10+1]+1
            }
        }
    }
}

```

```

    }
}
db_sz
r_lev=ido/365/db_sz
k=0
for (elem in r_lev){
  if (elem<=200){
    a=elem
    k=k+1
  }
}
b=r_lev[k+1]
VaR=(200-a)/(b-a)*10+(k-1)*10

```

Ábrák

```

#Átlagos küszöbmeghaladások
layout(matrix(c(1,2,3), 1, 3, byrow = TRUE))
mrlplot(szolnok$Szint, main = "Szolnok",xlab = "",ylab = "",tlim =
c(quantile(szolnok$Szint,0.75),quantile(szolnok$Szint,0.999)))
mrlplot(csong$Szint,main = "Csongrád",xlab = "u",ylab = "e_n(u)",tlim =
c(quantile(csong$Szint,0.75),quantile(csong$Szint,0.999)))
mrlplot(szeged$Szint, main = "Szeged",xlab = "",ylab = "",tlim =
c(quantile(szeged$Szint,0.75),quantile(szeged$Szint,0.999)))
#Q-Q plot-ok
layout(matrix(c(1:6), 2, 3, byrow = TRUE))
plot(szolnok.gpd,2,main = "Szolnok",xlab="",ylab="")
plot(csong.gpd,2,main = "Csongrád",xlab="Szint (cm)",ylab="Szint (cm)")
plot(szeged.gpd,2,main = "Szeged",xlab="",ylab="")
#Feltételes sűrűségfüggvények becslése
#layout(matrix(c(1,2,3,4), 1, 3, byrow = TRUE))
plot(szolnok.gpd,3,main = "Szolnok",xlab="",ylab="")
plot(csong.gpd,3,main = "Csongrád",xlab="Szint (cm)",ylab="Valószínűség")

```

```

plot(szeged.gpd,3,main = "Szeged",xlab="",ylab="")
#Konfidencia intervallumok
layout(matrix(c(1,2,3), 1, 3, byrow = TRUE))
plot(ab0,ab00,main = "Szolnok",xlab = "",ylab="",xlim =
c(also1-0.05,felső1+0.05),ylim = c(0:1), type = "l",col="blue")
abline(h=0.05)
points(c(also1,szolnok.gpd$estimate[2],felso1),c(0.05,0.05,0.05),
pch=c(21,21,21),bg=c(1,1,1))
points(x = c(0,0,0,0.007,-0.007),y = c(0,0.005,-0.005,0,0),
type = "p",pch=15,col=0)
plot(ab3,ab4,main = "Csongrád",xlab = "Alakparaméter",ylab="p érték",xlim =
c(also2-0.05,felső2+0.05),ylim = c(0:1), type = "l",col="blue")
abline(h=0.05)
points(c(also2,csong.gpd$estimate[2],felso2),c(0.05,0.05,0.05),
pch=c(21,21,21),bg=c(1,1,1))
points(x = c(0,0,0,0.007,-0.007),y = c(0,0.005,-0.005,0,0),
type = "p",pch=15,col=0)
plot(ab5,ab6,main = "Szeged",xlab = "",ylab="",xlim =
c(also3-0.05,felső3+0.05),ylim =
c(0:1), type = "l",col="blue")
abline(h=0.05)
points(c(also3,szeged.gpd$estimate[2],felso3),c(0.05,0.05,0.05),
pch=c(21,21,21),bg=c(1,1,1))
points(x = c(0,0,0,0.007,-0.007),y = c(0,0.005,-0.005,0,0),type = "p",
pch=15,col=0)
#Károk VaR(99,5%)-jai zónákra
zonak=c(baja.var,budap.var,gonyu.var,komar.var,nagymar.var,paks.var,
csong.var,szeged.var,
szolnok.var,vasarosn.var)
nevek=c("Baja","Bp","Gönyű","Kom.","Nagym.,"Paks","Csong.,"Szeged",
"Szolnok","Vásárosn.")
barplot(zonak, names.arg=nevek, main = "'1in200' Relatív kockázat")

```

NYILATKOZAT

Név: Kis Mihály

ELTE Természettudományi Kar, szak: Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc

NEPTUN azonosító: UMW9AY

Szakedolgozat címe:
Katasztrófakockázat tőkeszükséglete

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2016.05.17.

a hallgató aláírása