



Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar



Budapesti Corvinus Egyetem  
Közgazdaságtudományi Kar

---

# Hálózatelméleti modellek a banki rendszerkockázatra

MSc Szakdolgozat

Mázsár Noémi

Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc  
Kvantitatív pénzügyek szakirány

Témavezető:

Dr. Csóka Péter  
Egyetemi docens

Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék

Budapest, 2015

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Csóka Péternek, hogy figyelemmel kísérte a szakdolgozatom készülését, és ötleteivel, tanácsaival segítette a munkámat. Külön köszönetet szeretnék mondani Backhausz Ágnesnek, hogy mindig időt szakított rám, és segített a felmerülő kérdések megválaszolásában, valamint a  $\text{\LaTeX}$  használatával kapcsolatos tanácsaiért. Köszönöm minden tanáromnak, akik az elmúlt évek során segítettek a szakmai fejlődésemet, és köszönettel tartozom családomnak, páromnak, szaktársaimnak a bátorításukért és támogatásukért.

Budapest, 2015. december 15.

*Mázsár Noémi*

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>1. A kockázatok különböző típusai, a rendszerkockázat jelentősége</b>	<b>6</b>
1.1. A kockázat fogalma, főbb jellemzői . . . . .	6
1.2. A banki kockázatok főbb típusai . . . . .	7
1.3. A rendszerkockázat definíciója és jelentősége . . . . .	9
1.4. A rendszerkockázat okai . . . . .	12
<b>2. Hálózatok típusai</b>	<b>15</b>
2.1. Erdős–Rényi véletlen gráf . . . . .	15
2.2. Skálafüggetlen véletlen gráf általános modellje . . . . .	17
2.3. Konfigurációs modell . . . . .	18
2.4. „Preferential attachment” modell . . . . .	18
2.4.1. Barabási–Albert modell . . . . .	21
2.4.2. Barabási–Albert fa . . . . .	21
<b>3. Modellek a banki rendszerkockázat terjedésére</b>	<b>23</b>
3.1. Kör alakú gráftól a teljes gráfig . . . . .	24
3.2. A rendszerkockázat terjedésének összehasonlítása az Erdős–Rényi típusú, illetve a Barabási–Albert gráfmodellen . . . . .	29
3.2.1. A csődök várható számának kritikus értéke . . . . .	32
3.2.2. A csődök számának alakulása a hálózati struktúra függvényében . . . . .	34
3.3. A rendszerkockázat terjedése egy kiterjesztett konfigurációs modellen . . . . .	37
3.3.1. Feltételek . . . . .	40
3.3.2. A fertőzés aszimptotikus nagysága . . . . .	42
3.3.3. A hálózat ellenállóképessége . . . . .	43
3.3.4. Numerikus eredmények véges hálózatokon . . . . .	46
3.3.5. Az aszimptotika relevanciája, valamint egy konkrét példa . . . . .	48

<b>4. A rendszerkockázatra vonatkozó szabályozások a Bazel III. szerint</b>	<b>53</b>
<b>5. Szimuláció</b>	<b>56</b>
5.1. A fertőzés terjedésének súlyozatlan gráfmodell esetén . . . . .	56
5.2. A fertőzés terjedésének alakulása súlyozott gráfmodell esetén . . . . .	61
<b>Összefoglalás</b>	<b>67</b>
<b>Függelék: programkód</b>	<b>68</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>75</b>

## Bevezetés

A rendszerkockázatnak illetve a hatásainak vizsgálatára napjainkban egyre nagyobb hangsúly kerül a pénzügyi szektorban. Régebben nem volt jellemző a rendszer egészének vizsgálata, a szabályozások nem vették figyelembe, hogy egy adott bank a pénzügyi hálózatban milyen szerepet tölt be, esetleges csődje milyen hatással lenne a hálózat egészére. Azonban a közelmúltbeli gazdasági események, többek közt a 2007 – 2008-as években kiteljesedő pénzügyi és gazdasági válság hatására egyre inkább előtérbe került a pénzügyi rendszer, mint egység vizsgálata. A rendszerkockázati események bekövetkezési valószínűsége ugyan viszonylag kicsi, de nem elhanyagolható: ugyanis egy súlyos rendszerkockázati esemény bekövetkezése nagy hatással lehet a teljes banki hálózatra, akár rövid időn belül a csőd szélére is sodorhatja a pénzügyi hálózatban lévő bankok egy pozitív hányadát. Így egyre nagyobb jelentőséget kap a bankok közti kapcsolatok hálózata, melyet a matematikai hálózatelmélet segítségével ismerhetünk meg mélyebben.

Az 1. fejezetben először egy rövid kitekintést nyújtunk, hogy mi is valójában a kockázat, illetve milyen típusai vannak. Rámutatunk arra is, hogy a kockázat különböző fajtái gyakran nem választhatóak el könnyen egymástól, valamint kihangúlyozzuk, hogy rengeteg más típusú kockázat is van a rendszerkockázaton kívül, melyet a bankoknak kezelniük kell. Definiáljuk pontosan De Bandt és Hartmann [24] írása alapján, hogy mit értünk rendszerkockázati esemény alatt, valamint, hogy milyen tényezők okozhatnak rendszerkockázatot.

A 2. részben néhány hálózatelméleti modellt ismertetünk, melyek ismerete elengedhetetlen a 3. fejezet értelmezéséhez, ahol a rendszerkockázati események terjedését, illetve a terjedés tulajdonságait vizsgáljuk különböző gráfmodelleken.

A 3.1. alfejezetben Daron Acemoglu és szerzőtársainak (2013.) [1] cikke alapján, a kör alakú gráf, a teljes gráf és a  $\delta$ -összefüggő gráf segítségével modellezzük a rendszerkockázat terjedését, és megállapítjuk, hogy az egyes hálózatok stabilitása nagy mértékben függ a kezdeti sokkhatás méretétől, valamint a rendszerben lévő likviditási feleslegtől is.

A 3.2. részben azt vizsgáljuk, hogy hogyan alakul a rendszerkockázati esemény hatásának elterjedése az Erdős–Rényi, illetve a Barabási–Albert gráfmodelleken különböző pénzügyi paraméterek mellett. Ebben a szakaszban főként Agam Gupta és szerzőtársai (2013.) [29] írását használjuk fel.

A 3.3. alfejezetben pedig egy kiterjesztett konfigurációs modellen vizsgáljuk a rendszerkockázat terjedési mechanizmusának összefüggőségét a hálózat szerkezetével. Az elemzéshez Hamed Amini, Rama Cont és Andreea Minca (2013.) [3] írását vesszük alapul. Az állítások először aszimptotikus formában kerülnek megfogalmazásra, azaz a hálózat méretének végtelenhez tartása mellett, majd szimuláció segítségével véges hálózaton is teszteljük az eddigi eredmények teljesülését. A modellben azt a hatást, hogy mennyire erősíti fel a kezdeti sokkot a hálózat szerkezete, főként a

következő tényezők befolyásolják: a kezdeti sokk által érintett bankok összekapcsoltsága a hálózat többi részével, a hálózat fogékonysága, valamint a hálózat ellenállóképessége.

A 4. fejezetben kitérünk arra, hogy a rendszerkockázat miképp jelenik meg a szabályozásban. Régebben ez a kockázat nem volt része a szabályozásoknak, azonban napjainkban ez megváltozik: a Bazel III. szabályai közt szerepel, hogy a rendszerkockázati szempontból fontos bankoknak többlet-tőkét kell tartalékolniuk, a szabályozás ezen részének hatályba lépésétől kezdve. Feltehetően ez a szabályozás tovább fejlődik még a jövőben, mind a rendszerkockázatilag fontos intézmények kiválasztásában, mind a tartalékolás szintjének meghatározásában egyes bankok esetén.

Az 5. fejezetben egy rövid szimulációt láthatunk, mely az R programban íródott. Itt a Barabási–Albert gráfmodellt használva vizsgáljuk a rendszerkockázati események bekövetkezésének hatását, súlyozatlan, illetve súlyozott modell esetén, valamint többféle terjedési mechanizmust alkalmazva. A függelék tartalmazza a szimuláció során használt R programkódot.

## 1. fejezet

# A kockázatok különböző típusai, a rendszerkockázat jelentősége

### 1.1. A kockázat fogalma, főbb jellemzői

Ahhoz, hogy a rendszerkockázat fogalmát és jelentőségét megérthessük, fontos, hogy ismerjük a kockázatok különböző típusait, illetve egymás közti kapcsolataikat, a rendszerkockázat összefüggőségét a többi kockázati típussal, illetve a pénzügyi intézmények működésével. Először határozzuk meg a kockázat fogalmát általánosan, majd nézzük a főbb típusait.

Sokféle kockázatot különböztetünk meg, életünk szinte bármely területén találkozhatunk különböző kockázatokkal. A kockázat alatt általában valamilyen veszélyt, bizonytalanságot, veszteségnek a lehetőségét értjük, ám nincs rá egyértelmű definíció. A kockázat kapcsolatban van a cselekvés vagy a döntés esetleges bekövetkezéseinek bizonytalanságával, általában egy vagy több esemény lehetséges kimenetelét testesíti meg. A kockázat és a bizonytalanság azonban semmiképp sem szimultán fogalom. A legfőbb különbséget a mérhetőség jelenti. Bizonytalannak nevezünk egy döntési helyzetet akkor, ha a jövőben több esemény következhet be, mint ami ténylegesen bekövetkezik, és ezekről a lehetséges kimenetekről nincs semmilyen információnk. Kockázatos a döntési helyzet, ha a jövőben bekövetkező lehetséges kimenetek leírhatók a valószínűségszámítás módszereivel, azaz tudjuk, hogy melyik lehetséges kimenetelnek mekkora a valószínűsége. Egy adott esemény kimenetele lehet kedvező számunkra, vagy kedvezőtlen, ez éppen az adott helyzettől függ. Tehát egy lehetséges megközelítés szerint a vállalt kockázat nem csak a veszteséget, de a nyereséget is magában foglalja.

A kockázatok különböző típusai közül tekintsük most a banki kockázatok csoportját. Ezen belül nézzük először egy konkrét ügylet, befektetés kockázatát. Egy befektetés kockázata alatt azt értjük, hogy a befektetés valós hozama eltérhet annak várható értékétől. Ennek rengeteg

különböző oka lehet, de a leggyakoribb a piaci eszközök hozamának változékonysága. A befektetések hozamai közt jelentős különbségek vannak: a kisebb jövedelmet biztosító befektetésektől alacsonyabb kockázatot várunk el, mint a magasabb jövedelmet biztosítóaktól. A nagy kockázatot hordozó ügyletektől nagyobb hozamot várunk el, tehát a bevállalt kockázatért cserébe magasabb hozamra számítunk.

**1.1.1. Definíció.** *A kockázati prémium a kockázatos eszköz hozamtöbblete a kockázatmentes eszköz hozama felett.*

Arbitrázsmentes piac esetén befektetésünkre kapott hozamnak arányosnak kell lennie a hozzá tartozó kockázattal. A továbbiakban mindvégig feltesszük, hogy a piac arbitrázsmentes.

**1.1.2. Definíció.** *Egy adott piacot arbitrázsmentesnek nevezünk, ha a piacon minden azonos pénzáramlást generáló termék, illetve befektetés jelenbeli ára megegyező.*

Befektetési viszonylatokban az árfolyamokat figyelve azt mondhatjuk, hogy a hozamok erősebb ingadozása, változékonysága nagyobb kockázatot tartalmaz, a viszonylag stabil, vagy kis mértékben ingadozó hozamú befektetésekhöz képest. A kockázatra ebben az esetben úgy gondolunk, mint az elvárt eredmények eltérése egy adott értéktől, mely lehet a várható érték, vagy átlag is akár. Ha pedig túllépünk a kockázatok befektetési viszonylatban való értelmezésén, akkor rengeteg más kockázati tényező is fellép, melyeket kezelni kell.

A következő alfejezetben a kockázatot fajtái, eredői szerint különböző kisebb csoportokra bontjuk, ezzel megkönnyítve a kockázatok kezelését.

## 1.2. A banki kockázatok főbb típusai

Tekintsük most a bankrendszerben előforduló kockázatok főbb típusait, illetve azok megoszlási arányát. Elsősorban említeném a *hitelezési kockázatot*, mivel a bankok fő tevékenységei közé tartozik a hitelezés, az ehhez tartozó kockázat elég nagy, akár a teljes kockázat 60%-át is jelentheti. Hitelkockázat alatt azt értjük, ahol az ügyfelek adósságszolgálatot teljesítő képessége a kockázat forrása. Másképp fogalmazva a hitelkockázat annak a kockázata, hogy változik egy adott ügylet piac által érzékelt csődvalószínűsége menet közben, ennek hatására az ügylet besorolása megváltozik, és a kockázatmentes hozam fölötti spread is, ezáltal az eszköz értéke is. Általában a hitelezési kockázat csoportjába sorolják a partnerkockázatot, a nagykockázatot, vagy másnéven koncentrációs kockázatot, illetve az országkockázatot, hiszen ezek is a hitelezés folyamatához kapcsolódnak.

A következő kockázati csoport a *piaci kockázat*, ami a bankok esetén körülbelül 15%-a az összkockázatnak. Piaci kockázat alatt azt értjük, mikor a piacon kereskedett termékek árának, kamatá-



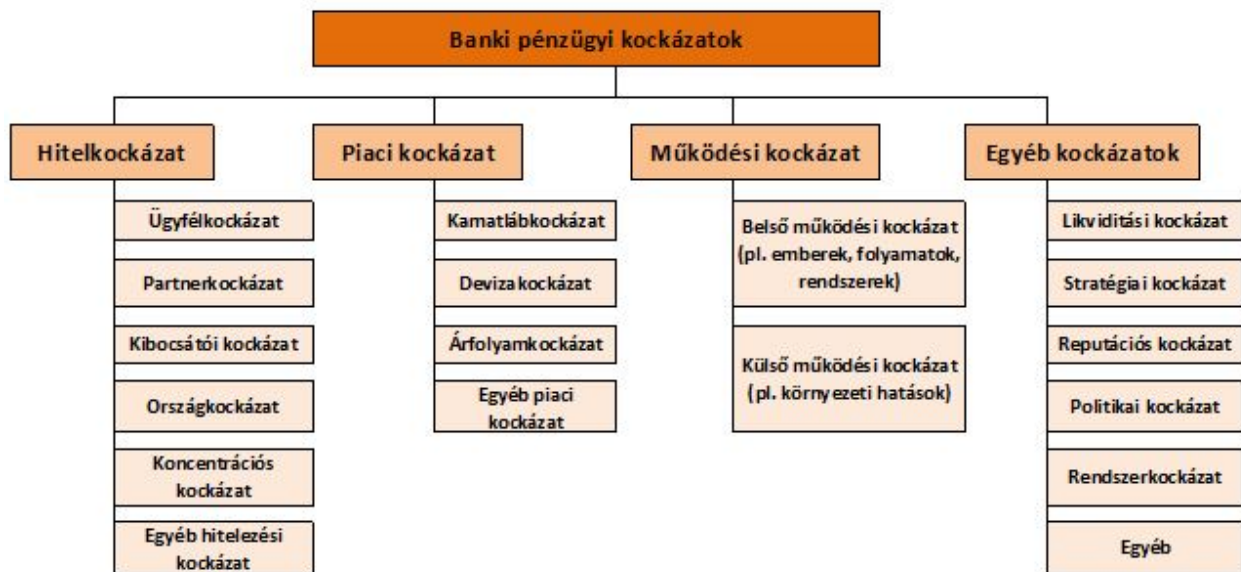
nak változásából, volatilitásából fakadó veszteségek jelenbeli illetve jövőbeli veszélye a kockázat forrása. Ide sorolható például a kamatkockázat, valamint az árfolyamkockázat.

A *működési kockázat* a piaci kockázathoz hasonló nagyságú, tehát nagyjából ez is 15%. A Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság megfogalmazásában [25] a működési kockázat a következő: „nem megfelelő, illetve megghiúsult belső folyamatok, emberi és rendszerbeli hibák, valamint külső események következtében fellépő kockázat”. Ilyen események például: a számítógépes rendszerek meghibásodása, jogi és dokumentációs hiányosságok, belső folyamatok szabályszerűtlensége, illetve a család is ide tartozik, erre is szükséges tőkefedezet képzése. A működési kockázatok csoportja magába foglalja a jogi kockázatokat, de nem tartalmazza a stratégiai és a reputációs kockázatokat. (A reputációs kockázat alatt azt értjük, mikor valamilyen valós vagy valótlan nyilvánosságra kerülő információ miatt romlik a bank hírneve, csökken a bankba vetett bizalom, emiatt kevesebb ügyfele, valamint kevesebb forrása lesz a banknak. A stratégiai kockázat pedig az általános üzleti feltételek vagy az üzleti környezet megváltozásából, helytelen üzleti döntésekből, nem megfelelő végrehajtásból eredő kockázatok összessége.)

A fennmaradó 10% tartalmazza az összes *egyéb kockázattípust*, többek közt a rendszerkockázatot is. Ebben a csoportban talán az egyik legjelentősebb, néha külön csoportként interpretált a likviditási kockázat, ami annak a kockázata, hogy a bankok az éppen aktuális kötelezettségüknek csak veszteségek árán tudnak eleget tenni. Ennek oka lehet a kötelezettségek és a követelések nem megfelelő összehangolása. Példaképp említeném még a politikai kockázatot, mely az adott ország kormányzati, politikai döntéseinek kockázatát jelenti, és szintén az egyéb kockázattípusok közé soroljuk.

Természetesen az eddig felsorolt arányok csak megközelítő értékek, hogy egy körülbelüli képet kapjunk a kockázati típusok egymáshoz viszonyított nagyságrendjéről. A speciális hitelintézetknél, vagy akár bármelyik pénzügyi intézménynél is lehet ettől eltérő a kockázatok eloszlása. Illetve a kockázati típusok besorolásánál is lehetnek eltérések a szakirodalmak között, egy lehetséges besorolási rendszert láthatunk az 1.1. ábrán, az [20] cikk alapján.

A banki szolgáltatásokhoz nem mindig lehet egyértelműen hozzárendelni a kockázati típusokat, sokszor előfordul átfedés, illetve egy-egy kockázattípus közvetett hatása is jelentős lehet a többi típusra. A továbbiakban csak a rendszerkockázattal foglalkozunk, amely a kockázatoknak csak kis részét jelenti az előző csoportosítás szerint, de egy súlyos rendszerkockázati esemény bekövetkezése mégis nagy hatással lehet több pénzügyi intézményre is, akár rövid időn belül a csőd szélére is sodorhatja a pénzügyi hálózatban lévő bankok egy pozitív hányadát.



1.1. ábra. A banki kockázatok főbb típusai (saját ábra az [20] cikk 2.3. és [41] cikk 1.1. ábrái alapján)

### 1.3. A rendszerkockázat definíciója és jelentősége

Az eddigiek alapján azt gondolhatnánk, hogy a rendszerkockázat talán kevésbé fontos, illetve jelentős az előbbi részben megemlített kockázati csoportokhoz képest. A hétköznapi életben ez a feltetelezés helyénvaló lehet, hiszen normális ügyletmenet esetén a rendszerben minden egyes bank fedezi saját kockázatait, előzetes számítások szerint tartalékol. Ám nem szabad elfeledkeznünk az eddigi, illetve az esetleges jövőbeli pénzügyi válságokról. Hiszen bármikor bekövetkezhet egy nem várt gazdasági sokk, vagy egy bankcsőd, és ebben az esetben a pénzügyi hálózat többi szereplőjét is elérhetik a hatások. Ekkor nagyon fontos, hogy egy intézmény csődjének hatása megállítható legyen, ne terjedjen tovább a többi bankra. A rendszerkockázatnak régebben nem tulajdonítottak nagy jelentőséget, tartalékolásnál nem is vették figyelembe. Az elmúlt években azonban felfedezték, hogy egy stresszhelyzetben, egy rossz pénzügyi szituációban a rendszerkockázat figyelembevételével, illetve az erre való előzetes tartalékolással akár egy kialakuló bankrendszeri válság is megelőzhető. Emiatt egyre több modellt kezdtek készíteni a bankrendszer modellezésére, ahol nagyobb hangsúlyt kapott az összefüggőségi hálózat, illetve a bankrendszer nagyobb központjai, tehát azok a bankok, melyek csődje nagy valószínűséggel több más banki intézményt is a csőd szélére sodorna.

A mélyebb megismerés érdekében először definiáljuk a rendszerkockázatot pontosabban. Mint ahogyan az eddigi kockázati típusokra sem, itt sincs teljesen egyértelmű definíció, nézzünk néhány

lehetséges változatot. A Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság egy régebbi megfogalmazása szerint a „rendszerkockázat annak a kockázata, hogy egy szereplő nem tud szerződéses kötelezettségének eleget tenni, aminek következtében a többi szereplő is fizetéképtelen lehet, s láncreakciót kiváltva széles körben pénzügyi nehézséget idézhet elő.” (Kaufman [33], a [43] írás alapján)

Egy másik definíció szerint a rendszerkockázat annak a valószínűsége, hogy a banki rendszer hirtelen meggyengül valamilyen okból kifolyólag, és ezzel sújtja a reálgazdaságot is. (Bartholomew és Whalen, [8] cikk alapján)

Fredric Mishkin [46] szerint a rendszerkockázat annak a váratlanul bekövetkező eseménynek a valószínűsége, ami olyan módon változtatja meg az információkat a pénzügyi piacokon, hogy a pénzügyi piac képtelen hatékony közvetítőként működni, emiatt nem lehet megtalálni a legjobb befektetési lehetőségeket.

Az eddigi rendszerkockázati definíciókban azt láthatjuk, hogy mindegyik a rendszer egészét egységként kezeli, a rendszerben valamilyen oknál fogva kialakult instabilitást értik kockázat alatt.

A továbbiakban De Bandt és Hartmann [24] cikkében szereplő rendszerkockázati definíciót fogjuk használni, amelyben a rendszerkockázat pontos meghatározása több szempont alapján történik. Ezt a megközelítést alkalmazza többek közt Dr. Lublós Ágnes is a [43] és [42] írásaiban. Ezen definíció bevezetéséhez előbb meg kell ismernünk néhány fogalmat.

**1.3.1. Definíció.** *Szűkebb értelemben akkor beszélünk rendszerkockázati eseményről, amikor egy adott esemény a gazdaság szűk szféráját érintve az idő előrehaladtával, az események egymásutánisága révén egy vagy több intézményre vagy piacra kedvezőtlenül hat. A lényeg az egymást követő események sorozatán, az úgynevezett dominóhatáson van, amit akár egy egyedi, akár egy korlátozott szisztematikus sokk is kiválthat.*

**1.3.2. Definíció.** *Széles értelemben a szűk értelmezés mellett akkor is rendszerkockázati eseményről beszélünk, ha az adott esemény szimultán módon hat számos intézményre és piacra, egy súlyos és kiterjedt sokk következtében.*

Az előbb definiált rendszerkockázati eseményeket tovább csoportosíthatjuk az erősségük alapján, azaz, hogy okoztak-e csődöt, vagy sem.

**1.3.3. Definíció.** *Egy rendszerkockázati eseményt gyengének nevezünk, ha bekövetkezésének hatására nem csődöl be egyetlen pénzügyi intézmény, illetve nem omlik össze egyetlen piac sem.*

**1.3.4. Definíció.** *Egy rendszerkockázati eseményt erősnek nevezünk, ha a hatására legalább egy pénzügyi intézmény, vagy pénzügyi piac becsődöl.*

Természetesen az előbbi definícióban a csődöt a rendszerkockázati esemény bekövetkezése előtt szolvens, azaz fizetőképes pénzügyi intézmények körében vizsgáljuk. Ezen fogalmak alapján definiálhatjuk a rendszerkockázatot.

**1.3.5. Definíció.** *A rendszerkockázat annak a kockázata, hogy egy erősnek bizonyuló esemény következik be.*

A rendszerkockázati esemény besorolásánál a két fő szempont a kezdeti sokk típusa, illetve a terjedési mechanizmus. A kezdeti sokk típusa alapján lehet egyetlen intézményt érintő, vagy több intézményre azonos időben ható esemény. Egyedi kezdeti sokk például egy adott regionális bank belső csalások miatti csődje, míg szisztematikus sokkot jelent például egy pénzügyi rendszerben az inflációs ráta hirtelen bekövetkező és erős növekedése. A terjedési mechanizmus alapján beszélhetünk egy, vagy több intézményt elérő fertőzésről. Szűkebb értelemben erős esemény bekövetkezésekor fertőzésről beszélünk. Ha a kezdeti sokk következtében egy intézmény jut csődbe, akkor egyedi rendszereseményről van szó, míg, hogyha több csőd következik be, akkor krízist eredményező fertőzés történt. Széles értelemben erős esemény bekövetkezésekor egyedi eseményről (azaz arról, mikor csak egy intézmény jut csődbe) nem érdemes beszélni, hiszen a széleskörű értelmezés lényege, hogy egyszerre a gazdaság számos területét érintő szisztematikus sokk következik be. A széles értelemben erős rendszerkockázati esemény bekövetkezésekor, azaz abban az esetben mikor az esemény közvetve számos más intézmény csődjét is eredményezi, krízisről beszélünk. A krízis, illetve a krízist eredményező fertőzés nagyon alacsony valószínűségű események, de ha mégis bekövetkezik egy ilyen típusú esemény, akkor a hatása komoly, és akár egy egész pénzügyi intézményrendszert romba dönthet. Az 1.2. ábrán láthatjuk a különböző rendszerkockázati események besorolását.

Természetesen a rendszerkockázaton belül is definiálhatunk még különböző alkategóriákat, erre is számos csoportosítás létezik, más tulajdonságok alapján is csoportosíthatnánk. Példaképp a már említett De Bandt és Hartmann [24] cikk alapján megkülönböztethetünk horizontális hatású rendszerkockázatot, mikor a rendszerkockázati esemény hatása csak a pénzügyi szektorra korlátozódik, illetve vertikális hatású rendszerkockázatot, amikor a rendszerkockázati esemény a reálgazdaságra, a pénzügyi szektoron kívül is hatást gyakorol. A valóságban nem tudjuk éles vonallal elhatárolni ezeket, hiszen a pénzügyi szektort érintő események meglehetősen komplex hatásokat váltanak ki, melyek közvetlenül, vagy közvetve, de általában érintik a reálgazdaság egy vagy több szféráját is. A továbbiakban a rendszerkockázati eseményeknek a pénzügyi szektorra vonatkozó hatásait vizsgáljuk, ám ez nem azt jelenti, hogy ezek az események a reálgazdaságot nem befolyásolják. Tudjuk, hogy ezen sokkok a gazdaság számos egyéb szféráját is érintik, de elemzésünk ezekre a hatásokra nem terjed ki.

Egy másik lehetséges csoportosítás a direkt és indirekt fertőzések szétválasztása. Direkt fertőzés alatt azt értjük, amikor a fertőzés terjedésének csatornája a bankok egymással szemben fennálló kitettségeinek következménye. Az indirekt fertőzés pedig abból ered, mikor a pénzügyi rendszerben széleskörben asszimmetrikus információ terjed el, emiatt a betétesek megrohanják a

A kezdeti sokk jellege	Egyedi esemény (közvetve csak egy intézményt ránt magával)		Több esemény (közvetve számos intézményt magával ránt)	
	gyenge (nincs csőd)	erős (egy intézmény csődje)	gyenge (nincs csőd)	erős (számos intézmény csődje)
<b>Szűk értelemben vett sokk:</b>				
-Egyedi sokk	Rendszerkockázati esemény	Fertőzés	Rendszerkockázati esemény	Krízist eredményező fertőzés
-Korlátozott szisztematikus sokk	Rendszerkockázati esemény	Fertőzés	Rendszerkockázati esemény	Krízist eredményező fertőzés
<b>Kiterjedt szisztematikus sokk</b>	Nem rendszerkockázati esemény	Nem rendszerkockázati esemény	Rendszerkockázati esemény	Krízis

1.2. ábra. A rendszerkockázati események besorolása ([42] és [24] alapján)

bankokat, ezzel akár akaratlanul is direkt fertőzést válthatnak ki, pedig valójában nem lett volna okuk a pánikra. Ez a csoportosítás a fertőzés kialakulásának oka szerint történik, nézzük meg ezt a szempontot bővebben.

#### 1.4. A rendszerkockázat okai

A pénzügyi rendszer törékenységének rengeteg oka lehet, nézzünk ezek közül néhány jelentősebbet De Bandt és Hartmann elemzése [24], valamint Dr. Lublós Ágnes [42] írása szerint. Feltesszük, hogy a bankok szolvensek, egyénileg jól kezelik saját kockázataikat, és a hálózat egészével foglalkozunk.

Az egyik ok lehet a bankok egyedi szerkezete, a likviditáshiány lehetősége. Illikvid állapot több okból is kialakulhat egy banknál, nézzünk erre egy példát. Általában a kereskedelmi bankok olyan fix értékű betétekkel rendelkeznek, melyek feltétel nélkül, és rövid időn belül visszavonhatóak, a hiteleket pedig hosszú távra adják, például nagyvállalatoknak. A nagy számok törvényének következtében az eszközöknek csak egy kis töredékét kell likvid formában tárolnia a banknak, a betétesek pénzkivonásának esetére. Viszont, ha egyszerre nagyon sok betétes tart igényt a pénzére, és a hosszútávú kölcsönök nem likvidálhatóak, ebben az esetben a bank illikvid állapotba kerülhet, akár csődbe is mehet, attól függetlenül, hogy hosszútávon nézve fizetőképese, azaz szolvens lett volna. Likviditáshiány esetén a bankok megpróbálnak likviditáshoz jutni, melynek

egyik módja a befektetett eszközök visszavonása, akár veszteség árán is, mellyel illikvid állapotba sodorhatják azt a bankot, ahol a befektetett eszközök voltak.

A bank teljesítőképes állapota nem csak attól függ, hogy mennyire sikeresek a befektetései, hanem attól is, hogy betétesei mennyire bíznak a bank fizetőképességében, illetve abban, hogy a többi betétes nem rohamozza meg a bankot. Megjegyezzük, hogy ez a bankok speciális jellemzője, hiszen egy biztosítótársaságnál, vagy egy pénzügyi közvetítőnél nem igazán fordulhat elő ilyen eset. Természetesen a fejlett országokban a betéteseket szinte minden esetben védi valamilyen betétbiztosítás, ezzel csökken a bizalomválságok kitörésének valószínűsége. Az ilyen típusú eseményeket információs csatornán keresztül fertőzésnek nevezzük, hiszen a betétesek várakozásaitól, illetve informáltságuktól függ egy esetleges panasz kialakulása. Ennél a típusú fertőzésnél nem használjuk ki a bankhálózat összekapcsoltságát, itt arról van szó, hogy a betétesek egy adott, nem feltétlenül valós, vagy csak egy adott bankra teljesülő információ alapján általános következtetéseket vonnak le az egész bankrendszerrel kapcsolatban. Mikor a biztonság, illetve a hitelesség megdőlni látszik egy pénzügyi intézménynél, vagy egy egész pénzügyi hálózatonál, akkor a piaci várakozások nagyon rövid időn belül erősen eltolódhatnak, és így a beruházások és a tőkekivonások aránya jelentősen változhat, és ez akár csődöket is előidézhet.

Egy másik oka a rendszerkockázatnak a pénzügyi intézmények összekapcsoltsága közvetlen kitettségeken keresztül (ezt az összekapcsoltságot hitelcsatornának is nevezik, bővebb értelemben ide tartoznak a bankközi piacok, derivatív ügyletek, egyéb mérlegen kívüli tételek, hitelek, átutalások, vagy akár egy vállalati nyugdíjrendszer), illetve fizetési és elszámolási rendszereken keresztül. Ezen belül is elkülöníthetünk két nagyobb csoportot. Az egyik a fizetési rendszereken keresztül terjedő rendszerkockázati esemény, mely akár pár perc alatt bekövetkezhet egy kereskedési nap folyamán, és nagy kitettség esetén akár azonnali, hirtelen hatása lehet egyetlen hibás utalásnak, vagy mulasztásnak, hiszen lehet, hogy azon pénzügyi szereplő, aki felé nem teljesítették a kötelezettséget, emiatt szintén nem tudja teljesíteni időben a saját kötelezettségeit. Ekkor az elszámolási folyamatok körülményessége, illetve technikai nehézségek hosszíthatják a hiba javítását, vagy akár fel is erősíthetik a probléma nagyságát az idő elteltével. Ezen hibák elkerülése végett, hogy megakadályozzák az esetleges fertőzés kialakulását, különböző kockázatkezelési intézkedéseket, védelmi rendszereket alkalmaznak, példaképp a fizetési rendszerek esetén a Valós Idejű Bruttó Elszámolási Rendszer (VIBER) alkalmazásával szinte teljesen felszámolhatjuk a ezt a típusú rendszerkockázatot. (Ekkor feltételezzük egy központi bank létezését, melynél a többi bank tartalékszámhályakat tart, amiket kötelesek feltölteni, és esetleges hiba esetén a központi bank ideiglenesen teljesíti a nemfizető bank kötelezettségét.)

A másik részcsoporthoz a bankközi kitettségeken keresztül bekövetkező rendszerkockázati esemény. Ez például akkor következik be, mikor egy bank nem tudja teljesíteni egy másik bank felé a kötelezettségét, és emiatt lehet, hogy ez a bank is fizetéseképtelen lesz, saját hitelezői felé, ezzel

lánreakciót kezdeményezve, amit másképpen dominó effektusnak is nevezhetünk. A továbbiakban a bankközi piacon lévő kapcsolatrendszerből adódó rendszerkockázattal foglalkozunk, tehát ezen okcsoporton belül is figyelmen kívül hagyjuk a speciálisabb ügyleteket, valamint a fizetési rendszerek esetleges hibáiból adódó rendszerkockázatot.

Ahhoz, hogy ezt a típusú rendszerkockázatot vizsgálhassuk, szükséges különböző hálózati elméleti modelleket definiálni. Ezek közül kiválaszthatjuk, ami a legjobban modellezi a pénzügyi intézmények kapcsolati hálózatát egy adott esetben, vagy akár egy valós piacon, és ezen modellen különböző szimulációk segítségével megpróbálhatjuk előrejelezni, hogy egy adott helyről kiinduló esetleges sokk esetén hogyan reagál a bankrendszer többi része, elterjed a fertőzés, vagy sem. A megfelelő modell alapján bevezethetünk az esetleges fertőzés ellen óvintézkedéseket, különböző tartalékolási szabályokat, mellyekkel a fertőzés kialakulása megelőzhető, valamint esetleges terjedés esetén gyorsan megállítható. A banki hálózatok minél élethűbb modellezése érdekében ismerjünk meg néhány különböző típusú hálózati modellt.

## 2. fejezet

# Hálózatok típusai

A következőekben a különböző hálózatelméleti modellek felépítését vizsgáljuk, a rendszerkockázat terjedése nélkül. Ebben a fejezetben a saját BSc szakdolgozatom 1. fejezete [44] került kisebb átdolgozásra, alapvetően azt használjuk fel. Ez a rész nem elhanyagolható, ugyanis fontos alapot nyújt a további fejezetek könnyebb megértéséhez. Célunk, hogy a következő részekben ezen hálózatok tulajdonságainak ismeretében vizsgálhassuk a rendszerkockázat terjedését. A gráfmodellek bemutatása irányítatlan esetben történik a könnyebb áttekinthetőség kedvéért, de ez a legtöbb esetben egyszerűen kiterjeszthető irányított modellé, amire a rendszerkockázati események által kiváltott fertőzés terjedésének modellezéséhez szükségünk is lesz.

### 2.1. Erdős–Rényi véletlen gráf

„Ez talán az egyik legegyszerűbb gráfmodell, melynek több változatát is ismerjük, de az eltéréseknek nem szükséges túl nagy jelentőséget tulajdonítanunk. Az eredeti, Erdős Pál és Rényi Alfréd által 1959-ben leírt modellben [28] adott  $n$  csúcs és  $M$  él, és az összes ilyen gráf közül egyenlő valószínűséggel választjuk az egyiket. Itt ugye látjuk, hogy ha egy gráfmodellt tekintünk, akkor abban az egyik él behúzásának valószínűsége valamilyen értelemben függ a másiktól, mivel az élek száma előre meghatározott. A későbbiekben majd láthatjuk, hogy ennek itt nem lesz fontos szerepe. A másik megközelítés, amit napjainkban szintén Erdős–Rényi-modell néven ismerünk, először az Edgar Gilbert által 1960-ban kiadott cikkben [34] jelent meg, miszerint előre adott  $n$ , a gráf csúcsainak száma, és ezek között minden élt a többitől függetlenül  $p$  valószínűséggel húzunk be. Ebben az esetben az élek száma nem előre meghatározott.

Vizsgáljuk meg az Erdős–Rényi gráf néhány fontos tulajdonságát. Az élek behúzási valószínűsége két csúcs között  $p$ , amit tetszőlegesen megválaszthatunk a  $[0, 1]$  intervallumból. A  $p$ -t gyakran  $p = \frac{\lambda}{n}$  alakban adjuk meg. Ettől a választástól függően a gráf különböző alakú lehet: ha  $p = \frac{\lambda}{n}$  és  $\lambda < 1$ , akkor a gráf több kis  $\Theta(\log n)$  nagyságú komponensből fog állni, ha  $\lambda = 1$  akkor a gráf



legnagyobb komponense nagy valószínűséggel  $n^{\frac{2}{3}}$  nagyságrendű lesz, ha pedig  $p = \frac{\lambda}{n}$  olyan, hogy  $\lambda > 1$ , akkor a gráf egy nagy  $\Theta(n)$  méretű és több kisebb  $\Theta(\log n)$  méretű komponensből fog állni. Azaz, ha  $\lambda > 1$ , akkor  $\exists c > 0$  adott érték, amire

$$P(\text{az } n \text{ csúcsú gráfban a legnagyobb komponens } \geq cn) \rightarrow 1,$$

ha  $n \rightarrow \infty$ .

**2.1.1. Megjegyzés.** A  $\Theta$  jelentése általánosan a következő:  $f(n) = \Theta(g(n))$ , ha  $\exists c_1, c_2$  pozitív számok, hogy  $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$  teljesül  $\forall n$ -re.

Nézzük meg az Erdős–Rényi gráf fokszámeloszlását. Feltehetjük, hogy  $\lambda \in (0, 1]$ , hiszen, ha  $\lambda = 0$  lenne, akkor  $p = 0$ , ekkor nincsenek élek a gráfban. Ekkor az élek számának eloszlása binomiális  $p$  paraméterrel. A  $k$  fokszámú csúcsok aránya közel van a  $P(\text{Bin}(n-1, \frac{\lambda}{n}) = k)$  valószínűséghez. Tudjuk, hogy ha  $n$  nagy, akkor a megfelelő binomiális eloszlás közel van a  $\lambda$  paraméterű Poisson-eloszláshoz. Ehhez ismernünk kell a Poisson-eloszlást, ami a következő:

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

ahol  $k \geq 0$ . Jelölje  $D_i$  az  $i$  csúcs fokszámát, ekkor a fokszámeloszlás legyen

$$P_k^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{D_i=k\}},$$

tehát  $P_k^{(n)}$  jelöli a  $k$  fokú csúcsok arányát  $n$  lépés után.

**2.1.2. Tétel (Az Erdős–Rényi gráf fokszámeloszlása).** Rögzítsünk egy  $\lambda \in (0, 1]$  számot.  $\forall \varepsilon_n$ -re, ha  $\sqrt{n}\varepsilon_n \rightarrow \infty$ , akkor

$$P_\lambda(\max_k |P_k^{(n)} - p_k| \geq \varepsilon_n) \rightarrow 0.$$

**2.1.3. Megjegyzés.** Az előző tételben  $p_k$  a  $k$  fokú csúcsok arányának a limeszét jelöli.”

Ez a modell nem igazán hasonlít a valós hálózatokhoz, minden része túl egyforma, strukturális. A pénzügyi intézmények közt pedig vannak nagyobbak, több kapcsolattal rendelkezők, illetve kisebbek, leányvállaltok, tehát ezzel a viszonylag homogén struktúrával nem tudjuk jól jellemezni a valós hálózatot.

## 2.2. Skálafüggetlen véletlen gráf általános modellje

„Adott  $n$  csúcs, és minden csúcson van egy adott vagy egy véletlenül sorsolt súlya,  $W_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Az éleket egymástól függetlenül húzzuk be, de egy él szereplésének esélyét befolyásolják a csúcsok súlyai, amik közt be akarjuk húzni. Az adott élvalószínűség  $i$  és  $j$  csúcsok közt a következő:

$$p_{ij} = \frac{W_i W_j}{L_n + W_i W_j} \quad (2.1)$$

ahol  $\{W_i\}_{i=1}^n$  a csúcsok súlya,  $L_n = \sum_{i=1}^n W_i$ , az összes csúcs súlyának összege. Az eddig vizsgált Erdős–Rényi gráf nem volt skálafüggetlen, de itt tudjuk úgy választani a súlyokat, hogy skálafüggetlen modellt kapjunk. A valós hálózatokra ez gyakran jellemző tulajdonság, ezért érdemes pontosan definálnunk.

**2.2.1. Definíció.** *Egy adott  $G_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) gráfsorozat skálafüggetlen, ha a gráfban a  $k$  fokú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergál valamely  $p_k$  számhoz  $\forall k$  esetén, ha  $n \rightarrow \infty$ , és valamilyen  $\gamma > 0$ -ra és  $c > 0$ -ra  $p_k k^\gamma \rightarrow c$ , ha  $k \rightarrow \infty$ . Azaz  $p_k \approx ck^{-\gamma}$ .*

A következő fontos tulajdonság a fokszámeloszlás, térjünk ki erre ennél a modellenél is. Vezessük be itt is a következő jelölést a  $k$  fokú csúcsok arányára  $n$  lépés után:

$$P_k^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{D_i=k\}}.$$

A fokszámeloszlás a Poisson-eloszláshoz hasonlít. Ha  $k \geq 0$ , akkor

$$p_k = E\left(e^{-W} \frac{W^k}{k!}\right).$$

Ha itt a  $W$  eloszlását megfelelően választjuk, akkor elérhetjük a skálafüggetlenséget.

**2.2.2. Megjegyzés.** *Ha  $W_i$  súlyok független, azonos eloszlásúak, akkor  $W$  is ugyanilyen eloszlású. Ha pedig a  $W_i$ -k nem ilyenek, akkor nem tudunk egyetlen közös  $W$ -t találni.*

**2.2.3. Tétel (A skálafüggetlen gráf fokszámeloszlása [31] 6.9. tétel).** *Két feltételre van szükségünk a tétel teljesüléséhez:*

(a) *Gyenge konvergencia a csúcsok súlyaira:  $W_n \xrightarrow{d} W$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .*

(b) *Konvergencia az átlagos súlyú csúcsok súlyaira: ha  $E(W) > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(W_n) = E(W)$ .*

*Ekkor  $\forall \varepsilon > 0$  esetén  $P\left(\sum_{k=0}^{\infty} |P_k^{(n)} - p_k| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$ .*

Azaz a tétel azt mondja ki, hogy a  $k$  fokú csúcsok aránya  $n$  lépés után tart  $p_k$ -hoz, sztochasztikus konvergenciával, ha  $n \rightarrow \infty$ .

## 2.3. Konfigurációs modell

Ennél a modellenél a csúcsok fokszáma előre adott, és természetesen a csúcsok száma is, legyen ez  $n$ . Jelölje  $D_i$  az  $i$  csúcs fokszámát, és  $L_n = \sum_{i=1}^n D_i$  a csúcsok fokszámainak összegét. Ismerjük tehát az összes csúcs fokszámát, és ez alapján húzunk be éleket a gráfban véletlenszerűen (természetesen ez alapján többféle gráfot is készíthetünk). A modell készítését úgy képzelhetjük el, hogy van  $n$  darab csúcsunk, és minden csúcshoz csatlakozik éppen annyi él, amennyi az adott csúcs fokszáma. Az él másik vége szabad, ezt egyelőre nem kötöttük sehova. Ezután ha véletlenszerűen választunk két szabad élvéget, és ezeket összekötjük, akkor megkapjuk a gráf egy élet.

Ezt többféleképp is megtehetjük, azt a célt tartva szem előtt, hogy a gráfunk egyszerű legyen, azaz ne legyenek benne többszörös él, illetve hurokélek, ami persze nem minden esetben megvalósítható. Tehát adott egy konfigurációs gráfmodell, és mi ezt egyszerűvé szeretnénk alakítani. Erre az egyik lehetőség az ismétléses konfigurációs modell, ahol először elkezdjük véletlenszerűen összekötni a csúcsokat. Ezt addig csináljuk, míg a gráf egyszerűsége meg nem szűnik, ekkor minden eddigi összekötésről elfeledkezünk az ismétléses modell szerint, majd újrakezdjük a próbálgatást, egészen addig míg nem sikerül az egyszerű gráfmodellünket létrehozni. Ez alapján a megfelelőek, azaz az egyszerű gráfok egyformán valószínűek lesznek.

A másik lehetőség a törléses konfigurációs modell, ahol először fixáljuk a fokszámot, majd az  $n$  csúcsú, már adott konfigurációs gráfmodellünkből, ahol többszörös éleket is megengedünk, elhagyjuk a hurokéleket és a többszörös él közül kitörlünk annyit, hogy csak egy él maradjon ott is, ahol eddig több volt. Így eltérünk ugyan az eredeti gráftól, nem kapunk pontos eredményt, hiszen a fokszámok csökkenhetnek, de aszimptotikusan ugyanaz marad a gráf, azaz egy viszonylag nagy modell esetén nem történik számottevő változás.

Az eddigi gráfmodellek statikus modellek, nem mutatják a gráf létrejöttét, változását, esetleg jövőbeli növekedését, ami a valós hálózatoknál elkerülhetetlen. A valóságosabb modellezés érdekében áttérünk a dinamikus modellekre.

## 2.4. „Preferential attachment” modell

Ez egy növekedő gráfmodell, azaz folyamatosan új csúcsokkal, és élekkel bővül. Yule volt az első, aki a növekvő gráfokkal foglalkozott 1925-ben, majd Barabási Albert-László és Albert Réka jelentős eredményeket értek el ezen a téren, az ő modelleikről még lesz szó a későbbiekben. Pontosan ezzel a modellel Bollobás Béla foglalkozott először [17]. A modell ismertetéséhez főként Remco van der Hofstad [31] cikkét használjuk fel.

A „preferential attachment” modell alkalmas a valós hálózatok növekedésének modellezésére, hiszen itt nem minden csúcshoz egyforma valószínűséggel kapcsolódnak az új élek, hanem a nagyobb fokszámú csúcsokhoz nagyobb valószínűséggel kapcsolódnak, mint a kisebbekhez. A valóságban gyakran megjelenik ilyen típusú hálózat, mely növekszik, de nem mindenhol egyforma mértékben. A növekedés miatt ez egy gráfsorozatot modellez, melyet ezután jelöljünk a következőképpen:  $\{PA_t(m, \delta)\}_{t=1}^{\infty}$ . Ez egy adott  $t$ -re egy  $t$  csúcsú gráfot ad, amelyben az élszám  $mt$ , ahol  $m \in \mathbb{Z}^+$  azt jelöli, hogy egyszerre hány darab éllel fog kapcsolódni az új csúcs. A  $\delta$  szintén egy általunk választott paraméter, amely megfelelő megadásáról kicsit később lesz szó.

Vizsgáljuk először az  $m = 1$  esetet.  $PA_1(1, \delta)$  egy izolált pontból és egy hurokélból áll. Ezután tegyük fel, hogy már van egy  $t$  csúcsból álló gráfunk, és nézzük meg, hogy zajlik a  $(t + 1)$ -edik csúcs hozzávétele. Az új csúcs egy éllel kapcsolódik valamely ponthoz a fokszámmal arányos valószínűség szerint. Természetesen önmagához is kapcsolódhat, de ugye nem túl nagy eséllyel. Tehát annak a valószínűsége, hogy a  $t + 1$ -edik csúcs hova kapcsolódik, a következő:

$$P(v_{t+1}^{(1)} \rightarrow v_i^{(1)} \mid PA_t(1, \delta)) = \begin{cases} \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+(1+\delta)} & \text{ha } i = t + 1 \\ \frac{D_i(t)+\delta}{t(2+\delta)+(1+\delta)} & \text{ha } i \in \{1, 2, \dots, t\} \end{cases} \quad (2.2)$$

A képletben  $D_i(t)$  jelöli a  $v_i(t) \in PA_t(1, \delta)$  fokszámát.

A definíciót felhasználva, gondoljuk át a  $\delta$  szerepét és lehetséges értékeit. Látjuk, hogy szükséges feltétel a  $\delta \geq -1$ , hiszen különben a definícióban a felső ágon negatív érték szerepelne, ami nem lehet valószínűség. Ha  $\delta$ -t elég nagyra választjuk, akkor a fokszámok nem igazán számítanak, egy egyenletes valószínűségeloszlást kapunk. Ha pedig  $\delta$  kicsi, vagy esetleg nulla, akkor a fokszámokkal arányosan oszlanak meg a valószínűségek.

Nézzük az  $m > 1$  esetet. Kezdetben legyen adott  $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$  gráfsorozat, aminek csúcsai  $v_1^{(1)}, \dots, v_{mt}^{(1)}$ .  $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$ -beli  $v_1^{(1)}, \dots, v_m^{(1)}$  csúcsokat vonjuk össze a  $PA_t(m, \delta)$  gráfban a  $v_1^{(m)}$  csúccsá. Általánosan leírva a  $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$  gráfbeli  $v_{(j-1)m+1}^{(1)}, \dots, v_{jm}^{(1)}$  csúcsokból keletkezik a  $v_j^{(m)}$  csúcs a  $PA_t(m, \delta)$  gráfban. Tehát az eredetiből vett  $m$  darab csúcsenként a csúcsok összevonásával keletkezik az új gráfban 1 csúcs. Az  $m$  darab csúcsot a régi gráfban az új csúcs őseinek nevezzük. Két csúcs össze van kötve az  $PA_t(m, \delta)$  gráfban, ha az adott két csúcsnak bármely két őse össze van kötve a  $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$  gráfban. Az így keletkezett  $PA_t(m, \delta)$  egy  $t$  csúcsú,  $mt$  élű,  $2mt$  összfokszámú multigráf, azaz lehet benne hurokél vagy többszörös él. A modell egyértelműsítéséhez természetesen szükséges meghatározni azokat az együttes valószínűségeket, hogy ha egy új csúcs  $m$  éllel kapcsolódik az eddigi gráfhoz, akkor tetszőleges  $m$  tagból álló csoportra mennyi a valószínűsége, hogy épp ehhez fog kapcsolódni. Ezt persze nem csak ennél a modellnél adhatjuk meg, hanem minden olyanál, ahol az új csúcs egyszerre nem csak egy éllel kapcsolódik.”

Az eddig definiált modell az irányítatlan esetet mutatja be, de ezt könnyen irányítottá alakíthatjuk, amire azért lesz szükség, mert a pénzügyi hálózatok irányított gráfmodellel jobban

leírhatóak. Úgy alakíthatjuk irányított „preferential attachment” modellé, hogy mikor egy új csúcsot csatlakoztatunk, azaz hozzákötjük néhány régihez, akkor ezt irányított élekkel tesszük. Előre meghatározottan vagy mindig a régi csúcsok felé mutatnak az élek, vagy mindig az új csúcs felé.

„A következő tételben a „preferential attachment” modell maximális fokszámát vizsgáljuk, amire vezessük be a következő jelölést:  $M_t = \max_{i=1, \dots, t} D_i(t)$ , ahol  $D_i(t)$  a  $v_i \in PA_t(m, \delta)$  fokszámát jelöli.

**2.4.1. Tétel.** *A „preferential attachment” modell esetén  $PA_t(m, \delta)$ -ban, rögzítsük  $m \geq 1$ -et és  $\delta \geq -m$ -et. Ekkor  $M_t t^{-\frac{1}{\tau-1}} \rightarrow \mu$ , ahol  $t \rightarrow \infty$  és  $P(\mu = 0) = 0$ , illetve  $\tau = 3 + \frac{\delta}{m}$ .*

**2.4.2. Megjegyzés.** *Egy triviális becslést ismerünk  $\tau$ -ra, miszerint  $\tau = 3 + \frac{\delta}{m} > 2$ , hiszen  $\frac{\delta}{m} > -1$ . A valós hálózatokban is  $\tau > 2$  az általános.*

Következő célunk, hogy megvizsgáljuk, hogy a modell skálafüggetlen, vagy sem. Ehhez határozzuk meg a  $k$  fokú csúcsok arányát a gráfban, hiszen ez szorosan összefügg a skálafüggetlenséggel.  $P_k(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t I_{\{D_i(t)=k\}}$  legyen annak a jelölése, hogy  $t$  lépés után a  $k$  fokszámmal rendelkező csúcsok aránya mennyi a gráfban. Ha  $m > 1$  és  $\delta \geq -m$ , akkor tudunk definiálni egy olyan  $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$  eloszlást, amit a következő konstansok határoznak meg:  $p_k = 0$ , ha  $k = 0, \dots, m-1$ , és

$$p_k = \left(2 + \frac{\delta}{m}\right) \frac{\Gamma(k + \delta) \Gamma(m + 2 + \delta + \frac{\delta}{m})}{\Gamma(m + \delta) \Gamma(k + 3 + \delta + \frac{\delta}{m})}, \quad \text{ha } k \geq m.$$

Ha  $m = 1$ , akkor a képlet a következő egyszerűbb alakban írható fel:

$$p_k = (2 + \delta) \frac{\Gamma(k + \delta) \Gamma(3 + 2\delta)}{\Gamma(\delta) \Gamma(k + 3 + 2\delta)},$$

ha pedig  $\delta = 0$  és  $k \geq m$ , akkor:

$$p_k = \frac{2\Gamma(k)\Gamma(m+2)}{\Gamma(m)\Gamma(k+3)} = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}$$

alakban írhatjuk. Ahhoz, hogy az előbbi összefüggéseket értelmezni tudjuk, ismernünk kell a  $\Gamma$  jelentését.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Nekünk most csak a  $\Gamma$  azon tulajdonságára van szükségünk, miszerint  $\Gamma(n) = (n-1)!$  és  $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$ . Kifejtve:  $\Gamma(k+\delta) = (k+\delta-1)(k+\delta-2) \dots (m+\delta)\Gamma(m+\delta)$ , ahol  $k > m$ . Éppen a  $\Gamma$  függvény ezen kifejtése miatt le lehet egyszerűsíteni, így kapjuk, hogy a  $p_k$  polinomiális.

A következő tétel azt mondja ki, hogy ha  $p_k \geq 0$ ,  $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$  valóban eloszlás, mégpedig a  $PA_t(m, \delta)$  fokszámeloszlása.

**2.4.3. Tétel (Fokszámsorozat a „preferential attachment” modellben).** Rögzítsük  $m > 1$ -et és  $\delta \geq -m$ -et. Ekkor létezik  $C = C(\delta, m) > 0$   $\delta$ -tól és  $m$ -tól függő konstans, amire teljesül, hogy ha  $t \rightarrow \infty$ , akkor  $P\left(\max_k |P_k(t) - p_k| \geq C\sqrt{\frac{\log(t)}{t}}\right) = o(1)$ .

**2.4.4. Megjegyzés.** Az  $o(1)$  kifejezésnek az előbbi tételben annyi a jelentése, hogy, ha  $t \rightarrow \infty$ , akkor a megadott valószínűség tart a nullához.

A „preferential attachment” modell két, eddig látott tulajdonsága a skálafüggetlenség, és a polinomiális fokszámeloszlás, ezért is jellemzi jól a valós hálózatokat. Mint láttuk, ez nem minden modellre igaz, példaképp megemlíthető az Erdős–Rényi modell, aminél a fokszámeloszlás a Poisson-eloszlással jellemezhető, melynek lecsengése exponenciálisnál is gyorsabb. A polinomiális fokszámeloszlás leegyszerűsítve azt jelenti, hogy a kétszeres fokszám esetén, azaz, ha a  $k$  fokú csúcsok aránya helyett a  $2k$  fokúak arányát nézzük, akkor a  $p_k$  ugyanannyiad részére csökken. A  $k$  fokú csúcsok arányát körülbelül  $ck^{-\gamma}$  jellemzi, láthatjuk, hogy ezt  $2k$ -ra alkalmazva csak konstanssal, pontosabban  $2^{-\gamma}$ -val változik az eredmény. Ezzel szemben az exponenciális eloszlásnál a  $k$  fokú csúcsok arányát  $\lambda^k$  jellemzi, ami a  $2k$  fokú csúcsok arányának gyöke lesz, mivel  $\lambda^{2k} = (\lambda^k)^2$ . Az Erdős–Rényi modellt már ismert, hogy a Poisson-eloszlás jellemzi, tehát itt a fokszámeloszlás még gyorsabban cseng le, mivel itt  $p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ , azaz még  $k$  faktoriállissal is leosztunk.

A valós hálózatok általában polinomiális fokszámeloszlásúak, ezért is alkalmazható jobban a gyakorlatban „preferential attachment” modell, mint az Erdős–Rényi modell.

### 2.4.1. Barabási–Albert modell

A modellt Barabási Albert-László és tanítványa, Albert Réka dolgozta ki 1999-ben. A Barabási–Albert modell a „preferential attachment” modell egy olyan altípusa, ahol  $\delta = 0$ , és  $m$ , az egy lépésben a gráfhoz adott élek száma tetszőleges pozitív egész szám. Tehát itt a fokszámok a meghatározóak, és az új csúcs mindig  $m$  éllel kapcsolódik az eddigi hálózatunkhoz. Itt is teljesülnek a „preferential attachment” modell tulajdonságai: ez is dinamikus, növekedő modell, és érvényesül a „rich get richer” kifejezéssel is leírható sajátosság, azaz a nagyobb fokszámú csúcsokhoz nagyobb valószínűséggel fog kapcsolódni az új csúcs, mint a kisebb fokszámúakhoz. Az aszimptotikus fokszámeloszlás itt is polinomiálisan cseng le, negatív kitevőjű hatvány szerint.

### 2.4.2. Barabási–Albert fa

Itt további megkötéseket teszünk a Barabási–Albert modellhez képest. Az  $m = 1$ , azaz egyszerre csak egy él kapcsolódik, a  $\delta = 0$  feltétel pedig továbbra is fennáll. Ezenkívül kizárjuk a hurok-élek lehetséges létezését a gráfban. A modell kialakulásakor kezdetben egyetlen csúcsunk van. A

következő csúcstól ugye csak ehhez tudjuk kapcsolni egy éllel, ez az eredeti csúcs gyereke lesz. A harmadiknál már két lehetőségünk van: kapcsolhatjuk az első vagy a második csúcshoz, de mindig szigorúan csak egyhez, hiszen fáról van szó. Így minden csúcsnál annak a valószínűsége, hogy épp ahhoz kötjük az újat az adott csúcs fokszámának és az összes csúcs fokszámösszegének a hányadosa. A Barabási–Albert fa fokszámeloszlása ugyanaz, mint a „preferential attachment” modell fokszámeloszlása, csak itt jelentősen egyszerűsödik a helyzet, hiszen felhasználhatjuk a  $\delta = 0$  és  $m = 1$  kikötéseket. Annak az esélye, hogy az  $(n + 1)$ -edik csúcstól egy  $k$  fokú csúcshoz kötjük,  $\frac{k}{2n-2}$ . Hiszen azt, hogy az új csúcs hová fog kapcsolódni a fokszámokkal arányos valószínűséggel választjuk ki. Ekkor a „preferential attachment” modellnél  $p_k$ -ra kapott képlet jelentősen leegyszerűsödik, ha felhasználjuk, hogy  $\delta = 0$  és  $m = 1$ , akkor

$$p_k = \frac{2\Gamma(k)\Gamma(3)}{\Gamma(k+3)\Gamma(1)} = \frac{4}{(k+2)(k+1)k}.$$

Itt a  $\Gamma$  tulajdonságait használjuk, pontosabban azt, hogy  $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$ , azaz  $\Gamma(k) = (k-1)!$ . Vagyis a Barabási–Albert fa fokszámeloszlása  $\frac{4}{(k+2)(k+1)k} \approx \frac{4}{k^3}$ -höz tart, azaz ennyi a valószínűsége, hogy épp egy  $k$  fokszámú csúcstól választunk ki, ha az eloszlás egyenletes, és ha  $k \rightarrow \infty$ .

Most pedig térjünk rá az eredeti témánkra, azaz a rendszerkockázat modellezésére, amihez az eddig megismert véletlen gráftípusokra és hozzájuk kapcsolódó fogalmakra nagy szükségünk lesz.

## 3. fejezet

# Modellek a banki rendszerkockázat terjedésére

Sok rendszerkockázattal foglalkozó szakcikkben az a feltételezés, hogy a bankrendszer minden szereplője egyforma és azonos viselkedésű, ekkor homogén hálózatokat alkalmaznak a fertőzések terjedésének vizsgálatára a szerkezet egyszerűsége miatt. Ez azonban a valós pénzügyi hálózatokat nem modellezi megfelelően: ugyanis a bankok különböznek méretükben, kitettségükben, befektetési stratégiáikban, és nem utolsósorban kapcsolataik számában is. Ebben a fejezetben különböző modelleken vizsgáljuk a rendszerkockázat terjedését, illetve a tulajdonságait.

A rendszerkockázat elemzése viszonylag új terület, így a modellezése még napjainkban is egyre fejlődik. A kezdetekből kiemelhetjük Allen és Gale (2000.) [2] modelljét, mely egy gyakran hivatkozott cikk a későbbi rendszerkockázattal foglalkozó szakirodalomban. A szerzők arra az eredményre jutottak, hogy minél inkább összefüggő egy hálózat, annál kisebb a valószínűsége egy rendszerkockázati esemény bekövetkezésének. De ezzel ellentétes véleményt is olvashatunk néhány cikkben, miszerint minél több kapcsolat van a hálózatban, annál nagyobb a valószínűsége egy fertőzés elterjedésének a rendszerben. Vagy akár a kettő közötti eredményt is olvashatunk például Battiston és szerzőtársai által írt 2009-es [10] cikkben, ahol arra az álláspontra jutnak, hogy az összekapcsoltság és a rendszerkockázati esemény bekövetkezése közt nem monoton kapcsolat, mivel ha nem eléggé összefüggő a hálózat, akkor is könnyen alakul ki csődhullám, mert nincs szétosztva a kockázat az egyes elemek között, ha pedig túl nagy az összekapcsoltság, akkor maga a fertőzés tud túl gyorsan és hatékonyan elterjedni a hálózatban.

A következő alfejezetben Daron Acemoglu és szerzőtársainak (2013.) [1] írását vizsgáljuk részletesebben, amely túllép Allen és Gale következtetésén, illetve a hálózat egyéb tulajdonságait is vizsgálva eltérő, összetettebb eredményre jut.



### 3.1. Kör alakú gráftól a teljes gráfig

Legyen adott egy  $n$  darab bankból álló hálózat. Három időpontot veszünk figyelembe, jelöljük ezeket  $t = 0, 1, 2$ -vel. A kezdeti  $t = 0$  időpontban a bankok kölcsönözhetnek egymástól, hogy befektethessenek különböző projektekbe, aminek következtében  $t = 1, t = 2$  időpontokban hozamhoz juthatnak. Tegyük fel, hogy kezdetben minden bank  $k$  egység tőkével rendelkezik, és pontosan ekkora összeget lehet befektetni az egyes projektekbe. Továbbá feltesszük azt is, hogy semelyik bank nem fektetheti be a saját tőkéjét, mindenképp kölcsönöznie kell egy másik banktól, ennek nagyságára pedig a következő szigorítást vezetjük be:  $j$  bank maximum  $k_{ij}$  egység tőkét kölcsönözhet  $i$  banktól. Megjegyezzük, hogy ez a kapcsolat nem feltétlen szimmetrikus. A kölcsönzési lehetőségek hálózatát képzeljük el súlyozott, irányított gráfként, ahol a csúcsok a bankok, az élek a lehetséges kölcsönzési kapcsolatok, melyek nagysága adja az él súlyát. (Ezekből az élekből persze nem mindegyik hitelezési kapcsolat fog megvalósulni.) Még szintén a  $t = 0$  időpontban az  $i$  bank a kölcsönzött  $k$  egység tőkéjét befekteti egy projektbe, amelyre az  $i$  bank  $r_i$  véletlen rövidtávú hozamot kap  $t = 1$  időpontban. Ez az érték minden banknál lehet különböző akár. Ha a bank a befektetését megtartja a lejáratig, ami jelen esetben a  $t = 2$  időpont, akkor a biztos, minden bank számára azonos  $A$  hozamot kapja  $t = 2$ -ben. Ha pedig likvidálja a befektetést a lejárat előtt  $t = 1$ -ben, akkor a bank 0 körüli hozamra számíthat  $t = 1$  időpont után. Ezekon kívül még feltesszük azt is, hogy a banknak van olyan  $v > 0$  nagyságú kifizetése, mely előnyt élvez a hiteleinek visszafizetéseivel szemben. (Ilyen lehet például a fizetés az alkalmazottaknak, vagy az adó a kormány felé.) Az egyszerűség kedvéért vegyük adottnak a bankközi kölcsönzések értékét és a kamatlábat is. Jelölje  $l_{ij}$  azt az összeget, amennyit a  $j$  bank kölcsönzött az  $i$  banktól, amire teljesül, hogy  $l_{ij} \leq k_{ij}$ . Ennek az adósságnak a névértéke  $y_{ij} = R_{ij}l_{ij}$ , ahol  $R_{ij}$  a kamatláb. Az  $i$  bank kötelezettségeinek összege  $t = 1$ -ben  $y_i + v$ , ahol  $y_i = \sum_{j \neq i} y_{ji}$ . Ha  $t = 1$ -ben valamelyik bank nem tudja teljesíteni a kötelezettségeit, akkor csődbe megy, és likvidálnia kell az összes befektetését, aminek az elsődlegesen teljesítendő kötelezettségek után megmaradt értéke egyenlően oszlik szét a hitelezők között. Az előbb definiált súlyozott és irányított gráfban töröljük el azokat az éleket, melyek nem megvalósult hitelezések. Változtassunk kicsit az élek súlyán: legyen az új súly a megvalósult hitelügylet névértéke. Az így kialakult pénzügyi hálózatunkat regulárisnak nevezzük, amennyiben minden bank azonos nagyságú követelésekkel és kötelezettségekkel rendelkezik, azaz  $\sum_{j \neq i} y_{ij} = \sum_{j \neq i} y_{ji} = y, \quad \forall i \in V$ -re. A követelések és a kötelezettségek ugyan bankonként megegyező nagyságúak, de a bankközi követelések eloszlása bankonként különböző lehet.

Az [1] cikk alapján nézzünk két különböző reguláris hálózattípust, melyeket a továbbiakban alkalmazni fogunk. Az egyik a gyűrű, vagy másnéven zárt hitelezési lánc, ahol minden  $i$  banknak egy hitelezője van, az  $(i - 1)$ -edik bank, és a hitel nagysága bármely két bank közt egyenlő,

jelöljük ezt az értéket  $y$ -nal. Megjegyezzük, hogy a hitel csak egy irányba folyik. Ezzel egy nagyon ritka hálózatot kapunk, míg a másik típus egy nagyon sűrű hálózat, a teljes gráf lesz. Itt feltesszük, hogy minden bank egyforma nagyságú kölcsönt vesz fel az összes többi banktól, azaz az  $i$  banknak a  $j$  banktól felvett hitelének nagysága  $y'_{ij} = \frac{y}{n-1}$ , ahol  $j \neq i$ . Definiáljunk ezen két hálózat  $\gamma$ -konvex kombinációjaként egy köztes sűrűségű hálózatot, úgy, hogy vesszük a megfelelő páronkénti szerződések összességét,  $y_{ij}$ -t és  $y'_{ij}$ -t, minden  $(i, j)$  bankpárra. Ekkor a  $j$  bank kötelezettségének névértéke az  $i$  bank felé  $\gamma y_{ij} + (1 - \gamma)y'_{ij}$  lesz, ahol  $\gamma \in [0, 1]$ . Ahogy  $\gamma$  csökken, a hálózatunk egyre sűrűbben kapcsolt lesz. Ezen a kombinált hálózaton nézzük a konkrét kifizetéseket. Legyen  $x_{js}$  az  $s$  bank visszafizetése a  $j$  bank felé a  $t = 1$  időpontban, melyre definíció szerint teljesül, hogy  $x_{js} \in [0, y_{js}]$ . Egy adott  $j$  bank teljes cash flowja legyen  $\alpha_j = c_j + r_j + \sum_{s \neq j} x_{js}$ , ahol  $c_j = k - \sum_{i \neq j} l_{ji}$ , a bank felhalmozott tartaléka. Ha  $\alpha_j$  nagyobb, vagy egyenlő, mint a bank összes kötelezettsége, azaz  $v + y_j$ , akkor a bank képes teljesíteni az összes kötelezettségét, tehát  $x_{ij} = y_{ij}$  minden  $i \neq j$ -re. Ha pedig  $\alpha_j < v + y_j$ , akkor a  $j$  bank becsődöl, és hitelezőinek csak kevesebbet, vagy semennyit nem tud visszafizetni. Konkrétan, ha  $\alpha_j \leq v$ , akkor a hitelezők nem kapnak semmit, azaz  $x_{ij} = 0$  minden  $i$ -re, mivel a  $j$  bank először az elsőbrendű kötelezettségeit teljesíti, melynek nagysága  $v$ . Amennyiben  $\alpha_j \in (v, v + y_j)$ , a  $j$  bank bankközi hiteleinek visszafizetési a szerződések névértékével arányosan, részben teljesülnek, mivel feltettük, hogy a hitelezők közül senki nem élvez elsőbbséget. Az eddigieket összegezve a  $j$  bank  $t = 1$ -beli kifizetése az  $i$  bank felé:

$$x_{ij} = \frac{y_{ij}}{y_j} \max \left[ \min \left( y_j, e_j + \sum_{s \neq j} x_{js} \right), 0 \right], \quad (3.1)$$

ahol  $e_j = c_j + r_j - v$ . Megjegyezzük, hogy amennyiben a bank nem képes teljes mértékben eleget tenni a kötelezettségeinek, akkor a hosszútávú befektetéseit is fel kell számolnia idő előtt, melynek likvidációs értékéről az előző képletben feltettük, hogy nulla.

**3.1.1. Definíció.** *Legyen adott  $c_j$  megtakarítások értéke, a bankközi szerződések  $y_{ij}$  névértéke, illetve a sokk hatására kialakult  $r_j$  érték. Ekkor az  $x_{ij}$  bankközi kifizetések fizetési egyensúlyt teljesítenek, ha minden  $i$  és  $j$  bankpárra teljesül a 3.1. egyenlőség.*

Ha ez az egyensúly fennáll, akkor nincs fertőzés a rendszerben.

**3.1.2. Állítás.** *Ez a fizetési egyensúly jól definiált fogalom, azaz bármilyen adott hálózat és sokk esetén mindig létezik, és általában egyértelmű.*

**3.1.3. Megjegyzés.** *A fizetési egyensúly pontosan akkor egyértelmű, ha  $\sum_j (r_j + c_j) \neq nv$ . Ha ez egyenlő lenne, akkor kontinuum sok egyensúly lenne.*

Egy adott hálózatban a megfelelő fizetési egyensúlyi állapothoz definiálhatunk egyéb változókat is, hogy minél jobban modellezzük a valóságot, példaképp említhetjük az úgynevezett „társadalmi felesleget” a gazdaságban, mint  $u = \sum_{i=1}^n (\pi_i + T_i)$ , ahol  $T_i \leq v$  az  $i$  bank hitelezői felé tett bankközi fizetések átutalási költsége, és  $\pi_i$  az  $i$  bank profitja.

Az eddigiek alapján rátérhetünk a bankközi visszafizetések, illetve vissza nem fizetések, és a pénzügyi fertőzés vizsgálatára a  $t = 1$  időpontban, feltéve, hogy a  $t = 0$ -ban kötött hitelszerződések adottak. Feltesszük, hogy minden kölcsönnél az  $R$  kamatláb megegyező. Így a követelések és a kötelezettségek minden banknál megegyeznek, azaz  $y = Rk$ . Feltesszük, hogy egy adott  $i$  bank rövidtávú befektetésén elért hozama a következő két értéket veheti fel:  $r_i \in \{a, a - \epsilon\}$ , ahol  $a > v$  az általános hozam, és  $\epsilon \in (a - v, a)$  a hozamot csökkentő tényező, melynek nagysága függ a negatív sokk méretétől. A rövidtávú befektetések hozamáról még feltesszük azt is, hogy független, azonos eloszlásúak.

**3.1.4. Lemma.** *Az eddigi feltételek teljesülése esetén a következő igaz:  $m$  darab negatív sokk bekövetkezése esetén a társadalmi felesleg a teljes gazdaságban  $u = (n - d)A + na - m\epsilon$ , ahol  $d$  jelöli a csődök számát.*

Tehát a társadalmi felesleg egyértelműen meghatározza a csődök számát, azaz a fertőzés elterjedésének mértékét, az adott paraméterek mellett.

**3.1.5. Definíció.** *Amennyiben  $m$  darab negatív sokk következik be, akkor a pénzügyi hálózat stabilitása az inverze a csődök várható számának, a hálózat rugalmassága pedig az inverze a lehetséges csődök maximális számának.*

A stabilitás és a rugalmasság azonban nem csak a sokkok  $m$  számától és  $\epsilon$  méretétől függ, hanem a hálózat felépítésétől is. Hogy a hálózat struktúrájától való függést tisztán láthassuk, kezdetben feltesszük, hogy csak egy bankot ér negatív sokk. Ez természetesen könnyen általánosítható a több sokkos esetre is. Először tekintsük azt az esetet, mikor egy kis méretű negatív hatás éri a hálózatot.

**3.1.6. Állítás.** *Legyen  $\epsilon^* = n(a - v)$ , és tegyük fel, hogy  $\epsilon < \epsilon^*$ . Ekkor létezik  $y^* < y$ , és a következők teljesülnek:*

- *A gyűrű hálózat a legkevésbé rugalmas és legkevésbé stabil.*
- *A teljes hálózat a legrugalmasabb és a legstabilabb.*
- *Az előbbi két hálózattípus  $\gamma$ -konvex kombinációja egyre rugalmatlanabb és instabilabb  $\gamma$  növekedésével.*

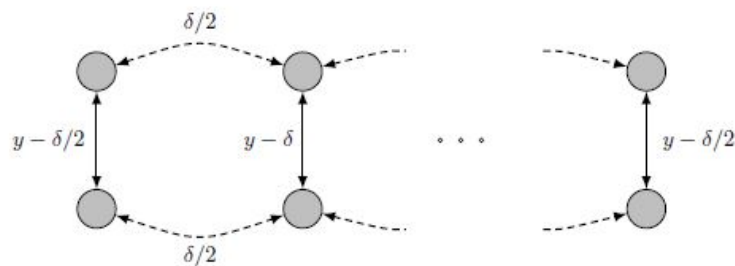
Az  $\epsilon < \epsilon^* = n(a - v)$  feltétel azt köti ki, hogy a negatív sokk nagysága kisebb, mint a teljes rendszerben lévő felesleges likviditás. (Tudjuk, hogy sokkmentes állapotban a rendszerben  $a - v$  a felesleges likviditás nagysága, miután a bankok teljesítették elsődleges kötelezettségeiket.) Az állítás másik feltétele, miszerint a bankközi kitettségek összesége nagyobb, mint egy bizonyos  $y^*$  küszöbszám, egy természetes feltételezés, ami csak azért szükséges, hogy legyen fertőzés, ugyanis arányaiban kis kitettségek esetén semmilyen típusú hálózatban nem következik be fertőzés. A gyűrű alakú hálózat nagyon törékeny, mivel bármely bankot is éri a negatív sokk, az teljes mértékben továbbadja ezt a hatást az egyetlen hitelezőjére, jó eséllyel ezzel a hitelező csődjét okozva, aki ezt szintén továbbadja az ő hitelezője felé, és így tovább. Ezzel szemben a teljes hálózat esetén a kötelezettségek egyenlő megosztása miatt jobban eloszlik a potenciális veszteség, robusztusabb lesz a hálózat, a felesleges likviditás könnyen eljut oda, ahol éppen szükséges. Ezután nézzük azt az esetet, mikor egy bankot egy nagyobb méretű sokk ér. Ehhez előbb definiáljuk a  $\delta$ -komponens fogalmát.

**3.1.7. Definíció.** Nevezzük a bankok  $M \subset N$  részhalmazát  $\delta$ -komponensnek, ha az  $M$  részhalmazon kívüli bankok összes  $M$ -beli bank felé irányuló kötelezettségének értéke legfeljebb  $\delta \geq 0$ , és az  $M$  részhalmazbeli bankok összes  $M$ -en kívüli bankok felé irányuló kötelezettsége nem nagyobb, mint  $\delta$ .

Ezt úgy képzelhetjük el, hogyha  $\delta$  viszonylag kicsi, akkor a  $\delta$ -komponens gyenge kapcsolatban áll a hálózat maradék részével, ha pedig  $\delta$  nagy, akkor ez a kapcsolat erős.

**3.1.8. Definíció.** Egy pénzügyi hálózatot  $\delta$ -összefüggőnek nevezünk, amennyiben tartalmaz  $\delta$ -komponenst.

Nézzünk egy példát a  $\delta$ -összefüggőségre: a hálózatunk álljon  $\frac{n}{2}$ , két bankból álló  $\delta$ -komponensből, ahol  $\delta < a - v$ . Ezt a példát láthatjuk a 3.1. ábrán.



3.1. ábra. Forrás: DARON ACEMOGLU, ASUMAN OZDAGLAR, ALIREZA TAHBAZ-SALEHI, *Systemic Risk and Stability in Financial Networks*, [1]

Ha a stresszhatás mérete  $2(a - v) < \epsilon < \epsilon^*$ , akkor amelyik bankot eléri, az csődbe megy, valamint fő partnerét is csődbe viszi. Kis sokkok esetén ez a hálózat kevésbé stabil és kevésbé rugalmas,

mint a teljes hálózat, ahol csak egy bank megy csődbe. Ha pedig  $\varepsilon > \varepsilon^*$ , azaz nagy méretű a sokk, akkor ez a hálózat stabilabb és rugalmasabb, mint a teljes hálózat.

**3.1.9. Állítás.** *Tegyük fel, hogy  $\varepsilon > \varepsilon^*$ , és  $y^* < y$ . Ekkor a következők teljesülnek:*

- *A gyűrű és a teljes hálózatok a legkevésbé rugalmas és legkevésbé stabil modellek.*
- *Kellően kis  $\delta$  értékre bármely  $\delta$ -összefüggő pénzügyi hálózat szigorúan stabilabb és rugalmasabb, mint a gyűrű vagy a teljes hálózat.*

Tehát, ha a negatív sokk kellően nagy, akkor a hálózatunkon fázisátmenet történik, azaz az eddig legjobban viselkedő modell most hirtelen a legrosszabb lesz. Eddig a teljes gráf volt a legstabilabb, most pedig abban az esetben, ha  $\varepsilon > \varepsilon^*$  méretű a sokk, akkor a teljes hálózat esetén minden bank csődbe megy. Ennek oka, hogy bármely bankot is éri a sokk, annak minden másik bank a hitelezője, a sokk így rögtön minden bankra hatással van, így egy elég nagy méretű negatív sokk minden bankot fizetéképtelenné tesz. De nem minden hálózat ilyen törékeny a nagy sokkok esetén. Az állítás második része kimondja, hogy a  $\delta$ -komponenst tartalmazó pénzügyi hálózatok ellenállóbbak a fertőzésekkel szemben, mint a gyűrű vagy a teljes gráf. Az ilyen gráfban az úgynevezett „gyengén kötődő” komponensek biztosítják, hogy a fertőzés nem terjed el mindenhová a hálózatban, csak a sokkot kapott bank fő hitelezői között. Az előbb láthattuk, hogy a sűrű hálózatok stabilabbak és rugalmasabbak kisebb sokkok esetén. Ám ha a sokk mérete egy adott tartományból kilép, akkor a sűrű kapcsolati hálózat a fertőzés terjedését segíti elő, ezzel növelve a rendszerkockázatot.

A fázisátmenet jelensége a sokkot felszívni képes eszközök nagyságához köthető. Ebben a modellben két ilyen eszközünk van: az egyik a nem sokkolt bankok  $a - v > 0$  felesleges likviditása  $t = 1$ -ben: hiszen a sokk mérete csökken, mikor elér egy ilyen plusz likviditással rendelkező bankot. Ez az elérés természetesen a teljes hálózatban a legkönnyebb, és az élek ritkulásával egyre romlik. A másik ilyen eszköz a stresszelt bank  $v$  elsőrendű kötelezettsége, hiszen ők is kénytelenek részt vállalni a veszteségben, ezáltal csökkentve a továbbterjedő sokk mértékét. Viszont az előzővel ellentétben, ez a ritka hálózatokon a leghatékonyabb. Tehát amikor a sokk elér egy bizonyos nagyságot, akkor a rendszerbeli felesleges likviditás ezt már nem képes felszívni, ekkor előtérbe kerül az elsőrendű hitelezők stresszhatás csökkentő ereje, de ez a sűrű hálózatokban gyengébb, ezért válik nagy sokk esetén a teljes hálózat is törékennyé.

Végül nézzük meg azt az esetet is a [1] cikk alapján, mikor nem egy bankot ér sokkhatás, hanem egyszerre többet, és így több helyről indul el a fertőzés.

**3.1.10. Állítás.** *Legyen  $m$  a negatív sokkok száma, és  $\varepsilon^* = \frac{n(a-v)}{m}$ . Ekkor léteznek  $y_m^* > y_m^{**} > 0$ , amikre teljesülnek a következők:*

- *Ha  $\varepsilon < \varepsilon_m^*$  és  $y > y_m^*$ , akkor a teljes hálózat a legstabilabb és a legrugalmasabb, míg a zárt hitelezési lánc a legkevésbé ellenálló.*
- *Ha  $\varepsilon > \varepsilon_m^*$  és  $y > y_m^*$ , akkor a gyűrű és a teljes hálózat a legkevésbé stabil illetve rugalmas, míg viszonylag kis  $\delta$  értékre, bármely  $\delta$ -összefüggő hálózat szigorúan stabilabb az előző kettőnél.*
- *Ha  $\varepsilon > \varepsilon_m^*$  és  $y \in (y_m^{**}, y_m^*)$ , akkor a teljes hálózat a legkevésbé stabil, és a gyűrű szigorúan stabilabb a teljes hálózatnál.*

Az állítás első két részét láttuk az egy helyről kiinduló sokk esetén is. Itt a többszörös sokk esetén a sokk  $\varepsilon_m^*$  kritikus értéke a kis sokkoktól a nagyobbak felé haladva az  $m$  csökkenő függvénye. A sokkok számának változása hasonló hatású, mint az egy sokk esetén a sokk méretének változása. Ez alapján itt is az előző eredményeket kapjuk vissza: amíg a felesleges likviditásnál kisebb nagyságú a sokkok összesége, addig a sűrűbb hálózatok ellenállóbbak, míg ennél nagyobb összegzett stresszhatás esetén a gyengébben kapcsolódó hálózatok a stabilabbak, hiszen azáltal, hogy nincsenek mindenhol kapcsolatok, a rendszer egy részét megvédi a fertőzéstől. Az állítás harmadik részében új eredményt láthatunk, melynek oka, hogy itt a többszörös sokkok esetén a gyűrű hálózatban az elsődleges hitelezők követeléseinek sokkfelszívó hatása jóval hatékonyabb. Ugyanis ha közeli bankokat ér egyszerre stresszhatás, akkor ezt továbbadják egymásnak, így mindenhol érvényesül az elsődleges hitelezők sokkfelszívó hatása. Ez korlátozza a fertőzés elterjedésének mértékét a hálózatban. Megjegyezzük, hogy további általánosítások is végezhetőek, amennyiben a sokkokat nem csak két lehetséges értékkel, hanem bonyolultabb eloszlással határozzuk meg.

### **3.2. A rendszerkockázat terjedésének összehasonlítása az Erdős–Rényi típusú, illetve a Barabási–Albert gráfmodellen**

A 2. fejezetben ismertetett Erdős–Rényi, illetve Barabási–Albert típusú gráfmodelleket és megismert tulajdonságaikat alkalmazzuk ebben a modellezésben, és a [29] cikk eredményeit használjuk fel. Ebben a részben a rendszerkockázati események elterjedésének vizsgálatához sok befolyásoló tényezőt figyelembe veszünk, többek közt nem csak a hálózat struktúráját, hanem pénzügyi paramétereket is, például a tőkeáttétel arányát (azaz az idegen tőke/saját tőke arányát), a bankközi kitétségek nagyságát, a befektetések hozamát, és a bankközi kamat nagyságát. Ezek segítségével megállapítunk egy kritikus fokszámot, melynek átlépése alapvető változást hoz a fertőzés elterjedésének mértékében.

Azzal, hogy több szempontot veszünk figyelembe, egyrészt jobban tudjuk modellezni a valóságot, másrészt többféle sokkot tudunk modellezni, ezzel kimutatva a pénzügyi hálózat esetleges

hibáit, sérülékenyebb pontjait. Ezzel szemben a rendszerkockázattal foglalkozó cikkek egy részében a fertőzés terjedését mindössze a hálózat összekapcsoltságának függvényében nézik. Erre fekteti a hangsúlyt például Cabrales, Gottardi és Vega-Redondo (2013.) a [18] cikkben, ahol a sokkok eloszlása és az összekapcsoltság közti viszonyt vizsgálták, eredményük pedig a következő: vastagfarkú eloszlással modellezett sokk esetén a minimális összekapcsoltság, a hálózat erős szegmentálása minimalizálja a fertőzés terjedését, míg ellenkező esetben az erős összekapcsoltság a szerencsés, mert így a jobb kockázatmegosztás miatt kevesebb a fertőzés.

Térjünk rá Agam Gupta és szerzőtársai (2013.) [29] cikkében szereplő modell bemutatására. A továbbiakban használt jelölések nagyrészt megegyeznek a 3.1. alfejezetben használtakkal. Bevezetünk néhány új jelölést is:  $\Lambda$  jelölje a tőkeáttételt,  $f$  pedig jelölje a bankközi kitettségeket. Tekintsük át röviden a bankközi kitettségek hálózatának felépítését, valamint a továbbiakban felhasználásra kerülő összefüggéseket. Az alapmodellünk a 3.1. részben bemutatott felépítéshez hasonló:  $n$  csúcsból áll, 2 periódusos kereskedést vizsgálunk,  $t = 0$ -ban a bankok hiteleket vehetnek fel, és ezt felhasználva befektethetnek. Ezután itt feltesszük, hogy  $t = 1$ -ben a bankok befektetései  $R$  hozamot hoznak, és szintén ebben az időpontban eleget kell tenniük a kötelezettségeiknek, vissza kell fizetni a hiteleiket, melynek kamata  $r$ , ahol  $R > r > 1$ . Az elsőrendű kötelezettségeket is  $t = 1$ -ben kell kifizetniük a bankoknak. Ekkor éri egy exogén sokk a hálózatot, pontosabban egyetlen bankot, mégpedig úgy, hogy a befektetéseinek hozama 0 lesz, tehát, ha az  $i$  bankot éri a sokk, akkor  $R_i = 0$ . Ha így a bank teljes bevétele kevesebb lesz, mint amennyit vissza kellene fizetnie, akkor a bank csődbe megy. Ezzel lehet, hogy hitelezőit is csődbe viszi, és így tovább, egy bank csődje kiválthat egy rendszerszintű fertőzést. A továbbiakban azt vizsgáljuk mik segítik elő egy ilyen fertőzés kialakulását.

Az  $i$  csúcsból akkor mutat irányított él  $j$  csúcs felé, ha az  $i$  bank adott hitelt a  $j$ -banknak, azaz  $l_{ij} > 0$ . Az  $i$  bank eszközeinek összessége a következő:  $A_i = l_i + \lambda_i + \iota_i$ , ahol  $l_i = \sum_{j \neq i} l_{ij}$  az  $i$  bank bankközi kiadott hiteleinek összessége,  $\lambda_i$  a bank egyéb likvid eszközeinek összessége (például: készpénz, kötvények, stb.),  $\iota_i$  pedig a bank illikvid eszközeit jelöli. Feltesszük, hogy az egyes eszközök aránya állandó:  $f = \frac{l_i}{A_i}$ ,  $f^{(\lambda)} = \frac{\lambda_i}{A_i}$ ,  $f^{(\iota)} = \frac{\iota_i}{A_i}$ . A források összessége a következő:  $L_i = b_i + \sigma_i$ , ahol  $b_i = \sum_{j \neq i} l_{ji}$  a felvett bankközi hitelek összessége, és  $\sigma_i$  jelöli az elsőrendű kötelezettségeket, mint például a betéteket, melyek visszafizetése magasabb prioritású a bankközi hitelek törlesztésénél. (Itt eltérünk az a 3.1. rész jelölésétől, ahol ezt a kategóriát  $v$ -vel jelöltük.) Ezenkívül adott még a saját tőke nagysága, melyet  $K_i$ -vel jelölünk az  $i$  bank esetén. Tegyük fel, hogy a tőkeáttétel nagysága állandó, azaz  $\Lambda = \frac{A_i}{K_i}$ , illetve, hogy a saját tőke nagyságát megkaphatjuk a következőképp:  $K_i = A_i - L_i$ . A saját tőke számvitelileg a forrás oldalon jelenne meg, ám mi ezt most maradékelven határozzuk meg a [29] cikk alapján, az előbb definiált eszközök és források különbségként. Ekkor egy adott  $i$  bank elsőrendű kötelezettségének értékét kiszámolhatjuk a következőképpen:  $\sigma_i = \frac{\Lambda-1}{\Lambda} (l_i - b_i)$ .

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy minden bank az összes forrását felhasználva befektet, így a hozama a következő lesz:  $\varrho_i = (R_i - 1)L_i = (R_i - 1)\frac{\Lambda - 1}{\Lambda}A_i$ , ahol  $R_i$  most a kamatlábat jelöli, ami egy sikeres befektetés esetén egynél nagyobb, egy sikertelen befektetés, vagy sokk esetén pedig egynél kisebb. Miután lejártak a befektetések, és minden bank megkapta a hozamokat is, visszafizetik az elsőrendű kötelezettségeket, majd a bankközi kitettségeik kamattal növelt értékét is. (Itt a kamatláb  $r$ .) Természetesen ekkor az adott bank is visszakapja azt az összeget kamattal megnövelve, amit ő adott hitelbe más bankoknak, jelöljük ezt általánosan  $x_{ki}$ -vel az  $i$  bank esetén. Ekkor az egyes bankok visszafizetései a következőképp alakulhatnak:

- Teljes visszafizetésről beszélünk, ha  $\varrho_i + \lambda_i - \sigma_i + \sum_{k \neq i} x_{ki} \geq rb_i$ , ekkor az  $i$  bank vissza tudja fizetni az összes bankközi kitettségét, azaz minden  $j \neq i$  esetén  $x_{ij} = rl_{ji}$ .
- Részleges csődről beszélünk, ha  $0 < \varrho_i + \lambda_i - \sigma_i + \sum_{k \neq i} x_{ki} < rb_i$ , ekkor az  $i$  bank csak a kitettségeinek egy részét tudja visszafizetni, természetesen a kitettségekkel arányosan, azaz minden  $j \neq i$  esetén  $x_{ij} = \frac{l_{ji}}{b_i} (\varrho_i + \lambda_i - \sigma_i + \sum_{k \neq i} x_{ki})$ .
- Teljes csődről beszélünk, ha  $\varrho_i + \lambda_i - \sigma_i + \sum_{k \neq i} x_{ki} \leq 0$ , ekkor az  $i$  bank semennyit nem tud törleszteni bankközi kitettségeiből, azaz minden  $j \neq i$  esetén  $x_{ij} = 0$ .

Ezt összegezhethetjük egyetlen formulában is:

$$x_{ij} = \frac{l_{ji}}{b_i} \max \left\{ \min \left\{ \varrho_i + \lambda_i - \sigma_i + \sum_{k \neq i} x_{ki}, rb_i \right\}, 0 \right\}. \quad (3.2)$$

Jelölje  $x_i = \sum_{j \neq i} x_{ij}$  az  $i$  bank kifizetéseinek összességét. Ekkor azt mondhatjuk, hogy az  $i$  bank részleges csődben van, ha  $0 < x_i < rb_i$ , valamint teljes csődben van, ha  $x_i = 0$ . Valamint nevezzük az adott  $i$  csúcsot kritikusként, amennyiben pontosan csak a bankközi kitettségeit tudja visszafizetni, ezután nem marad semmije, azaz  $\varrho_i + \lambda_i - \sigma_i + \sum_j \frac{l_{ij}}{b_j} x_j = rb_i$ . Miután minden visszafizetés megtörtént, az  $i$  bank tőkéje a következő lesz:  $K'_i = \varrho_i + \lambda_i + \nu_i - \sigma_i + \sum_{k, j \neq i} (x_{ki} - x_{ij})$ . Ezután az  $i$  bankot biztonságosnak nevezhetjük, ha  $K'_i \geq 0$ , illetve csődösnek nevezhetjük, ha  $K'_i < 0$ . A csődös bankok számát jelölje  $F$ .

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy hogyan változik az  $F$  értéke a hálózat szerkezete, valamint a különböző pénzügyi paraméterek: bankközi kitettség, tőkeáttétel, hitelezési és betéti kamatlábak függvényében. A következő részben ezen tényezők függvényében adunk egy  $k^*$  kritikus fokszámot, mely azt mutatja meg, hogy a csőd akkor terjed tovább a kezdeti sokkból nem részesülő bankokra, ha  $k \leq k^*$ . Az egyszerűség kedvéért az illikvid eszközöket nem vesszük figyelembe, azaz  $\nu_i = 0$  minden  $i$  banknál. Ebből következően teljesül, hogy  $f^{(\lambda)} = 1 - f$ .



### 3.2.1. A csődök várható számának kritikus értéke

Először tekintsük a reguláris hálózat esetét, ahol a be- és ki-fokszámok minden  $i \in \{1, \dots, n\}$  csúcs esetén megegyeznek  $k$ -val. Ez abból a feltételezésből következik, hogy  $l_i = b_i = k$ , így a (3.2) visszafizetés egyenlete a következőképp írható fel:

$$x_i = \max \left\{ \min \left\{ \rho_i + \lambda_i - \sigma_i + \sum_{l \neq i} x_{li}, r b_i \right\}, 0 \right\},$$

majd ezt a következő alakra hozhatjuk:

$$x_i = \max \left\{ \min \left\{ \eta_i k + \sum_{l \neq i} \frac{x_{li}}{k}, r k \right\}, 0 \right\},$$

ahol  $\eta_i = \frac{2-\Lambda}{\Lambda f}$ , amennyiben  $i$  a sokkolt bank, illetve  $\eta_i = \frac{(R-1)\Lambda + (2-R)}{\Lambda f}$  különben.

Továbbá tegyük fel, hogy a sokkolt banktól  $d$  távolságra lévő bankok egységesen  $x_d$  összeget fizetnek vissza. Így az  $x_i$  értékeket a következőképp határozhatjuk meg a sokkolt bank esetén:

$$x_0 = \max \left\{ \frac{2-\Lambda}{\Lambda f} k + x_1, 0 \right\}, \quad (3.3)$$

valamint a sokkolt bank közvetlen szomszédai esetén:

$$x_1 = \max \left\{ \min \left\{ \eta_i = \frac{(R-1)\Lambda + (2-R)}{\Lambda f} k + \frac{x_0 + c_0(k-1)x_1 + (1-c_0)(k-1)x_2}{k}, r k \right\}, 0 \right\},$$

ahol  $c_0$  a sokkolt bank klaszterezettségét jelöli.

**3.2.1. Definíció.** *Klaszterezettség alatt azt értjük, hogy egy gráfban egy adott csúcs szomszédai egymással is össze vannak e kötve, azaz az adott csúcs szomszédainak részgráfja milyen közel van a reguláris gráfhoz. Tehát egy csúcs klaszterezettségét a szomszédai között ténylegesen meglévő élek számának és a szomszédai között behúzható maximális élek számának aránya adja meg.*

A  $k^*$  kritikus fokszámot azon feltétel mellett definiáljuk, hogy csak a kezdetben sokkolt bank megy csődbe, és minden közvetlen szomszédja kritikus állapotba kerül. Ez azt is jelenti, hogy  $x_1 = x_2 = r k^*$  és  $\eta k^* + [x_0 + c_0(k^* - 1)r k^* + (1 - c_0)(k^* - 1)r k^*] / k^* = r k^*$ . Ezen formula illetve a (3.3) egyenlet alapján  $k^*$  értéke a következő:

$$k^* = \left( \frac{r - \max \left\{ r - \frac{\Lambda-2}{\Lambda f}, 0 \right\}}{(R-1)\Lambda + (2-R)} \Lambda f \right). \quad (3.4)$$

Két esetet különböztetünk meg:

- Az egyik, mikor a sokkolt bank teljesen becsődöl, azaz  $f < \frac{\Lambda-2}{\Lambda r}$ , ekkor a kritikus fokszám az  $r$  bankközi kamatlábtól függ:

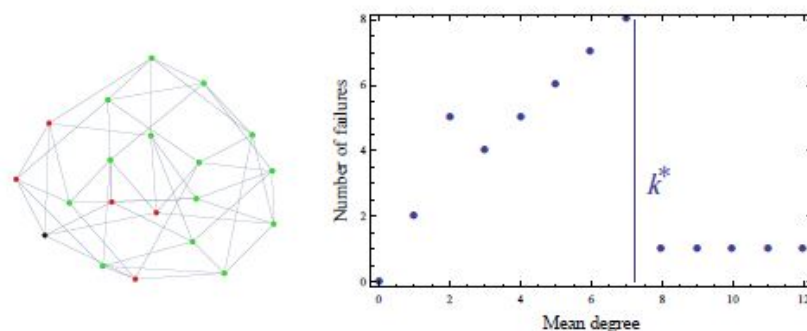
$$k^* = \frac{r f \Lambda}{(R-1)\Lambda + (2-R)}.$$

- A másik, amikor a sokkolt bank csak részlegesen megy csődbe, azaz  $f \geq \frac{\Lambda-2}{\Lambda r}$ , ekkor a kritikus fokszám nem függ sem az  $r$  bankközi kamatlábtól, sem az  $f$  hitelkiadások nagyságától, ekkor

$$k^* = \frac{\Lambda - 2}{(R - 1)\Lambda + (2 - R)}.$$

Azt is megfigyelhetjük, hogy nagy tőkeáttétel esetén, és nagy bankközi kitettségek ( $f \rightarrow 1$ ) esetén a (3.4) kifejezés határértékben körülbelül a következővel egyezik meg:  $k^* \simeq \frac{1}{R-1}$ . Így határértékben a kritikus fokszám a befektetési hozam inverze, emiatt jellemzően nagy értékeket vesz fel.

A  $k$ -reguláris hálózat esetén tehát azt mondhatjuk, hogyha  $k \geq k^*$ , akkor valószínűleg csak a kezdetben sokkolt bank megy csődbe, tehát  $F = 1$ . Ha  $k < k^*$ , de  $k$  nem túlzottan kicsi, akkor a sokkolt bank közvetlen szomszédai mennek csődbe, és más bank nem, azaz  $F = 1 + k$ . Ha pedig  $k$  jóval kisebb értéket vesz fel, mint  $k^*$ , akkor  $F > 1 + k$ .



3.2. ábra. Csődök alakulása a reguláris gráfban [29]

A 3.2. ábra bal oldalán egy  $n = 20$  csúcsú,  $k = 5$  fokszámú gráfot láthatunk, ahol a sokkolt bank fekete színnel, a becsődöltek pirossal, a biztonságosak pedig zölddel vannak jelölve. Ugyanezen ábra jobb oldalán pedig egy  $k$ -reguláris gráfban történő csődök számát láthatjuk  $k$  függvényében, amennyiben a paraméterek a következők:  $n = 20$ ,  $R = 1.05$ ,  $r = 1.01$ ,  $f = 0.7$ ,  $\Lambda = 20$ . A behúzott függőleges vonal pedig a (3.4) egyenlet alapján meghatározott  $k^*$  kritikus értéket jelzi.

Nézzük meg általánosabb hálózati struktúra esetén hogyan alakul a csődök száma a kritikus fokszám függvényében. A reguláris gráfok esetén kapott eredményeken átlagszerű megközelítést alkalmazva a csődök várható számára, az eddigi eredmények kiterjeszthetők általánosabb gráfokra, például skálafüggetlen gráfokra is. A megközelítés a következő feltételezéseken alapul:

- Irányított gráfok esetén feltesszük, hogy egy adott csúcs be- illetve ki-fokszáma megegyezik. Így egy adott csúcs átlagos be- és ki-fokszámára a továbbiakban a csúcs átlagos fokszáma-

ként hivatkozunk. Persze ez csúcsonként különbözhet, tehát a csúcsok eltérő fokszámúak lehetnek.

- Feltesszük, hogy minden  $k_i$  fokszámú  $i$  csúcs úgy reagál egy másik bank csődjére, mintha minden bank fokszáma  $k_i$  lenne, tehát példaképp a sokkolt bank közvetlen szomszédai akkor csődölnek be, ha  $k_i < k^*$ .

Jelölje  $f(k)$  a kumulatív fokszámeloszlást, ami alatt itt annak a valószínűségét értjük, hogy egy adott banknak a be- és ki-fokszáma kisebb, mint  $k$ . Ekkor

$$|F| = 1 + kf(k^*), \quad (3.5)$$

ahol  $k$  a hálózat átlagos fokszáma. Ennek a durva közelítésnek az érvényességét is teszteljük a következő alfejezetben.

### 3.2.2. A csődök számának alakulása a hálózati struktúra függvényében

A modellezéshez két irányítatlan és két irányított gráfmodellt használunk fel.

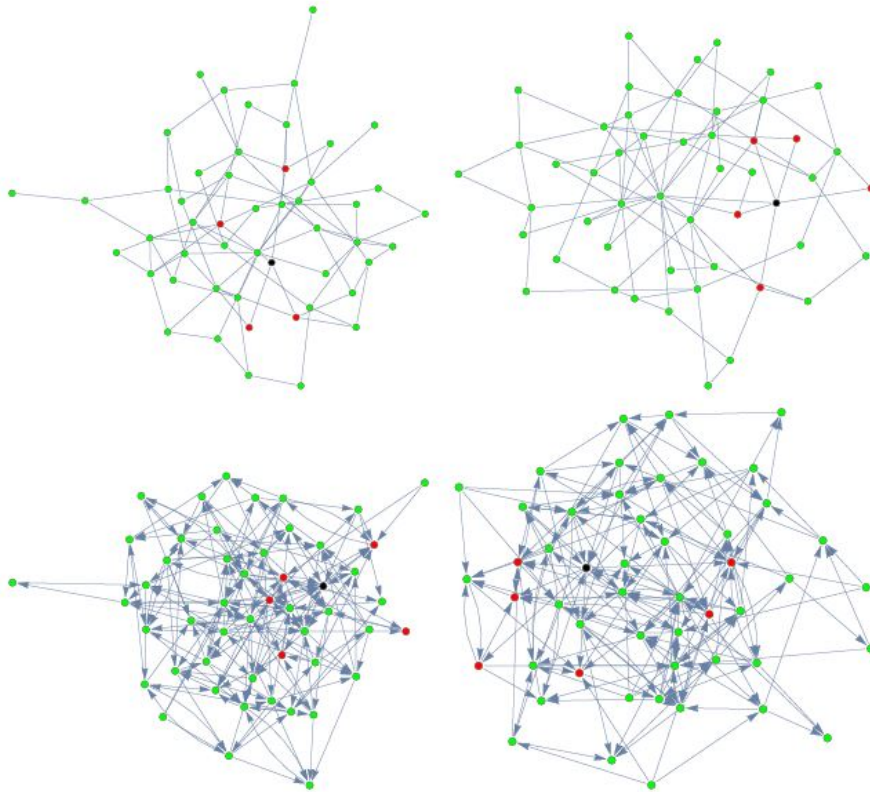
Az irányítatlan modellekkel gyakorlatilag azt az esetet modellezhetjük, mikor a hitelezési kapcsolat kölcsönös: ha  $i$  bank kölcsönöz  $j$ -től, akkor  $j$  bank is kölcsönöz  $i$ -től. Ez persze a valós pénzügyi hálózatokban nem teljesül, viszont egyszerűsíti az alapvető tulajdonságok vizsgálatát, ami után egyszerűbb akár kiterjeszteni a modellt irányított esetre is. A 2. fejezetben már megismerhettünk néhány gráfmodellt, melyeket most használni fogunk. Az egyik az irányítatlan Erdős–Rényi modell, mely Poisson-fokszámeloszlást követ, és az átlagos fokszáma  $k = p(n - 1)$ . A másik irányítatlan modellünk a Barabási–Albert modell, melynek fokszámeloszlása elég nagy csúcsszám esetén hatványrendben cseng le, körülbelül  $-3$  farokkitevővel.

Az irányított gráfoknál már nem szükséges a hitelezési kapcsolatok kölcsönössége, így ezekkel nyilvánvalóan valósághibb modelleket készíthetünk. Az Erdős–Rényi modellt könnyen kiterjeszthetjük irányítottá, ha  $p$  valószínűséggel irányított éleket húzunk be az  $n$  csúcs között, ekkor a be- illetve ki-fokszámok eloszlása szintén Poisson, az átlagos fokszámok is megegyeznek az irányítatlan esettel. A Barabási–Albert modellnél nem egy ilyen egyértelmű kiterjesztést alkalmazunk, hanem helyette a Goh-Kahn-Kim féle irányított skálafüggetlen modellt használjuk fel a szimulációhoz, melynek leírása a [35] cikkben szerepel. Ez a hálózat szintén  $n$  csúcsból áll, és definiálásához vezessük be a következő két valószínűségeloszlást:  $p_{in}(i) = i^{-\alpha_{in}} / \sum_{j=1}^n j^{-\alpha_{in}}$ , valamint  $p_{out}(i) = i^{-\alpha_{out}} / \sum_{j=1}^n j^{-\alpha_{out}}$ , ahol  $0 \leq \alpha_{in}, \alpha_{out} < 1$ . Ekkor egy véletlenszerűen választott  $i$  csúcsból húzzunk éleket a  $p_{in}$  eloszlás szerint, egy szintén véletlenszerűen választott  $i'$  csúcsból pedig a  $p_{out}$  eloszlás szerint. Ha  $i \neq i'$ , akkor húzzunk egy irányított élt  $i$  csúcsból az  $i'$  csúcsba. Ismételjük meg ezt  $nk$  alkalommal, és végül hagyjuk el a többszörös éleket, amennyiben kelet-

keztek. Az így kapott hálózat be- és ki-fokszámainak eloszlása hatványrendű,  $\frac{\alpha_{in}+1}{\alpha_{in}}$ , és  $\frac{\alpha_{out}+1}{\alpha_{out}}$  farokkitevőkkel.

Megjegyezzük, hogy ezek a gráfok kiterjeszthetők súlyozottakká is, tetszőleges eloszlás szerint súlyokat rendelve az élekhez, ezzel megadva a hitelezések heterogentiását, de ezt ebben a részben most nem alkalmazzuk.

Térjünk rá az előző modelleken végzett [29] cikkben szereplő szimulációk numerikus eredményeinek ismertetésére. A 3.3. ábrán láthatjuk az előző bemutatás sorrendjében mind a négy modell esetén a fertőzés terjedésének egy lehetséges alakulását, amennyiben  $n = 50$ ,  $k = 4$ ,  $R = 1.05$ ,  $r = 1.01$ ,  $f = 0.7$ ,  $\Lambda = 20$ .



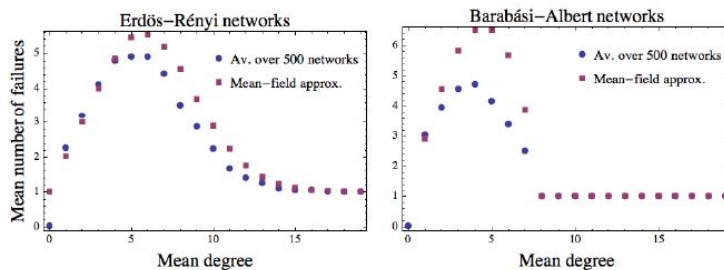
3.3. ábra. Csődök szimulálása ([29] cikk, 6. ábra)

A szimulációkból a következő eredményeket vonhatjuk le, melyek az elméleti megközelítések helyességét igazolják:

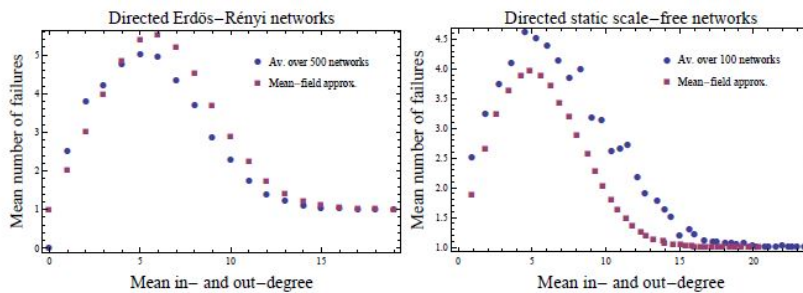
- Minden modell esetén van egy úgynevezett fázisátmenet, ugyanis ha  $k \gg k^*$ , akkor a fertőzés nagy valószínűséggel nem terjed el, míg ha  $k \leq k^*$ , akkor igen. Ez persze csak akkor teljesül, ha a fokszám nem túl kicsi, ugyanis nagyon kis  $k$  érték esetén a sokkolt

bank esetleges izolációja megvédheti a hálózatot a fertőzés elterjedésétől. Az átmenet a skálafüggetlen eseteknél lépcsőzetesebb, mivel a fokszámeloszlás itt kevésbé egyenletes.

- Az átlag-központú megközelítés egyszerűsége ellenére jó eredményeket ad a csődök várható számára, ezt láthatjuk a 3.4. és a 3.5. ábrákon. A Barabási–Albert modell esetén a 3.5. formula enyhén túlbecsli a csődök átlagos számát, míg az irányított skálafüggetlen gráfmodell esetén alulbecsli.



3.4. ábra. Csődök várható száma az irányítatlan gráfokban az átlagos fokszám függvényében ([29], 7. ábra)



3.5. ábra. Csődök várható száma az irányított gráfokban az átlagos fokszám függvényében ([29] cikk, 8. ábra)

Azonban önmagában a csődök átlagos számából még nem tudjuk meg, hogy mekkora az esélye egy rendszerszintű fertőzés elterjedésének, azaz mikor terjed ki a fertőzés a hálózat egy szignifikáns hányadára. A szimulációk azt mutatják, hogy míg a csődök átlagos száma valamivel kisebb a skálafüggetlen esetekben, addig a rendszerszintű összeomlás valószínűsége lényegesen nagyobb, mint a Poisson-fokszámeloszlású modelleknél. Ez a robusztus, ám mégis törékeny természetét mutatja a skálafüggetlen gráfoknak, aminek oka, hogy a gráfban sok alacsony fokszámmal rendelkező csúcs van, ami robusztusságot ad a hálózatnak, de van pár kiugróan magas fokszámú csúcs, ami törékennyé teheti azt.

A kapott elméleti eredmények akár valós pénzügyi hálózatokon is tesztelhetők, valós pénzügyi paraméterekkel. Így egy adott hálózatra is meghatározható a kritikus fokszám, és erre akár szabályozást bevezetve csökkenthető a rendszerkockázati fertőzés elterjedésének valószínűsége. Egy valós hálózatot modellezni azonban jóval nehezebb, hiszen rengeteg adat szükséges hozzá, valamint a hálózat és a paraméterek pontos ismerete, és a gyorsan változó hitelportfóliók alakulásának nyomon követése. Illetve, ha a véletlen hálózatokon való modellezésnél maradunk, akkor is rengeteg lehetőség van az előbbi rendszerkockázati modellezés bővítésére: akár több bankot is érinthet a kezdeti sokk, súlyozhatjuk az éleket, az átlagos fokszámok vizsgálata helyett alkalmazhatunk pontosabb megközelítést. Vagy akár több periódusú kereskedést is modellezhetünk, amivel még jobban közelíthetjük a valóságot. A kezdeti befektetések is lehetnek különböző kamatúak, ezáltal heterogénebb befektetési struktúrát modellezve, vagy az esetlegesen előforduló nagy várható kamatkülönbségek akár homogenitást is okozhatnak a befektetések terén, ezzel újabb veszélynek kiteve a hálózatot, amennyiben a többség által preferált befektetés megbukik, vagy nagyon alacsony hozamot hoz.

### 3.3. A rendszerkockázat terjedése egy kiterjesztett konfigurációs modellen

Ebben az alfejezetben Hamed Amini, Rama Cont és Andreea Minca [3] cikkének eredményeit mutatjuk be, mely a konfigurációs modell egy adott változatát használja a banki rendszerkockázat terjedésének elemzéséhez, és az elméleti eredményeit szimuláció segítségével egy valós méretű hálózaton is teszteli. A konfigurációs modellt már ismertettük röviden a 2.3. szakaszban. Most ennek a modellnek egy olyan kibővített változatát fogjuk alkalmazni, ahol az élek irányítottak és súlyozottak is.

Nézzük a bankközi kitettségek hálózatának felépítését, és az ehhez szükséges fogalmakat. A pénzügyi intézmények kapcsolatait itt is súlyozott, irányított  $G = (V, e)$  gráfként modellezzük, ahol a csúcsok  $V = \{1, \dots, n\}$  a pénzügyi intézményeket jelképezik. A súlyozott éleket pedig egy  $e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -es kitettségi mátrixként értelmezzük, amelynek  $e(i, j)$  eleme az  $i$  bank által a  $j$  bank felé nyújtott hitel értéke. Az  $i$  csúcsból akkor mutat irányított él a  $j$  csúcs felé, ha az  $i$  bank adott hitelt a  $j$  banknak, azaz  $j$ -nek kötelezettsége van  $i$  felé. Az  $i$  bank bankközi eszközeinek összességét jelöljük a következőképp:  $A_i = \sum_j e(i, j)$ . Hasonlóan  $B_i = \sum_j e(j, i)$  jelölje az  $i$  bank bankközi forrásait. Természetesen ezeken kívül bármely banknak lehetnek más eszközei és forrásai is, mint például nem bankközi hitelek, befektetett eszközök, valamint a saját tőke, és a betétek. Az  $i$  bank egyéb, nem bankközi eszközeit jelöljük  $X_i$ -vel, a nem bankközi forrásokat pedig egyszerűsítve két részre osztjuk: a betétek összegét jelöljük  $D_i$ -vel, a bank saját tőkéjét pedig  $C_i$ -vel, melyről feltesszük, hogy  $C_i = \gamma_i A_i$ . A saját tőke nagysága adja meg azt az értéket,

amekkora veszteséget a bank képes elviselni, anélkül, hogy inszolvenssé válna. (Amennyiben egy bank tőkéje nullára, vagy negatív értékűre csökkenne, akkor a  $\gamma$  értékét nullaként adjuk meg.) A  $\gamma_i$  érték jelöli a saját tőke arányát a bankközi eszközökhöz képest az  $i$  bank esetén, a továbbiakban erre az értékre a tőke arányaként fogunk hivatkozni, ami nem szokványos, mert általában ezt a teljes mérleg eszközeinek összeségéhez képest szokás nézni, de ez számunkra csak egy technikai egyszerűsítés.

Az eddigi ismereteink alapján adott  $V = \{1, \dots, n\}$  csúcshalmaz esetén az  $(e, \gamma)$  párossal definiálhatunk egy pénzügyi hálózatot, ahol  $\{e(i, j)\}_{1 \leq i, j \leq n}$  adja a kitettségi mátrixot, és  $\{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq n}$  az egyes bankok tőkearányát. A csúcsok fokszámára pedig az alábbi jelölést vezetjük be:  $d^-(i) = \#\{j \in V | e(j, i) > 0\}$  legyen az  $i$  csúcs be-fokszáma, ami azt jelöli, hogy hány bank adott hitelt az  $i$  banknak, illetve  $d^+(i) = \#\{j \in V | e(i, j) > 0\}$  az  $i$  csúcs ki-foka, ami azt mutatja, hogy az  $i$  banknak hány másik banknál van kitettsége. A kezdetben fizetéképtelen bankok halmazát jelöljük a következőképp:  $D_0(e, \gamma) = \{i \in V | \gamma_i = 0\}$ .

Vizsgáljuk meg egy adott, kezdetben inszolvens bank vagy bankcsoport esetén a fertőzés terjedésének mechanizmusát. Példaképp tegyük fel, hogy kezdetben csak a  $j$  bank ment csődbe, innen indul ki a fertőzés. Ekkor minden  $i$  bank, aki felé a  $j$  banknak kötelezettsége volt,  $(1 - R_j)e(i, j)$  veszteséget szenved el, ahol az  $R_j$  a  $j$  bankhoz tartozó „recovery rate”, azaz megtérülési ráta. Ha az előbbi veszteség meghaladja az  $i$  bank saját tőkéjének mértékét, akkor az adott  $i$  bank inszolvenssé válik. Így az első körben csődbe kerülő bankok halmaza a következő:

$$D_1(e, \gamma) = \left\{ i \in V | \gamma_i A_i < \sum_{j \in D_0} (1 - R_j) e(i, j) \right\}.$$

A terjedést ugyanígy tovább folytatva a  $k$ -edik lépésben inszolvenssé váló bankok halmaza, melyek a  $D_{k-1}(e, \gamma)$  halmazbeli bankok csődje miatt válnak fizetéképtelenné, a

$$D_k(e, \gamma) = \left\{ i \in V | \gamma_i A_i < \sum_{j \in D_{k-1}} (1 - R_j) e(i, j) \right\}$$

halmaz lesz. A csőd terjedése tehát időben diszkrét, egy adott körben mindig csak olyan csúcsok mehetnek csődbe, melyeknek már van fertőzött szomszédja. A fertőzés terjedése maximum  $n - 1$  lépésen keresztül tarthat, ugyanis a hálózatunk  $n$  bankból áll, tehát ha a fertőzés  $n - 1$  lépésen keresztül fennmarad, akkor addigra a veszteség hullám már minden bankhoz elért.

Az előbbieket szerint a csőd tehát a mérleg szerinti inszolvenca alapján kerül meghatározásra. Azaz egy bank akkor megy csődbe, ha a meg nem térülő kintlévőségeinek összege túllépi a saját tőkéjének értékét. Vagyis, ha az  $i$  bank adott a  $j$  banknak hitelt, azaz megy irányított él  $i$ -ből  $j$ -be, és a  $j$  bank valamilyen okból kifolyólag csődbe megy, akkor az  $(1 - R_j)e(i, j)$  veszteség értékével csökken az  $i$  kitettségeinek értéke. Ha így a veszteségek összessége már nagyobb lesz, mint a saját tőkéjének értéke, akkor az  $i$  bank csődbe megy. A következő definícióban nézzük az

$n - 1$  lépés utáni arányt, hiszen ennyi lépés után már biztos nincs fertőzés a gráfban, ez lesz a becsődölt bankok végső aránya.

**3.3.1. Definíció.** Egy  $V = \{1, \dots, n\}$  csúcshalmazon legyen adott egy  $(e, \gamma)$  pénzügyi hálózat. Ha a kezdetben inszolvens bankok halmaza  $D_0(e, \gamma)$ , akkor a hálózatban a csődök aránya  $n - 1$  lépés után  $\alpha_n(e, \gamma) = \frac{1}{n}|D_{n-1}(e, \gamma)|$ .

A megtérülési ráta lehet exogén paraméter a modellben, vagy belső paraméter is. Utóbbi esetben ezt értelmezhetjük úgy, hogy a bank a fennálló adósságaival arányosan szétosztja eszközeit a hitelezői között, akik így kevesebb kárt szenvednek el. Viszont ez a valóságban általában nem teljesül, mivel a becsődölt intézmény felszámolása hosszú ideig tart, és ezalatt jelentős értékcsökkenés következik be. Ha a csődök rövidtávú következményeit nézzük, akkor talán az a legrealisabb, ha a megtérülési arányt nullának vagy alacsony értékűnek feltételezzük, ugyanis az eszközöket csőd esetén nagy valószínűséggel befagyasztják, míg fel nem számolják a teljes bankot, így rövidtávon a hitelező nem kap semmit. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a megtérülési arány minden banknál egyforma, azaz konstans, tehát  $R_j = R, \quad \forall j \in V$ .

Ezután hozzuk létre  $(e_n, \gamma_n)_{n \geq 1}$  pénzügyi hálózatok sorozatát, ahol  $n$  továbbra is a csúcsok számát jelöli. Az  $n$ . gráfban a bemenő fokszámok sorozata  $d_n^- = \{d_n^-(i)\}_{i=1}^n$ , a kimenő fokszámok sorozata pedig  $d_n^+ = \{d_n^+(i)\}_{i=1}^n$ , az  $e_n$  élhalmaz esetén. Konstruáljunk véletlenszerűen egy  $E_n$  kitettségi mátrixot, melyből egy adott minta az  $e_n$  élhalmaz.

**3.3.2. Definíció.** Definiáljuk a véletlen hálózatok sorozatát pontosabban. Legyen  $G_n(e_n)$  az összes olyan súlyozott és irányított gráf halmaza, ahol a be- illetve kimenő fokszámok sorozata  $d_n^-, d_n^+$ . Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  valószínűségi mező. Definiáljuk az  $E_n : \Omega \rightarrow G_n(e_n)$  véletlen irányított gráfot egyetlen választással, azaz egyetlen eloszlás alapján a  $G_n(e_n)$  halmazon.

Rendeljünk hozzá minden  $E_n$ -beli csúcshoz egy  $\gamma_n$  tőkearányt. Ekkor minden  $i = 1, \dots, n$  csúcsra teljesül, hogy

$$\{E_n(i, j) | E_n(i, j) \neq 0\} = \{e_n(i, j) | e_n(i, j) \neq 0\}$$

$\mathbb{P}$  mérték szerint majdnem mindenütt, azaz egy valószínűséggel, valamint teljesülnek a következők:  $\#\{j \in V | E_n(j, i) > 0\} = d_n^+(j)$  és  $\#\{j \in V | E_n(i, j) > 0\} = d_n^-(j)$ .

Azaz a hálózatunk véletlen generálása úgy történik, hogy a  $(d_n^+, d_n^-)$  fokszámsorozattal rendelkező gráfok közül azonos valószínűséggel kiválasztunk egyet. Gyakorlatilag a konfigurációs modell egy kibővített változatát alkalmaztuk irányított, súlyozott gráf esetén. Ezenkívül kikötjük, hogy minden  $i$  csúcsnál a kimenő élek súlyának halmaza  $\{e_n(i, j) > 0\}$  szigorúan pozitív, tehát nem lehetnek a modellben izolált csúcsok. Az így létrehozott véletlen hálózatok sorozatán nézzük, hogyan alakul  $\alpha_n(E_n, \gamma_n)$ , azaz a csődök végső aránya, amennyiben a kezdeti sokk, a nulladik



időpontban becsődölt intézmények halmaza  $D_0(E_n, \gamma_n) = \{i \in [n] \mid \gamma_n(i) = 0\}$ .

A továbbiakban használni fogunk pár alapvető valószínűségelméleti jelölést, ehhez elevenítsünk fel néhány fontosabb definíciót.

**3.3.3. Definíció.** Legyen  $\mathbb{N}_0$  a nemnegatív egész számok halmaza, azaz  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ .

**3.3.4. Definíció.** Relatív nagyságrendre a következő jelölést alkalmazzuk:  $x_n = O(y_n)$ , ha létezik  $N \in \mathbb{N}$ , és  $C > 0$ , amire igaz, hogy  $x_n \leq Cy_n$ , minden  $n \geq N$ -re. Másrészt  $x_n = o(y_n)$ , ha  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$ , amikor  $n \rightarrow \infty$ .

**3.3.5. Definíció.** Legyen  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  egy valós értékű sorozat, mely az  $\{(\Omega_n, \mathbb{P}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  valószínűségi mezők sorozatán értelmezett. Amennyiben  $c \in \mathbb{R}$  konstans, azt mondjuk, hogy  $X_n \xrightarrow{p} c$  konvergál sztochasztikusan, ha  $\forall \varepsilon > 0$  esetén teljesül, hogy  $\mathbb{P}_n(|X_n - c| > \varepsilon) \rightarrow 0$ , ahol  $n \rightarrow \infty$ .

Az előbbi definíciók felhasználásával könnyedén értelmezhetjük a következőket:

- Legyen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  végtelenbe tartó sorozat, ha  $n \rightarrow \infty$ . Ekkor  $X_n = o_p(a_n)$ , ha az  $\frac{|X_n|}{a_n}$  hányados nullához konvergál sztochasztikusan.
- $X_n = O_p(a_n)$ , ha bármely pozitív értékű,  $n$  növelésével végtelenbe tartó  $\omega(n) \rightarrow \infty$  függvény esetén  $\mathbb{P}\left(\frac{|X_n|}{a_n} \geq \omega(n)\right) = o(1)$ . Ezt gyakran sztochasztikus korlátosságnak is nevezik.
- Amennyiben  $\varepsilon_n$  egy mérhető részhalmaza az  $\Omega_n$  halmaznak bármely  $n \in \mathbb{N}$  esetén, akkor az  $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  események sorozata nagy valószínűséggel bekövetkezik, ha  $\mathbb{P}(\varepsilon_n) = 1 - o(1)$ , ahol  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.3.1. Feltételek

A főbb állítások megértéséhez szükségünk lesz pár további fogalom, illetve néhány feltétel definiálására, tekintsük át ezeket a következő lépésben. Legyen  $(e_n, \gamma_n)_{n \geq 1}$  pénzügyi hálózatok sorozata, mely egyre növekszik a csúcsszám függvényében. Az éppen aktuális  $e_n$  kitettségi mátrix esetén jelölje az élek számát  $m_n = \sum_{i=1}^n d_n^+(i) = \sum_{i=1}^n d_n^-(i)$ . A fokszámok empirikus eloszlását a következőképp definiáljuk:  $\mu_n(j, k) = \frac{1}{n} \#\{i \in V \mid d_n^+(i) = j, d_n^-(i) = k\}$ , ez jelöli tehát a  $j$  ki-fokú, és  $k$  be-fokú csúcsok arányát az  $n$ . gráfban.

**3.3.6. Feltétel.** Tegyük fel, hogy  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén  $d_n^+ = \{(d_n^+(i))_{i=1}^n\}$  és  $d_n^- = \{(d_n^-(i))_{i=1}^n\}$  nem negatív egész számok sorozataira, azaz a fokszámsorozatokra teljesül, hogy  $\sum_{i=1}^n d_n^+(i) = \sum_{i=1}^n d_n^-(i)$ . Továbbá létezik  $n$ -től független  $\mathbb{N}_0^2$ -en értelmezett  $\mu$  valószínűségeloszlás, melyre teljesülnek a következők:

- Véges a várható értéke:  $\lambda = \sum_{j,k} j\mu(j,k) = \sum_{j,k} k\mu(j,k) \in (0, \infty)$ .
- $\mu_n(j,k) \rightarrow \mu(j,k)$ ,  $\forall j,k \geq 0$  esetén, ha  $n \rightarrow \infty$ , azaz  $\mu_n(j,k)$  eloszlásban konvergál  $\mu(j,k)$ -hoz, ez a fokszámeloszlás határeloszlása.
- $\sum_{i=1}^n ((d_n^+(i))^2 + (d_n^-(i))^2) = O(n)$ , azaz  $\frac{m_n}{n} \rightarrow \lambda$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

Nézzük a kitettségekre vonatkozó feltételeket. Jelölje  $\Sigma_n(i)$  az  $e_n$  kitettségi mátrix esetén az  $i$  bank összes partnerének permutációinak halmazát, azaz a  $\{j \in V | e_n(i,j) > 0\}$  halmaz permutációit. Kezdetben a fertőzés tanulmányozásához a kitettségek nagyságát és tőke arányát az egyes bankoknál tekintjük adottnak, ezek határozzák meg a csőd küszöbszámát, azaz azt a határt, aminél nagyobb veszteség esetén az adott bank csődbe megy. Ez minden bank esetén különböző lehet.

**3.3.7. Definíció.** Egy adott  $i$  bank és adott  $\tau_n \in \Sigma_n(i)$  esetén az  $i$  bank becsődölési határa

$$\Theta_n(i, \tau_n) = \min \left\{ k \geq 0 \mid \gamma_n(i) \sum_{j=1}^n e_n(i, j) < \sum_{j=1}^k (1-R)e_n(i, \tau_n(j)) \right\}.$$

Ez a küszöbszám azt mutatja, hogyha az  $i$  bank szomszédai  $\tau_n$  sorrend alapján csődölnek be, akkor hány csődöt tud az  $i$  bank tolerálni, mielőtt inszolvenssé válik. Ha például  $\Theta_n(i, \tau_n) = 5$ , akkor az  $i$  bank azután megy csődbe, hogy az 5. szomszédja becsődölt (amennyiben a szomszédai csődjeinek sorrendje a  $\tau_i$  alapján adott). Persze ez mindig csak a következő körben jelenik meg: ha az 5. szomszéd a 2. körben megy csődbe, akkor az  $i$  bank a 3. körben kerül a becsődölt bankok közé. Ezenkívül definiáljuk még a  $p_n(j, k, \theta)$  arányszámot, mely elég nagy  $n$  esetén megadja a  $(j, k)$  ki- és be-fokokkal rendelkező csúcsok közül, hogy mekkora az aránya a  $\theta$  becsődölési küszöbszámmal rendelkező csúcsoknak:

$$p_n(j, k, \theta) = \frac{\#\{(i, \tau_n) \mid i \in V, \tau_n \in \Sigma_n(i), d_n^+(i) = j, d_n^-(i) = k, \Theta_n(i, \tau_n) = \theta\}}{n\mu_n(j, k)j!}.$$

Például, ha  $\theta = 1$ , akkor a  $(j, k)$  ki- illetve be-fokú csúcsoknál  $n\mu_n(j, k)jp_n(j, k, 1)$  a kitettségek azon száma, ami nagyobb, mint az adott bank tőkéje, azaz akiknek a csődje azonnal a megfigyelt bank csődjét is eredményezi. A valóságban nem igazán fordulhatnak elő ilyen nagy bankközi kötelezettségek, esetleg gondolhatunk erre úgy, mint egy anyabank csődje esetén a becsődölő leánybankokra. Ezek a kapcsolatok meghatározó szerepet játszanak egy rendszerkockázati esemény bekövetkezésekor, így definiáljuk pontosabban.

**3.3.8. Definíció.** Amennyiben a  $j$  bank becsődöl, az  $i \rightarrow j$  él azonnal csődbe juttatja az  $i$  bankot is, ha a  $j$  bank tartozása az  $i$  bank felé nagyobb, mint az  $i$  bank tőkéje, azaz

$$(1-R)e_n(i, j) > c_n(i) = \gamma_n(i) \sum_{k=1}^n e_n(i, k).$$

Az ilyen tulajdonságú éleket a továbbiakban nevezzük ragályos éleknek.

**3.3.9. Feltétel.** A továbbiakban tegyük fel, hogy  $p_n(j, k, \theta)$  véges, ha  $n \rightarrow \infty$ , illetve, hogy létezik határértéke, azaz létezik  $p : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow [0, 1]$  függvény, amire  $\forall j, k, \theta \in \mathbb{N}_0$  ( $\theta \leq j$ ) esetén  $p_n(j, k, \theta) \rightarrow p(j, k, \theta)$ , ahol  $n \rightarrow \infty$ .

Ekkor  $p(j, k, \theta)$  a sztochasztikus határértéke a  $(j, k)$  ki- és be-fokszámú csúcsok azon hányadának, melyek inszolvenssé válnak, ha feljüket kötelezettséggel rendelkező partnereik közül  $\theta$  becsődöl. Ez alapján  $p(j, k, 0)$  jelöli a kezdetben inszolvens bankokat a  $(j, k)$  fokszámúak közül, illetve  $p(j, k, 1)$  jelöli a  $(j, k)$  fokszámú csúcsok közül azok arányát, melyek veszélyeztetettek, azaz fizetésképtelenné válhatnak már egyetlen partnerük csődbe jutása esetén.

### 3.3.2. A fertőzés aszimptotikus nagysága

Az eddig megismert fogalmak alkalmazásával térjünk rá a kezdeti csőd által okozott dominóhatás aszimptotikus nagyságának vizsgálatára. Ehhez vegyük  $(e_n, \gamma_n)_{n \geq 1}$  pénzügyi hálózatok sorozatát, ami kielégíti a 3.3.6. és a 3.3.9. feltételeket, és legyen  $(E_n, \gamma_n)_{n \geq 1}$  az ehhez tartozó megfelelő véletlen hálózatok halmaza a 3.3.2. definíció alapján. Legyen egy véletlen binomiális  $Bin(j, \pi)$  eloszlású valószínűségi változó túlélésfüggvénye a következő:

$$\beta(j, \pi, \theta) = \mathbb{P}(Bin(j, \pi) \geq \theta) = \sum_{l \geq \theta}^j \binom{j}{l} \pi^l (1 - \pi)^{j-l}.$$

Definiáljunk egy  $I : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  függvényt a következőképpen:

$$I(\pi) = \sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)k}{\lambda} \sum_{\theta=0}^j p(j,k,\theta) \beta(j,\pi,\theta).$$

Ezt a függvényt a következőképp interpretálhatjuk, amennyiben a hálózat mérete a végtelenbe tart: ha egy véletlenszerűen választott él végpontja  $\pi$  valószínűséggel megy csődbe, akkor  $I(\pi)$  a várható aránya ezen csúcs szomszédainak csődszámának a fertőzés következő körében. Legyen  $\pi^* \in [0, 1]$  az  $I$  függvény legkisebb fixpontja, azaz  $\pi^* = \inf\{\pi \in [0, 1] | I(\pi) = \pi\}$ .  $\pi^*$  annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott él, mely egy becsődölt csúcsban végződik, lesz a fertőzési folyamat vége.

**3.3.10. Megjegyzés.** Az  $I$  függvénynek létezik legalább egy fixpontja a  $[0, 1]$  intervallumban, mivel növekvő és folytonos függvényről van szó, és

$$I(1) = \sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)k}{\lambda} \sum_{\theta=0}^j p(j,k,\theta) \leq 1,$$

miel definíció szerint  $\sum_{\theta} p(j, k, \theta) \leq 1$ , és

$$I(0) = \sum_{j,k} \frac{\mu(j, k)k}{\lambda} p(j, k, 0) \geq 0.$$

**3.3.11. Tétel.** Legyen  $(e_n, \gamma_n)_{n \geq 1}$  pénzügyi hálózatok sorozata, ami kielégíti a 3.3.6. és a 3.3.9. feltevéseinket, és legyen az  $(E_n)_{n \geq 1}$  az  $(\Omega, A, \mathbb{P})$  valószínűségi mezőn értelmezett véletlen mátrix a 3.3.2. definíció alapján. Legyen  $\pi^*$  az  $I$  függvény legkisebb fixpontja a  $[0, 1]$  intervallumon. Ekkor a következők teljesülnek:

- Ha  $\pi^* = 1$  (ami azt jelenti, hogy  $I(\pi) > \pi \quad \forall \pi \in [0, 1)$  értékre), akkor  $\forall \pi \in [0, 1)$  esetén aszimptotikusan szinte minden csúcs csődbe megy a fertőzés folyamata alatt:

$$\alpha_n(E_n, \gamma_n) \xrightarrow{p} 1,$$

amennyiben  $n \rightarrow \infty$ .

- Ha pedig  $\pi^* < 1$ , és emellett  $\pi^*$  egy stabil fixpontja  $I$ -nek, azaz  $I'(\pi^*) < 1$  (a derivált kisebb egynél), akkor aszimptotikus értelemben a becsődölt csúcsok aránya a következő:

$$\alpha_n(E_n, \gamma_n) \xrightarrow{p} \sum_{j,k} \mu(j, k) \sum_{\theta=0}^j p(j, k, \theta) \beta(j, \pi^*, \theta).$$

A tétel tehát azt mondja ki, hogy ha az  $I$  függvény legkisebb fixpontja az 1, akkor egyhez tartó valószínűséggel majdnem minden bank becsődöl, ha pedig van ennél kisebb fixpont, akkor nem megy mindenki csődbe, és a csődbe menő bankok aránya sztochasztikusan konvergál egy egynél kisebb számhoz.

### 3.3.3. A hálózat ellenállóképessége

A hálózatok ellenállóképessége a kisebb sokkokkal szemben egy olyan tulajdonság, mely erősen függ a hálózat struktúrájától. Az eddigi eredményeink lehetővé teszik, hogy bevezessünk egy könnyen kiszámítható indikátort, mellyel az ellenállóképességet mérhetjük. Konstruáljunk egy  $(e_n, \gamma_n)_{n \geq 1}$  hálózat sorozatot, mely kielégíti a 3.3.6. és a 3.3.9. feltételeket.

**3.3.12. Definíció.** A hálózat ellenállási függvényét a következőképpen számolhatjuk ki:

$$1 - \sum_{j,k} \frac{j^k}{\lambda} \mu(j, k) p(j, k, 1) \in (-\infty, 1].$$

A következő állítás lényegében a 3.3.11. tétel következménye.

**3.3.13. Állítás.** *Konstruáljunk egy  $(e_n, \gamma_n)_{n \geq 1}$  pénzügyi hálózat sorozatot, mely kielégíti a 3.3.6. és a 3.3.9. feltételeket, illetve legyen  $(E_n, \gamma_n)_{n \geq 1}$  a nekik megfelelő véletlen hálózatok sorozata, a 3.3.2. definíció alapján. Ha*

$$1 - \sum_{j,k} \frac{jk}{\lambda} \mu(j,k) p(j,k,1) > 0,$$

*akkor  $\forall \varepsilon > 0$  esetén  $\exists N_\varepsilon$  és  $\exists \rho_\varepsilon$  úgy, hogy ha a kezdeti állapotban csődösök hányada kisebb, mint  $\rho_\varepsilon$ , akkor a végső lépésig becsődölt bankok aránya nagy eséllyel csak egy elhanyagolható hányad lesz, azaz  $\forall n \geq N_\varepsilon$  esetén*

$$\mathbb{P}(\alpha_n(E_n, \gamma_n) \leq \varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

**Bizonyítás.** Legyen  $\rho$  a kezdetben becsődölt bankok aránya, azaz  $\rho = \sum_{j,k} \mu(j,k) p(j,k,0)$ . Használjuk fel az  $I$  függvényt:

$$I(\alpha) = \sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)k}{\lambda} \sum_{\theta=0}^j p(j,k,\theta) \beta(j,\alpha,\theta).$$

Terjesszük ki  $\alpha = 0$ -ra a  $\beta(j,\alpha,\theta)$  kifejezést, úgy, hogy  $\alpha \rightarrow 0$ . Ezt úgy tehetjük meg, hogy vesszük az  $\alpha$  szerint 0 körüli Taylor-sorfejtést az első tagig. Ekkor azt kapjuk, hogy  $\beta(j,\alpha,\theta) = \mathbb{I}_{\{\theta=0\}} + \alpha j \mathbb{I}_{\{\theta=1\}} + o(\alpha)$ . Ha ezt behelyettesítjük az  $I$  függvénybe, akkor azt kapjuk, hogy

$$I(\alpha) = \sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)k}{\lambda} (p(j,k,0) + \alpha j p(j,k,1)) + o(\alpha).$$

Ha  $\rho \rightarrow 0$ , akkor létezik az  $I(\alpha)$  határértéke és a következővel egyenlő:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I(\alpha) = \alpha \sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)jk}{\lambda} p(j,k,1) + o(\alpha).$$

Ha elég kicsi  $\alpha > 0$  esetén teljesül a 3.3.13. állítás feltétele, azaz, hogy  $1 - \sum_{j,k} \frac{jk}{\lambda} \mu(j,k) p(j,k,1) > 0$ , akkor az előbb említett határérték kisebb lesz  $\alpha$ -nál, azaz

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I(\alpha) = \alpha \sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)jk}{\lambda} p(j,k,1) + o(\alpha) < \alpha.$$

A határérték kiszámításához felhasználtuk, hogy ha a kezdeti csődök száma nullához tart, akkor a kezdetben fertőzött halmazból kimenő élek száma is nullához tart. Másik oldalról közelítve pedig tudjuk, hogy  $I(0) \geq 0$ . Legyen  $\alpha^*$  az  $I(\alpha)$  legkisebb fixpontja. Ekkor az eddigiekből együttesen következik, hogy  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha^* = 0$ . Rögzítsük most le az  $\varepsilon > 0$  értéket. A 3.3.11. tételben definiált határértéket folytonosan kiterjesztve kapjuk a következő  $g$  függvényt:

$$g(\alpha) = \sum_{j,k} \mu(j,k) \sum_{\theta=0}^j p(j,k,\theta) \beta(j,\alpha,\theta).$$

Ekkor  $\exists \rho_\varepsilon$ , hogy  $\rho < \rho_\varepsilon$  esetén teljesül, hogy  $g(\alpha^*) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Ekkor a 3.3.11. tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy létezik  $N_\varepsilon$  egész szám, ami esetén teljesül  $\forall n \geq N_\varepsilon$ -ra a következő:

$$\mathbb{P}\left(|\alpha_n(E_n, \gamma_n) - g(\alpha^*)| < \frac{\varepsilon}{2}\right) > 1 - \varepsilon.$$

Ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

**3.3.14. Tétel.** *Konstruáljunk egy  $(e_n, \gamma_n)_{n \geq 1}$  pénzügyi hálózat sorozatot, mely kielégíti a 3.3.6. és a 3.3.9. feltételeket, illetve legyen  $(E_n, \gamma_n)_{n \geq 1}$  a nekik megfelelő véletlen hálózatok sorozata. Ha*

$$1 - \sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)jk}{\lambda} p(j,k,1) < 0,$$

*akkor nagy valószínűséggel létezik a pénzügyi hálózatnak egy, a csúcsok pozitív hányadát kitevő részhalmaza, mely ragályos élek által erősen összefüggő, azaz a komponensen belül bármely csúcsból bármely csúcsba el lehet jutni ragályos éleken keresztül. Így ha ebben a részhalmazban bármely csúcsot elér a fertőzés, akkor ez az összes részhalmazbeli bank csődjét okozza.*

Adott hálózati szerkezet esetén a 3.3.11. tétel feltétele akkor teljesül, ha a  $p_n(j,k,1)$ , azaz az összes  $j$  ki-fokú és  $k$  be-fokú csúcsból kimenő ragályos élek darabszáma nem túl nagy, azaz nem fordul elő gyakran az, hogy egy csőd rögtön egy másikat okoz. Ez közvetetten azt is jelenti, hogy a kihelyezett hitelek, azaz a bank kitettségei ne legyenek túlzottan nagyok a bank saját tőkéjéhez képest.

Fontos különös figyelmet fordítani az ilyen erősen összefüggő komponensekre, hiszen itt egyetlen bank csődje az egész halmaz becsődölését okozza. A valóságban ez persze nem túl gyakori, kivétel esetleg a központ és leánybanki kapcsolatok esetén, de előfordulhat olyan, ehhez hasonló eset, mikor nem bármely bank csődje okozza az egész részhalmaz csődjét, csak a részhalmaz bizonyos, kiemelt jelentőségű bankjának, vagy bankjainak csődje okozza az összes részhalmazbeli pénzügyi intézmény bukását. Tehát vannak olyan bankok, melyek a hálózat összekapcsolásában létfontosságú szerepet játszanak, esetleges csődjük nagy problémát okozna a teljes hálózatban. Tegyük fel, hogy teljesül a 3.3.13. állítás feltétele, azaz, hogy  $1 - \sum_{j,k} \frac{jk}{\lambda} \mu(j,k) p(j,k,1) > 0$ . Legyen  $\pi_\varepsilon^*$  az  $I$  függvény legkisebb fixpontja a  $[0, 1]$  intervallumon, ahol  $\varepsilon$  a kezdetben becsődölt bankok aránya, azaz  $p(j,k,0) = \varepsilon \quad \forall j,k$  esetén. Az  $I$  függvény elsőrendű közelítésével azt kapjuk, hogy

$$\pi_\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{1 - \sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)jk}{\lambda} p(j,k,1)} + o(\varepsilon).$$

A  $\pi \rightarrow \sum_{j,k} \mu(j,k) \sum_{\theta=0}^j p(j,k,\theta) \beta(j,\pi,\theta)$  függvény elsőrendű közelítésével megkapjuk az aszimptotikus hányadát a becsődölt pénzügyi intézményeknek a 3.3.11. tétel alapján, és megkapjuk azt is, hogy  $\forall \rho$ -hoz  $\exists \varepsilon_\rho$  és  $\exists n_\rho$ , hogy  $\forall \varepsilon < \varepsilon_\rho$  és  $\forall n > n_\rho$  esetén

$$\mathbb{P}\left(\left|\alpha_n(E_n, \gamma_n) - \varepsilon\left(1 + \frac{\sum_{j,k} j\mu(j,k)p(j,k,1)}{1 - \sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)jk}{\lambda}p(j,k,1)}\right)\right| < \rho\right) > 1 - \rho. \quad (3.6)$$

Tegyük fel még azt is, hogy a kezdetben inszolvens bankok mindegyike azonos,  $(d^+, d^-)$  fokszámú. Ekkor jelöljük  $\pi_\varepsilon^*(d^+, d^-)$ -al az  $I$  függvény legkisebb fixpontját a  $[0, 1]$  intervallumon, ha  $p(d^+, d^-, 0) = \varepsilon$  és  $p(j, k, 0) = 0 \quad \forall (j, k) \neq (d^+, d^-)$  fokszámok esetén. Ebben az esetben azt kapjuk, hogy  $\forall \rho$ -hoz  $\exists \varepsilon_\rho$  és  $\exists n_\rho$ , hogy  $\forall \varepsilon < \varepsilon_\rho$  és  $\forall n > n_\rho$  esetén

$$\mathbb{P}\left(\left|\alpha_n(E_n, \gamma_n) - \varepsilon\mu(d^+, d^-)\left(1 + \frac{d^-}{\lambda} \frac{\sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)jk}{\lambda}p(j,k,1)}{1 - \sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)jk}{\lambda}p(j,k,1)}\right)\right| < \rho\right) > 1 - \rho. \quad (3.7)$$

Ebből a kifejezésből láthatjuk, hogy jelen esetben két alapvető faktor van, mely meghatározza, hogy mennyire erősíti fel a hálózat struktúrája a kis kezdeti sokkot az idő előrehaladtával. Az egyik a kezdeti csődös bankok összekapcsoltsága a hálózat többi részével, ez a hálózat kezdetben nem fertőzött részének  $d^-$  be-fokszám értékében jelenik meg, a másik pedig a hálózat fogékony-sága, melyet a  $\sum_{j,k} \frac{\mu(j,k)jk}{\lambda}p(j,k,1)$  faktor ad meg.

### 3.3.4. Numerikus eredmények véges hálózatokon

Az eddigi eredmények jórészt úgy kerültek megállapításra, ha a hálózat méretével, azaz a csúcsok számával a végtelenbe tartunk. Ez természetesen a valóságban nem teljesül, így az eredményeket Hamed Amini és szerzőtársai [3] numerikus szimulációk segítségével véges hálózaton tesztelték, következzen ennek az áttekintése. Ehhez szükséges az elméleti eredményekhez felhasznált feltételek teljesülésének vizsgálata a véges hálózatok esetén, valamint annak áttekintése, hogy a hálózat méretének változása milyen hatással van az eddig kapott eredményekre. A [3] cikk szimulációjának egy konkrét esetét a 3.3.5. részben olvashatjuk. Az elemzésben kiemelt figyelmet kap a hálózati szerkezet heterogenitásának hatása, valamint a hálózat összekapcsoltsága illetve ellenállóképessége közti összefüggés.

Nézzünk két olyan példát, melyben teljesül a 3.3.9. feltétel. Az első a független kitétségek példája. Tegyük fel, hogy a kitétségek eloszlása csak a csúcsok ki- és be-fokától függhet, azaz ha két csúcson ezek az értékek megegyeznek, akkor a kitétség eloszlása is megegyező. Így az azonos ki- és be-fokszámú csúcsok esetén a kitétségeket, azaz az  $\{e_n(i, l) > 0 | d_n^+(i) = j, d_n^-(i) = k\}$  értékeket független, azonos eloszlású valószínűségi változókkal modellezzük, melyeknek az eloszlása  $F_X(j, k)$  függ  $j$ -től és  $k$ -től, de nem függ  $n$ -től.

A tőke arányáról ugyanezt feltételezzük, azaz  $\{\gamma_n(i) | d_n^+(i) = j, d_n^-(i) = k\}$  független, azonos eloszlású véletlen változók,  $F_\gamma(j, k)$  eloszlással, ami függhet  $j$ -től és  $k$ -től, de  $n$ -től nem. Ekkor a független, azonos eloszlás miatt alkalmazható a nagy számok törvénye, így teljesül a 3.3.9.

feltétel, azaz létezik határértéke a  $p_n(j, k, \theta)$  sorozatnak, és ez a  $p(j, k, \theta)$  határérték kiszámítható  $\forall j, k, \theta$  esetén a következőképpen:

$$p(j, k, \theta) = \mathbb{P}(X_\theta > \gamma \sum_{l=1}^j X_l - \sum_{l=1}^{\theta-1} (1-R)X_l \geq 0),$$

ahol  $\gamma$  véletlen változó  $F_\gamma(j, k)$  eloszlással, és  $(X_l)_{l=1}^j$  független, azonos eloszlású valószínűségi változók  $F_X(j, k)$  eloszlással, és függetlenek  $\gamma$ -tól.

A második példa a felcserélhető kitétségek példája, ahol a független, azonos eloszlás feltételel kicsit gyengítünk. Hiszen a valós banki hálózatokra nem jellemző az előző példában leírt egyformaság, homogenitás, sokkal inkább jellemző a hierarchikus elrendeződés, ami alatt azt értjük, hogy van néhány, a hálózat egészéhez mérten kevés nagy méretű bank, mely nagyon sok kapcsolattal rendelkezik, és sok kisebb bank, melyek kevés kapcsolattal rendelkeznek. Ezt a különbséget úgy építjük be a modellbe, hogy a csúcsokat két halmazba soroljuk: a  $K$  lesz a központi bankok  $n^K$  tagú halmaza, és  $N$  lesz a nem központi bankok  $n^N$  tagból álló halmaza. Itt a központi bank alatt a kereskedési szempontból fontos, azaz központi szerepet betöltő bankok csoportját értjük. Ezt egy hasonló felosztási szerkezetként képzelhetjük el, mint a [39] cikkben ismertett központ-periféria modellnél, azzal a különbséggel, hogy ott a központi és a periféria réteg közötti, illetve a rétegeken belüli kapcsolatokra különböző szabályok vonatkoznak. Tegyük fel, hogy a  $\{e_n(i, l) > 0 | i \in K\}$  és  $\{e_n(i, l) > 0 | i \in N\}$  kitétségek korlátozva vannak egy elemét felcserélhető, végtelen sorozat első  $m_n^K$ , illetve  $m_n^N$  eleme által. Az  $m_n^K$  és  $m_n^N$  jelöli a központi bankokhoz, illetve a nem központi bankokhoz tartozó kitétségek teljes számát. Hasonlóan a  $\{\gamma_n(i) | i \in K\}$  és  $\{\gamma_n(i) | i \in N\}$  tőkearányok korlátozva vannak egy véletlen sorozat első  $n^K$  és  $n^N$  eleme által. Megjegyezzük, hogy ez a sorozat független a kitétségeket korlátozó sorozattól.

Ezt a modellt kiterjeszthetjük többféleképp: képezhetünk több részhalmazt is, a csúcsokat fokszámuk alapján besorolva, illetve elhagyhatjuk azt a feltételezést, miszerint a kitétség és a tőke aránya független, hiszen ez a valóságban sem teljesül. A továbbiakban feltesszük, hogy az egyes részhalmazon belüli csúcsook kitétségei és tőkemegfelelési arányai egymás közt felcserélhető véletlen változók. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a valószínűségi változók sorozatából bárhogy választok ki néhányat, ezek együttes eloszlása csak a darabszámtól függ. Minden  $i$  csúcs esetén, aminek a ki-fokszáma  $d_n^+(i) = j$ , a be-fokszáma  $d_n^-(i) = k$ , legyen  $Y_n(i) = (\{e_n(i, l) > 0\}, \gamma_n(i))$  többváltozós véletlen változó  $\xi^{j,k} \subset \mathbb{R}_+^j \otimes \mathbb{R}$  állapottérrel. Ez egy  $j + 1$  dimenziós valós tér, amelyben az első  $j$  koordináta csak pozitív lehet. Az  $Y_n(i)$  pedig gyakorlatilag azt jelöli, hogy az  $i$  csúcshoz (amiről feltettük, hogy  $j$  a ki-foka,) felsoroljuk, hogy melyik szomszédja felé mennyi a kitétsége, ez adja az első  $j$  koordinátát, a  $j + 1$ -edik koordináta pedig az  $i$  bank saját tőkéjének aránya. Az előző képletben az  $l$  csúcs az  $i$  csúcs egy szomszédját jelöli, amibe megy az  $i$  csúcsból él.



Feltételezzük, hogy a véges sorozat eloszlása  $\{Y_n(i) | i \in [n], d_n^+(i) = j, d_n^-(i) = k\}$  invariáns a permutálásra, ez adja a felcserélhetőség feltételét. Illetve ennél a modellnél is teljesül a 3.3.9. feltétel, azaz  $p_n(j, k, \theta) \xrightarrow{P} p(j, k, \theta)$ , amennyiben  $n \rightarrow \infty$ , melynek bizonyítása a [36] cikkben megtalálható.

### 3.3.5. Az aszimptotika relevanciája, valamint egy konkrét példa

A fejlett országokban a bankközi hálózatok akár több ezer bankot is tartalmazhatnak. Példaképp megemlíthetjük, hogy az Európai Központi Bank 8350 monetáris pénzügyi intézményt számolt össze pár évvel ezelőtt az eurózónán belül, melyek 80%-a hitelezési intézmény, 20%-a pedig pénzügyi alap. Ahhoz, hogy értékelhessük a kapott aszimptotikus eredmények relevanciáját a valós méretű hálózatokon, hozzunk létre egy 10000 csúcsból álló skálafüggetlen modellt. A modellezésnél Blanchard [13] véletlen gráfmodelljét használták fel a [3] cikkben, melyet a preferential attachment modell egyfajta statikus változatának is tekinthetünk. Úgy képzelhetjük el, mintha a Barabási modellnél 10000 lépés után vett fokszámsorozat eloszlásával alkalmaznánk a konfigurációs modell egy változatát. A kitétségek modellezése Pareto-eloszlás szerint történik. A modellben adott a  $d^+$  ki-fokszámok sorozata, azaz minden csúcsról tudjuk, hogy hány él megy ki belőle. Minden kimenő él végpontját az előírt ki-fokszámokkal arányos valószínűséggel választjuk ki. Ezzel szemben a be-fokszámok véletlenszerűen alakulnak ki, de amelyik csúcsnak nagyobb volt a  $d^+$  ki-foka, az nagyobb valószínűséggel kapott több bemenő élt is az arányos választás miatt, ami a be- illetve ki-fokszámok pozitív korrelációját eredményezi. A ki-fokszámok eloszlása tehát Pareto-eloszlású, hatványrendben cseng le,  $\gamma^+$  kitevővel:

$$\mu_n^+(j) = \#\{i | d_n^+(i) = j\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu^+(j) \sim j^{-\gamma^+ + 1}.$$

A be-fokszám feltételes határeloszlása pedig Poisson-eloszlású:

$$P(d^- = k | d^+ = j) = e^{-\lambda(j)} \frac{\lambda(j)^k}{k!},$$

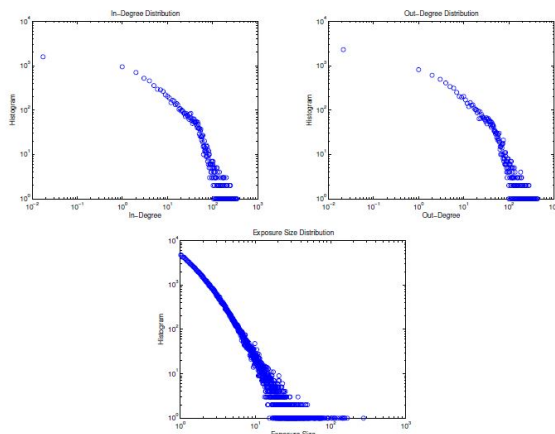
ahol  $\lambda(j) = \frac{j^\alpha \mathbb{E}(D^+)}{\mathbb{E}(D^+)^{\alpha+1}}$ ,  $D^+$  egy  $\mu^+$  eloszlású valószínűségi változót jelöl. A be-fokszámok marginális eloszlása Pareto-eloszlás  $\gamma^- = \frac{\gamma^+}{\alpha}$  kitevővel, feltéve, ha  $1 \leq \alpha < \gamma^+$ , a [13] cikk állítása alapján.

Nézzük a [3] cikkben szereplő szimuláció konkrét eredményeit, ahol az elemzés Brazília pénzügyi hálózatának 2007. júniusi adatainak empirikus tulajdonságainak felhasználásával történt a [3] cikkben a [21] cikk alapján.

A fertőzés terjedésének folyamatának modellezéséhez az egyik legfontosabb bemenő adat az egyes bankok saját tőkéjének aránya. Feltesszük, hogy ehhez az arányhoz tartozik egy alsó küszöb, egy  $\gamma_{\min} = \min_{i \in V} \gamma_i$  minimális tőkearány  $\forall i \in V$  csúcs esetén. Tekintsünk egy legrosszabb esetű

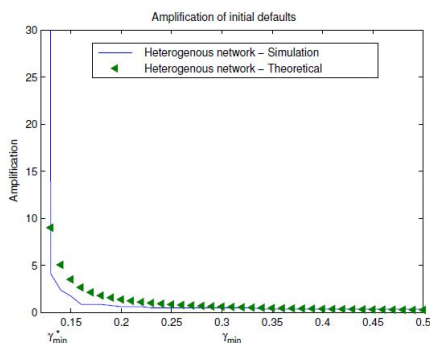
változatot, ahol minden bank tőkéjének aránya az előbb definiált minimálissal egyezik meg, azaz  $\gamma(i) = \gamma_{\min} \quad \forall i \in V$  esetén.

A 3.6. ábrán, melynek forrása a [3] cikk, a szimulált hálózat fokszámeloszlása és a kitettségek eloszlása látható. A ki-fokszámok 2,19 kitevőjű Pareto-eloszlását láthatjuk az első ábrán, a másodikon a be-fokszámok 1,98 kitevőjű Pareto-eloszlását, az utolsó pedig a kitettségek 2,61 kitevőjű Pareto-eloszlását ábrázolja.



3.6. ábra. Fokszámok és kitettségek eloszlása ([3], 1.ábra)

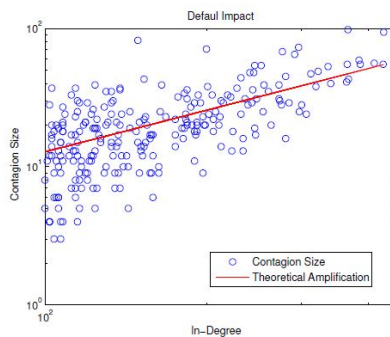
A szimuláció készítésekor az egyik lehetőség, hogy a fertőzés a csúcsok egy 0,1% arányú véletlen részhalmazából indul ki, egyenlő valószínűséggel választva bármely csúcsot. Vagy akár az empirikus fokszámeloszlás és a (3.6) egyenlet alapján is lehetséges a fertőzés terjedésének modellezése. Alkalmazzuk most ezt a második változatot. A 3.7. ábrán láthatjuk a fertőzés folyamatának végére csődbe ment csúcsok számát, a minimális tőkearány változásának függvényében egy  $n = 10000$  csúccsal rendelkező skálafüggetlen gráfon.



3.7. ábra. A becsődült bankok száma a minimális tőkearány függvényében ([3], 2.ábra)

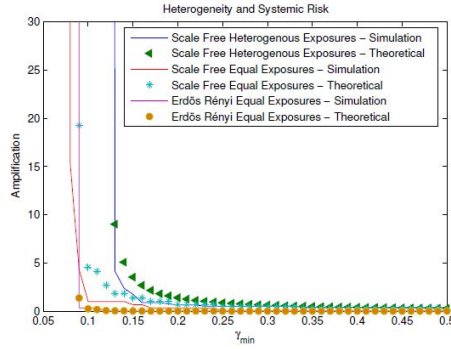
Ezt hasonlítjuk össze a (3.6) egyenletben kapott aszimptotikus eredménnyel. Minél kisebb a  $\gamma_{\min}$  minimális tőkearány, annál több csőd következik be. Látható, hogy ha a  $\gamma_{\min}$  minimális tőkearány kisebb, mint a  $\gamma_{\min}^*$  kritikus érték, akkor a fertőzés gyakorlatilag felrobban, elterjed az egész hálózaton.

A 3.8. ábrán szintén a végül csődbe kerülő bankok számát láthatjuk egy skálafüggetlen hálózaton, ahol a kezdeti rendszerkockázati esemény csak egy csúcsot érint. A becsődült csúcsok befokszámának függvényében ábrázoljuk a fertőzés mértékét, azaz, hogy hány bank került csődbe, mind a szimuláció, mind pedig az elméletben feltételezett terjedés esetén, melyet a (3.7) egyenlet határoz meg.



3.8. ábra. A becsődült bankok száma elméletben és a gyakorlatban ([3], 3.ábra)

Térjünk át a heterogenitás hatásának vizsgálatára. Tudjuk, hogy az eddigiekben megismert  $\gamma_{\min}^*$  minimális tőkearány felett a hálózatunk viszonylag ellenálló a rendszerkockázati eseményekkel szemben, amennyiben teljesül a 3.3.13. tétel feltétele, azaz az eddigi jelölésekkel élve az, hogy  $1 - \sum_{j,k} \frac{jk}{\lambda} \mu(j,k) p(j,k,1) > 0$ . Ezen feltétel teljesülése esetén két tényező befolyásolja az eredményünket: az egyik az, hogy a csúcsok milyen mértékben vannak összekapcsolva, a másik pedig a ragályos élek hányada. A 3.9. ábrán három hálózattípuson hasonlítjuk össze annak az arányát, hogy egy adott kezdeti halmazból indítva a bankok mekkora hányadát éri el a rendszerkockázati fertőzés. A három gráftípus a következő: egy skálafüggetlen modell heterogén kitettségi súlyokkal, egy skálafüggetlen modell azonos súlyozással, valamint egy homogén Erdős–Rényi gráfmodell, ahol az élek behúzása mindenhol azonos eséllyel történik, és a súlyok is megegyezők. A három hálózat paraméterezése úgy történik a [3] cikk alapján, hogy az átlagos fokszámok megegyezzenek, ebből következően az élek száma is egyenlő a modellekben. A szimuláció eredménye, hogy a kitettségek azonos eloszlása esetén a heterogén skálafüggetlen modell kevésbé ellenálló az Erdős–Rényi homogén gráfmodellhez képest.



3.9. ábra. A hálózat heterogenitásának kapcsolata a rendszerkockázattal ([3], 4.ábra)

A szimuláció megerősíti azt a feltevésünket, hogy a fertőzéssel szembeni ellenállóképességet mind a hálózat topológiája, mind a súlyok heterogenitása befolyásolja.

Végezetül nézzük meg, hogy milyen hatással van egy gráf átlagos összekapcsoltsági szintje a fertőzés terjedésére. Az erős összekapcsoltság növeli egy rendszerkockázati esemény gyors elterjedésének valószínűségét, vagy a kockázatmegosztás segítségével csökkenti azt? Emlékeztetésképp megjegyezzük, hogy a 3. fejezet elején már láthattunk erre különböző példákat a szakirodalomból: míg Allen és Gale [2] úgy találták, hogy az ellenállási képesség növekszik a kapcsolatok sűrűsödésével, addig Battiston [10] egy olyan modellt mutat be, ahol ezen két tulajdonság közt a kapcsolat nem monoton.

Hogy jobban ráláthassunk az átlagos összekapcsoltság és az ellenállóképesség közötti kapcsolatra, nézzünk meg egy konkrét, egyszerű példát, ahol a (3.6) formulát alkalmazzuk a sokk elterjedésére. Vegyünk egy olyan hálózatot, ahol minden bank kitettsége megegyezik és  $\frac{1}{3} \leq \gamma_{\min} < \frac{1}{2}$ , úgy hogy  $p_n(j, k, \theta) = \mathbb{I}_{\{j=1,2\}}$ . Nézzünk három konkrét esetet a foksámeloszlásra:

- Ha  $\mu_n(1, 3) = \mu_n(2, 3) = \mu_n(4, 3) = \mu_n(5, 3) = \frac{1}{4}$ , akkor a hálózat átlagos összekapcsoltsága 3, az ellenállás mértéke pedig  $\frac{1}{4}$ .
- Ha  $\mu_n(1, 2) = \frac{2}{3}$ , és  $\mu_n(4, 2) = \frac{1}{3}$ , akkor a hálózat átlagos összekapcsoltsága 2, az ellenállás mértéke pedig  $\frac{1}{3}$ .
- Ha  $\mu_n(4, 4) = 1$ , akkor ez a 4 foksámú teljes gráf, és ebben az esetben a hálózat átlagos összekapcsoltsága természetesen 4, az ellenállás mértéke pedig 1.

Megfigyelhetjük, hogy a hálózat ellenállásának mértéke nem monoton módon függ az átlagos összekapcsoltságtól. Az eddigi példákból azt is láthatjuk, hogy az ellenállóképesség nem határozható meg, ha pusztán az átlagos foksámot alkalmazzuk az összefüggőség aggregált mértékeként. Szükséges más tulajdonságok vizsgálata is, ahhoz, hogy az ellenállóképességet pontosabban meg-

határozhatjuk. Ilyen egyéb tulajdonság például a fokszámeloszlás, vagy a ragályos élek által alkotott részgráfok létezése és aránya a hálózatban.

Összességében a 3.3. alfejezetben megpróbáltunk egy átfogó képet nyújtani a banki rendszerkockázat terjedéséről, ahol a hálózatunk heterogén kitettségi súlyaival és a bankok nagyban különböző fokszámaival viszonylag jól modellezi a valóságot. Kaptunk egy aszimptotikus eredményt a csődök dominószerű terjedésének nagyságára egy olyan hálózaton, mely előre megadott jellemvonásokkal rendelkezik, például adott fokszámeloszlással, illetve kitettségi struktúrával, majd ezt az eredményt kiterjesztettük a homogén irányítatlan gráfoktól kezdve, egészen a heterogén, súlyozott, irányított gráfokig. A kapott aszimptotikus eredményre vonatkozó szimulációt is bemutattuk egy nagy, mégis reális méretű hálózaton: konkrétan a brazil pénzügyi intézmények hálózatával megegyező empirikus tulajdonságokkal rendelkező modellen. Ezen az adott hálózaton a fertőzés terjedését előrejelezhetjük a hálózat ellenállásának mértékével. Ahogy csökkentettük a saját tőke arányát, egy idő után az ellenállás mértéke negatívvá változott, azaz innentől a kapcsolatok inkább a fertőzés terjedését segítették, mintsem annak megállítását. A szimuláció előtt tárgyalt aszimptotikusan teljesülő elméleti eredmények segítségével egy adott hálózat esetén meg tudjuk mondani, hogy nagyjából hol következik be ez a fordulópont, ami akár szabályozói oldalról is fontos lehet, hiszen ennél mindenképp nagyobb tőkét kell tartani a bankoknak.

Ezenkívül a bankok egyedi tulajdonságai is fontosak lehetnek a rendszer szintjén: érdemes megnézni, hogy egy bank valamilyen okból bekövetkező csődje milyen hatással van a rendszer egészére. A makroprudenciális szabályozás szempontjából jelentős kérdés, hogy hogyan azonosítsák, illetve enyhítsék azokat a tulajdonságokat, ami egy bankot rendszerkockázati szempontból fontossá tesz. Ebben a modellben az ilyen csomópontokat a kapcsolataik száma, valamint a hozzájuk kapcsolódó ragályos élek hányada alapján azonosíthatjuk. Rendszerkockázati hatásuk csökkentését pedig elérhetjük például úgy, hogy a minimális tőkekövetelmény arányát többek közt a ragályos élek számától függően határozzuk meg. (A Bázel II. szabályozáson alapuló rendszerben a minimális tőkekövetelményt a kockázattal súlyozott kitettségek értéke alapján határozzák meg.)

A modellben feltettük, hogy az egyes bankok rendelkeznek bizonyos megfigyelhető jellemvonásokkal, tulajdonságokkal, de a modell kiterjeszhető olyan esetre is, mikor a kapcsolatok száma, illetve a kitettségi súlyok is felcserélhető véletlen változókkal adóttak, tetszőleges korrelációs struktúrával. Ez abban az esetben használható, ha nem tudjuk megfigyelni a kitettségek és a fokszámok egy konkrét sorozatát, de van valamilyen feltételezésünk az eloszlásukról.

## 4. fejezet

# A rendszerkockázatra vonatkozó szabályozások a Bázeli III. szerint

Ebben a fejezetben főként Mérő Katalin a Verseny és Szabályozás könyvben megjelent A bankszabályozás kihívásai és változásai a pénzügyi-gazdasági válság hatására című [45] írását használjuk fel. A 2007 – 2008-as pénzügyi-gazdasági válság hatására a szabályozók belátták, hogy szükség van a bankrendszer szabályozásának fejlesztésére, illetve bizonyos szintű átalakítására. A Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság Bázeli III. szabályozáscsomagjának bevezetése fokozatosan történik. (Európai megfelelőjét a CRD IV. (Capital requirement directive IV., [4]), illetve a CRR (Capital requirement regulation, [5]) tőke megfelelési szabályok jelentik.) A válság miatt bizonyossá vált, hogy nem elég mikroprudenciális, azaz az egyes bankok fizetőképességét szabályozó intézkedéseket bevezetni, hanem az egész pénzügyi rendszer működését veszélyeztető esetleges rendszerkockázati események elkerülése végett szükség van makroprudenciális szabályozásra is. A makroprudenciális szabályozás lehetséges eszközei például az egyes bankok nagyságának korlátozása, a rendszerkockázati szempontból fontos nagybankokra vonatkozó többlet-tőke tartalékolás bevezetése, a rendszerkockázatok szempontjából veszélyes tevékenységek korlátozása, valamint a banktevékenység prociklikusságának csökkentésére irányuló szabályozások. Nagy probléma, hogy ha egy adott piacon az egyik bank olyan nagy, hogy önmagában is képes befolyásolni a piac viselkedését, így ha ennek az egy intézménynek adódik valamilyen problémája, akkor az az egész piacra hatással lehet. Az ilyen pénzügyi intézményeket, melyeknek az esetleges bukása leginkább veszélyezteti a pénzügyi intézményrendszert SIFI-knek (Systematically Important Financial Institutions) nevezzük. A SIFI-ket különböző szempontok alapján határozzák meg, öt mutatóból képzett indikátor segítségével azonosítják, melyek a [9] írás alapján a következők: méret (size), összekapcsoltság (interconnectedness), globális aktivitás, tevékenység nemzetközi jellege (cross-jurisdictional activity), komplex tevékenységek, komplexitás (complexity), helyettesíthetőség hi-

ánya (lack of substitution). Mind az öt mutató egyenlő súllyal szerepel a végső indikátorban. Láthatjuk, hogy ezen intézmények meghatározásánál csak egy tulajdonság, az összekapcsoltság mérésénél szükséges a hálózat ismerete, a többinél nem. Általában a SIFI-k azok a bankok, melyekre teljesül a „too big to fail” (TBTF) tulajdonság, azaz ezek olyan intézmények, melyek túl nagyok, és egy ilyen intézmény bukása túl nagy veszélyt jelentene az egész hálózatra, bukása sok más bankot is a csőd szélére sodorhatna. (Ilyen tulajdonság lehet még a „too interconnected to fail” (TITF), mikor egy adott bank kapcsolatai révén olyan fontos összekötő szerepet tölt be a hálózatban, hogy a helyettesíthetőség hiánya miatt nem akarják hagyni, hogy becsődöljön, illetve a „to important to be allowed to fail” (TITAF) tulajdonság, ha valamilyen okból kifolyólag az adott bank csődje az egész hálózatot veszélyeztetné.) Az ilyen rendszerkockázatilag fontos bankokat jellemzően nem hagyják csődbe menni, hanem kiségitik valamilyen állami mentőcsomag segítségével, ha szükséges. Ennek veszélye, hogy ha egy bank tudja magáról, hogy csődjét nem engedheti meg az állam, mert túl nagy veszélyt jelentene az egész piacra, akkor előfordulhat, hogy a nagyobb nyereség érdekében túl nagy kockázatokat vállal, kevésbé tartva a bukás lehetőségétől, így itt különösen figyelni kell a kockázatok korlátozására.

A válság előtt a bankszektor, és az egyes bankok is gyors ütemben növekedtek, és 2008-ra Mérő Katalin [45] írása alapján már 30 olyan bankcsoport volt, aminél a székhelyül szolgáló ország GDP-jének felét is túllépte a bank külső forrásállománya. Ezek közül nézzünk néhány példát: a UBS csoport külső forrásállománya meghaladta a svájci GDP 3,7-szeresét, az ING csoportnál ez a szám a holland GDP 2,2-szerese. Viszonyításképp a magyar OTP csoport külső forrásainak nagysága a magyar GDP 0,39%-a volt 2009-ben ([45]). Ez viszont azt is jelenti, hogy egy ilyen nagy bankcsoportot a csőd esetén lehet, hogy nem tud kimenteni a saját országa, ez szintén problémát jelenthet. Ezekre az intézményekre bevezetünk egy új kategóriát: „too big to save” (TBTS), azaz a túl nagy a megmentéshez tulajdonsággal rendelkező bankok csoportját. Ezen csoportok közt nincs éles határvonal, nincs pontos szabályozás, hogy melyik bank hova sorolható, ez csak adott válsághelyzet esetén derül ki pontosan.

Az eddigi ismeretek fényében tehát mindenképp szükségessé vált valamilyen szabályozás, mely megkülönböztetve kezeli az egész rendszerre veszélyt jelentő bankokat, és a rendszer biztonságát szolgáló plusz kötelezettségeket szab ki rájuk. Ezen nagy bankok esetén a Bázeli III. alapú szabályozás szerint többlet-tőkét kell tartalékolniuk. Ezzel csökkenthető az esetleges kimentés során a szükséges ráfordítandó összeg, valamint a bank számára ez egy visszafogó hatás, hogy ne legyen még nagyobb, ne jelentsen egyre nagyobb kockázatot a rendszer egészére.

A SIFI-k esetén a Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság arra helyezi a hangsúlyt, hogy egy ilyen intézmény esetleges bukása milyen hatással lenne a teljes rendszerre, mekkora lenne a veszteség (LGD: Loss given default, azaz csőd esetén bekövetkező veszteség). Tehát nem a csőd valószínűségét nézzük, hanem azt, hogyha bekövetkezne a csőd, akkor mekkora lenne a veszteség.

A SIFI-k közt is vannak különbségek, attól függően, hogy mekkora a rendszerkockázati hatásuk. A Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság öt kategóriába sorolja őket, ami alapján különböző a rájuk vonatkozó többlet-tőke tartalékolási követelmény. 1%, 1,5%, 2%, 2,5%, illetve 3,5%-os csoportok vannak, ezek közül a 3,5%-os csoport jelenleg üres, de a szabályok bevezetésekor, valamint utána is a rendszeres felülvizsgálat során ez bármikor változhat. Így a nagyobb tőkekövetelmény által ezeknek a bankoknak növekszik a saját tőkéjük, ami a jövedelmezőség, azaz ROE= jövedelem/saját tőke mutató csökkenéséhez vezet, ezáltal kicsit visszatartva a bankot attól, hogy az eddigihez hasonló ütemben még nagyobbra növekedjen.

A prociklikusság problémája is kiteljesedett a válság előtt, erre megoldást jelenthet az anticiklikus tőkepuffer bevezetése, mely azt a problémát segít elkerülni, hogy a bankoknak veszteséges időkben több tőkét kell tartalékolniuk, azzal, hogy nyereséges időben többet raknak félre, amit veszteséges időkben majd felélhetnek. Lényege, hogy nem csak az eddigi veszteségekre, hanem egy adott gazdasági periódus egészében átlagosan felmerülő várható veszteségekre kell tőketartalékot képezni. Szabályozása országonként történik, ha egy adott országban a hitelnövekedést túl nagyra találják, akkor előírhatják anticiklikus tőketartalék rátát 0 – 2,5% között a hitelezők felé.

Ezenkívül a Bazel III. keretén belül bevezetésre kerül még a kockázati súlyozás nélküli tőkeáttételi ráta bevezetése, amivel a magas kockázatot hordozó, de valójában alulsúlyozott tevékenységek elterjedése gátolható meg. Ez csak a kockázattal súlyozott tőkeáttételi ráta mellett kiegészítőként kerül bevezetésre, hiszen a tőkének elsősorban a kockázatokkal arányosnak kell lennie. Természetesen ezenkívül is sok új része van a Bazel III. szabályozásnak az eddigiekhez képest, melyeket itt nem említünk. Valamint a rendszerkockázat szabályozása is várhatóan tovább fejlődik majd a jövőben, de az ilyen típusú szabályozások bevezetéséhez általában viszonylag hosszú időre van szükség, hogy a bankok felkészülhessenek a változásokra.

A szabályozás esetleges további fejlesztésének egyik lehetséges indoka, hogy más típusú események is válhatnak rendszerkockázati eseménnyé abból fakadóan, ha egyszerre túl sokan követik ugyanazt a stratégiát. Ilyen volt például a válságot megelőző struktúrált értékpapírosítás, és a devizahitelek hirtelen és gyors növekedése. (A devizahiteleknek ennél is jelentősebb kockázatát azonban az időbeli transzformáltság okozta, miszerint hosszútávú hiteleket rövidtávú devizacsere ügyletekből finanszíroztak.) Az ilyen esetekben a szabályozóknak lehetőségük van a kockázatos események visszaszorítására, illetve korlátozására. Magyarországon a PSZÁF elnöke felfüggesztheti vagy korlátozhatja az ilyen rendszerkockázatot hordozó eseményeket, de legfeljebb 90 napra.

Az egész pénzügyi rendszer szempontjából veszélyt jelentő bankok azonosítására és többlet-tőke követelményének meghatározására irányuló szabályozásokat fokozatosan vezetnek be 2016 és 2019 között.



## 5. fejezet

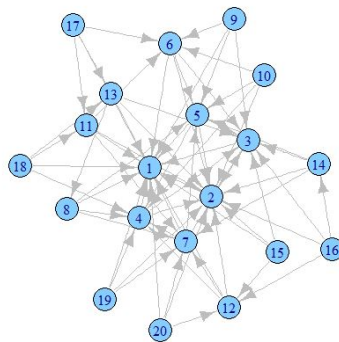
# Szimuláció

A szimuláció készítése több okból is hasznos lehet: elsősorban azért, mert segíthet egy pontosabb képet adni arról, hogy jó e a feltételezett modellünk vagy sem. Felhívhatja a figyelmet az esetleges hibákra, melyek következtében változtathatunk a modellünkön, a szimuláció paraméterein, ezzel pontosítva az eredményt. Szimulációt készíthetünk még az adatok hiánya miatt is: amennyiben nincsenek pontos adataink valamilyen okból, például nem érhetőek el számunkra, vagy nehezen azonosíthatóak, nem mérhetőek, akkor dönthetünk a szimuláció használata mellett. Így meg tudjuk nézni, hogy a paraméterek változtatása milyen hatással van a végkifejletre, esetleg ez segíthet a nem ismert változók értékének megbecslésében is. A valós adatok nehéz elérhetősége ellenére nagyon fontos, hogy valós adathalmazra épülő elemzések is készüljenek, hiszen ezek alapján becsülhetőek legjobban a paraméterek, amiket később a modellekben is alkalmazhatunk. Az itt bemutatott szimuláció nem valós adatokra épül az adatok hiányossága miatt, de továbbfejlesztve, a modell akár valós adatbázison is alkalmazható.

### 5.1. A fertőzés terjedésének súlyozatlan gráfmodell esetén

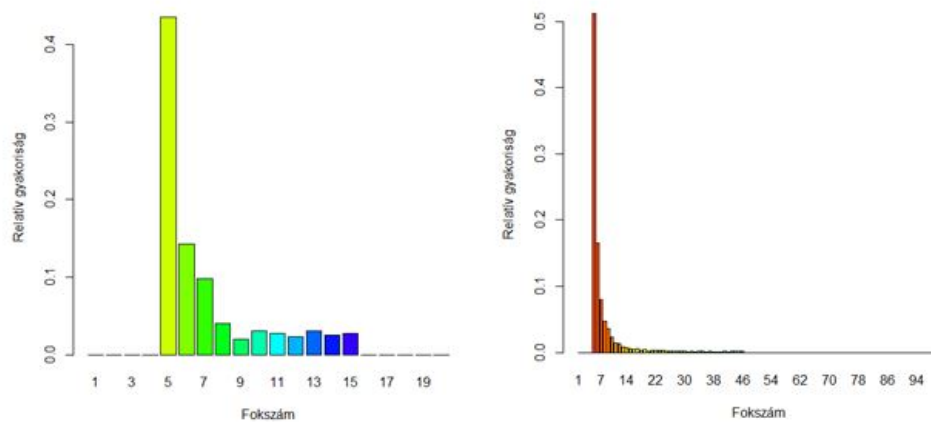
A szimuláció elkészítése az R program segítségével történt, melynek használatához nagy segítséget jelentett az R programhoz tartozó kézikönyv [50], valamint a konkrétan gráfokkal foglalkozó „igraph package” leírása [22]. Az eddigiekhez hasonlóan a pénzügyi intézményeket a gráf csúcsai-ként jelenítjük meg, a csúcsok közt pedig irányított élekkel ábrázoljuk a bankközi kapcsolatokat. Ekkor az irányított éleket értelmezhetjük úgy, hogy egy adott  $i$  csúcsból akkor mutat él a  $j$  csúcsba, ha az  $i$  bank betétet helyezett el a  $j$  banknál. A modellben az élek általában a nagyobb központi csúcsok felé irányítottak, így ezt akár úgy is elképzelhetjük, hogy a kisebb lakossági pénzkezeléssel foglalkozó intézetek a nagyobb, befektetési bankokra bízzák a tőkéjük egy részét. Ekkor a fertőzés az éleken az irányítással ellentétesen terjed, ilyet láthattunk a 3.3. alfejezetben is.

Az átláthatóság kedvéért az ábrák túlnyomó többségén egy 20 bankból álló hálózatot, illetve annak tulajdonságait jelenítjük meg, ahol ennél nagyobb csúcscsámot használunk, azt külön jelezzük. A valóságban a banki hálózatok ennél általában jóval több elemből állnak, így a több csúcs esetén kapott eredményekre is kitérünk majd, de ott az ábrázolástól eltekintünk. A 2.4.1. alfejezetben ismertetett Barabási–Albert modellt alkalmazzuk, ennek használatára már láthatunk példát a 3.2. rendszerkockázat terjedését modellező részben is. Első lépésben létrehozunk egy  $n = 20$  csúcsból álló, irányított Barabási–Albert modellt, ahol az új csúcsok  $m = 4$  darab éllel kapcsolódnak. Többszörös éleket, valamint hurokéleket nem engedünk meg, emiatt az első három csatlakozó csúcs csak kevesebb éllel kapcsolódik, de így egy egyszerű gráfot kapunk eredményül. Az így kapott gráf az 5.1. ábrán látható.



5.1. ábra. Irányított Barabási–Albert modell,  $n = 20$ ,  $m = 4$

Az 5.2. ábrán látható a Barabási–Albert gráfmodell fokszámeloszlása, a bal oldalon az  $n = 20$  csúcsú gráfra, a jobb oldalon pedig egy ugyanilyen paraméterekkel rendelkező, de  $n = 100$  csúccsal rendelkező gráfra, mely talán jobban szemlélteti az eloszlás tulajdonságait.



5.2. ábra. A Barabási–Albert modell fokszámeloszlása,  $n = 20$  és  $n = 100$  esetén

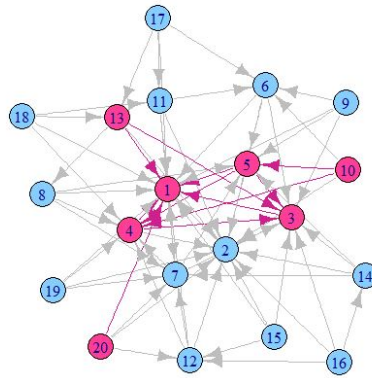
Ebben az esetben az élek még nem súlyozottak, tehát a bankközi kapcsolatokat azonosnak tekintjük bármely két bank között, melyek közt vezet él. A súlyozott esetre az 5.2. alfejezetben térünk ki.

Tegyük fel, hogy ebben a gráfban egy véletlenszerűen választott csúcs megfertőződik, azaz egy bank csődbe megy. Ez könnyen módosítható a csúcsok egy kisebb, véletlen részhalmazává is akár, de most nézzük az egy csúcsból kiinduló fertőzést. Valamint a teljesen véletlenszerűen választott csúcs helyett most csak az első  $n/m$  csúcs közül választunk véletlenszerűen (ez a 20 csúcsból álló gráf esetén az első 5 csúcsot jelenti), mivel ezek nagy valószínűséggel központi csúcsok a gráfban, és az ilyen típusú csúcsokból indítva tud elterjedni leginkább a fertőzés. Modellünk esetében ugyanis az új csúcsok mindig a központi csúcsok felé mutató irányított élekkel kapcsolódnak, így egy utolsó körökben csatlakozott csúcsból indított fertőzés nagy valószínűséggel nem fog elterjedni a gráfban, hiszen kevés, vagy nulla befelé mutató irányított éle van. (Amennyiben egyáltalán nem kapcsolódik befelé mutató irányított él a kezdetben fertőzött csúcshoz, akkor a fertőzés egy valószínűséggel nem tud elterjedni.) Tehát ahhoz, hogy egy teljesen véletlenszerűen választott becsődülő bankból indítva nézzük a sokk hatását, nagyobb gráfmodellre, és több futtatásra lenne szükség, hogy elkerüljük a nulla körüli eredményeket, és a fertőzés el tudjon terjedni a gráfban, meg tudjuk vizsgálni a terjedés folyamatát. Természetesen ekkor is ugyanez az algoritmus alkalmazható.

Az előbbi megfigyelés szerepel a Berger, Borgs, Chayes, Saberi szerzők [12] cikkében is, miszerint a Barabási–Albert modell esetén egy adott folyamat elterjedése teljesen másképp alakul egy véletlenszerűen választott csúcsból indítva, mint a központi csúcsok valamelyikéből indítva.

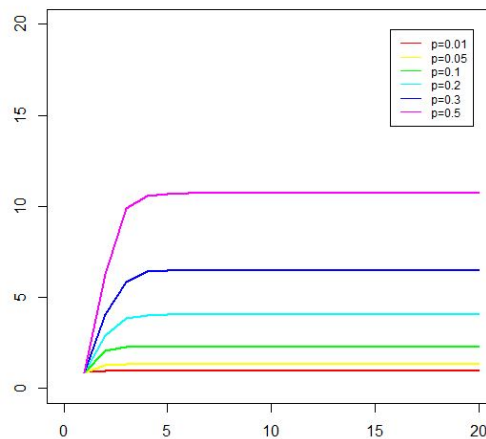
Most a könnyebbség kedvéért maradjunk a kis méretű gráfot vizsgáló esetről, valamint a központi csúcsokból indított fertőzésnél, az összehasonlításra még visszatérünk a későbbiekben. A kezdetben becsődült bankból a fertőzés az első körben csak és kizárólag a közvetlen szomszédaira tud áttérjedni  $p$  valószínűséggel. Az adott kezdeti csúcshoz minden bejövő éllel kapcsolódó szomszéd egymástól függetlenül  $p$  valószínűséggel kapja el a fertőzést. Az időt diszkrétnek tekintjük, minden időegység alatt egy fertőzéses kör történik. Minden lépés esetén csak az előző körben megfertőződött csúcsok adhatják tovább a fertőzést a saját szomszédjaik körében, szintén minden bejövő éllel kapcsolódó szomszédjuknak  $p$  valószínűséggel, egymástól függetlenül.

Az 5.3. ábrán a fertőzés elterjedésének egy adott realizációját láthatjuk, ahol a  $p$  terjedési valószínűség értéke 0,2.



5.3. ábra. A fertőzés elterjedésének egy realizációja  $p = 0,2$  esetén

Eddig tehát egy realizációt néztünk meg részletesebben, mind a gráf létrehozásánál, mind a fertőzés elterjedésénél, illetve a terjedés  $p$  paramétere is egy adott szám volt. Tekintsük most különböző  $p$  értékek esetén a csődök számának alakulását az idő függvényében, azaz a fertőzés terjedésének folyamatát, valamint a végső csődarányt. Itt már nem egyetlen realizációt nézünk, hanem a fertőzés terjedésének száz független futtatását végezzük el minden  $p$  érték esetén, és ezek átlagos számát rajzoljuk ki. A futtatások száma lehet magasabb is, hogy a várható értékhez minél közelebbi eredményt kapjunk, de futtatások számának növelésével az eredmények nem változnak számottevően, így most a száz futtatás is elégséges. Az 5.4. ábrán láthatjuk a csődök számának alakulását az idő függvényében, különböző  $p$  értékek esetén.



5.4. ábra. A csődök számának alakulása az idő függvényében

Megfigyelhetjük, hogy az összes vizsgált esetben a fertőzött csúcsok száma már a folyamat elején eléri a végső értékét, tehát a fertőzés viszonylag hirtelen és gyorsan terjed szét a gráfban. Kis  $p$  értékek esetén a fertőzés gyorsan elhal, a folyamat elején még megfertőződik néhány csúcs,

de ők már nem továbbítják a sokkot. A  $p = 0,5$  esetben a csúcsoknak már több, mint a fele megfertőződik, ennek egyik oka, hogy a vizsgált paraméterekkel rendelkező Barabási–Albert gráf viszonylag erősen összefüggő. Illetve  $m = 4$ ,  $p = 0,5$  paraméterek mellett az első lépésekben is minden fertőzött csúcs várhatóan két másik csúcsot fertőz meg, így a fertőzés gyorsan szétterjed az első néhány kör alatt.

Az, hogy a terjedés viszonylag hamar lezajlik nagyobb gráfméret esetén is teljesül, mert a központi csúcsokon keresztül szinte mindenhová rövid idő alatt eljut a fertőzés, ahová pedig nem, oda később sem fog. Minél nagyobb a  $p$  értéke, annál több kör szükséges a végső csődarány eléréséhez. A nagyobb  $p$  értékek esetén láthatjuk azt is, hogy az elején gyors a terjedés üteme, majd egyre jobban lelassul, végül megáll. A hirtelen terjedés oka, hogy a központi csúcsok viszonylag hamar megfertőzik a szomszédjaik nagy részét, így az újonnan megfertőződött csúcsoknak már nincs túl sok egészséges szomszédjuk, akiknek tovább adhatnák a fertőzést, mert már ők is megfertőződtek a központi csúcsok által. Valamint kialakulhatnak a gráfban olyan csoportok, amik között nehéz az átjárás, kevés köztük a kapcsolat: bármely csoportban lehetnek központi csúcsok is, ám ezek egymással nem kapcsolódnak, vagy csak néhány élen keresztül, amin nehezebben terjed át a fertőzés, mint sűrűbb kapcsolati hálózat esetén, illetve a központokhoz csatlakozó kisebb csúcsok sem terjesztik át a fertőzést a komponensek között, aminek oka a kevés hozzájuk csatlakozó él. Így lehet, hogy egy adott csoporton belül könnyen, hirtelen elterjed a fertőzés, de innen kifelé csak lényegesen kevesebb csúcsnak adódik tovább, tehát a másik csoportban lévő központi csúcsokhoz nem jut át a fertőzés, ezáltal a másik csoportban nem terjed el.

Mint azt már említettük korábban, a valós banki hálózatok általában ennél jóval több elemből állnak. Nézzük meg az eddig vizsgált tulajdonságokat egy hasonló paraméterekkel rendelkező,  $n = 200$  csúcsból álló gráfmodellen. A fertőzés itt is hamar szétterjed a gráfban, a csődök végső számát rövid idő alatt elérjük. Ezen végső arányok a következő táblázatban láthatóak, néhány különböző  $m, n$  paraméterű gráf esetén.

	<b>p=0.01</b>	<b>p=0.05</b>	<b>p=0.1</b>	<b>p=0.2</b>	<b>p=0.3</b>	<b>p=0.5</b>
<b>n=20, m=4</b>	0.0490	0.0670	0.1150	0.2030	0.3250	0.5360
<b>n=20, m=6</b>	0.0450	0.0775	0.1325	0.2745	0.4110	0.6240
<b>n=200, m=10</b>	0.0096	0.0344	0.08165	0.2503	0.3710	0.5751
<b>n=200, m=20</b>	0.0114	0.0515	0.1174	0.2815	0.4993	0.7968
<b>n=200, m=40</b>	0.0145	0.0501	0.1246	0.3704	0.6294	0.7990

5.5. ábra. A csődök végső aránya  $p$  függvényében különböző méretű gráfok esetén

A kis  $p$  értékek esetén azt figyelhetjük meg, hogy az  $n = 200$  csúcsból álló gráfban kevésbé terjed el a fertőzés, mint az  $n = 20$  csúcsú modell esetén. Ennek az lehet az oka, hogy kis  $p$  értékek esetén

a megfertőződött csúcsok darabszáma inkább csak attól függ, hogy a kezdeti csúcsnak milyen egy viszonylag kis sugarú környezete, nem pedig az egész gráftól. Például a  $p = 0,01$  esetben a 200 csúcsú gráfban egy csúcs várhatóan  $0,01$  valószínűséggel fertőzi meg a szomszédait, ami nem olyan kevés, mivel minden csúcsnál ez beszorzódik  $20$ -al, az  $m = 20$  csatlakozó él miatt, de ez arányaiban még mindig jóval kevesebb, mint a  $20$  csúcsú gráfnál. Tehát a fertőzés viszonylag gyorsan kihal, és ez jóval kisebb arányokat eredményez, mivel több csúcs van a gráfban, azaz több olyan csúcs marad, ahová nem ért el a sokk hatása. Nagyobb  $p$  értékek esetén a  $200$  csúcsból álló gráfban a végső csődök aránya magasabb, mint az ugyanolyan él-arányokkal rendelkező, kisebb,  $20$  csúcsú gráfnál. Egyező csúcsszám, és növekvő élszám esetén azt láthatjuk, hogy a fertőzöttek aránya növekszik (például a  $200$  csúcsból álló gráf esetén  $m = 10$ , és  $m = 20$  között), azonban bizonyos élszám fölött ez a növekedés jelentősen lassul ( $m = 20$  és  $m = 40$  között).

Valós adatbázis alapján történő modellezésnél a gráfunk, azaz a csúcsok és a köztük lévő kapcsolatok adottak lennének, ebben az esetben a csőd terjedésének  $p$  paraméterét kellene meghatározni a modellezéshez, valamint a kezdeti időpontban becsődölő bankok részhalmazát. Azonban valós adatok esetén célszerűbb a következő alfejezetben leírt modellt alkalmazni, ahol az élek súlyozottak a kitettségek nagysága szerint.

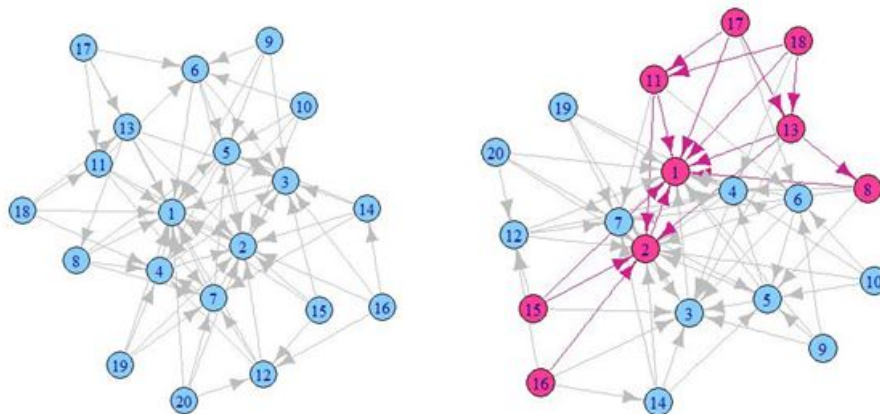
## 5.2. A fertőzés terjedésének alakulása súlyozott gráfmodell esetén

Ebben a részben az eddig alkalmazott gráfmodellen mindössze annyit változtatunk, hogy hozzárendelünk egy véletlen súlyt minden egyes élhez, valamint minden csúcshoz is. A súlyok kezdetben a terjedés valószínűségét fogják meghatározni, majd a modell továbbfejlesztésekor új értelmezést rendelünk hozzájuk. Az élek súlyait egy  $(d, 1)$  paraméterű  $\beta$ -eloszlásból generáltuk, ahol  $d$  az adott él végpontjának fokszáma. Így minél nagyobb az él végpontjának a fokszáma, ahonnan terjed a fertőzés, azaz minél nagyobb a becsődölt bank, annál nagyobb az élsúly, emiatt annál nagyobb lesz a valószínűsége, hogy a fertőzés át tud terjedni. A fertőzés itt is az irányítással ellentétesen terjed, ugyanúgy, mint a súlyozatlan esetben, illetve, mint a 3.3. részben. A csúcsok súlyait pedig  $(1, 1)$  paraméterű Pareto-eloszlás szerint határozzuk meg, úgy hogy az ebből az eloszlásból kapott véletlen számhoz még hozzáadjuk az adott csúcs  $m$ -mel leosztott fokszámát, ezáltal a csúcssúlyok is fokszámfüggőek lesznek. A fokszámot azért osztjuk el  $m$ -mel, az ábrázolt  $20$  csúcscsal rendelkező gráf esetén négygyel, mivel a Pareto-eloszlás erős szóródása, és a teljes fokszám hozzáadása néhol nagyon nagy értékeket adna a csúcs súlyára, így nagyon kis valószínűséggel terjedne el a fertőzés. A gráfban  $m$  darab éllel pedig minden csúcs rendelkezik, tehát a Pareto-eloszláshoz ezáltal azt adjuk hozzá, hogy a fokszám hányszorosára növekszik egy adott csúcsnál a kezdeti  $m$  értékhez képest. Ennél a lépésnél ügyeltünk arra, hogy a csúcssúlyok egynél mindenképp nagyobb értékűek legyenek, azaz az élsúly/csúcssúly hányados mindenképp

$[0, 1]$  halmazbeli értéket vegyen fel. Ezen súlyozás által a több kapcsolattal rendelkező csúcsokhoz nagyobb csúcstúlyt rendelünk hozzá, melyre gondolhatunk úgy, mint a bank tőkéjére. Ez elősegíti majd, hogy a nagyobb fokszámú csúcsok kisebb eséllyel dőljenek be. Természetesen más eloszlás alapján is generálhatóak a súlyok, vagy más paraméterek is választhatóak, esetleg érdemes a különböző paraméterekkel generált eredményeket összehasonlítani.

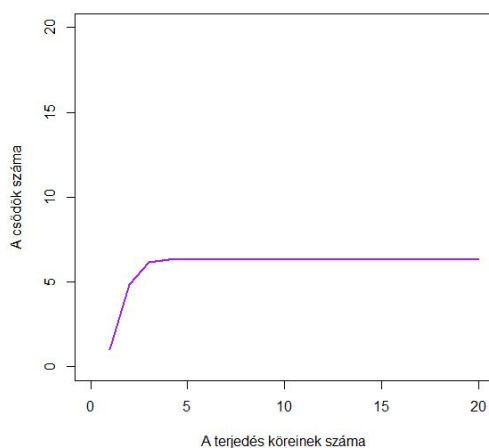
Ennél a modellnél az eddigi megadott  $p$  valószínűségtől eltérően, a fertőzés terjedésének valószínűségét a súlyok segítségével határozzuk meg. Tegyük fel, hogy a gráfunkban megy irányított él a  $j$  csúcsból az  $i$  csúcsba. Ekkor annak a valószínűségét, hogy egy már fertőzött  $i$  csúcsból átterjed a fertőzés a  $j$  szomszédjába, a  $j$  csúcsból az  $i$  csúcsba mutató él súlyának és a kezdeti, azaz a  $j$  csúcs súlyának hányadosa adja. Így a  $j$  bank csődvalószínűségét az határozza meg, hogy a saját tőkéjéhez képest mekkora az  $i$  bank csődje miatt elveszített összeg.

Az 5.6. ábrán láthatjuk a gráfmodell egy realizációját, ugyanazt, mint a súlyozatlan esetben, valamint az előbb leírt módszer alapján terjedő fertőzés egy lehetséges esetét. Az eredményt itt is erősen befolyásolja, hogy a kezdetben becsődölt bank egy központi csúcs, vagy egy kevesebb kapcsolattal rendelkező csúcs. Az 5.6. ábrán a fertőzés egy magas fokszámú csúcsból indult ki. Az is megfigyelhető, hogy a többi nagyobb fokszámú csúcs kevésbé, inkább a kisebb csúcsok fertőződtek meg, melynek lehetséges okai közé tartozik a fokszám függvényében generált csúcstúly (emiat a kisebb csúcsok nagyobb valószínűséggel kapják el a fertőzést), valamint a kapcsolati hálózat irányításának felépítése.



5.6. ábra. A gráfmodell, valamint a fertőzés terjedésének egy realizációja

A csődök átlagos végső száma 0,1120, ha a kezdetben becsődülő bankot teljesen véletlenszerűen választjuk ki az összes csúcs közül. Amennyiben viszont központi csúcsból indítjuk a fertőzést (például a legtöbb kapcsolattal rendelkező csúcsból, vagy egy bizonyos fokszámot elérő csúcsok közül választunk véletlenszerűen), akkor ez az érték ennél jóval magasabb.



5.7. ábra. A csődök számának alakulása az idő függvényében

Az 5.7. ábrán a csődök átlagos számának alakulása látható abban az esetben, mikor az első  $n/m$  darab csúcs valamelyikéből indítjuk a fertőzést. Tekintve a gráf felépítését, ezek a kezdeti csúcsok ugyanis nagy valószínűséggel magas fokszámúak lesznek. (Ehelyett nézhetnénk az  $n/m$  darab legmagasabb fokszámú csúcsot is, azonban ez csak elhanyagolható mértékben növeli meg a végső csődarányokat.) Ekkor a végső csődarány átlagosan 0,3160. Ez elég magas érték, a súlyozatlan esetben ilyen paraméterezésű gráfnál hasonló eredményt körülbelül a  $p = 0,3$  érték esetén kapunk. Valamint sokkal magasabb érték, mint egy teljesen véletlen csúcsból való kiindulás esetén. Tehát érdemes a hálózatban a nagy, fontos szerepet betöltő bankokra külön figyelmet fordítani. (Amennyiben megkeressük a legnagyobb fokszámú csúcsot a gráfban, és innen indítjuk el a sokkot, akkor a végső csődarány még ennél is magasabb, 0,4225.) Egy nagyobb,  $n = 200$ ,  $m = 20$  paraméterű gráf esetén a végső csődarány még magasabb, átlagosan 0,6855, amennyiben az első  $n/m$  csúcsból indítjuk a fertőzést. Amennyiben egy teljesen véletlenszerűen választott csúcsból indítjuk a fertőzést, akkor a végső csődösök aránya 0,1085. Ha pedig a legnagyobb fokszámú csúcsból, akkor 0,7685, azaz ebben az esetben a bankok 3/4-e csődbe megy. Tehát az eddigi megfigyeléseink nagyobb modell esetén is teljesülnek, sőt itt talán még inkább kirajzolódnak azok a tulajdonságok, amikre számítottunk. A fertőzés a súlyozatlan esethez hasonlóan itt is hirtelen terjedt el a gráfban, időben hamar lezajlott, ennek okai a súlyozatlan gráfmodellen való terjedés okaival egyezők, hiszen ugyanazt a modellt alkalmazzuk, csak a terjedés valószínűségét határozzuk meg másképp. Természetesen az eddigi értékek függenek a gráfmodell éppen adott realizációjától, így ugyanezen típusú Barabási–Albert modell egy másik realizációjára eltérő értékeket is kaphatunk, de a megfigyeléseink egymáshoz való viszonya általánosságban is igaznak bizonyult.

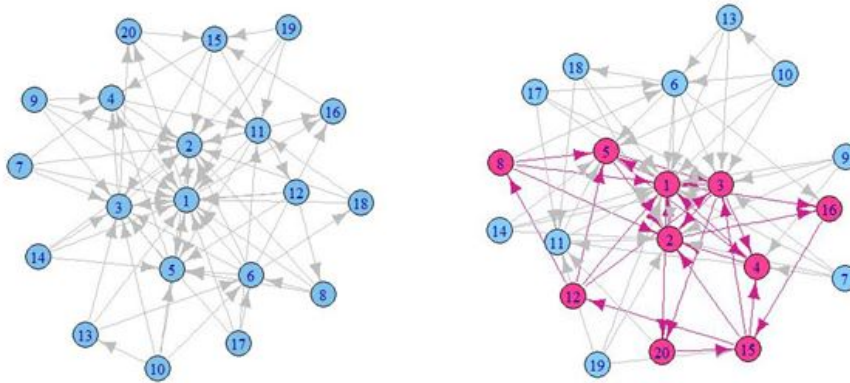


Az eddigi modellünk természetesen sok tekintetben tovább bővíthető, illetve változtatható, valóságosabbá tehető. Fejlesszük tovább az eddigi súlyozott modellünket úgy, hogy a 3.3. alfejezetben bemutatott Amini és szerzőtársai [3] cikkében szereplő szimulációhoz hasonló terjedési folyamatot vizsgálunk. A gráfot ne változtassuk meg, használjuk az eddigi kis méretű Barabási–Albert modellt, ahol  $n = 20$ ,  $m = 4$ , valamint a csúcs- illetve élsúlyok generálása is a korábban leírtak szerint történik. A súlyokra tekinthetünk úgy az élek esetében, mint a bankközi kitettségek nagyságára, a csúcsok esetében pedig, mint a bank tőkéjére. A fertőzés most az irányítással megegyezően fog terjedni, tehát a hitelek kiadása épp az irányítással ellentétesen történt. A gráfban az új csúcsok mindig a régiek felé mutató irányított élekkel kapcsolódnak, tehát a nagyobb, régebbi bankok adnak hiteleket az újonnan csatlakozóaknak. Természetesen akadhatnak kivételek, mikor a kisebb méretű bankok nyújtanak hitelt a nagyobbak felé, ennek modellezése érdekében az éleknek egy adott hányadának irányítását megfordítjuk.

A sokk modellezéséhez bevezetünk két új paramétert is: az egyik az  $R$  megtérülési ráta, a másik a  $\gamma$  konstans, melyeket definiáltunk korábban a 3.3. részben. A következőkben  $R = 0,05$ , valamint  $\gamma = 0,9$  értékeket használjuk. A fertőzés terjedése itt úgy történik, hogy a becsődölt bank szomszédainak tőkéjéből levonjuk a köztük lévő él súlyának  $(1 - R)$ -szeresét, azaz azt a kitettséget, amit a hitelezett bank nem tud visszafizetni a csődje miatt. Amennyiben a levonások következtében egy adott  $i$  bank tőkéje a saját eredeti tőkéjének  $\gamma$ -szorosa alá csökken, akkor az  $i$  bank becsődöl. Jelen esetben azért használunk ilyen magas  $\gamma$  értéket, hogy a kis méretű gráfon is jelentősen elterjedjen a fertőzés. Hiszen a megadott súlyok, és az adott  $R$ ,  $\gamma$  paraméterek mellett egy-egy szomszéd bedőlése még épp nem okoz csődöt, viszont ha a  $\gamma$  paraméter értéke jóval alacsonyabb lenne, akkor sokkal több szomszéd csődjére lenne szükség egy adott bank bedőléséhez, viszont a hálózat kis mérete miatt a legtöbb csúcsonak csak kevés szomszédja van. Az  $R$ , azaz a megtérülési ráta értékét pedig azért ilyen alacsonyra állítjuk, mivel a csőd esetén a visszafizetés teljesen bizonytalan, és általában időben jóval később kerül rá sor.

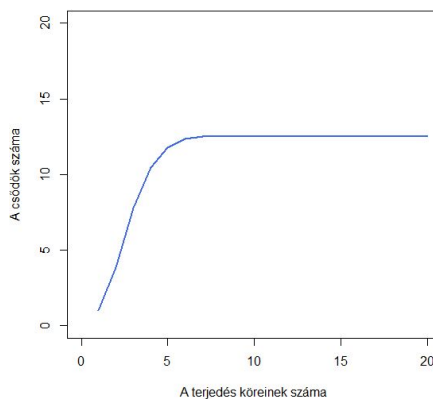
Ezen terjedési módszer során a fertőzés nem feltétlenül egy kör alatt dönt be egy adott bankot, lehet, hogy több szomszédos bankjának együttes csődje okozza végül a bedőlést. Ilyen szempontból ez a modell valóságosabb az eddigiekhez képest.

Az 5.8. ábra bal oldalán láthatjuk az új gráfmodellt, mely az élek irányításában tér el az eddig használt modelltől, a jobb oldalon pedig a fertőzés terjedésének egy esetét, mely egy központi csúcsonból indult ki. A különbség az eddig vizsgált terjedésekhez képest, hogy itt egy körben csak nagyon kevés csúcs csődölt be, több körön át terjedt a fertőzés, míg az eddigieknél egy kör alatt jellemzően többen fertőződtek meg, és a fertőzés kevesebb idő alatt kihalt.



5.8. ábra. A gráfmodell, valamint a fertőzés terjedésének egy realizációja

Valamint megváltozik a véletlenszerűen választott, illetve a központi csúcsból történő indítás kapcsolata, hiszen most az élekkel megegyező irányban történhet a terjedés, így a régebbi, központi csúcsokból kisebb valószínűséggel terjed el a fertőzés, mint az eddig vizsgált esetekben. Az újabb csúcsoknál pedig jelentősen megnövekszik az innen indított terjedési valószínűség, hiszen az élek egy véletlen halmazának irányításának megváltoztatása ellenére, a később csatlakozott, központtá nem alakuló csúcsoknál általában a kifelé mutató élek vannak többségben, és most ezeken tud terjedni a fertőzés. A súlyok hatása az eddigiekhez hasonló: a nagyobb tőkéjű bankok nehezebben csődölnek be, vagy csak több sokkhatás eredményeképp. A nagyobb élsúllyal rendelkező élen terjedő fertőzések erősebb hatásúak. A központi és a véletlenszerűen megválasztott kezdeti csúcsok közti kapcsolat megváltozásának másik lehetséges oka a már említett többszörös hatások figyelembevétele. Az 5.9. ábrán egy véletlen csúcsból indított csődterjedés időbeli alakulását láthatjuk, ahol az élek irányításának megfordítása 0,2 valószínűséggel történt.



5.9. ábra. A csődök számának alakulása az idő függvényében

A végső csődarány ebben az esetben 0,6269. Ugyanezen elfordítási valószínűség mellett egy központi csúcsból indított végső csődarány 0,6505. Ezek egymáshoz viszonylag közeli értékek, az arányok kiegyenlítettebbek lesznek, nincs olyan jelentős különbség köztük, mint az eddigi modellek esetében. A terjedés folyamata és sebessége is nagyon hasonló központi illetve véletlenszerűen választott csúcsból történő kiindulás esetén. Az elfordítási valószínűség növelése esetén az eddigi részekben láthatott irányba tolódik el ez az arány, azaz nagyobb csúcsból kiinduló fertőzés esetén magasabb lesz a becsődölt bankok végső aránya, míg az élek irányításának megfordításának valószínűségét csökkentve a véletlenszerűen választott csúcsból indítva lesz nagyobb a végső csődarány. Ez egyértelműen következik a gráf szerkezeti felépítéséből, valamint abból, hogy most az élekkel megegyező irányban terjed a fertőzés. A magas végső csődarány okozója pedig a kis méretű gráfmodell használata, a viszonylag sok él, azaz az erősen összekapcsolt tulajdonság, valamint a súlyok generálásának módja, illetve a  $\gamma$ ,  $R$  paraméterek beállítása. Megállapíthatjuk, hogy ennél a modellnél az eddiekhez képest lassabb, kevésbé hirtelen a terjedés folyamata. Ennek okaként említhetjük, hogy egy-egy adott csúcs bedőléséhez több fertőzések köre is szükség lehet.

Az  $R$ ,  $\gamma$  paraméterek változtatása mellett is érdemes megfigyelni a terjedés folyamatát: kis  $\gamma$  vagy nagy  $R$  érték esetén a fertőzés terjedése sokkal kevésbé aktív. Ezek mellett az eddigi paraméterek, csúcs- illetve élsúlyok, vagy akár a gráf mérete, szerkezete is változtatható, mely tovább módosíthatja a terjedés folyamatát. A modell természetesen másképp is tovább fejleszhető, új paraméterek is beépíthetők, ahogy épp az adott környezet kívánja, amit modelleznénk. Valamint más tulajdonságok is vizsgálhatók, mind a modell felépítését, mind a rendszerkockázati esemény hatásának terjedését illetően.

Mint minden modellezésnél, itt is érdemes figyelembe venni a modellkockázatot. A modellkockázat annak a kockázata, hogy a modellek nem jól működnek: rossz interpretációt adtunk meg, bizonyos paraméterek változnak, de a modellben konstans értékűek, illetve a valós hálózatok esetén emberi interakciók befolyásolhatják az eredményt, mellyel előre nem számoltunk, és még sorolhatnánk. Ez természetesen az eddigi bemutatott modellek esetén is igaz, előfordulhat, hogy egy paramétert a valóságnak nem megfelelően állítottunk be, vagy kihagytunk akár olyan tényezőt a modellből, mely jelentősen változtatna az eredményen. Ilyen bármikor előfordulhat, illetve az is lehet, hogy a valós világ változik meg gyorsan, melyet modellezünk, ilyenkor a modellünket fejleszteni, változtatni kell, hogy minél jobban illeszkedjen a valósághoz. A lényeg, hogy minden esetben a modell alkalmazása előtt historikus adatok, illetve szimulációk segítségével célszerű megnézni, hogy megfelelően illesztettük-e a modellt és a paramétereket, érdemes eddigi adatokon tesztelni a működését, illetve folyamatosan fejleszteni a modellt, az esetleges változások függvényében.

## Összefoglalás

A dolgozat fő célja a matematikai hálózatelméleti modellezés összekapcsolása a pénzügyi szektorban jelen lévő rendszerkockázattal. A kockázatok közt a rendszerkockázatra napjainkban egyre nagyobb figyelem terelődik, különböző megközelítésekkel vizsgálják az esetlegesen bekövetkező rendszerkockázati események hatását, illetve a kialakulás okait. Az egyik megközelítés a pénzügyi hálózatok modellezése, mely egy adott pénzügyi rendszer egészét vizsgálja.

Ezen belül rengeteg gráfmodell alkalmazható, a modellezés alapjául szolgálhatnak az egyszerűbb gráfok, először ezeken keresztül vizsgáljuk a fertőzés terjedését, mint például a kör alakú gráf, a teljes gráf, valamint az Erdős–Rényi modell, melyek a valós banki hálózatoktól eltérő struktúrájúak, de ennek ellenére olyan tulajdonságokat figyelhetünk meg, melyek a valós hálózatok esetén is hasznosak. Összehasonlítottuk ezeket az egyszerű modelleket, és láthattuk, hogy a kezdeti sokk méretétől is függ, hogy melyik hálózat bizonyul stabilabbnak, melyiken terjed el jobban a fertőzés. Hiszen egy bizonyos ideig a kapcsolatok a kockázat megosztását segítik, majd egy idő után a túl sok él a fertőzés könnyebb és gyorsabb elterjedését teszi lehetővé.

Ezek megismerése után összetettebb, a valóságot jobban modellező, skálafüggetlen Barabási–Albert modellen, illetve egy kiterjesztett konfigurációs modellen vizsgáltuk a fertőzés terjedésének tulajdonságait. Itt elsősorban a csődök arányának időbeli alakulását, valamint a végső csődarányt vizsgáljuk. Megnézzük hogyan változik a becsődült bankok száma a hálózat szerkezete, illetve a különböző pénzügyi paraméterek (bankközi kitettségek, tőkeáttétel, kamatláb) függvényében. Megállapítjuk, hogy egy minimális tőkearány felett a bizonyos feltételeknek megfelelő hálózatok viszonylag ellenállóak a rendszerkockázattal szemben, de ennél kisebb tőkearány esetén az ellenállás negatívvá változik, így a fertőzés gyorsan elterjed a modellben. Ennek a tőkearányának a meghatározását befolyásolja többek közt, hogy a gráf csúcsai milyen mértékben vannak összekapcsolva, valamint a ragályos élek hányada is.

Végül egy saját szimuláció keretében egy súlyozatlan, illetve súlyozott Barabási–Albert gráfmodellen láthatjuk a fertőzés elterjedését, különböző terjedési mechanizmusokat vizsgálva. Beigazolódik, hogy nagy jelentőségű mind az, hogy milyen modellt használunk, a hálózat felépítése milyen struktúrájú, mind pedig az, hogy a rendszerkockázati sokk honnan indul ki, melyik bank csődjé okoz dominóhatást, illetve melyik nem. A szimuláció során megfigyelhetjük azt is, hogy a fertőzés hirtelen, viszonylag rövid idő alatt terjed el a gráfban.

Tudjuk, hogy egy rendszerkockázati esemény kialakulásának valószínűsége nagyon alacsony, de fontos kihangsúlyozni, hogy ennek ellenére az esetleges bekövetkezés súlyos hatásai miatt nem elhanyagolható, szükséges a banki hálózatok rendszerkockázatának vizsgálata, hogy megfelelő szabályozások kerülhessenek bevezetésre, mellyel a rendszerkockázati események kialakulása megelőzhető.

# Függelék: programkód

Az R programkód, azaz ezen függelék tartalma elérhető elektronikus formában a <http://bit.ly/1Y6YpJk> linkre kattintva.

```
#####  
# A szükséges csomagok betöltése #  
#####  
library(igraph)  
library(actuar)  
  
#####  
# A gráf létrehozása, ábrázolása #  
#####  
n<-20  
p<-0.2  
m<-4  
#g<-graph.ring(n,directed=TRUE)  
#g<-graph.full(n,directed=TRUE)  
#g<-erdos.renyi.game(n,p,directed=TRUE)  
g<-ba.game(n,1,m,directed=TRUE,algorithm="psumtree")  
V(g)[1:n]$color<-"skyblue1"  
a<-get.edgelist(g)  
c<-a[,1]  
a_l<-length(c)  
E(g)[1:a_l]$color<-"grey"  
plot(g)  
  
#####  
# Fokszámeloszlás #  
#####  
sim_d<-100  
matrix <- matrix(, nrow = sim_d, ncol = 20)  
for (i in 1:sim_d){  
g1<-ba.game(20,1,4,directed=TRUE,algorithm="psumtree")  
deg<-degree.distribution(g1,v=V(g1))  
for (j in 1:20){  
a<-deg[j]  
matrix[i,j]<-a}}  
atlag<-seq(length=20, from=0, by=0)  
for (i in 1:sim_d){  
atlag[i]<-mean(matrix[,i])}  
atlag[is.na(atlag)] <- 0  
l<-length(atlag)  
names(atlag)<-c(1:l)  
barplot(atlag,xlab="Fokszám",ylab="Relatív gyakoriság",col=rainbow(1))  
sim_d<-100  
matrix2 <- matrix(, nrow = sim_d, ncol = 100)  
for (i in 1:sim_d){  
g2<-ba.game(100,1,4,directed=TRUE,algorithm="psumtree")
```

```

deg2<-degree.distribution(g2,v=V(g2))
for (j in 1:100){
a<-deg2[j]
matrix2[i,j]<-a}}
atlag2<-seq(length=100, from=0, by=0)
for (i in 1:sim_d){
atlag[i]<-mean(matrix2[,i])}
atlag[is.na(atlag2)] <- 0
l<-length(atlag2)
names(atlag2)<-c(1:l)
barplot(atlag2,xlab="Fokszám",ylab="Relatív gyakoriság",col=rainbow(1))

#####
# A kezdetben fertőzött csúcs meghatározása #
#####
vec<-seq(length=n, from=0, by=0)
x<-sample(1:n/m,1)
vec[x]=1
neigh<-seq(length=n, from=0, by=0)
y<-0

#####
# A fertőzés elterjedése #
#####
for (y in 1:n){
for (i in 1:n){
if (vec[i]==y){
neigh<-neighborhood(g, 1, i, mode= "in")
for (j in 1:length(neigh[[1]])){
if (neigh[[1]][j]==i){
neigh[[1]][j]=neigh[[1]][j]}
else{
if (vec[neigh[[1]][j]]!=0){
neigh[[1]][j]=neigh[[1]][j]}
else{
if (rbinom(1,1,p)==1){
vec[neigh[[1]][j]]=y+1}}}}}}
vec

#####
# Csúcsszínező #
#####
V(g)[1:n]$color<-"skyblue1"
for (i in 1:n){
if (vec[i]!=0){
V(g)[i]$color<-"violetred1"}}
plot(g)

#####
# Elszínező #
#####
E(g)[1:a_1]$color<-"grey"
z<-0
for (i in 1:n){
if (vec[i]!=0){
neigh<-neighborhood(g, 1, i,mode= "out")
for (j in 1:length(neigh[[1]])){
if (neigh[[1]][j]!=i){
if (vec[neigh[[1]][j]]!=0){
z<-neigh[[1]][j]
E(g)[i%-%z]$color<-"violetred"} }}}}
plot(g)

```

```

#####
# A csődösök számának alakulása különböző p értékek esetén #
#####
pvec<-c(0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5)
l_pvec<-length(pvec)
time<-c(1:n)
aranyp<-seq(length=l_pvec, from=0, by=0)
col<-rainbow(l_pvec)
plot.new()
plot.window(c(0,20),c(0,20))
plot(0,0,xlim=c(0,20),ylim=c(0,20),type="n",axen=FALSE, ann=FALSE)
sim<-100
arany<-seq(length=sim, from=0, by=0)
csodarany<-0
for (pvalt in 1:length(pvec)){
csodterjedes<-seq(length=n, from=0, by=0)
csodterjedes_alap<-seq(length=n, from=0, by=0)
for (l in 1:sim){
vec<-seq(length=n, from=0, by=0)
x<-sample(1:n/m,1)
vec[x]=1
y<-0
k<-0
f<-0
csodterjedes_kum<-seq(length=n, from=0, by=0)
for (y in 1:n){
for (i in 1:n){
if (vec[i]==y){
neigh<-neighborhood(g, 1, i, mode= "in")
for (j in 1:length(neigh[[1]])){
if (neigh[[1]][j]==i){
neigh[[1]][j]=neigh[[1]][j]}
else{
if (vec[neigh[[1]][j]]!=0){
neigh[[1]][j]=neigh[[1]][j]}
else{
if (rbinom(1,1,pvec[pvalt])==1){
vec[neigh[[1]][j]]=y+1 }} }}}} }

for (k in 1:n){
for (h in 1:n){
if (vec[h]==k){
f<-f+1}}
csodterjedes_kum[k]<-csodterjedes_kum[k]+f}
csodterjedes_alap<-csodterjedes_alap+csodterjedes_kum
csodarany<-(n-sum(vec == 0))/n
arany[l]<-csodarany}
csodterjedes<-csodterjedes_alap/sim
lines(csodterjedes,col=col[pvalt],lwd=2)
atlag<-mean(arany) #ez a végső pillanatban fertőzöttek aránya
aranyp[pvalt]<-atlag}
legend("topright",inset=.05,cex=0.75, c("p=0.01","p=0.05","p=0.1","p=0.2", "p=0.3",
"p=0.5"),horiz=FALSE,lty=c(1,1,1,1,1,1), col=c(rainbow(6)))

#####
# Súlyozott eset/1. #
#####
#####
# A gráf létrehozása, ábrázolása #
#####
n<-200
m<-20
#g<-graph.ring(n,directed=TRUE)

```

```

#g<-graph.full(n,directed=TRUE)
#g<-erdos.renyi.game(n,p,directed=TRUE)
g<-ba.game(n,1,m,directed=TRUE,algorithm="psumtree")
V(g)[1:n]$color<-"skyblue1"
d<-degree(g)
V(g)$id<-rpareto(n,shape=1,scale=1)+d/m
w_csucs<-as.numeric(V(g)$id)
a<-get.edgelist(g)
c<-a[,1]
a_l<-length(c)
for (i in 1:a_l){
E(g)[a[i,1]%-~%a[i,2]]$weight<-rbeta(1, shape1=d[a[i,2]], shape2=1)}
w_el<-E(g)$weight
E(g)[1:a_l]$color<-"grey"
plot(g)

#####
# A kezdetben fertőzött csúcs meghatározása #
#####
vec<-seq(length=n, from=0, by=0)
s2<-n/m
x<-sample(1:s2,1)
vec[x]=1
neigh<-seq(length=n, from=0, by=0)
y<-0

#####
# A fertőzés elterjedése #
#####
for (y in 1:n){
for (i in 1:n){
if (vec[i]==y){
neigh<-neighborhood(g, 1, i, mode= "in")
for (j in 1:length(neigh[[1]])){
if ((neigh[[1]][j])!=i){
if (vec[neigh[[1]][j]]==0){
w_j<-neigh[[1]][j]
w_egyel<-E(g)[w_j%-~%i]$weight
w<-w_egyel/(w_csucs[w_j])
if (rbinom(1,1,w)==1){
vec[neigh[[1]][j]]=y+1}}}}}}
vec

#####
# Csúcsszínező #
#####
V(g)[1:n]$color<-"skyblue1"
for (i in 1:n){
if (vec[i]!=0){
V(g)[i]$color<-"violetred1"}}
plot(g)

#####
# Élszínező #
#####
E(g)[1:a_l]$color<-"grey"
z<-0
for (i in 1:n){
if (vec[i]!=0){
neigh<-neighborhood(g, 1, i,mode= "in")
for (j in 1:length(neigh[[1]])){
if (neigh[[1]][j]!=i){
if (vec[neigh[[1]][j]]!=0){
z<-neigh[[1]][j]

```



```

E(g)[i%--%z]$color<-"violetred"}}}}}}
plot(g)

#####
# A csődösök számának alakulása #
#####
time<-c(1:n)
sim<-100
arany<-seq(length=sim, from=0, by=0)
csodarany<-0
csodterjedes<-seq(length=n, from=0, by=0)
csodterjedes_alap<-seq(length=n, from=0, by=0)
for (l in 1:sim){
vec<-seq(length=n, from=0, by=0)
sample(1:s2,1)
vec[x]=1
y<-0
k<-0
f<-0
csodterjedes_kum<-seq(length=n, from=0, by=0)
for (y in 1:n){
for (i in 1:n){
if (vec[i]==y){
neigh<-neighborhood(g, 1, i, mode= "in")
for (j in 1:length(neigh[[1]])){
if (neigh[[1]][j]!=i){
if (vec[neigh[[1]][j]]==0){
w_j<-neigh[[1]][j]
w_egyel<-E(g)[i%--%w_j]$weight
w<-w_egyel/(w_csucs[j])
if (rbinom(1,1,w)==1){
vec[neigh[[1]][j]]=y+1}}}}}}
for (k in 1:n){
for (h in 1:n){
if (vec[h]==k){
f<-f+1}}
csodterjedes_kum[k]<-csodterjedes_kum[k]+f}
csodterjedes_alap<-csodterjedes_alap+csodterjedes_kum
csodarany<-(n-sum(vec == 0))/n
arany[l]<-csodarany}
csodterjedes<-csodterjedes_alap/sim
plot(csodterjedes,col="purple",lwd=2,type="l",xlim=c(0,20),ylim=c(0,20),
xlab="A terjedés köreinek száma",ylab="A csődök száma")
atlag<-mean(arany)

#####
# Súlyozott eset/2. #
#####
n<-20
m<-4
#g<-graph.ring(n,directed=TRUE)
#g<-graph.full(n,directed=TRUE)
#g<-erdos.renyi.game(n,p,directed=TRUE)
g<-ba.game(n,1,m,directed=TRUE,algorithm="psumtree")
V(g)[1:n]$color<-"skyblue1"
d<-degree(g)
V(g)$id<-rpareto(n,shape=1,scale=1)+d/m
w_csucs<-as.numeric(V(g)$id)
eredeti_cs<-w_csucs
a<-get.edgelist(g)
c<-a[,1]
d<-a[,2]
a_l<-length(c)

```

```

pv<-0.1
for (i in 1:a_1){
if (rbinom(1,1,pv)==1){
seged<-a[i,1]
a[i,1]<-a[i,2]
a[i,2]<-seged}}
uj<-graph.edgelist(a)
plot(uj)
g<-uj
a<-get.edgelist(g)
c<-a[,1]
a_1<-length(c)
for (i in 1:a_1){
E(g)[a[i,1]%--%a[i,2]]$weight<-rbeta(1, shape1=d[a[i,2]], shape2=1)}
w_el<-E(g)$weight
E(g)[1:a_1]$color<-"grey"
plot(g)

#####
# A kezdetben fertőzött csúcs meghatározása #
#####
vec<-seq(length=n, from=0, by=0)
s2<-n/m
x<-sample(1:s2,1)
vec[x]=1
neigh<-seq(length=n, from=0, by=0)
y<-0

#####
# A fertőzés elterjedése #
#####
R<-0.05
gamma<-0.9
for (y in 1:n){
for (i in 1:n){
if (vec[i]==y) {
neigh<-neighborhood(g, 1, i, mode= "out")
for (j in 1:length(neigh[[1]])){
if ((neigh[[1]][j])!=i){
if (vec[neigh[[1]][j]]==0){
sz<-neigh[[1]][j]
w_egyel<-E(g)[sz%--%i]$weight
w_csucs[sz]<- w_csucs[sz]-(1-R)*w_egyel
nv<-w_csucs[sz]
ov<-gamma*eredeti_cs[sz]
if (nv< ov){
vec[sz]<-y+1}}}}}}
vec

#####
# Csúcsszínező #
#####
V(g)[1:n]$color<-"skyblue1"
for (i in 1:n){
if (vec[i]!=0){
V(g)[i]$color<-"violetred1"}}
plot(g)

#####
# Elszínező #
#####
E(g)[1:a_1]$color<-"grey"
z<-0
for (i in 1:n){

```

```

if (vec[i]!=0){
neigh<-neighborhood(g, 1, i,mode= "out")
for (j in 1:length(neigh[[1]])){
if (neigh[[1]][j]!=i){
if (vec[neigh[[1]][j]]!=0){
z<-neigh[[1]][j]
E(g)[i%--%z]$color<-"violetred"}}}}}}
plot(g)
time<-c(1:n)
sim<-100
arany<-seq(length=sim, from=0, by=0)
csodarany<-0
csodterjedes<-seq(length=n, from=0, by=0)
csodterjedes_alap<-seq(length=n, from=0, by=0)
R<-0.05
gamma<-0.9
for (l in 1:sim){
d<-degree(g)
V(g)$id<-rpareto(n,shape=1,scale=1)+d/m
w_csucs<-as.numeric(V(g)$id)
eredeti_cs<-w_csucs
a<-get.edgelist(g)
c<-a[,1]
a_l<-length(c)
for (i in 1:a_l){
E(g)[a[i,1]%--%a[i,2]]$weight<-rbeta(1, shape1=d[a[i,2]], shape2=1)}
w_el<-E(g)$weight
vec<-seq(length=n, from=0, by=0)
x<-sample(1:s2,1)
vec[x]=1
y<-0
k<-0
f<-0
csodterjedes_kum<-seq(length=n, from=0, by=0)
for (y in 1:n){
for (i in 1:n){
if (vec[i]==y){
neigh<-neighborhood(g, 1, i, mode= "out")
for (j in 1:length(neigh[[1]])){
if (neigh[[1]][j]!=i){
if (vec[neigh[[1]][j]]==0){
sz<-neigh[[1]][j]
w_egyel<-E(g)[sz%--%i]$weight
w_csucs[sz]<- w_csucs[sz]-(1-R)*w_egyel
nv<-w_csucs[sz]
ov<-gamma*eredeti_cs[sz]
if (nv<ov){
vec[sz]<-y+1}}}}}}}}
for (k in 1:n){
for (h in 1:n){
if (vec[h]==k){
f<-f+1}}
csodterjedes_kum[k]<-csodterjedes_kum[k]+f}
csodterjedes_alap<-csodterjedes_alap+csodterjedes_kum
csodarany<-(n-sum(vec == 0))/n
arany[l]<-csodarany}
csodterjedes<-csodterjedes_alap/sim
plot(csodterjedes,col="royalblue",lwd=2,type="l",xlim=c(0,20),ylim=c(0,10),
xlab="A terjedés köreinek száma",ylab="A csődök száma")
atlag<-mean(arany)

```

# Irodalomjegyzék

- [1] DARON ACEMOGLU, ASUMAN OZDAGLAR, ALIREZA TAHBAZ-SALEHI, *Systemic Risk and Stability in Financial Networks*, Working Paper 13-03., 2013.01.15.
- [2] FRANKLIN ALLEN, DOUGLAS GALE, *Financial Contagion*, The Journal of Political Economy, 108/1., 1–33, 2000.02.
- [3] HAMED AMINI, RAMA CONT, ANDREEEA MINCA, *Resilience to Contagion in Financial Networks*, Mathematical Finance, 2013.10., <http://arxiv.org/pdf/1112.5687.pdf>
- [4] *Az Európai Parlament és a Tanács 2013/36/EU Irányelve*, 2013.06.26., <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/HU/TXT/PDF/?uri=CELEX:32013L0036>
- [5] *Az Európai Parlament és a Tanács 575/2013/EU Rendelete*, 2013.06.26., <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/HU/TXT/PDF/?uri=CELEX:32013R0575>
- [6] BARABÁSI ALBERT-LÁSZLÓ, ALBERT RÉKA, *Emergence of scaling in random networks*, Science, 286, 509–512, 1999.
- [7] BARABÁSI ALBERT-LÁSZLÓ, *Network Science*, Phil. Trans. R. Soc. A, 371, 2013.
- [8] PHILIP BARTHOLOMEW, GARY WHALEN, *Fundamentals of Systemic Risk*. In Research in Financial Services: Banking, Financial Markets, and Systemic Risk, vol. 7, edited by George G. Kaufman, 3–17. Greenwich, Conn.: JAI. 1995.
- [9] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, *Global systemically important banks: updated assessment methodology and the higher loss absorbency requirement*, 2013.07., <http://www.bis.org/publ/bcbs255.pdf>
- [10] STEFANO BATTISTON, DELLI D. GATTI, MAURO GALLEGATI, BRUCE GREENWALD, JOSEPH E. STIGLITZ, *Liaisons dangereuses: Increasing connectivity, risk sharing, and systemic risk*, 2009., <http://www.nber.org/papers/w15611>
- [11] BENEDEK GÁBOR, LUBLÓY ÁGNES, SZENES MÁRK, *A hálózatelmélet banki alkalmazása*, Közgazdasági Szemle, LIV. évf., 682–702, 2007.07-08.

- [12] NOAM BERGER, CHRISTIAN BORGS, JENNIFER CHAYES, AMIN SABERI, *On the spread of viruses on the internet*, In Proc. Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms 301–310., SIAM, Philadelphia., 2005.
- [13] PHILIPPE BLANCHARD, C.-H. CHANG, TYLL KRÜGER, *Epidemic thresholds on scale-free graphs: the interplay between exponent and preferential choice*, Annales Henri Poincaré, 4(suppl. 2):S957-S970, 2003.
- [14] LARRY BLUME, DAVID EASLEY, JOHN KLEINBERG, ROBERT KLEINBERG, ÉVA TARDOS, *Which networks are least susceptible to cascading failures?*, Proceedings of the 2011 IEEE 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Society, 2011.
- [15] BOGDÁN RAJCS SÁNDOR, *Kockázatkezelés és hitelpontozás a kereskedelmi bankok esetében*, 2009.
- [16] BOLLOBÁS BÉLA, *A probabilistic proof of an asymptotic formula for the a number of labelled regular graphs*, European J. Combin., 1(4):311–316, 1980.
- [17] BÉLA BOLLOBÁS, OLIVER RIORDAN, JOEL SPENCER, GÁBOR TUSNÁDY, *The degree sequence of a scale-free random graph process*, Random Structures Algorithms, 18(3):279–290, 2001.
- [18] ANTONIO CABRALES, PIERRO GOTTARDI, FERNANDO VEGA-REDONDO, *Risk-sharing and contagion in networks*, CADMUS EUI Research Respository, 2013., <http://cadmus.eui.eu//handle/1814/25634>
- [19] PETER CARR, LIUREN WU, *The finite moment log stable process and option pricing*, The Journal of Finance, LVIII, NO.2:753–778, 2003.
- [20] ANNA S. CHERNOBAI, SVETLOZAR T. RACHEV, FRANK J. FABOZZI, *Operational Risk: A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [21] RAMA CONT, AMAL MOUSSA, EDSON B. SANTOS, *Network Structure and Systemic Risk in Banking Systems*, 2010., <http://papers.ssrn.com/sol3/id=1733528>
- [22] CSÁRDI GÁBOR, *Network analysis and visualisation, Package 'igraph'*, 2014.04.24., <https://cran.r-project.org/web/packages/igraph/igraph.pdf>
- [23] CSÓKA PÉTER, KISS TAMÁS, *Az összekapcsoltság hatása a rendszerkockázatra homogén bankrendszerben*, 2015., <http://econ.core.hu/file/download/mtdp/MTDP1510.pdf>

- [24] OLIVIER DE BANDT, PHILIPP HARTMANN, *Working Paper No. 35., Systemic Risk: A Survey*, 2000.11.
- [25] *Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council Section 3, Article 13, Definitions (33)*, Official Journal of the European Union, 2009.12.17., L 335., [eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:en:PDF](http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:en:PDF)
- [26] OANA RALUCA DRAGAN, IOAN BATRANCEA *Systemic Risk in Banking Sector*, The USV Annals of Economics and Public Administration, Volume 13, Issue 1(17), 2013.
- [27] RICK DURRETT, *Random graph dynamics*, Cambridge University Press, 2007.
- [28] ERDŐS PÁL, RÉNYI ALFRÉD, *On random graphs I*, Publ. Math. Debrecen, 6, 290–297, 1959.
- [29] AGAM GUPTA, MOLLY M. KING, JAMES MAGDANZ, REGINA MARTINEZ, MATTEO SMERLAK, AND BRADY STOLL, *Critical connectivity in banking networks*, SFI Complex Systems Summer School Proceedings, 2013.09.16., [http://www.santafe.edu/media/cms\\_page\\_media/500/Banks\\_SFI\\_report%20\(1\).pdf](http://www.santafe.edu/media/cms_page_media/500/Banks_SFI_report%20(1).pdf)
- [30] P. JEAN-JACQUES HERINGS, PÉTER CSÓKA, LÁSZLÓ Á. KÓCZY, *Coherent measures of risk from a general equilibrium perspective*, Journal of Banking and Finance, 31:2510–2534, 2007.
- [31] REMCO VAN DER HOFSTAD, *Random Graphs and Complex Networks*, 2013.01.26.
- [32] KATONA ZSOLT, *Véletlen gráfmodellek*, Doktori értekezés, 2006.
- [33] GEORGE G. KAUFMAN, *Bank Failures, Systemic Risk, and Bank Regulation*, Cato Journal, Vol. 16, No. 1 Spring/Summer, 1996.
- [34] GILBERT, E. N. *Random graphs*, Ann. Math. Statist., 30, 1141–1144, 1959.
- [35] KWANG-IL GOH, BYUNGNAM KAHNG, DOOCHUL KIM, *Physical Review Letters* 87, 270701, 2001.
- [36] CARL GRAHAM, *Chaoticity for multiclass systems and exchangeability within classes*, Journal of Applied Probability, 45(4):1196–1203, 2008., <http://arxiv.org/pdf/0709.1918.pdf>
- [37] JOHN C. HULL, *Risk Management and Financial Institutions*, Third Edition, John Wiley & Sons, 2012.04.
- [38] GEORGE G. KAUFMAN, KENNETH E. SCOTT, *What Is Systemic Risk, and Do Bank Regulators Retard or Contribute It?*, Volume 7, Number 3, 371–391, 2003.

- [39] OLIVER KLEY, CLAUDIA KLÜPPELBERG, LUKAS REICHEL, *Systemic risk through contagion in a core-periphery structured banking network*, arXiv:1406.6575v1 [q-fin.RM], 2014.06.25.
- [40] MARKO KRZMAR, *Contagion Risk in the Croatian Banking System*, Publisher: Croatian National Bank, W-20., 2009.05.
- [41] LAMANDA GABRIELLA, *Banki működési kockázatok kezelésének szabályozása és gyakorlata*, Doktori Értekezés, 2011.
- [42] LUBLÓY ÁGNES, *A magyar bankközi piac rendszerkockázati vonatkozásai*, Doktori értekezés, 2005.
- [43] LUBLÓY ÁGNES, *Rendszerkockázat a bankszektorban*, Hitelintézeti szemle, 70–90, 2012/10.
- [44] MÁZSÁR NOÉMI, *A járványterjedés modellezése véletlen gráfokon*, ELTE–TTK Matematika BSc szakdolgozat, 2013.,  
[http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc\\_alkmat/2013/mazsar\\_noemi.pdf](http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_alkmat/2013/mazsar_noemi.pdf)
- [45] MÉRŐ KATALIN, *A bankszabályozás kihívásai és változásai a pénzügyi-gazdasági válság hatására*, Verseny és Szabályozás 2011, Valentiny Pál, Kiss Ferenc László, Nagy Csongor István (szerk.), MTA, KRTK Közgazdaságtudományi Intézet, 2012.
- [46] FREDERIC MISHKIN, *Asymmetric Information and Financial Crises: A Historical Perspective*, In *Financial Markets and Financial Crises*, edited by R. Glenn Hubbard, Chicago: University of Chicago Press., 69—108, 1991.
- [47] ERLEND NIER, JING YANG, TANJU YORULMAZER AND AMADEO ALENTORN, *Network models and financial stability*, Bank of England, Working Paper No. 346., 2008.04.
- [48] ÖCSI BÉLA, *Pénzügyi kockázatok kezelése*, Nemzetközi Bankárképző Központ Zrt., *Pénzügyi kockázatok kezelése előadássorozat*, 2014–2015. I. félév
- [49] RADNAI MÁRTON, VONNÁK DZSAMILLA, *Banki tőkemegfelelési kézikönyv*, Alinea Kiadó, Ramasoft Kft., 2010.
- [50] WILLIAM N. VENABLES, DAVID M. SMITH & R CORE TEAM, *An Introduction to R*, 2015.08.14., <https://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf>