Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

Árazási modellek inflációs termékekre

Készítette: Víg Attila András
Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak
Kvantitatív pénzügyek szakirány
2016

Szakszemináriumvezető: Dr. Vidovics-Dancs Ágnes

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Vidovics-Dancs Ágnesnek a szakmai és emberi támogatást – nélküle e dolgozat nem készülhetett volna el.
Hálával tartozom továbbá Michaletzky György Tanúr Úrnak, aki többszöri konzultációk során segített eligazodni a sztochasztikus folyamatok útvesztőjében.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A pénzügyi fogalmak közül talán az infláció rendelkezik a legbiztosabb hellyel a köztudatban. Jelentősége óriási a magánszemélyek, a vállalatok és az állam számára is. Reáleszközökben – így például a részvények és az ingatlanok értékében – implicit módon megjelenik az inflációs kockázat, érthető azonban az igény olyan eszközök iránt, melyek szorosabb kapcsolatban vannak az inflációval. Az első – és máig legjelentősebb – pénzügyi termék, melyben explicit módon megjelenik az inflációs kockázat, a tőkeindexált kötvények. Ez az elsősorban államok által kibocsátott kötvénytípus az utóbbi évtizedekben rendkívüli volumennövekedésen ment át, és a felfutással párhuzamosan a pénzügyi innováció eredményeképpen megjelentek az inflációs derivatívák is: a pénzügyi közvetítőkön keresztül az inflációs kockázatok eladói és vásárlói ma már könnyen megtalálják egymást.

Célunk ezen inflációs termékek árazása, mely során gondolatmenetünk a kamatlábmodellekhez hasonló lesz: sztochasztikus dinamikát fogunk feltételezni mind a rövid kamatlábra, mind az inflációra a kockázatmentes mérték alatt, és zárt formulát igyekszünk levezetni az értékfolyamatokra.

A dolgozat – bevezető utáni – első részében a használt alapfogalmakat mutatjuk be. Lesz szó az árindexről és az inflációról, mérésének folyamatáról és nehézségeiről, különböző mutatószámokról. Bemutatjuk a tőkeindexált kötvényt mint pénzügyi terméket, körüljárjuk jelentőségét mind befektetői, mind kibocsátói oldalról. Bemutatjuk továbbá a dolgozat során használt pénzügyi matematikai alapfogalmakat, melyek az árazási elmélet alapkövei. Az árazás alapgondolata (melyet relatív-, vagy arbitrázsmentes árazásnak is nevezünk), hogy az eszközöket egymáshoz képest árazzuk, értéküket a közgazdasági – és matematikai – „kényszer" határozza meg.

A dolgozat gerincét adó második részben egy *Vasicek-modell* ihletettségű egyensúlyi modellt állítunk fel: a rövid kamatlábra és az inflációra is egy átlaghoz visszahúzó dinamikát feltételezünk a kockázatmentes mérték alatt. A modell keretein belül – két módszerrel is – zárt formulát adunk a tőkeindexált elemi kötvény értékére, illetve a tőkeindexált elemi kötvényre szóló opcióra árára is, továbbá felírjuk, hogy a modell milyen alakú hozam- és inflációs görbéket képes előállítani. Ezek után két nagy volumenű inflációs derivatívát is megemlítünk: a zéró-kupon inflációs csereügylet és a zéró-kupon inflációs floorlet értékét is meghatározzuk a modell keretein belül.

A harmadik részben – követve a kamatlábmodellek evolúcióját – egy *Hull-White-modell* ihletettségű piaci modellt állítunk fel: a rövid kamatlábra és az inflációra továbbra is átlaghoz visszahúzó dinamikát feltételezünk, azonban itt megengedjük, hogy az átlag egy időtől függő, determinisztikus mennyiség legyen. Ekkor nem célunk a tőkeindexált elemi kötvény értékének felírása – éppen fordítva, célunk az átlagfüggvény meghatározása, hogy a modell tökéletesen illeszkedjék a piacon megfigyelt lejárati struktúrához, mind a nominális, mind a tőkeindexált kötvények tekintetében.

Az utolsó részben az eredményeket összegezzük, illetve következő evolúciós lépésként egy olyan modellt is vázolunk, melynek kifejtése túlmutat e dolgozat keretein.

2. Alapfogalmak

2.1. Infláció

Az infláció mindannyiunk számára ismert jelenség: a vásárolt jószágok és szolgáltatások ára tipikusan egy időben változó mennyiség. Míg pongyola szóhasználattal általában inflációnak nevezünk bármilyen időbeli árváltozást, pontosabban fogalmazva az árak *növekedését* nevezzük így, míg a *csökkenést* deflációnak hívjuk. A pongyolaság védelmére egy indok hozható fel: az árak kevés kivételtől – és rövid időszakaszoktól – eltekintve általában növekvő trendet mutatnak.

Az infláció mérése összetett probléma, önálló statisztikai tudományágnak is tekinthető. Bár a méréssel kapcsolatos nehézségek alapos körüljárása nem célja a dolgozatnak, néhányat megemlítünk közülük.

A különböző termékek árváltozása nem azonos ütemben és mértékkel történik – ezért infláció alatt minden esetben egy alkalmasan választott átlagos árváltozást értünk. Az átlagolás mögött az *árindex* áll, amely egy *fogyasztói kosár* áralakulását követi. A fogyasztói kosár az átlagos háztartás által vásárolt termékeket tartalmazza, így máris felmerül az igény arra, hogy különböző fogyasztói csoportok esetén úgynevezett *rétegárindexet* számoljunk. Magyarországon például a Központi Statisztikai Hivatal (továbbiakban: KSH) az alábbi lakossági rétegekre készít fogyasztói árindexet: aktív háztartások, ebből három és annál több gyerekes háztartások; nyugdíjasok; alacsony, közepes és magas jövedelmű háztartások. (KSH, 2008)

Az árak változását nemcsak a kereslet és kínálat természetes ingadozása okozza, hanem olyan torzító tényezők, mint az adószabályok – legegyszerűbb eset az általános forgalmi adó mértékének – változása, a világpiaci árak mozgása (az energiahordozók nagy arányú importjára szoruló országok esetén), valamint az időjárási hatások (elsősorban a mezőgazdasági termékek esetén). Az ilyen egyszeri hatásoktól megtisztított inflációs mutatót nevezzük *maginflációs mutatónak*.

A fent említett fogyasztói kosár összetétele gyakori vita tárgya: a lakhatási költségekhez kapcsolódó bérleti díjak országonként más és más módon, illetve mértékben jelennek meg az inflációs mutatókban. Még azonos módszertan esetén sem lenne egyetértés, hiszen a saját tulajdonú ingatlanban lakók aránya az Európai Unión belül is rendkívül sokrétű:

52, 4% Németországban és 96, 1% Romániában (Eurostat, 2015). Az összehasonlíthatóság érdekében az EU-ban minden tagország köteles harmonizált fogyasztói-árindexet *(Harmonised Index of Consumer Prices, HICP)* publikálni. Az Unión kívül azonban továbbra sincs egyetértés: míg a HICP nem veszi figyelembe a saját lakásszolgáltatás imputált bérleti díját, addig az Egyesült Államok árindexe *(Consumer Price Index for All Urban Consumers, CPI-U)* igen. (Lane és Schmidt, 2006)

További kérdéseket vet még fel, hogy milyen módon és mértékben vesszük figyelembe a termékek minőségbeli változását az árindex számolásakor. Tagadhatatlan, hogy egy új autó ma egészen más felszereltséggel rendelkezik, mint tíz évvel korábban, továbbá felmerülhet, hogy az élelmiszerek sem azonos minőségűek a korábbiakkal.

2.2. Tőkeindexált kötvények

Lássuk az alábbi gondolatkísérletet!

Egy év múlva pontosan 100 üveg pezsgőre van szükségünk. Ezt fedezhetnénk oly módon, hogy ma meg is vesszük a szükséges mennyiséget, viszont így – a tárolási költségektől el is tekintve – egy évnyi kamatot hagyunk kárba veszni. Következő megoldás lehetne, hogy veszünk annyi egy éves diszkont kincstárjegyet, amely lejáratkor annyit fizet, hogy meg tudjuk venni a száz üveg pezsgőt – az előző megoldásnál ez már jobb, viszont mivel nem tudjuk pontosan, hogy egy év múlva mennyibe fog kerülni egy üveg pezsgő, ezt a kockázatot kénytelenek vagyunk viselni. Az ideális megoldás a következő lenne: keresünk valakit, akinek ma van szüksége pezsgőre, és cserébe vállalja, hogy egy év múlva szállít nekünk 100 üveggel. Amennyiben például 96 mai üveg pezsgőért cserébe vállalná valaki ezt az üzletet, máris elértünk kb. 4% „pezsgőhozamot", és nem futjuk a pezsgő áringadozásának kockázatát. (Dodgson és Kainth, 2006)

Természetesen a fogyasztási cikkeknek nincsen olyan likvid piaca, ahol a különböző időpontbeli fogyasztások gazdát cserélhetnének. Ezt a funkciót töltik be a tőkeindexált kötvények, melyek kifizetései egy árindexhez kötöttek. Ellentétben a tradicionális kötvényekkel, a tőkeindexált kötvények pénzáramlása reálértelemben fix, míg nominális értelemben valószínűségi változók sorozatának tekinthető. Például egy 100 egység névértékű, 3 éves, 5%-os éves kuponnal rendelkező tőkeindexált kötvény pénzáramlása a következő: $\left[5 \cdot \frac{I(1)}{I(0)}, 5 \cdot \frac{I(2)}{I(0)}, 105 \cdot \frac{I(3)}{I(0)}\right]$, ahol $I(T)$ jelöli az árindexet.

Tőkeindexált kötvényt kibocsátani elsősorban olyan gazdasági szereplőnek érdemes, akinek a bevételei szintén az árindexhez kötöttek. Ez az inflációs kockázat mérlegen keresztüli természetes fedezésének tekinthető. Érdemes lehet még az árindexhez kötve forrást szerezni, ha a szereplő véleménye szerint a piaci inflációs várakozások túlfűtöttek – ekkor természetesen már spekulációról beszélünk. Továbbá, mivel a tőkeindexált kötvények reálértelemben kevésbé kockázatosak, mint nominális társaik, az inflációs kockázati prémiumot megtakarítva olcsóbb forrásszerzési lehetőséget biztosítanak. (Deacon et al., 2004)

Bár a kibocsátók között találunk államokat és vállalatokat is, volumenét tekintve messze az államok a legfontosabb szereplői e piacnak. Mivel az állami adóbevételek erősen függnek az inflációtól (elsősorban a fogyasztási adókon keresztül, de például a bárinfláció megjelenik a jövedelem típusú adókon keresztül is), ezért logikus lépés a forrás oldal egy részét is ehhez kötni. Állami oldalról ráadásul jelzésértéke is van ennek a finanszírozási módnak: az adósság inflációhoz való horgonyzásával az állam érdekeltté válik olyan gazdaságpolitikát folytatni, mely biztosítja az alacsony, kiszámítható inflációt. Vállalati oldalról elsősorban a kiskereskedelmi szektor jelenik meg kibocsátóként, hiszen az ő bevételük függ legerősebben az inflációtól.

Befektetői oldalról vizsgálva, a tőkeindexált kötvény alkalmas lehet fedezési és spekulációs célra is. Fedezésre olyan szereplő tartja, akinek a kötelezettségei – részben – az inflációhoz kötöttek. A legjelentősebb ilyen szereplők a nyugdíjalapok *(pension funds)*, hiszen az általuk fizetett nyugdíjak gyakran inflációval korrigáltak. Megemlíthetők még a magánbefektetők is, hiszen általában ők is a vagyonuk reálértékének megőrzésére törekednek a jövőbeni kiadások fedezésének érdekében.

Spekulációs céllal akkor érdemes tőkeindexált kötvényt tartanunk, ha úgy véljük, az infláció magasabb lesz, mint amit jelenleg a piac áraz. Ilyen típusú műveletek elsősorban befektetési alapokra, hedge fundokra jellemzők.

Jelentős indexált adósságportfólióval rendelkezik például az Egyesült Államok: 2016. márciusi adatok szerint a teljes adósság mintegy 6,1%-át teszik ki a a Kincstári Inflációvédett Értékpapírok *(Treasury Inflation-Protected Securities, TIPS)*. (United States Department of the Treasury, 2016)

Abszolút értelemben kisebb, relatív értelemben azonban még jelentősebb indexált adósságportfólióval rendelkezik az Egyesült Királyság: névértéken az összes kint levő állampapír mintegy 25,7%-át teszik ki az inflációhoz kötöttek *(index-linked gilts)*. (United Kingdom Debt Management Office, 2016)

A legjelentősebb indexált adósságportfólióval rendelkező Eurózóna-tag Franciaország: 2016. márciusi végi adatok szerint az összes kint levő állampapír 11,9%-a inflációkövető. (Agence France Trésor, 2016) Franciaország különlegesnek számít ezen a téren egy másik szempontból is: rendelkezik olyan indexált államkötvénnyel is, mely nem a saját, hanem az Eurózóna inflációjához kötött. Méretéből fakadóan persze Franciaország és az Eurózóna inflációja között erős az összefüggés, de ez a disszonancia önmagában is vizsgálat tárgya lehetne.

Bár inkább egy inflációs-hibridnek, mint klasszikus tőkeindexált kötvénynek tekinthető, de magyar vonatkozása miatt megemlítjük még a lakossági befektetőket célzó Prémium Magyar Államkötvényt. Az infláció e kötvénynek csak a kuponjában jelenik meg (az éves infláció és egy előre rögzített kamatprémium összegeként), a tőkerész nem kerül kiigazításra.

2.3. Pénzügyi matematikai alapismeretek

Az alábbiakban azokat a pénzügyi matematikai fundamentumokat soroljuk fel, amelyek elengedhetetlenek a későbbi számolásokhoz. A tételek és definíciók kimondásával célunk alkalmazás- és szemléletorientált:

Martingálmérték, ármérce-pár

Álljon egy pénzügyi piac n darab szigorún pozitív értékű kockázatos eszközből: $\mathbf{S}'(t) = \big(S_1(t), \dots, S_n(t)\big)$, mely adaptált az $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}(t), P\big)$ filtrált valószínűségi mezőre. A Q_i valószínűségi mértéket az $S_i(t)$-hez tartozó martingálmértéknek nevezzük, ha ekvivalens P-vel, és $\frac{S_k(t)}{S_i(t)}$ martingál $\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$-re. Az $\big(S_i(t), Q_i\big)$ párt ármérce-párnak hívjuk.

Az eszközárazás alaptétele (I. és II.)

Egy piac arbitrázsmentes akkor és csak akkor, ha létezik martingálmérték (I.), és teljes akkor és csak akkor, ha ez a martingálmérték egyértelmű (II.).

Replikáló önfinanszírozó stratégia

Egy $\mathbf{\Delta}'(t) = \big(\Delta_1(t), \ldots, \Delta_n(t)\big)$ vektor értékű folyamatot stratégiának nevezünk, ha $\mathcal{F}(t)$-re nézve adaptált. Egy stratégia önfinanszírozó, ha $d\mathbf{\Delta}'(t)\mathbf{S}(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(t)\, dS_i(t)$, vagyis értékváltozás csak a mögöttes eszközök értékváltozásából fakad. Továbbá egy stratégiát az X-hez tartozó replikáló stratégiának hívunk, ha az X $\mathcal{F}(T)$-mérhető valószínűségi változóra: $X = \mathbf{\Delta}'(T)\mathbf{S}(T)$, $\forall\omega \in \Omega$-ra, vagyis történjék bármi, a stratégia előállítja X-et.

Árazási formula

Az X $\mathcal{F}(T)$-mérhető kifizetésfüggvénnyel meghatározott származtatott követelés (derivatíva) értékét úgy definiáljuk, mint az a legkisebb kezdőtőke, amelyhez létezik replikáló önfinanszírozó stratégia. Ezt a legkisebb tőkét adja meg az alábbi összefüggés:

$$V(t) = S_i(t)\mathbb{E}_{Q_i}\left(\frac{X}{S_i(T)}\middle|\mathcal{F}(t)\right),$$

ahol $\big(S_i(t), Q_i\big)$ ármérce-pár. A származtatott követelés értéke független az ármérce-pár választástól.

3. Vasicek-modell az inflációra

Inflációs modellünk azon az észrevételen alapszik, hogy amennyiben az árindexet és a bankbetétet is kereskedett terméknek feltételezzük, az árazási formulát felírva a tőkeindexált elemi kötvény értékére a várható értékben éppen ez a két termék jelenik meg. A piac árat mond, vagyis kialakul egy kockázatmentes mérték, így a sztochasztikus folyamatainkat is e mérték alatt írjuk fel. Kézenfekvőnek látszik az árindex és a bankbetét helyett a dinamikát ezek deriváltjára, vagyis az inflációs rátára, illetve a rövid kamatlábra felírni. Mindkettőre egy átlaghoz visszahúzó folyamatot feltételezünk a szokásos közgazdasági indoklás mellett: az infláció és a rövid kamatláb sem szokott egy hosszútávú átlagszinttől túlzottan eltávolodni.

Modellünk szerint tehát a rövid kamatláb és az inflációs ráta dinamikája a Q kockázatmentes mérték alatt:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha_r\big(\overline{r} - r(t)\big)\,dt + \sigma_r\,dW_r^Q(t),\\ di\,(t) &= \alpha_i\left(\overline{i} - i\,(t)\right)dt + \sigma_i\,dW_i^Q(t). \end{aligned}$$

Mivel a piacon két *Wiener-folyamat* van jelen, ezért definiálunk egy korrelációs együtthatót is:

$$d\big\langle W_r^Q(t), W_i^Q(t)\big\rangle = \rho\,dt.$$

Bankbetétnek [jel.: $B(t)$] nevezzük azt a pénzügyi terméket, melynek időbeli alakulását a $d_tB(t) = r(t)B(t)\,dt$ differenciálegyenlet, míg árindexnek [jel.: $I(t)$] azt a pénzügyi terméket, melynek időbeli alakulását a $d_tI(t) = i(t)I(t)\,dt$ differenciálegyenlet írja le.
A bankbetét és az árindex differenciálegyenleteinek megoldása:

$$\begin{aligned} t < T: \quad B(T) &= B(t)e^{\int_t^T r(s)\,ds}, \quad \text{illetve}\\ I(T) &= I(t)e^{\int_t^T i(s)\,ds}. \end{aligned}$$

A Q mérték és a $B(t)$ bankbetét együtt ármérce-párt alkot, tehát a Q mérték mint martingálmérték mellett a bankbetéttel osztva (vagyis a bankbetétet használva ármércefolyamatként) martingálokat kapunk.

3.1. Tőkeindexált elemi kötvény értéke

A tőkeindexált elemi kötvény olyan pénzügyi termék, amely garantált reálhozamot biztosít egy adott időintervallumra oly módon, hogy a futamidő végén a lejáratkori és a kibocsátáskori árindexek hányadosát fizeti ki egy összegben. A névértéket így önkényesen 1-nek választjuk, de az eredményeink a névértékkel szorozva természetesen általánosíthatók.

3.1. Definíció. *Tőkeindexált elemi kötvénynek nevezzük azt a pénzügyi terméket, melynek kifizetésfüggvénye* $X(T) = \frac{I(T)}{I(T_0)}$, $T_0 < T$, *ahol* T_0 *a kibocsátás,* T *a lejárat időpontja.*

Keressük a tőkeindexált elemi kötvény értékét t időpontban, ahol természetesen $T_0 \leq t \leq T$. Jelöljük ezt $P^I(t, T_0, T)$-vel, ahol T_0 és T rögzített paraméterek. Felírva az árazási formulát a bankbetétet használva ármérce folyamatként:

$$P^I(t, T_0, T) = B(t)\mathbb{E}_Q\left(\frac{\frac{I(T)}{I(T_0)}}{B(T)}\middle|\mathcal{F}(t)\right) = B(t)\mathbb{E}_Q\left(\frac{I(t)e^{\int_t^T i(s)\,ds}}{I(T_0)B(t)e^{\int_t^T r(s)\,ds}}\middle|\mathcal{F}(t)\right).$$

$\frac{I(t)}{I(T_0)B(t)}$ mérhető a feltételi filtrációra, így ez kiemelhető a várható értékből, és $B(t)$-vel egyszerűsíthetünk is:

$$\begin{aligned}P^I(t, T_0, T) = \frac{I(t)}{I(T_0)}\mathbb{E}_Q\left(\frac{e^{\int_t^T i(s)\,ds}}{e^{\int_t^T r(s)\,ds}}\middle|\mathcal{F}(t)\right) &= \frac{I(t)}{I(T_0)}\mathbb{E}_Q\left(e^{\int_t^T i(s)\,ds - \int_t^T r(s)\,ds}\middle|\mathcal{F}(t)\right)\\ &= \frac{I(t)}{I(T_0)}\mathbb{E}_Q\left(e^{\int_t^T i(s)-r(s)\,ds}\middle|\mathcal{F}(t)\right).\end{aligned}$$

Mivel mind $r(t)$, mind $i(t)$ *Markov-folyamat*, ezért az $\mathcal{F}(t)$-re vett feltételes várható érték ekvivalens az $\{r(t), i(t)\}$-re vett feltételes várható értékkel, vagyis:

$$P^I(t, T_0, T) = \frac{I(t)}{I(T_0)}\mathbb{E}_Q\left(e^{\int_t^T i(s)-r(s)\,ds}\middle|r(t), i(t)\right) = \frac{I(t)}{I(T_0)}V^I\big(r(t), i(t), t, T\big). \tag{1}$$

3.1.1. Megoldás a differenciálegyenlet felírásával

$\frac{P^I(t,T_0,T)}{B(t)} = \frac{\frac{I(t)}{I(T_0)}V^I\left(r(t),i(t),t,T\right)}{B(t)}$ a Q mérték alatt martingál, vagyis a driftjének nullának kell lennie. *Itô lemmáját* alkalmazva kiszámoljuk ezt a driftet, melyet nullával egyenlővé téve egy differenciálegyenletet fogunk kapni. $\frac{1}{I(T_0)}$ konstans, így ezt kiemeljük, majd felírjuk

Itô lemmáját a szorzatfüggvényre, ahol az egyik tényező $\frac{I(t)}{B(t)}$, a másik $V^I\big(r(t), i(t), t, T\big)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{I(T_0)} d_t \left(\frac{I(t)\, V^I\big(r(t), i(t), t, T\big)}{B(t)} \right) &= \frac{1}{I(T_0)} d_t \left(\frac{I(t)}{B(t)} V^I\big(r(t), i(t), t, T\big) \right) \\ &= \frac{1}{I(T_0)} \left(\frac{I(t)}{B(t)}\, d_t V^I\big(r(t), i(t), t, T\big) + V^I\big(r(t), i(t), t, T\big)\, d_t \frac{I(t)}{B(t)} \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Szükségünk van $d_t V^I\big(r(t), i(t), t, T\big)$-re és $d_t \frac{I(t)}{B(t)}$-re. A parciális deriváltakat alsó indexben jelölve, és az argumentumokat elhagyva:

$$\begin{aligned} &d_t V^I\big(r(t), i(t), t, T\big) = \\ &\qquad = V_t^I\, dt + V_r^I\, dr(t) + V_i^I\, di(t) + V_{ri}^I\, d\big\langle r(t), i(t)\big\rangle + \frac{1}{2} V_{rr}^I\, d\big\langle r(t)\big\rangle + \frac{1}{2} V_{ii}^I\, d\big\langle i(t)\big\rangle. \end{aligned}$$

Visszahelyettesítjük $dr(t)$-t és $di(t)$-t, illetve a *kvadratikus variációkat*: $\sigma_{\{r,i\}}^2\, dt$-t, majd összegyűjtjük a dt-t és a $dW_{\{r,i\}}^Q(t)$-t tartalmazó tagokat:

$$\begin{aligned} &d_t V^I\big(r(t), i(t), t, T\big) = \\ &\quad = V_t^I\, dt + V_r^I \big[\alpha_r\big(\bar{r} - r(t)\big)\, dt + \sigma_r\, dW_r^Q(t)\big] + V_i^I \big[\alpha_i\big(\bar{i} - i(t)\big)\, dt + \sigma_i\, dW_i^Q(t)\big] \\ &\qquad\qquad + V_{ri}^I \sigma_r \sigma_i \rho\, dt + \frac{1}{2} V_{rr}^I \sigma_r^2\, dt + \frac{1}{2} V_{ii}^I \sigma_i^2\, dt \\ &\quad = \Big[V_t^I + V_r^I \alpha_r\big(\bar{r} - r(t)\big) + V_i^I \alpha_i\big(\bar{i} - i(t)\big) + V_{ri}^I \sigma_r \sigma_i \rho + \frac{1}{2} V_{rr}^I \sigma_r^2 + \frac{1}{2} V_{ii}^I \sigma_i^2\Big]\, dt \\ &\qquad\qquad + V_r^I \sigma_r\, dW_r^Q(t) + V_i^I \sigma_i\, dW_i^Q(t). \end{aligned} \tag{3}$$

A következő számolandó mennyiség $d_t \frac{I(t)}{B(t)}$. $I(t)$ és $B(t)$ is korlátos változású folyamat, így hányadosuk deriváltjában *kvadratikus variáció* és *kereszt kvadratikus variáció* sem jelenik meg:

$$\begin{aligned} d_t \frac{I(t)}{B(t)} &= d_t \left(I(t) \frac{1}{B(t)} \right) = I(t)\, d_t \frac{1}{B(t)} + \frac{1}{B(t)}\, d_t I(t) \\ &= I(t)\big(- r(t)\big) \frac{1}{B(t)}\, dt + \frac{1}{B(t)} i(t) I(t)\, dt = \frac{I(t)}{B(t)} \big(i(t) - r(t)\big)\, dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Visszahelyettesítve (4)-et és (3)-at (2)-be:

$$\frac{1}{I(T_0)} d_t \left(\frac{I(t)\, V^I\big(r(t), i(t), t, T\big)}{B(t)} \right) =$$

$$= \frac{I(t)}{I(T_0)B(t)} \left[\left(V_t^I + V_r^I \alpha_r \big(\bar{r} - r(t)\big) + V_i^I \alpha_i \big(\bar{i} - i(t)\big) + V_{ri}^I \sigma_r \sigma_i \rho + \frac{1}{2} V_{rr}^I \sigma_r^2 + \frac{1}{2} V_{ii}^I \sigma_i^2 \right) dt \right.$$

$$\left. + V_r^I \sigma_r \, dW_r^Q(t) + V_i^I \sigma_i \, dW_i^Q(t) \right] + V^I \frac{I(t)}{I(T_0)B(t)} \big(i(t) - r(t)\big)\, dt.$$

Mivel $d_t \left(\frac{\frac{I(t)}{I(T_0)} V^I\left(r(t),i(t),t,T\right)}{B(t)} \right)$ martingál, a dt-s tagok együtthatójának nullának kell lennie. Kiemelve $\frac{I(t)}{I(T_0)B(t)}$-t így egy differenciálegyenletet kapunk V^I-re:

$$\begin{cases} V_t^I + V_r^I \alpha_r (\bar{r} - r) + V_i^I \alpha_i (\bar{i} - i) + V_{ri}^I \sigma_r \sigma_i \rho + \frac{1}{2} V_{rr}^I \sigma_r^2 + \frac{1}{2} V_{ii}^I \sigma_i^2 + V^I i - V^I r = 0 \\ V^I(r, i, T, T) = 1 \quad \text{peremfeltétel mellett.} \end{cases} \tag{5}$$

3.1. Sejtés. (5) *megoldása* $V^I\big(r(t), i(t), t, T\big) = e^{A^I(t,T) - C(t,T)r(t) + D(t,T)i(t)}$ *alakú, vagyis affin szerkezetű.*

A feltételezett $V^I\big(r(t), i(t), t, T\big)$ függvényre felírjuk a parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned} V_t^I &= V^I(A_t^I - C_t r + D_t i), & V_r^I &= -V^I C, & V_i^I &= V^I D, \\ V_{ri}^I &= -V^I C D, & V_{rr}^I &= V^I C^2, & V_{ii}^I &= V^I D^2. \end{aligned}$$

Behelyettesítve a parciális deriváltakat (5)-be az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\begin{cases} V^I \Big(A_t^I - \alpha_r \bar{r} C + \alpha_i \bar{i} D - \sigma_r \sigma_i \rho C D + \frac{1}{2} \sigma_r^2 C^2 + \frac{1}{2} \sigma_i^2 D^2 \\ \qquad\qquad - C_t r + \alpha_r C r - r + D_t i - \alpha_i D i + i \Big) = 0 \\ A^I(T,T) - C(T,T) r + D(T,T) i = 0 \quad \text{peremfeltétel mellett.} \end{cases} \tag{6}$$

(6) megoldását $\forall\, r, i$ mellett keressük. Ha $r = i = 0$, akkor a peremfeltételből következik, hogy $A^I(T,T) = 0$, ha $r \neq 0$ és $i = 0$ akkor $C(T,T) = 0$, és hasonlóan ha $r = 0$ és $i \neq 0$ akkor $D(T,T) = 0$. Így három egymástól különálló peremfeltételt kaptunk. $V^I\big(r(t), i(t), t, T\big) > 0$, hiszen a tőkeindexált elemi kötvény értéke határozottan pozitív.

Használhatjuk tehát az előző gondolatmenetet magára a differenciálegyenletre is, ami így három különálló differenciálegyenletre esik szét:

$$A_t^I - \alpha_r \bar{r} C + \alpha_i \bar{i} D - \sigma_r \sigma_i \rho C D + \frac{1}{2}\sigma_r^2 C^2 + \frac{1}{2}\sigma_i^2 D^2 = 0, \quad \text{ha} \quad r = i = 0, \tag{7}$$

$$-C_t + \alpha_r C - 1 = 0, \quad \text{ha} \quad r \neq 0 \quad \text{és} \quad i = 0, \tag{8}$$

$$D_t - \alpha_i D + 1 = 0, \quad \text{ha} \quad r = 0 \quad \text{és} \quad i \neq 0. \tag{9}$$

(8) és (9) lineáris, inhomogén differenciálegyenletek megoldása:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial C(t,T)}{\partial t} &= \alpha_r C(t,T) - 1 \\ C(T,T) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad C(t,T) = \frac{1}{\alpha_r} - \frac{e^{\alpha_r(t-T)}}{\alpha_r} = \frac{1 - e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r},$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial D(t,T)}{\partial t} &= \alpha_i D(t,T) - 1 \\ D(T,T) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad D(t,T) = \frac{1}{\alpha_i} - \frac{e^{\alpha_i(t-T)}}{\alpha_i} = \frac{1 - e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}.$$

(7)-ben csak $A_t^I(t,T)$, $C(t,T)$ és $D(t,T)$ szerepel, így utóbbiak ismeretében $A^I(t,T)$ már egyszerű integrálással számolható:

$$\begin{aligned} A^I(T,T) - A^I(t,T) &= \int_t^T A_t^I(s,T)\, ds \\ 0 - A^I(t,T) &= \int_t^T A_t^I(s,T)\, ds \\ A^I(t,T) &= \int_t^T -A_t^I(s,T)\, ds \end{aligned}$$

(7)-hez szükségünk van még $C(t,T)D(t,T)$-re, $C^2(t,T)$-re és $D^2(t,T)$-re:

$$C(t,T)D(t,T) = \frac{e^{-(\alpha_r+\alpha_i)(T-t)} - e^{-\alpha_r(T-t)} - e^{-\alpha_i(T-t)} + 1}{\alpha_r \alpha_i},$$

$$C^2(t,T) = \frac{e^{-2\alpha_r(T-t)} - 2e^{-\alpha_r(T-t)} + 1}{\alpha_r^2}, \quad \text{és} \quad D^2(t,T) = \frac{e^{-2\alpha_i(T-t)} - 2e^{-\alpha_i(T-t)} + 1}{\alpha_i^2}.$$

Így tehát:
$$\begin{aligned} A^I(t,T) = \int_t^T & \bar{r}\left(e^{-\alpha_r(T-s)} - 1\right) - \bar{i}\left(e^{-\alpha_i(T-s)} - 1\right) \\ & - \frac{\sigma_r \sigma_i \rho}{\alpha_r \alpha_i}\left(e^{-(\alpha_r+\alpha_i)(T-s)} - e^{-\alpha_r(T-s)} - e^{-\alpha_i(T-s)} + 1\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_r}{\alpha_r}\right)^2 \left(e^{-2\alpha_r(T-s)} - 2e^{-\alpha_r(T-s)} + 1\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_i}{\alpha_i}\right)^2 \left(e^{-2\alpha_i(T-s)} - 2e^{-\alpha_i(T-s)} + 1\right)\, ds \end{aligned}$$

Integrálás után a következőt kapjuk:

$$
\begin{aligned}
A^I(t,T) = {} & \overline{r}\left(\frac{1-e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r}-(T-t)\right)-\overline{i}\left(\frac{1-e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}-(T-t)\right) \\
& -\frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_r\alpha_i}\left(\frac{1-e^{-(\alpha_r+\alpha_i)(T-t)}}{\alpha_r+\alpha_i}-\frac{1-e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r}-\frac{1-e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}+(T-t)\right) \\
& +\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_r}{\alpha_r}\right)^2\left(\frac{1-e^{-2\alpha_r(T-t)}}{2\alpha_r}-2\frac{1-e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r}+(T-t)\right) \\
& +\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_i}{\alpha_i}\right)^2\left(\frac{1-e^{-2\alpha_i(T-t)}}{2\alpha_i}-2\frac{1-e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}+(T-t)\right)
\end{aligned}
$$

Mind $C(t,T)=\frac{1-e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r}$, mind $D(t,T)=\frac{1-e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}$ gyakran visszaköszön, úgyhogy ezekkel kifejezve $A^I(t,T)$-t:

$$
\begin{aligned}
A^I(t,T) = {} & C(t,T)\Big(\overline{r}+\frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_r\alpha_i}\left(1-\frac{\alpha_r}{\alpha_r+\alpha_i}\right)-\left(\frac{\sigma_r}{2\alpha_r}\right)^2\big(\alpha_r C(t,T)+2\big)\Big) \\
& +D(t,T)\Big(-\overline{i}+\frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_r\alpha_i}\left(1-\frac{\alpha_i}{\alpha_r+\alpha_i}\right)-\left(\frac{\sigma_i}{2\alpha_i}\right)^2\big(\alpha_i D(t,T)+2\big)\Big) \\
& +C(t,T)D(t,T)\frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_r+\alpha_i}+(T-t)\left(\overline{i}-\overline{r}-\frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_r\alpha_i}+\frac{\left(\frac{\sigma_r}{\alpha_r}\right)^2+\left(\frac{\sigma_i}{\alpha_i}\right)^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{10}
$$

A T_0-ban kibocsátott, T-ben lejáró tőkeindexált elemi kötvény értéke t-ben tehát:

$$P^I(t,T_0,T)=\frac{I(t)}{I(T_0)}e^{A^I(t,T)-C(t,T)r(t)+D(t,T)i(t)}.$$

3.1.2. Megoldás a várható érték kiszámításával

A számolandó mennyiség (1) szerint:

$$P^I(t,T_0,T)=\frac{I(t)}{I(T_0)}\mathbb{E}_Q\left(e^{\int_t^T i(s)-r(s)\,ds}\middle|\, r(t),i(t)\right).$$

Szükségünk van tehát $\int_t^T i(s)-r(s)\,ds$ eloszlására, ahol mind $r(s)$, mind $i(s)$ *Ornstein-Uhlenbeck* folyamat. Sztochasztikus differenciálegyenletük megoldásához felírjuk *Itô lemmáját* az $f\big(x(t),t\big)=x(t)e^{\alpha t}$ függvényre, ahol $x(t)=\alpha\big(\overline{x}-x(t)\big)\,dt+\sigma\,dW(t)=$

$\alpha\overline{x}\,dt - \alpha x(t)\,dt + \sigma\,dW(t)$:

$$\begin{aligned} d_t f\big(x(t),t\big) = d_t\left(x(t)e^{\alpha t}\right) &= f_t\,dt + f_x\,dx(t) + f_{xx}\,d\langle x(t)\rangle \\ &= \alpha x(t)e^{\alpha t}\,dt + e^{\alpha t}\big(\alpha\overline{x}\,dt - \alpha x(t)\,dt + \sigma\,dW(t)\big) + 0 \\ &= \alpha\overline{x}e^{\alpha t}\,dt + \sigma e^{\alpha t}\,dW(t). \end{aligned}$$

A folyamat növekménye ismeretével felírható a sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} t \le s: \quad x(s)e^{\alpha s} &= x(t)e^{\alpha t} + \int_t^s \alpha\overline{x}e^{\alpha u}\,du + \int_t^s \sigma e^{\alpha u}\,dW(u) \\ x(s) &= x(t)e^{-\alpha(s-t)} + \alpha\overline{x}\int_t^s e^{-\alpha(s-u)}\,du + \sigma\int_t^s e^{-\alpha(s-u)}\,dW(u) \\ x(s) &= x(t)e^{-\alpha(s-t)} + \overline{x}\left(1 - e^{-\alpha(s-t)}\right) + \sigma\int_t^s e^{-\alpha(s-u)}\,dW(u). \end{aligned}$$

$x(s)$ *Gauss-folyamat*, ahol az első két tag határozza meg a várható értéket, míg a harmadik tag a varianciát. Így már felírható $\int_t^T i(s) - r(s)\,ds$:

$$\begin{aligned} &\int_t^T i(s) - r(s)\,ds = \\ &\qquad \int_t^T i(t)e^{-\alpha_i(s-t)} + \overline{i}\left(1 - e^{-\alpha_i(s-t)}\right) - r(t)e^{-\alpha_r(s-t)} - \overline{r}\left(1 - e^{-\alpha_r(s-t)}\right)\,ds \\ &\qquad + \int_t^T \sigma_i \int_t^s e^{-\alpha_i(s-u)}\,dW_i^Q(u)\,ds - \int_t^T \sigma_r \int_t^s e^{-\alpha_r(s-u)}\,dW_r^Q(u)\,ds. \end{aligned} \tag{11}$$

(11) első négy tagja határozza meg tehát a várható értéket:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q\left(\int_t^T i(s) - r(s)\,ds\right) = i(t)\,\frac{1 - e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i} &+ \overline{i}\left((T-t) - \frac{1 - e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}\right) \\ - r(t)\frac{1 - e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r} &- \overline{r}\left((T-t) - \frac{1 - e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r}\right). \end{aligned}$$

Az korábbiakhoz hasonlóan legyen $C(t,T) = \frac{1-e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r}$ és $D(t,T) = \frac{1-e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}$:

$$\mu = \mathbb{E}_Q\left(\int_t^T i(s) - r(s)\,ds\right) = D(t,T)\big(i(t) - \overline{i}\big) - C(t,T)\big(r(t) - \overline{r}\big) + (T-t)\big(\overline{i} - \overline{r}\big).$$

(11) második két tagja határozza meg a varianciát. Ennek kiszámításához először az integrálás sorrendjét kell felcserélnünk, melyhez a *sztochasztikus Fubini-tétel* (Karatzas és

Shreve, 1991) ad támaszt. Az integrálást a $t \leq u \leq s \leq T$ háromszögtartományon végezzük, így a határok az alábbi módon változnak:

$$\int_t^T \sigma \int_t^s e^{-\alpha(s-u)}\, dW(u)\, ds = \sigma \int_t^T \int_u^T e^{-\alpha(s-u)}\, ds\, dW(u) = \sigma \int_t^T \frac{1-e^{-\alpha(T-u)}}{\alpha}\, dW(u). \tag{12}$$

(11)-ben két (12) típusú integrál különbsége szerepel, viszont a *Wiener-folyamatok* korreláltak! Át tudunk térni azonban két korrelálatlan (ami ebben az esetben a függetlenséggel ekvivalens) *Wiener-folyamat* szerinti integrálra a $dW_r^Q(t) = \rho\, dW_i^Q(t) - \sqrt{1-\rho^2}\, d\widetilde{W}_i^Q(t)$ összefüggés segítségével, ahol $d\left\langle W_i^Q(t), \widetilde{W}_i^Q(t)\right\rangle = 0$. Így tehát:

$$\begin{aligned}
&\int_t^T \sigma_i D(u,T)\, dW_i^Q(u) - \int_t^T \sigma_r C(u,T)\, dW_r^Q(u) = \\
&\qquad = \int_t^T \left[\sigma_i D(u,T) - \sigma_r \rho C(u,T)\right] dW_i^Q(u) + \int_t^T \sigma_r \sqrt{1-\rho^2} C(u,T)\, d\widetilde{W}_i^Q(u).
\end{aligned} \tag{13}$$

(13) mindkét tagja nulla várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó, melyek immár korrelálatlanok (függetlenek) is. Varianciájuk az *Itô-izometria* (Karatzas és Shreve, 1991) segítségével számolható: $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \mathbb{E}\left(\int_t^T f(u)\, dW(u)\right)^2 - 0 = \mathbb{E}\left(\int_t^T f^2(u)\, du\right) = \int_t^T f^2(u)\, du$, ahol $f(u)$ determinisztikus függvény. A függetlenség miatt az együttes varianciájuk egyszerűen a varianciák összegeként megkapható, vagyis két determinisztikus függvény négyzetének az integrálját kell számolnunk a Lebesgue-mérték szerint:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_Q^2 &\left(\int_t^T i(s) - r(s)\, ds\right) = \\
&= \int_t^T \Big(\sigma_i D(s,T) - \sigma_r \rho C(s,T)\Big)^2 ds + \int_t^T \Big(\sigma_r \sqrt{1-\rho^2} C(s,T)\Big)^2\, ds \\
&= \int_t^T \sigma_r^2 C^2(s,T) - 2\sigma_r\sigma_i\rho C(s,T) D(s,T) + \sigma_i^2 D^2(s,T)\, ds \\
&= \left(\frac{\sigma_r}{\alpha_r}\right)^2 \left(\frac{1-e^{-2\alpha_r(T-t)}}{2\alpha_r} - 2\frac{1-e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r} + (T-t)\right) \\
&+ \left(\frac{\sigma_i}{\alpha_i}\right)^2 \left(\frac{1-e^{-2\alpha_i(T-t)}}{2\alpha_i} - 2\frac{1-e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i} + (T-t)\right) \\
&- 2\frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_r\alpha_i}\left(\frac{1-e^{-(\alpha_r+\alpha_i)(T-t)}}{\alpha_r+\alpha_i} - \frac{1-e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r} - \frac{1-e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i} + (T-t)\right).
\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve $C(t,T) = \frac{1-e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r}$-t és $D(t,T) = \frac{1-e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}$-t:

$$\begin{aligned}
\nu^2 = \mathbb{D}_Q^2\left(\int_t^T i(s) - r(s)\,ds\right) = \\
&= C(t,T)\left(2\frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_r(\alpha_r+\alpha_i)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_r}{\alpha_r}\right)^2(\alpha_r C(t,T)+2)\right) \\
&+ D(t,T)\left(2\frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_i(\alpha_r+\alpha_i)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_i}{\alpha_i}\right)^2(\alpha_i D(t,T)+2)\right) \\
&+ 2\frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_r+\alpha_i}C(t,T)D(t,T) + (T-t)\left(\left(\frac{\sigma_r}{\alpha_r}\right)^2 - 2\frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_r\alpha_i} + \left(\frac{\sigma_i}{\alpha_i}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

$\int_t^T i(s) - r(s)\,ds$ tehát egy normális eloszlású valószínűségi változó μ várható értékkel és ν^2 varianciával. Ennek exponenciálisa lognormális eloszlású valószínűségi változó $e^{\mu+\frac{\nu^2}{2}}$ várható értékkel. Így végül tehát a tőkeindexált elemi kötvény értéke:

$$P^I(t,T_0,T) = \frac{I(t)}{I(T_0)}\mathbb{E}_Q\left(e^{\int_t^T i(s)-r(s)\,ds}\right) = \frac{I(t)}{I(T_0)}e^{\mu+\frac{\nu^2}{2}},$$

mely éppen megegyezik az előző szakaszban számolt értékkel.

3.2. Összevetés a Vasicek-modellel

Ha elimináljuk az inflációt a modellből, akkor a tőkeindexált elemi kötvény értéke meg kell hogy egyezzék a nominális elemi kötvény értékével. Ez azt jelenti, hogy a *Vasicek-modellt* (Vasicek, 1977) tartalmaznia kell az általunk definiált modellnek a következő paraméterválasztással: $I(T_0) = I(t) = 1$, $\sigma_i = 0$, $i(t) = 0$, továbbá $\alpha_i = 0$ és/vagy $\bar{i} = 0$. Ez egy ellenőrzési pontot bíztosít számunkra – nézzük meg tehát azt az esetet, ha $\sigma_i = i(t) = \bar{i} = 0$ és $\alpha_i > 0$! Ekkor $A^I(t,T)$-ben (10) $D(t,T)$ együtthatója nulla, mert minden tagja nulla. $C(t,T)D(t,T)$ együtthatója is nulla, $(T-t)$ együtthatójából pedig mindössze $\frac{\sigma_r^2}{2\alpha_r^2} - \bar{r}$ marad. $C(t,T)$ együtthatójából csak $\bar{r} - \left(\frac{\sigma_r}{2\alpha_r}\right)^2(\alpha_r C(t,T)+2)$ marad. Jelölje $A(t,T)$ az ezekkel a megszorításokkal felírt $A^I(t,T)$-t, és írjuk is ezt fel:

$$A(t,T) = C(t,T)\left(\bar{r} - \left(\frac{\sigma_r}{2\alpha_r}\right)^2(\alpha_r C(t,T)+2)\right) + (T-t)\left(\frac{\sigma_r^2}{2\alpha_r^2} - \bar{r}\right). \quad (14)$$

Így végül $P^I(t,T_0,T) = \frac{I(t)}{I(T_0)} e^{A^I(t,T)-C(t,T)r(t)+D(t,T)i(t)}$ az alábbira egyszerűsödik:

$$P^I(t,T_0,T) = P(t,T) = e^{A(t,T)-C(t,T)r(t)}, \quad \text{ahol} \quad C(t,T) = \frac{1-e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r},$$

ami ekvivalens a *Vasicek modellben* számolt elemi kötvény árfolyammal.

3.3. Forward görbék

3.2. Definíció (inflációs várakozások)**.** *Az árindexre vonatkozó várakozások időbeli függvényét az inflációval visszakorrigált tőkeindexált és a nominális elemi kötvények hányadosával definiáljuk:* $\widehat{I}(t,T) \doteq \frac{I(T_0)}{I(t)} \frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,T)} = \frac{P^I(t,t,T)}{P(t,T)}$.

3.3. Definíció (forward ráták)**.** *Nominális forward rátának nevezzük a kamattömeg növekményét, vagyis a lejárat szerinti deriváltját:* $f(t,T) = \frac{\partial}{\partial T} \log \frac{1}{P(t,T)} = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t,T)$, *míg forward inflációs rátának nevezzük az árindexre vonatkozó várakozások növekményét, vagyis a lejárat szerinti deriváltját:* $f^I(t,T) = \frac{\partial}{\partial T} \log \widehat{I}(t,T) = \frac{\partial}{\partial T} \log \frac{P^I(t,t,T)}{P(t,T)}$.

Lássuk milyen forward görbéket definiál a modellünk!

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t,T) = -A_T(t,T) + C_T(t,T)r(t) = e^{-\alpha_r(T-t)}r(t) - A_T(t,T).$$

$A_T(t,T)$ (14) alapján egyszerű deriválással számolható lenne, de más utat választunk. (7) alapján $\bar{i} = \sigma_i = 0$ választással kapjuk, hogy $A(t,T) = \int_t^T -\alpha_r \bar{r} C(s,T) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 C^2(s,T)\, ds$, így persze $A_T(t,T) = \int_t^T -\alpha_r \bar{r} \frac{\partial}{\partial T} C(s,T) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial}{\partial T} C^2(s,T)\, ds$. Sajnos az integrandusban a $C(t,T)$ függvény második változó szerinti deriváltjai szerepelnek, míg az integrál az első változóra vonatkozik. Vegyük észre azonban, hogy $C_t(t,T) = -e^{-\alpha_r(T-t)} = -C_T(t,T)$! Átírva tehát a deriváltakat:

$$A_T(t,T) = \int_t^T \alpha_r \bar{r} \frac{\partial}{\partial s} C(s,T) - \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial}{\partial s} C^2(s,T)\, ds = -\alpha_r \bar{r} C(t,T) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 C^2(t,T).$$

$A_T(t,T)$ ismeretében már felírható a nominális forward görbe:

$$f(t,T) = r(t)e^{-\alpha_r(T-t)} + \bar{r}\left(1 - e^{-\alpha_r(T-t)}\right) - \frac{\sigma_r^2}{2\alpha_r^2}\left(1 - e^{-\alpha_r(T-t)}\right)^2.$$

Hasonló a gondolatmenet az forward inflációs görbe esetén is:

$$f^I(t,T) = \frac{\partial}{\partial T} \log \widehat{I}(t,T) = \frac{\partial}{\partial T} \log P^I(t,t,T) - \frac{\partial}{\partial T} \log P(t,T) = \frac{\partial}{\partial T} \log P^I(t,t,T) + f(t,T).$$

A második tag éppen $f(t,T)$, vagyis $\frac{\partial}{\partial T}\log P^I(t,t,T)$-re van szükségünk:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T}\log P^I(t,t,T) &= \frac{\partial}{\partial T}\big[\log I(t) + A^I(t,T) - C(t,T)r(t) + D(t,T)i(t)\big]\\ &= A^I_T(t,T) - C_T(t,T)r(t) + D_T(t,T)i(t)\\ &= A^I_T(t,T) - e^{-\alpha_r(T-t)}r(t) + e^{-\alpha_i(T-t)}i(t).\end{aligned}$$

$C_T(t,T)$-vel és $D_T(t,T)$-vel könnyen elbántunk, ismét $A^I_T(t,T)$ okoz nehézséget. Próbáljunk meg ez esetben is deriválás nélkül számolni! (7) alapján:

$$\begin{aligned}A^I_T(t,T) = \int_t^T &-\alpha_r\bar{r}\frac{\partial}{\partial T}C(s,T) + \alpha_i\bar{i}\frac{\partial}{\partial T}D(s,T) - \sigma_r\sigma_i\rho\frac{\partial}{\partial T}C(s,T)D(s,T)\\ &+ \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial}{\partial T}C^2(s,T) + \frac{1}{2}\sigma_i^2\frac{\partial}{\partial T}D^2(s,T)\,ds.\end{aligned}$$

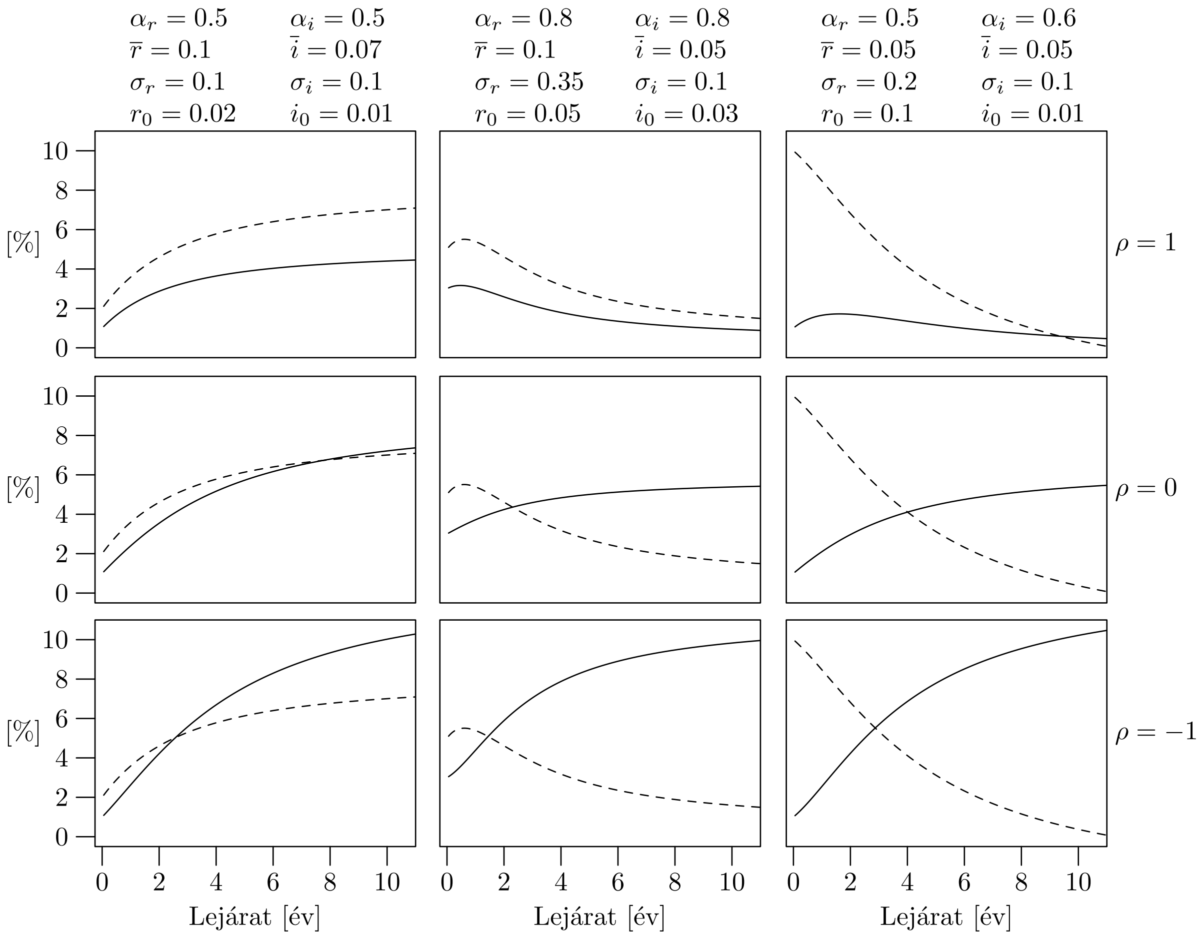
Az előzőekhez hasonlóan igaz, hogy $C_t(t,T) = -C_T(t,T)$, illetve $D_t(t,T) = -D_T(t,T)$, így:

$$\begin{aligned}A^I_T(t,T) = \int_t^T &\alpha_r\bar{r}\frac{\partial}{\partial s}C(s,T) - \alpha_i\bar{i}\frac{\partial}{\partial s}D(s,T) + \sigma_r\sigma_i\rho\frac{\partial}{\partial s}C(s,T)D(s,T)\\ &- \frac{1}{2}\sigma_r^2\frac{\partial}{\partial s}C^2(s,T) - \frac{1}{2}\sigma_i^2\frac{\partial}{\partial s}D^2(s,T)\,ds\\ = -\alpha_r\bar{r}C(t,T) &+ \alpha_i\bar{i}D(t,T) - \sigma_r\sigma_i\rho C(t,T)D(t,T) + \frac{\sigma_r^2}{2}C^2(t,T) + \frac{\sigma_i^2}{2}D^2(t,T).\end{aligned}$$

Felírva $f^I(t,T)$-t, több tag is ellentétes előjellel szerepel (akik így ki is esnek), így a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}f^I(t,T) = i(t)e^{-\alpha_i(T-t)} &+ \bar{i}\left(1-e^{-\alpha_i(T-t)}\right)\\ &- \frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_r\alpha_i}\left(1-e^{-\alpha_r(T-t)}\right)\left(1-e^{-\alpha_i(T-t)}\right) + \frac{\sigma_i^2}{2\alpha_i^2}\left(1-e^{-\alpha_i(T-t)}\right)^2.\end{aligned}\tag{15}$$

A nominális forward görbe az $\{1,\ e^{-\alpha_r(T-t)},\ e^{-2\alpha_r(T-t)}\}$ függvények, míg az inflációs forward görbe az $\{1,\ e^{-\alpha_r(T-t)},\ e^{-\alpha_r(T-t)},\ e^{-(\alpha_r+\alpha_i)(T-t)},\ e^{-2\alpha_i(T-t)}\}$ függvények lineáris kombinációja, vagyis a valós függvénytér három, illetve öt dimenziós alterét alkotják. Ebből következik, hogy tetszőleges forward görbéket – és így hozam és inflációs görbéket – a modell nem képes replikálni.



1. ábra. Tipikus hozam- és inflációs-görbék

3.4. Definíció (hozamgörbe, inflációs görbe)**.** *Az elemi kötvények éves átlagos hozamát a futamidő függvényében ábrázolva kapjuk a hozamgörbét:* $y(t,T) = \frac{1}{T-t} \log \frac{1}{P(t,T)} = \frac{-\log P(t,T)}{T-t}$, *míg az árindexre vonatkozó várakozások évesített értékét a futamidő függvényében ábrázolva kapjuk az inflációs várakozások görbéjét:* $y^I(t,T) = \frac{\log \widehat{I}(t,T)}{T-t} = \frac{1}{T-t} \log \frac{P^I(t,t,T)}{P(t,T)}$.

Lássunk néhány példát a modell által definiált hozam- és inflációs görbére különböző paraméterek mellett! A *Vasicek-modell* eredményeképpen három tipikus hozamgörbét kaphatunk eredményül: emelkedő, csökkenő, illetve púpos, ezekre egy-egy példa látható az 1. ábrán egy-egy inflációs görbével együtt. Az egy oszlopban szereplő görbék egyedül a korrelációban térnek el egymástól. Az ábrákon egyértelműen megfigyelhető a (15)-ben negatív előjellel szereplő korrelációs mutató, hiszen az erős pozitív korreláció mind a három esetben „benyomja” az inflációs görbét a hozamgörbe alá.

Erre a jelenségre közgazdasági magyarázatot is találhatunk: az infláció és a rövid kamatláb közötti erős pozitív korreláció illeszkedik ahhoz a szokásos jegybanki viselkedéshez, amikor a növekvő inflációt az alapkamat növelésével hűtik vissza, míg a defláció elkerülésére az alapkamatot csökkentik. Ennek a jegybanki viselkedésnek következménye, hogy az ex ante reálhozamok általában pozitívak, vagyis az inflációs várakozások görbéje a hozamgörbe alatt fut, melyet a modellünk keretein belül éppen erős pozitív korreláció esetén látunk.

3.4. Tőkeindexált elemi kötvényre szóló opció értéke

3.5. Definíció. *Tőkeindexált elemi kötvényre szóló call opciónak nevezzük azt a pénzügyi terméket, melynek kifizetésfüggvénye:* $X(U) = \big(P^I(U, T_0, T) - K\big)^+$.

Három időpont érdekes számunkra: t időpontban keressük annak az opciónak az értékét, mely U-ban jogot biztosít arra a befektetőnek, hogy az T_0-ban kibocsátott és T-ben lejáró tőkeindexált elemi kötvényt K áron megvehesse. Természetesen így $T_0 \leq t < U \leq T$. A klasszikus elemi kötvénnyel szemben ebben az esetben van értelme az $U = T$ esetnek is, hiszen a tőkeindexált elemi kötvény értéke T-ben is egy valószínűségi változó: ekkor fizeti ki a futamidő alatt felhalmozott inflációs hozamot.

Felírjuk az árazási formulát a bankbetétet használva számláló folyamatként:

$$c(t, T_0, U, T, K) = B(t)\mathbb{E}_Q\left(\left.\frac{\big(P^I(U, T_0, T) - K\big)^+}{B(U)}\right|\mathcal{F}(t)\right).$$

A számláló kettébontható a χ indikátorfüggvény segítségével:

$$\begin{aligned} &c(t, T_0, U, T, K) = \\ &= B(t)\mathbb{E}_Q\left(\left.\frac{P^I(U, T_0, T)}{B(U)}\chi_{\{P^I(U,T_0,T)>K\}}\right|\mathcal{F}(t)\right) - KB(t)\mathbb{E}_Q\left(\left.\frac{1}{B(U)}\chi_{\{P^I(U,T_0,T)>K\}}\right|\mathcal{F}(t)\right).\end{aligned}$$

Mindkét tag esetén az ármérce folyamatot szeretnénk lecserélni oly módon, hogy a várható értékeken belül csak az indikátorfüggvények maradjanak. Az első tagban olyan ármérce folyamatra van szükségünk, mely U időpontban $P^I(U, T_0, T)$ értéket vesz fel, ehhez

$P^I(t,T_0,T)$ éppen megfelelő lesz, míg a második tagban olyan folyamatra van szükségünk, mely U időpontban 1 értéket vesz fel, ezt $P(t,U)$ teljesíti. Az ármérce folyamatok lecserélésével azonban a valószínűségi mértékek is megváltoznak: T_I-vel fogjuk jelölni azt a mértéket, mely mellett $P^I(t,T_0,T)$-vel osztva, illetve U-val azt a mértéket, mely mellett $P(t,U)$-val osztva martingálokat kapunk. Így tehát:

$$\begin{aligned}&c(t,T_0,U,T,K) =\\ &\qquad = P^I(t,T_0,T)\mathbb{E}_{T_I}\left(\chi_{\{P^I(U,T_0,T)>K\}}\middle|\mathcal{F}(t)\right) - KP(t,U)\mathbb{E}_U\left(\chi_{\{P^I(U,T_0,T)>K\}}\middle|\mathcal{F}(t)\right).\end{aligned}$$

Az indikátorfüggvények várható értéke éppen a valószínűséggel ekvivalens, így:

$$\begin{aligned}&c(t,T_0,U,T,K) =\\ &\quad = P^I(t,T_0,T)\mathbb{P}_{T_I}\big(P^I(U,T_0,T) > K|\mathcal{F}(t)\big) - KP(t,U)\mathbb{P}_U\big(P^I(U,T_0,T) > K|\mathcal{F}(t)\big).\end{aligned}$$

Két különböző mérték alatt van tehát szükségünk a $\mathbb{P}\big(P^I(U,T_0,T) > K|\mathcal{F}(t)\big)$ valószínűségre. Ezek számolásához először büntetlenül osztunk $P(U,U)$-val, hiszen az U-ban lejáró elemi kötvény értéke U-ban éppen 1. Erre az osztásra azért van szükségünk, mert így olyan folyamatokat kapunk, melyek az adott mérték alatt martingálok, és így ki tudjuk számolni a dinamikájukat, aminek ismeretében az U időpontbeli eloszlásukat is.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{T_I}\big(P^I(U,T_0,T) > K|\mathcal{F}(t)\big) &= \mathbb{P}_{T_I}\left(\frac{P^I(U,T_0,T)}{P(U,U)} > K\middle|\mathcal{F}(t)\right)\\ &= \mathbb{P}_{T_I}\left(\frac{P(U,U)}{P^I(U,T_0,T)} < \frac{1}{K}\middle|\mathcal{F}(t)\right), \qquad (16)\\ \mathbb{P}_U\left(P^I(U,T_0,T) > K|\mathcal{F}(t)\right) &= \mathbb{P}_U\left(\frac{P^I(U,T_0,T)}{P(U,U)} > K\middle|\mathcal{F}(t)\right). \qquad (17)\end{aligned}$$

Lássuk először (17)-et! Szükségünk van $\frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)}$ dinamikájára, ehhez írjuk fel a hányadosra *Itô lemmájának* sorozatát élve azzal az egyszerűsítéssel, hogy a dt-s tagok együtthatóját nem számoljuk ki:

$$\begin{aligned}d_t\frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)} &= \frac{1}{P(t,U)}\,d_tP^I(t,T_0,T) - \frac{P^I(t,T_0,T)}{P^2(t,U)}\,d_tP(t,U)\\ &\qquad - \frac{1}{P^2(t,U)}\,d_t\big\langle P^I(t,T_0,T),P(t,U)\big\rangle + \frac{P^I(t,T_0,T)}{P^3(t,U)}\,d_t\big\langle P(t,U)\big\rangle.\end{aligned}$$

Szükség van tehát $d_t P^I(t,T_0,T)$-re és $d_t P(t,U)$-ra:

$$\begin{aligned} d_t P^I(t,T_0,T) &= \\ &= \frac{1}{I(T_0)}\left(I(t)\, d_t e^{A^I(t,T)-C(t,T)r(t)+D(t,T)i(t)} + e^{A^I(t,T)-C(t,T)r(t)+D(t,T)i(t)}\, d_t I(t)\right). \end{aligned}$$

Most szükségünk van $d_t e^{A^I(t,T)-C(t,T)r(t)+D(t,T)}$-re és $d_t I(t)$-re. Az előbbi esetén a dt-s tagok együtthatóját nem számoljuk ki, hiszen később a martingálmértékre áttérve ez úgyis el fog tűnni.

$$\begin{aligned} d_t e^{A^I(t,T)-C(t,T)r(t)+D(t,T)i(t)} &= \\ &= e^{A^I(t,T)-C(t,T)r(t)+D(t,T)i(t)}\left(\ldots\, dt - \sigma_r C(t,T)\, dW_r^Q(t) + \sigma_i D(t,T)\, dW_i^Q(t)\right), \\ d_t I(t) &= i(t) I(t)\, dt. \end{aligned}$$

Ezek ismeretében $d_t P^I(t,T_0,T)$, illetve analóg módon $d_t P(t,U)$ már felírható:

$$\begin{aligned} d_t P^I(t,T_0,T) &= P^I(t,T_0,T)\left(\ldots\, dt - \sigma_r C(t,T)\, dW_r^Q(t) + \sigma_i D(t,T)\, dW_i^Q(t)\right), \\ d_t P(t,U) &= P(t,U)\big(\ldots\, dt - \sigma_r C(t,U)\, dW_r^Q(t)\big). \end{aligned}$$

Ismerve $d_t P^I(t,T_0,T)$-t és $d_t P(t,U)$-t, $d_t \frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)}$ is felírható:

$$\begin{aligned} d_t \frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)} &= \\ &= \frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)}\left(\ldots\, dt + \sigma_r\big[C(t,U) - C(t,T)\big]\, dW_r^Q(t) + \sigma_i D(t,T)\, dW_i^Q(t)\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Az U mérték alatt $d_t \frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)}$ martingál, vagyis áttérve erre a mértékre a dt-s tag eltűnik:

$$d_t \frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)} = \frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)}\Big(\sigma_r\big[C(t,U) - C(t,T)\big]\, dW_r^U(t) + \sigma_i D(t,T)\, dW_i^U(t)\Big). \tag{19}$$

(19) egy *geometriai Brown-mozgás*, melyet két korrelált *Wiener-folyamat* hajt meg. Mivel a korrelációs struktúrát az ekvivalens mértékcsere nem változtatja meg, ismét alkalmazhatjuk a $dW_i^U(t) = \rho\, dW_r^U(t) + \sqrt{1-\rho^2}\, d\widetilde{W}_r^U(t)$ összefüggést, ahol $d_t \left\langle W_r^U(t), \widetilde{W}_r^U(t)\right\rangle = 0$:

$$\begin{aligned} d_t \frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)} = \frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)}\Big(&\big[\sigma_r\big(C(t,U) - C(t,T)\big) + \sigma_i \rho D(t,T)\big]\, dW_r^U(t) \\ &+ \sigma_i \sqrt{1-\rho^2} D(t,T)\, d\widetilde{W}_r^U(t)\Big). \end{aligned}$$

Térjünk át a következő jelölésekre:

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) &= \sigma_r\big(C(t,U) - C(t,T)\big) + \sigma_i\rho D(t,T),\\
\psi_2(t) &= \sigma_i\sqrt{1-\rho^2}D(t,T),\\
X(t) &= \frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)}.
\end{aligned}$$

Ezekkel a jelölésekkel felírva $d_t\frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)}$-t a következőt kapjuk:

$$d_tX(t) = X(t)\left(\psi_1(t)\,dW_r^U(t) + \psi_2(t)\,d\widetilde{W}_r^U(t)\right).$$

A sztochasztikus differenciálegyenlet megoldásához írjuk fel *Itô lemmáját* a $\log X(t)$ függvényre:

$$\begin{aligned}
d_t\log X(t) &= \frac{1}{X(t)}\,d_tX(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{X^2(t)}\,d_t\langle X(t),X(t)\rangle\\
d_t\log X(t) &= \psi_1(t)\,dW_r^U(t) + \psi_2(t)\,d\widetilde{W}_r^U(t) - \frac{1}{2}\psi_1^2(t)\,dt - \frac{1}{2}\psi_2^2(t)\,dt\\
\log X(U) &= \log X(t) + \int_t^U \psi_1(s)\,dW_r^U(s) + \int_t^U \psi_2(s)\,d\widetilde{W}_r^U(s) - \frac{1}{2}\int_t^U \psi_1^2(s)+\psi_2^2(s)\,ds\\
X(U) &= e^{\log X(t)+\int_t^U \psi_1(s)\,dW_r^U(s)+\int_t^U \psi_2(s)\,d\widetilde{W}_r^U(s)-\frac{1}{2}\int_t^U \psi_1^2(s)+\psi_2^2(s)\,ds}.
\end{aligned}\tag{20}$$

$X(U) = \frac{P^I(U,T_0,T)}{P(U,U)}$ az U mérték alatt tehát egy lognormális eloszlású valószínűségi változó, ahol a mögöttes normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\log X(t) - \frac{1}{2}\int_t^U \psi_1^2(s)+\psi_2^2(s)\,ds = \log X(t) - \frac{1}{2}\Psi^2(t,U)$, a varianciája pedig az *Itô-izometria* (Karatzas és Shreve, 1991) értelmében $\int_t^U \psi_1^2(s)+\psi_2^2(s)\,ds = \Psi^2(t,U)$. Ezek ismeretében már számolható a szükséges valószínűség (17):

$$\mathbb{P}_U\left(\frac{P^I(U,T_0,T)}{P(U,U)} > K\middle|\mathcal{F}(t)\right) = \Phi\left(\frac{\log\frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)K} - \frac{1}{2}\Psi^2(t,U)}{\Psi(t,U)}\right) = \Phi(d_-).\tag{21}$$

(16) számolásához szükségünk van $\frac{P(t,U)}{P^I(t,T_0,T)}$ dinamikájára a T_I mérték alatt. A Q mérték alatti dinamika (18) alapján számolható, ha felírjuk *Itô lemmáját* a reciprok függvényre:

$$\begin{aligned}
d_t\frac{P(t,U)}{P^I(t,T_0,T)} &= -\frac{P^2(t,U)}{P^{I^2}(t,T_0,T)}\,d_t\frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)} + \frac{P^3(t,U)}{P^{I^3}(t,T_0,T)}d_t\left\langle\frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)}\right\rangle\\
&= \frac{P(t,U)}{P^I(t,T_0,T)}\Big(\ldots\,dt - \sigma_r\big[C(t,U)-C(t,T)\big]\,dW_r^Q(t) - \sigma_iD(t,T)\,dW_i^Q(t)\Big).
\end{aligned}$$

A T_I mérték alatt $\frac{P(t,U)}{P^I(t,T_0,T)}$ martingál, vagyis a dt-s tag kiesik:

$$d_t\frac{P(t,U)}{P^I(t,T_0,T)} = \frac{P(t,U)}{P^I(t,T_0,T)}\Big(-\sigma_r\big[C(t,U)-C(t,T)\big]\, dW_r^{T_I}(t) - \sigma_i D(t,T)\, dW_i^{T_I}(t)\Big).$$

Ismét áttérünk két független *Wiener-folyamatra* a $dW_i^{T_I} = \rho\, dW_r^{T_I} + \sqrt{1-\rho^2}\, d\widetilde{W}_r^{T_I}$ összefüggés segítségével, bevezetjük az $Y(t) = \frac{P(t,U)}{P^I(t,T_0,T)}$ jelölést, valamint felhasználjuk a korábbi $\psi_1(t)$, és $\psi_2(t)$ jelöléseket:

$$d_tY(t) = Y(t)\left(-\psi_1(t)\, dW_r^{T_I}(t) - \psi_2(t)\, d\widetilde{W}_r^{T_I}(t)\right).$$

Ez a sztochasztikus differenciálegyenlet a korábbival csaknem azonos, és a megoldása is mindössze két előjelben tér el (20)-tól:

$$\frac{P(U,U)}{P^I(U,T_0,T)} = Y(U) = e^{\log Y(t) - \int_t^U \psi_1(s)\, dW_r^{T_I}(s) - \int_t^U \psi_2(s)\, d\widetilde{W}_r^{T_I}(s) - \frac{1}{2}\int_t^U \psi_1^2(s)+\psi_2^2(s)\, ds}.$$

Az exponenciálisban lévő normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke az előzőekhez hasonlóan $\log Y(t) - \frac{1}{2}\Psi^2(t,U)$, a varianciája pedig ismét $\Psi^2(t,U)$, hiszen független normális eloszlású valószínűségi változók összegének és különbségének a varianciája egyaránt a varianciák összegével egyenlő. Ezek ismeretében ismét számolható a szükséges valószínűség (16):

$$\mathbb{P}_{T_I}\left(\frac{P(U,U)}{P^I(U,T_0,T)} < \frac{1}{K}\middle|\mathcal{F}(t)\right) = \Phi\left(\frac{\log\frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)K} + \frac{1}{2}\Psi^2(t,U)}{\Psi(t,U)}\right) = \Phi(d_+). \qquad (22)$$

A teljességhez azonban adósok vagyunk még $\int_t^U \psi_1^2(s) + \psi_2^2(s)\, ds = \Psi^2(t,U)$-val, ahol $\psi_1(t) = \sigma_r\big(C(t,U) - C(t,T)\big) + \sigma_i\rho D(t,T)$, illetve $\psi_2(t) = \sigma_i\sqrt{1-\rho^2}D(t,T)$. Lássuk először a négyzetösszeget!

$$\begin{aligned}\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t) &= \sigma_r^2(C(t,U) - C(t,T))^2 + 2\sigma_r\sigma_i\rho(C(t,U)-C(t,T))D(t,T) + \sigma_i^2D^2(t,T)\\ &= \sigma_r^2C^2(t,U) - 2\sigma_r^2C(t,U)C(t,T) + \sigma_r^2C^2(t,T) + 2\sigma_r\sigma_i\rho C(t,U)D(t,T)\\ &\qquad - 2\sigma_r\sigma_i\rho C(t,T)D(t,T) + \sigma_i^2D^2(t,T).\end{aligned}$$

Hat tag t-től U-ig vett integráljára van szükségünk, ahol persze $C(t,T) = \frac{1-e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r}$ és $D(t,T) = \frac{1-e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}$. Az integrálok nehézségét az adja, hogy – egy tagot leszámítva – a felső határ nem egyezik meg az integrandusok második változójával.

Tagonként elvégezzük az integrálásokat és az eredményeket a $C(\cdot,\cdot)$ és $D(\cdot,\cdot)$ függvényekkel kifejezve írjuk fel. Lássuk először a négyzetfüggvények integráljait:

$$\int_t^U C^2(s,U)\,ds = \frac{1}{\alpha_r^2}\Big(-\frac{\alpha_r}{2}C^2(t,U) - C(t,U) + (U-t)\Big),$$

$$\int_t^U C^2(s,T)\,ds = \frac{1}{\alpha_r^2}\Big(\frac{\alpha_r}{2}C^2(U,T) + C(U,T) - \frac{\alpha_r}{2}C^2(t,T) - C(t,T) + (U-t)\Big),$$

$$\int_t^U D^2(s,T)\,ds = \frac{1}{\alpha_i^2}\Big(\frac{\alpha_i}{2}D^2(U,T) + D(U,T) - \frac{\alpha_i}{2}D^2(t,T) - D(t,T) + (U-t)\Big).$$

Most következzenek a szorzatfüggvények integráljai:

$$\int_t^U C(s,U)C(s,T)\,ds = \frac{1}{\alpha_r^2}\bigg(\frac{C(U,T) - C(t,U) - C(t,T) - \alpha_r C(t,U)C(t,T)}{2} + (U-t)\bigg),$$

$$\int_t^U C(s,U)D(s,T)\,ds = \frac{1}{\alpha_r\alpha_i}\bigg(\frac{\alpha_r D(U,T) - \alpha_i C(t,U) - \alpha_r D(t,T)}{\alpha_r+\alpha_i} - \frac{\alpha_r\alpha_i C(t,U)D(t,T)}{\alpha_r+\alpha_i} + (U-t)\bigg),$$

$$\int_t^U C(s,T)D(s,T)\,ds = \frac{1}{\alpha_r\alpha_i}\bigg(\frac{\alpha_i C(U,T) + \alpha_r D(U,T) - \alpha_i C(t,T) - \alpha_r D(t,T)}{\alpha_r+\alpha_i} + \frac{\alpha_r\alpha_i C(U,T)D(U,T) - \alpha_r\alpha_i C(t,T)D(t,T)}{\alpha_r+\alpha_i} + (U-t)\bigg).$$

Az integrálok ismeretével alapos átalakítás után már felírható a keresett függvény:

$$\begin{aligned}\Psi^2(t,U) = {}&\frac{\sigma_r^2}{\alpha_r}\bigg(\frac{C^2(U,T) - C^2(t,T) - C^2(t,U)}{2} + C(t,U)C(t,T)\bigg)\\ &+ \frac{\sigma_i^2}{\alpha_i}\bigg(\frac{D^2(U,T) - D^2(t,T)}{2} + \frac{D(U,T) - D(t,T) + (U-t)}{\alpha_i}\bigg)\\ &+ \frac{2\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_r+\alpha_i}\bigg[\frac{C(t,T) - C(t,U) - C(U,T)}{\alpha_r} + D(t,T)\big(C(t,T) - C(t,U)\big)\\ &\qquad - D(U,T)C(U,T)\bigg].\end{aligned}$$

Így végül tehát a tőkeindexált elemi kötvényre szóló call opció értéke:

$$c(t,T_0,U,T,K) = P^I(t,T_0,T)\Phi(d_+) - P(t,U)K\Phi(d_-), \quad \text{ahol}$$

$$d_\pm = \frac{\log\frac{P^I(t,T_0,T)}{P(t,U)K} \pm \frac{1}{2}\Psi^2(t,U)}{\Psi(t,U)}.$$

3.5. Zéró-kupon inflációs csereügylet értéke

A zéró-kupon inflációs csereügylet *(zero coupon inflation-indexed swap, ZCIIS)* egy olyan derivatív szerződés, melyben a felek a futamidő végén egy előre rögzített, fix nominális hozamot $\left[(1+K)^{T-T_0}-1\right]$ és a futamidőre vonatkozó lebegő inflációs hozamot $\left[\frac{I(T)}{I(T_0)}-1\right]$ cserélik el egymással.

3.6. Definíció. *A zéró-kupon inflációs csereügylet az a derivatíva, melynek kifizetésfüggvénye:* $X(T)=\frac{I(T)}{I(T_0)}-(1+K)^{T-T_0}$.

Ennek a derivatívának az értéke a tőkeindexált és a nominális elemi kötvény értékével könnyen kifejezhető. Felírjuk az árazási formulát:

$$\begin{aligned}\mathrm{ZCIIS}(t,T_0,T,K) &= B(t)\mathbb{E}_Q\left(\left.\frac{\frac{I(T)}{I(T_0)}-(1+K)^{T-T_0}}{B(T)}\right|\mathcal{F}(t)\right)\\ &= B(t)\mathbb{E}_Q\left(\left.\frac{\frac{I(T)}{I(T_0)}}{B(T)}\right|\mathcal{F}(t)\right)-B(t)\mathbb{E}_Q\left(\left.\frac{(1+K)^{T-T_0}}{B(T)}\right|\mathcal{F}(t)\right)\\ &= B(t)\mathbb{E}_Q\left(\left.\frac{\frac{I(T)}{I(T_0)}}{B(T)}\right|\mathcal{F}(t)\right)-(1+K)^{T-T_0}B(t)\mathbb{E}_Q\left(\left.\frac{1}{B(T)}\right|\mathcal{F}(t)\right).\end{aligned}$$

$(1+K)^{T-T_0}$ konstans, így ezt ki tudtuk emelni a várható értékből. Észrevehetjük, hogy az első tag éppen egy T_0-ban kibocsátott, T-ben lejáró tőkeindexált elemi kötvény értéke t időpontban, míg a második tag egy T-ben lejáró nominális elemi kötvény t-beli értékének konstansszorosa:

$$\mathrm{ZCIIS}(t,T_0,T,K)=P^I(t,T_0,T)-(1+K)^{T-T_0}P(t,T). \tag{23}$$

Felvetődhet még kérdésként, hogy a szerződés megkötésének pillanatában mekkora nominális hozamban egyeznek meg a felek. A szerződés megkötésekor nincs pénzmozgás, a derivatíva értékének nullának kell lennie. A (23)-beli összefüggést felírjuk $t=T_0$-ra, és ezt nullával egyenlővé téve egy egyenletet kapunk K-ra:

$$\mathrm{ZCIIS}(T_0,T_0,T,K)=P^I(T_0,T_0,T)-(1+K)^{T-T_0}P(T_0,T)=0$$

K-ra való átrendezés után az alábbi, várakozásainknak megfelelő eredményt kapjuk:

$$K=\sqrt[T-T_0]{\frac{P^I(T_0,T_0,T)}{P(T_0,T)}}-1=\sqrt[T-T_0]{\widehat{I}(T_0,T)}-1,$$

vagyis kibocsátáskor éppen a piac által árazott infláció kerül rá a papírra.

3.6. Zéró-kupon inflációs floorlet értéke

A zéró-kupon inflációs floor *(zero coupon inflation floor, ZCIF)* a magas infláció ellen nyújt biztosítást: akkor történik kifizetés, ha a futamidő alatt az infláció nagyobb volt, mint egy előre rögzített nominális hozam.

3.7. Definíció. *A zéró-kupon inflációs floor az a derivatíva, melynek kifizetésfüggvénye:* $X(T) = \left(\frac{I(T)}{I(T_0)} - (1+K)^{T-T_0}\right)^+$.

A derivatíva t időpontbeli értékét számoljuk ki, ahol $T_0 < t < T$. Felírjuk az árazási formulát:

$$\mathrm{ZCIF}(t, T_0, TK,) = B(t)\mathbb{E}_Q\left(\left.\frac{\left(\frac{I(T)}{I(T_0)} - (1+K)^{T-T_0}\right)^+}{B(T)}\right|\mathcal{F}(t)\right).$$

Vegyük észre, hogy ezt a feladatot már megoldottuk! Ez a derivatíva a tőkeindexált elemi kötvényre szóló call opciónak az a speciális esete, amikor a mögöttes termék – vagyis a tőkeindexált elemi kötvény – lejárata és az opció lehívási időpontja éppen egybeesik, vagyis $U = T$. Így tehát:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ZCIF}(t, T_0, T, K) = c(t, T_0, T, T, K) = P_I(t, T_0, T)\Phi(d_+) - P(t,T)K\Phi(d_-), \quad \text{ahol} \\
d_\pm = \frac{\log\frac{P_I(t,T_0,T)}{P(t,T)K} \pm \frac{1}{2}\Psi^2(t,T)}{\Psi(t,T)}, \quad \text{illetve} \\
\Psi^2(t,T) = \frac{\sigma_i^2}{\alpha_i}\left(\frac{T-t}{\alpha_i} - \frac{D^2(t,T)}{2} - \frac{D(t,T)}{\alpha_i}\right), \quad \text{és} \\
D(t,T) = \frac{1 - e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}.
\end{aligned}$$

4. Hull-White-modell az inflációra

Előző modellünk legnagyobb kritikája, hogy tetszőleges hozamgörbét és inflációs görbét nem képes reprodukálni, vagyis nem tudunk a modell keretein belül a piachoz kalibrálni. Ezt a problémát a modell *Hull-White* típusú (Hull és White, 1990) módosításával igyekszünk orvosolni: megengedjük, hogy mind a rövid kamatláb, mind az inflációs ráta átlagszintje időtől függő legyen:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha_r\big(\overline{r}(t) - r(t)\big)\, dt + \sigma_r\, dW_r^Q(t), \\ di\,(t) &= \alpha_i\big(\overline{i}\,(t) - i\,(t)\big)\, dt + \sigma_i\, dW_i^Q(t), \end{aligned}$$

ahol mind $\overline{r}(T)$, mind $\overline{i}(T)$ determinisztikus függvények. A rövid kamatlábat és az inflációs rátát meghajtó *Wiener-folyamatok* közötti korrelációt továbbra is $d\big\langle W_r^Q(t), W_i^Q(t)\big\rangle = \rho\, dt$ definiálja.

A megoldás menete analóg az előző szakaszban tárgyaltakkal, így itt csak vázlatos levezetést adunk. A tőkeindexált és a standard elemi kötvények értékét a következő kifejezések adják:

$$\begin{aligned} P\ (t,T) &= \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r(s)\, ds}\middle| r(t)\right) = V\big(r(t), t, T\big), \\ P^I(t,T_0,T) &= \frac{I(t)}{I(T_0)}\mathbb{E}_Q\left(e^{\int_t^T i(s)-r(s)\, ds}\middle| r(t), i(t)\right) = \frac{I(t)}{I(T_0)}V^I\big(r(t), i(t), t, T\big). \end{aligned}$$

Mivel $\frac{P(t,T)}{B(t)} = \frac{V\left(r(t),t,T\right)}{B(t)}$ és $\frac{P_I(t,T_0,T)}{B(t)} = \frac{\frac{I(t)}{I(T_0)}V^I\left(r(t),i(t),t,T\right)}{B(t)}$ a Q mérték alatt martingálok, driftjüknek nullának kell lennie. *Itô lemmájának* többszöri alkalmazása után a dt-s tagokat nullával egyenlővé téve a következő differenciálegyenletekhez jutunk:

$$\begin{cases} V_t + V_r\,(\overline{r}(t) - r) + \dfrac{1}{2}V_{rr}\sigma_r^2 - Vr = 0, \\ V(r,T,T) = 1 \quad \text{peremfeltétel mellett, valamint} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_t^I + V_r^I\alpha_r(\overline{r}(t) - r) + V_i^I\alpha_i(\overline{i}(t) - i) + V_{ri}^I\sigma_r\sigma_i\rho + \dfrac{1}{2}V_{rr}^I\sigma_r^2 + \dfrac{1}{2}V_{ii}^I\sigma_i^2 + V^I i - V^I r = 0, \\ V^I(r,i,T,T) = 1 \quad \text{peremfeltétel mellett.} \end{cases}$$

A differenciálegyenletek megoldásait ismét $V(r,t,T) = e^{A(t,T)-C(t,T)r}$, illetve $V^I(r,i,t,T) = e^{A^I(t,T)-C(t,T)r+D(t,T)i}$ alakban keressük. Behelyettesítés után a következő differenciálegyenlet-rendszerekhez jutunk:

$$\begin{cases} A_t - \alpha_r \overline{r}(t)C + \dfrac{1}{2}\sigma_r^2 C^2 = 0, & \text{ha} \quad r = 0, \\ -C_t + \alpha_r C - 1 = 0, & \text{ha} \quad r \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_t^I - \alpha_r \overline{r}(t)C + \alpha_i \overline{i}(t)D - \sigma_r\sigma_i\rho CD + \dfrac{1}{2}\sigma_r^2 C^2 + \dfrac{1}{2}\sigma_i^2 D^2 = 0, & \text{ha} \quad r = i = 0, \\ -C_t + \alpha_r C - 1 = 0, & \text{ha} \quad r \neq 0 \quad \text{és} \quad i = 0, \\ D_t - \alpha_i D + 1 = 0, & \text{ha} \quad r = 0 \quad \text{és} \quad i \neq 0. \end{cases}$$

Mivel a megoldást $\forall\, r, i$ mellett keressük, a peremfeltételek a $V(r, T, T) = V^I(r, i, T, T) = 1$ feltételekből következnek: $A(T, T) = A^I(T, T) = C(T, T) = D(T, T) = 0$. A $C(t, T)$ és $D(t, T)$ függvényekre vonatkozó egyenletek megoldása természetesen a korábbiakkal azonos: $C(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r}$ és $D(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}$. A korábbiakhoz hasonlóan következik tehát, hogy:

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \int_t^T -\alpha_r \overline{r}(s) C(s, T) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 C^2(s, T)\, ds, \quad \text{valamint} \\ A^I(t, T) &= \int_t^T -\alpha_r \overline{r}(s) C(s, T) + \alpha_i \overline{i}(s) D(s, T) - \sigma_r\sigma_i\rho C(s, T) D(s, T) \\ &\qquad\qquad + \frac{\sigma_r^2}{2} C^2(s, T) + \frac{\sigma_i^2}{2} D^2(s, T)\, ds. \end{aligned}$$

A fenti integrálokat nem tudjuk explicit kiszámolni, hiszen $\overline{r}(T)$ és $\overline{i}(T)$ függvényeket nem ismerjük, de célunk is épp fordított: megfigyelt nominális hozamgörbéhez és inflációs görbéhez szeretnénk illeszteni a modellt. Lássuk tehát milyen forward görbéket tudunk reprodukálni:

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T) = r(t) e^{-\alpha_r(T-t)} - A_T(t, T), \quad \text{illetve} \\ f^I(t, T) &= \frac{\partial}{\partial T} \log \widehat{I}(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \log P^I(t, T_0, T) - \frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T) \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \log P^I(t, T_0, T) + f(t, T) = i(t) e^{-\alpha_i(T-t)} - A_T(t, T) + A_T^I(t, T). \end{aligned}$$

$A_T(t, T)$ és $A_T^I(t, T)$ meghatározásához szükségünk lenne $C_T(t, T)$-re és $D_T(t, T)$-re, de a számolás egyszerűsítése érdekében ismét felhasználjuk, hogy $C_T(t, T) = -C_t(t, T) =$

$e^{-\alpha_r(T-t)}$, illetve $D_T(t,T) = -D_t(t,T) = e^{-\alpha_i(T-t)}$. Így tehát:

$$A_T(t,T) = \int_t^T -\alpha_r \overline{r}(s) e^{-\alpha_r(T-s)}\, ds + \frac{\sigma_r^2}{2} C^2(t,T),$$

$$A_T^I(t,T) = A_T(t,T) + \int_t^T \alpha_i \overline{i}(s) e^{-\alpha_i(T-s)}\, ds - \sigma_r\sigma_i\rho C(t,T)D(t,T) + \frac{\sigma_i^2}{2} D^2(t,T).$$

Ezek ismeretében felírhatjuk a forward görbéket:

$$f(t,T) = r(t)e^{-\alpha_r(T-t)} + \int_t^T \alpha_r \overline{r}(s) e^{-\alpha_r(T-s)}\, ds - \overbrace{\frac{\sigma_r^2}{2} C^2(t,T)}^{h(t,T)},$$

$$f^I(t,T) = i(t)e^{-\alpha_i(T-t)} + \int_t^T \alpha_i\, \overline{i}(s) e^{-\alpha_i(T-s)}\, ds + \underbrace{\frac{\sigma_i^2}{2} D^2(t,T) - \sigma_r\sigma_i\rho C(t,T)D(t,T)}_{h^I(t,T)}.$$

Tegyük fel, hogy tetszőleges t időpillanatban megfigyelünk a piacon egy nominális és egy inflációs forwardgörbét, ezeket jelöljük $\widehat{f}(t,T)$-vel és $\widehat{f^I}(t,T)$-vel. Ekkor a feladat az, hogy rögzített $\alpha_r, \alpha_i, \sigma_r, \sigma_i, \rho$ paraméterek mellett megmondjuk $\overline{r}(T)$ és $\overline{i}(T)$ függvényeket, hogy $f(t,T) = \widehat{f}(t,T)$, illetve $f^I(t,T) = \widehat{f^I}(t,T)$ teljesüljön.

Vegyük észre, hogy az első két tag mindkét esetben – $f(t,T)$, illetve $f^I(t,T)$ esetében is – éppen egy lineáris inhomogén differenciálegyenlet megoldása.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} g(t,T) &= -\alpha_r g(t,T) + \alpha_r \overline{r}(T) \\ g(t,t) &= r(t) \end{aligned}\right\} \quad g(t,T) = r(t)e^{-\alpha_r(T-t)} + \int_t^T \alpha_r \overline{r}(s) e^{-\alpha_r(T-s)}\, ds$$

Írjuk fel tehát $\widehat{f}(t,T)$-t $g(t,T)$ segítségével, és fejezzük ki $\overline{r}(T)$-t:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(t,T) &= g(t,T) - h(t,T) \\ \widehat{f}(t,T) + h(t,T) &= g(t,T) \\ \frac{\partial}{\partial T}\widehat{f}(t,T) + \frac{\partial}{\partial T} h(t,T) &= -\alpha_r g(t,T) + \alpha_r \overline{r}(T) \\ \frac{\partial}{\partial T}\widehat{f}(t,T) + \frac{\partial}{\partial T} h(t,T) &= -\alpha_r \widehat{f}(t,T) - \alpha_r h(t,T) + \alpha_r \overline{r}(T). \end{aligned}$$

Tehát a keresett függvény: $\overline{r}(T) = \dfrac{1}{\alpha_r}\dfrac{\partial}{\partial T}\widehat{f}(t,T) + \dfrac{1}{\alpha_r}\dfrac{\partial}{\partial T} h(t,T) + \widehat{f}(t,T) + h(t,T).$

Ugyanez a gondolatmenet alkalmazható $\overline{i}(T)$ esetében is, mindössze két előjelben van változás:

$$\overline{i}(T) = \frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial}{\partial T}\widehat{f^I}(t,T) - \frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial}{\partial T} h^I(t,T) + \widehat{f^I}(t,T) - h^I(t,T).$$

Visszahelyettesítve végül a $h(t,T)$ és $h^I(t,T)$ függvényeket, valamint elvégezve a deriválásokat:

$$\begin{aligned}
\overline{r}(T) &= \widehat{f}(t,T) \ + \frac{1}{\alpha_r}\frac{\partial}{\partial T}\widehat{f}(t,T) \ + \frac{\sigma_r^2}{2\alpha_r^2}\left(1-e^{-2\alpha_r(T-t)}\right), \\
\overline{i}(T) &= \widehat{f}^I(t,T) + \frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial}{\partial T}\widehat{f}^I(t,T) - \frac{\sigma_i^2}{2\alpha_i^2}\left(1-e^{-2\alpha_i(T-t)}\right) \\
&\qquad + \frac{\sigma_r\sigma_i\rho}{\alpha_i}\left(\frac{1-e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r} + \frac{1-e^{-\alpha_i(T-t)}}{\alpha_i}e^{-\alpha_r(T-t)}\right).
\end{aligned}$$

Tetszőleges deriválható nominális és inflációs forward görbéhez tehát a fenti módon kalibrálható a modell.

Bár a hozam- és inflációs görbe illesztésével a piac egy részét sikerült reprodukálnunk, e többfaktoros *Hull-White* típusú modellünk is kevésnek bizonyul amint más likvid termékhez is illeszteni szeretnénk: inflációs cap és floor ügyletek értéke a kötési árfolyam függvényében rendszerint mosoly alakú szokott lenni, melyet ez a modell nem képes reprodukálni (Dodgson és Kainth, 2006).

5. Összegzés

Dolgozatunk célja árazási modellek felállítása volt olyan termékekre, melyekben explicit módon megjelenik az inflációs kockázat. Követve a kamatlábmodellek által kijelölt útvonalat, az inflációra és a rövid kamatlábra is átlaghoz visszahúzó dinamikát feltételeztünk a kockázatmentes mérték alatt.

Az egyensúlyi modellünk keretein belül zárt formulát találtunk a tőkeindexált elemi kötvényre és az erre szóló opcióra, melyek a további derivatív termékek esetén építőkövekként szolgálnak. Modellünk egyik megnyugtató eredménye, hogy az inflációs várakozások görbéje akkor húzódik a hozamgörbe alatt (mely a pozitív várható reálhozamot jelenti), ha az infláció és a rövid kamatláb közti korreláció erősen pozitív. Ez éppen a matematikai leírása a hiteles jegybanki politikának: az alapkamat és az infláció együttmozgása biztosítja a pozitív reálhozamot (persze abban az esetben, ha az alapkamat az inflációt majorálja).

A zárt képletek matematikailag impresszívek, de nem kizárólag öncélúak: kockázatkezelőknek adhatnak útmutatást inflációs termékek esetén a kockázatok két faktorra (az inflációra és a kamatlábra) való bontásában ahelyett, hogy csak egyetlen faktort (a reálhozamot) vennék figyelembe.

Megadtuk továbbá zárt alakban a modellünk által produkált hozam- és inflációs görbék alakját is. Ez éppen modellünk legnagyobb hiányosságára mutatott rá: mint minden egyensúlyi modell, így ez sem képes tetszőleges hozam- és inflációs görbét reprodukálni.

A következő szakaszban ezt a hibát orvosoltuk: piaci modellünkben a konstans átlagot egy időtől függő, de determinisztikus függvénnyel helyettesítettük mind a rövid kamatláb, mind az infláció esetén. A tőkeindexált és a nominális kötvények árát adottnak tekintve zárt alakban megadtuk ezeket a determinisztikus függvényeket, így ehhez a két lejárati struktúrához már tökéletesen kalibrálhatóvá vált a modell. Az illesztés után tetszőleges inflációs derivatíva értéke felírható, illetve számolható numerikus (például Monte Carlo) módszerrel.

Modelljeink közös hiányossága, hogy mind az infláció, mind a rövid kamatláb esetén a lehetséges trajektóriák között bőségesen akadnak olyanok, amelyek negatív értékeket vesznek fel. Ez ellentmond annak a szokásos megfigyelésnek, hogy sem a kamatláb, sem az infláció nem szokott túlzottan negatív értékeket felvenni.

Ezt a problémát lehetne orvosolni a modellünk *CIR* típusú (Cox et al., 1985) módosításával:

$$
\begin{aligned}
dr(t) &= \alpha_r\big(\overline{r} \ - r(t)\big)\,dt + \sigma_r\sqrt{r(t)}\,dW_r^Q(t),\\
di(t) &= \alpha_i\big(\overline{i} \ - i\,(t)\big)\,dt + \sigma_i\sqrt{i(t)}\,dW_i^Q(t),\\
\Big\langle dW_r^Q(t), dW_i^Q(t)\Big\rangle &= \rho\,dt,
\end{aligned}
$$

megállapítottuk azonban, hogy a megoldás ekkor *nem* affin lejárati szerkezetű, így a kapott – „külalakját” tekintve (5)-höz hasonló – differenciálegyenlet megoldása túlmutat e dolgozat keretein.

Hivatkozások

Agence France Trésor [2016] Negotiable debt outstanding at 31 March 2016. URL `http://www.aft.gouv.fr/articles/negotiable-debt-outstanding_470.html`. [Online; letöltés dátuma: 2016. május 14.]

Cox, J.C. és Ingersoll, J.E. és Ross, S.A. [1985] A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 385–407.

Deacon, M. és Andrew Derry, A. és Mirfendereski, D. [2004] *Inflation-indexed securities: bonds, swaps and other derivatives*. John Wiley & Sons.

Dodgson, M. és Kainth, D. [2006] Inflation-linked derivatives. *Royal Bank of Scotland Risk Training Course, Market Risk Group*.

Eurostat [2015] Eurostat yearbook, 2015. URL `http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Housing_statistics`. [Online; letöltés dátuma: 2016. április 25.]

Hull, J. és White, A. [1990] Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*, 3(4):573–592, 1990. doi: 10.1093/rfs/3.4.573. URL `http://rfs.oxfordjournals.org/content/3/4/573.abstract`.

Karatzas, I. és Shreve, S.E. [1991] *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag, New York, második kiadás. ISBN 0-387-97655-8. doi: 10.1007/978-1-4612-0949-2. URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0949-2`.

KSH [2008] Központi Statisztikai Hivatal. Módszertani dokumentáció / fogalmak. URL `http://www.ksh.hu/apps/meta.objektum?p_lang=HU&p_menu_id=110&p_almenu_id=201&p_ot_id=200&p_level=1&p_session_id=34961593&p_obj_id=4202`. [Online; letöltés dátuma: 2016. április 25.]

Lane, W. és Schmidt, M.L. [2006] Comparing U.S. and European inflation: the CPI and the HICP. *Monthly Labor Review*, 129(5):20–27. ISSN 00981818, 19374658. URL `http://www.jstor.org/stable/23805483`.

United Kingdom Debt Management Office [2016] Quarterly Review for October–December 2015. URL http://dmo.gov.uk/documentview.aspx?docname=publications/quarterly/oct-dec15.pdf&page=Quarterly_Review. [Online; letöltés dátuma: 2016. április 25.]

United States Department of the Treasury [2016] Monthly statement of the public debt of the United States March 31, 2016. URL http://treasurydirect.gov/govt/reports/pd/mspd/2016/opds032016.pdf. [Online; letöltés dátuma: 2016. április 25.]

Vasicek, O. [1977] An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5, 177–188. North-Holland Publishing Company.

NYILATKOZAT

Név: Víg Attila András
ELTE Természettudományi Kar, szak: Biztosítási és pénzügyi matematika
NEPTUN azonosító: QCUI2P
Szakdolgozat címe: Árazási modellek inflációs termékekre

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2016. május 17.

a hallgató aláírása

Hozzájárulás szakdolgozat benyújtásához

Alulírott Dr. Vidovics-Dancs Ágnes igazolom, hogy Víg Attila András az előre meghatározott gyakoriságú szakdolgozati konzultáción részt vett, és hozzájárulok szakdolgozatának benyújtásához.

Budapest, 2016. május 17.

Dr. Vidovics-Dancs Ágnes