Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

Az útvonalfüggőség értelmezései és fokozatai

Készítette: Balázs Barbara Anna
Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak
Kvantitatív pénzügyek szakirány
2017.

Szakszemináriumvezető: Dr. Vidovics-Dancs Ágnes

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az *útvonalfüggőség* (vagy *útfüggőség*) fogalma számos tudományterületen használatos, a szociológiától [8] és politikatudománytól [20], a természettudományokon át egészen a pénzügyekig. A fogalom jelentése, hogy egy folyamat végeredménye nagyban függ a menet közben őt érő, akár elhanyagolhatónak tűnő véletlen hatásoktól. Szemléletes példával élve, ha egy légáramlat leszakít két levelet egy folyóparton álló fáról, és esés közben az egyikhez hozzáér egy arra repülő madár szárnya, akkor könnyen lehet, hogy az egyik levél a parton landol, míg a másik eljut egészen az óceánig.

Az útvonalfüggő kifejezést leggyakrabban irreverzibilis folyamatokra használják, és itt nem csak dinamikai rendszerekre érdemes gondolni; Jeff Bezos-nak, az Amazon alapítójának egyik leggyakrabban idézett mondása szerint "a vállalati kultúra is nagyrészt útvonalfüggő – a lényeg, hogy mit tanulsz az út során"[1], ami azt jelenti, hogy az innovációhoz szükség van próbálkozásokra és bukásokra is, az eredmény minden esetben a menet közbeni fejlemények függvénye.

Az útvonalfüggőség elméletét a '80-as évek végén vezette be Paul A. David [4] [5], matematikai modellt pedig Pólya György írt fel rá először. A modell matematikai vonatkozása jól érzékeltethető az alábbi egyszerű példával. Vegyünk egy urnát, melyben fekete és fehér golyók vannak, egyenlő számban. Ha véletlenszerűen kiveszünk egy golyót, és helyette kettő vele egyező színűt teszünk vissza, akkor a rendszer pozitív visszacsatolású, hiszen az új golyók mindig az urnában lévők színeloszlását képviselik. A folyamat ugyanannyi fekete és fehér golyóval kezdődött, mégis bizonyos számú lépés után a különböző színű golyók aránya nagyon eltolódik, és az, hogy melyik lesz többségben, függ attól, hogy a folyamat elején, a véletlen választások során milyen színű golyó került a kezünkbe [32].

A 2. fejezetben áttekintést adunk arról, hogy a pénzügyi területeken milyen kontextusban találkozhatunk útvonalfüggőséggel, majd a dolgozat további részeiben a kifejezés opciókra való használatára szorítkozunk; ahol egy *opció útvonalfüggősége* alatt azt értjük, hogy a lehíváskori kifizetés meghatározásához nem elég tudni az alaptermék aktuális árfolyamát, hanem szükség van annak ismeretére, hogy az alaptermék milyen útvonalon jutott az adott értékhez (vagy legalább ennek az útvonalnak néhány paraméterére).

A 3. fejezetben bemutatunk néhány útvonalfüggő opciót, melyek kedvelt kereskedési eszközök a pénzügyi piacokon. A felsorolás a teljesség mindenfajta igénye nélkül történik, hiszen a származtatott termékek világa napjainkban is jelentős ütemben bővül, az innovációk újabb és újabb derivatívákat hívnak életre. Valamivel részletesebb leírás és listázás található a következő forrásokban: [25], [26], [12], [31].

Az útvonalfüggőséget szokás két csoportra bontani: *erős-* és *gyenge* verzióra, azonban ezeknek a fogalmaknak a meghatározása a szakirodalomban nem egységes, az is előfordul, hogy egy szerzőpáros két tagja eltérő definíciókat használ. Ezért a 4. fejezetben bemutatjuk a különböző használatban lévő értelmezéseket, és felhívjuk a figyelmet az egyes

[1] "Part of company culture is path-dependent - it's the lessons you learn along the way."

megközelítések esetleges hiányosságaira, pontatlanságaira. Elsődleges forrásunk a 4.1. alfejezethez Taleb 1996-os könyve [23], a 4.2. alfejezethez Wilmott 1998-as alapműve [25], a 4.3. alfejezet pedig Jiang 2005-ös, jól áttekinthető, sok szemléletes pédát is felsorakozható [12] könyve alapján készült.

A szakdolgozat célja a szakirodalom áttekintésén túl az, hogy az útvonalfüggőséget bizonyos esetekben mérni tudjuk, vagyis hogy bevezessünk egy olyan mérőszámot, amely visszaadja a várakozásainkat annak kapcsán, hogy két opció közül melyik függ jobban a megtett úttól. A meglévő megközelítések ilyen mérőszám meghatározására nem alkalmasak, ezért a 4.4. alfejezetben bemutatjuk a szétbontás egy új értelmezését, amely során kapott eredmények összhangban vannak az útvonalfüggőségről kialakult intuitív elképzelésünkkel, és amely segítségével - bizonyos esetekben - már be tudjuk vezetni a kívánt mérőszámot.

Az 5. fejezetben összehasonlítjuk a vizsgált modelleket, és a 6. fejezetben közöljük az a 4.4. alfejezet szimulációihoz használt programkódot.

A feldolgozott szakirodalom főként angol nyelvű, az előkerülő kifejezések közül soknak nincs magyar megfelelője, még néhánynak több is van, ezért felhívjuk rá a figyelmet, hogy számos fordítás saját, de a szakirodalommal való könnyebb összevethetőség érdekében minden esetben feltüntetjük az eredeti angol kifejezéseket.

Köszönet illeti témavezetőmet, Vidovics-Dancs Ágnest az érdekes témafelvetésért és a konzultációkon nyújtott segítségért, valamint Bihary Zsoltot, aki készséggel megosztotta velem az útvonalfüggőségről kialakult saját, intuitív elképzeléseit, ami a 4.4. alfejezetben bemutatott csoportosítás alapjául szolgált. Szeretnék továbbá köszönetet mondani Takács Balázsnak és Mészáros Szabolcsnak, akikhez szintén fordulhattam a szakdolgozat írása közben felmerülő kérdéseimmel.

2. Az útvonalfüggőségről általában

A pénzügyben tekinthetünk útvonalfüggőnek mindent, ami függ a múltbeli eredményektől/ a felvett értékektől/ a szerzett tapasztalatoktól.

Gyakran értenek például útvonalfüggőség alatt *útvonalfüggő dinamikát*, ami a folyamatot meghajtó véletlen/ sztochasztika útfüggőségére utal.

Rögzítsük le az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt; a dolgozat további részeiben e fölött fogunk dolgozni. Azzal a szokásos feltétellel élünk, hogy az alaptermék árfolyamata geometriai Brown-mozgást követ, vagyis hogy a dinamikája:

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t),$$

ahol $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ és a $(W(t))_{t\in[0,T]}$ - ami egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ fölötti Wiener-folyamat - biztosítja a sztochasztikát. Az $(S(t))_{t\in[0,T]}$ folyamatot *részvény-árfolyamatnak* is szokás nevezni. Mivel a $(W(t))_{t\in[0,T]}$ Wiener-folyamat független növekményű, ezért a részvény-árfolyamat ilyen értelemben nem útvonalfüggő, és nem útvonalfüggőek azok a derivatívák sem, amelyek kifizetése a részvény-árfolyamatnak csak egy adott pontban felvett - tipikusan a lejáratkori - értékétől függ.

Azonban minden ilyen derivatíva útvonalfüggővé válik, amint dinamikusan szeretnénk fedezni/ hedge-elni, mivel ilyen esetben a portfóliónk kiigazítása minden pillanatban az alapján történik, hogy az alaptermék árfolyamata milyen értéket vesz fel az adott időpontban. Tehát a *dinamikus fedezést* is joggal tekinthetjük útvonalfüggőnek.

Útvonalfüggővé tehetjük továbbá magát az alaptermék árfolyamatát is, *útvonalfüggő volatilitást* feltételezve:

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma(t, (S(u))_{u\in[0,t]})S(t)\mathrm{d}W(t).$$

Az útvonalfüggő volatilitás modellek használata egyelőre nem elterjedt, pedig ötvözi az ismert lokális volatilitás- és sztochasztikus volatilitás modellek több előnyét is. Részletes leírás található róluk például a 2014-es [9] tanulmányban.

Egy másik fontos eset, amikor nem útvonalfüggő derivatíva útvonalfüggővé válik az, amikor befektetési stratégiát választunk, vagyis amikor arról döntünk, hogy vegyünk-e hitelből alapterméket (mekkora tőkeáttétellel/ milyen kamatra) olyan feltételek mellett, hogy a kamatfizetést és a tőketörlesztést a megfelelő számú alaptermék eladásából fizetjük. Az útvonalfüggőség itt abban áll, hogy a törlesztéshez eladott részvények száma, és így a pozíció lejáratkori értéke is függ a részvény aktuális árától. Vagyis nem útvonalfüggő termékek esetén is beszélhetünk *útvonalfüggő stratégiáról.*

Erre találhatunk érdekes példát a [24] cikkben, ahol a szerzők a MOL részvény 1998 és 2008 közötti árfolyam alakulását veszik alapul, melynek átlagos évesített hozama 16,3%, és - néhány szokásos egyszerűsítő feltétel mellett - azt vizsgálják, hogy mekkora tőkeáttétellel és milyen kamattal zárnánk a pozíciónkat ugyanúgy, mint ha az egységnyi saját tőkénkből vennénk részvényt, azt a 10 éves futamidő alatt tartanánk, majd a végén eladnánk. Az egyik meglepő válasz az, hogy a 16,3%-nál jóval kisebb 5,11% fölötti éves kamatra nem éri meg hitelt felvenni - havi kamatfizetés és tőketörlesztés mellett -, a másik - elsőre - meglepő eredmény pedig az, hogy ez az érték független a tőkeáttétel nagyságától.

A MOL részvény vizsgált időszakban felvett havi loghozamait permutálva viszont ez az érték sok esetben jelentősen változik. Sőt, még ha kamatmentes hitelről van szó, akkor is csak a 2000 szimulált trajektória 95,8%-ában nem megyünk csődbe, vagyis nem fogyunk ki a részvényből a 10 éves futamidő letelte előtt.

Az ilyen típusú útvonalfüggőség esetén adódik egy kézenfekvő útvonalfüggőségi mérték: az alsóági kockázati mértékek használata. Hiszen ami minket az útvonal kapcsán igazán érdekel/ ami fontos a várható kifizetésünket illetően az az, hogy mennyire függ az alaptermék árfolyamatának útvonalától az, hogy csődbe megyünk/ nagy veszteséggel zárunk; az esetek hány százalékában lesz veszteségünk/ lesz a nyereségünk egy bizonyos szint alatt. Azonban erre a dolgozatban részletesebben nem térünk ki, ezt az áttekintő fejezetet leszámítva csak útvonalfüggő opciókkal foglalkozunk.

De mit is értünk *útvonalfüggő opció* alatt? Azokat az opciókat tekintjük útvonalfüggőnek, melyek lehíváskori kifizetése függ az alaptermék árfolyamának futamidő alatti alakulásától, az áralakulás több időpontbeli értékét is figyelembe veszi; vagyis melyek kifizetése nem csupán attól függ, hogy az alaptermék árfolyama hova jutott, hanem attól is, hogy milyen úton érte el azt az értéket. Következésképp útvonalfüggő opció esetén azonos kezdő- és végpontú trajektóriákhoz is tartozhat eltérő kifizetés.

Egyes szerzők úgy definiálják az opciók útvonalfüggőségét, hogy a lejáratkori kifizetés az alaptermék árfolyamatának lejáratkori értéke *mellett* függ az útvonal egyéb paramétereitől is [7], [23], fontos azonban, hogy a lejáratkori árfolyamtól való függés nem szükséges feltétele az útvonalfüggőségnek, útfüggőnek fogjuk tekinteni például azt az opciót is, amely kifizetése az útvonal maximumának és minimumának különbségeként adódik (maxmin opció).

Azonban az útvonalfüggőség nem csupán derivatívákkal kapcsolatban értelmezhető.

Minsky hipotézise szerint például útvonalfüggőnek tekinthető a *kockázatvállalási hajlandóság*, hiszen az az eddigi tapasztalatok függvényében, irracionálisan változik, a sikeresnek bizonyult döntések növelik a kockázatvállalási hajlandóságot. A Minsky-hipotézisről bővebben olvashatunk a következő cikkekben: [1], [19].

Még egy példát mutatunk az útvonalfüggő kifejezés használatára. Tegyük fel, hogy az alaptermék áralakulása egy trinomiális fával reprezentálható. Ebben az esetben az útvonalfüggőség alatt érthetjük például azt, hogy kijelölve két pontot, és vizsgálva azokat az eseteket, amikor az ár eljut az egyik pontból a másikba, mekkora a valószínűsége, hogy az útvonal egy kijelölt intervallumon keresztül halad (fölötte/ alatta megy át).

Ezt a feladatot tovább általánosíthatjuk, ha az egyik vagy akár mindkét pontot intervallummal helyettesítjük. Vagy nézhetjük akár visszafele: ha tudjuk, hova jutottunk, és ismerjük egy időpontnál a három 'intervallumon' az áthaladás valószínűségeit, meg tudjuk-e mondani, hogy melyik pontból indulhattunk?

Ezek a kérdések releváns pénzügyi problémákhoz vezetnek. Vegyük azt az esetet, amikor nagyon fontos, hogy bizonyos időszakokban bizonyos intervallumon haladjon keresztül az alaptermék árfolyama (például mérlegkészítéskor ne legyen túl alacsony). Az ezen alapuló származtatott termékek árazásához lényeges a fenti valószínűségek meghatározása.

Számtalan út nyílik tehát előttünk, hogy útvonalfüggőségről és annak fokozatairól értekezzünk, de mint ahogy azt már említettük, a dolgozat hátralévő részében a fenti értelemben vett útvonalfüggő opciókat fogjuk vizsgálni.

3. Útvonalfüggő opciók

Az opciók osztályozhatók aszerint, hogy milyen időpontokban élhetünk a lehívási joggal, illetve aszerint is, hogy a lehíváskori kifizetésük mennyire bonyolultan kapható meg. Azt mondjuk, hogy az opció

– **európai típusú**, ha csak a lejáratkor hívható le,

– **amerikai típusú**, ha a lejáratig bármelyik időpontban lehívható,

– **bermuda típusú**, ha csak előre rögzített konkrét időpontokban lehet lehívni.

Számos egyéb feltétel megfogalmazható egy opció lehívhatóságára vonatkozóan (például a *capped típusú* opciók automatikusan lehívásra kerülnek, ha az alaptermék árfolyama elér egy előre rögzített szintet), sőt a felsoroltak közül a bermuda típusút is szokás tovább finomítani (például a *kanári típusú* opciónál általában negyedévenkénti lehívhatóságot rögzítenek, de ez a jog csak egy bizonyos idő - jellemzően egy év - eltelte után lép életbe), de a dolgozatban csak a fenti három kategória kerül elő, így a többi részletes bemutatásától eltekintünk.

Nevezzük *egyszerű* (vagy *plain vanilla*) opciónak azokat az európai vagy amerikai opciókat, melyek lehíváskori kifizetése megkapható pusztán az alaptermék lehíváskori árfolyamából és a kötési árfolyamból; azokat az opciókat pedig, amelyek kifizetése vagy típusa komplikáltabb, nevezzük *egzotikus* opciónak. Ezek alapján az egyszerű opciók közé tartozik például a *digitális/ bináris*, a *call* és a *put* opció európai és amerikai változata is.

A vanilla call opció lehíváskori kifizetése:

$$H(\tau, S(\tau)) = (S(\tau) - K)^+,$$

a vanilla put opció lehíváskori kifizetése:

$$H(\tau, S(\tau)) = (K - S(\tau))^+.$$

Ebben a fejezetben bemutatunk néhány egzotikus opciót, melyeket a későbbiekben útvonalfüggőség szempontjából szeretnénk osztályozni, és ahol szükséges, feltüntetjük a lehíváskori kifizetés - $H(\tau, S)$ - értékét is. Az egzotikus opciókat nagyobb terjedelmű munka esetén is csak a teljesség igénye nélkül tudnánk bemutatni, hiszen a pénzügyi világ nagy ütemben való fejlődése egyre újabb derivatívákat hív életre. Az egzotikus opciókról részletesebb leírást és listázást találhatunk a következő forrásokban: [25], [26], [12], [31].

3.1. Limitáras opciók

A limitáras opciók (más néven *barrier opciók*) kifizetése nem csak az alaptermék lehíváskori árfolyamától és a kötési árfolyamtól függ, hanem attól is, hogy az alaptermék árfolyamata elér-e egy előre rögzített S_B szintet az opció élettartama alatt. Ezt az előre megállapított árat szokás *érintési- / barrier-* vagy *trigger árfolyamnak* nevezni.

Két nagy csoportja a *knock-out* és a *knock-in* opció, az előbbi az érintési árfolyam elérésekor megszűnik, az utóbbi pedig akkor aktiválódik. Aszerint, hogy az érintési árfolyam a kezdeti értéknél kisebb (*alsó korlátos*) vagy nagyobb (*felső korlátos*) megkülönböztetjük a következő változatokat

- alsó korlátos knock-out (down-and-out),
- felső korlátos knock-out (up-and-out),
- alsó korlátos knock-in (down-and-in),
- felső korlátos knock-in (up-and-in).

Mindegyik variáns esetén beszélhetünk call és put opcióról, a *knock-out* opciók kifizetése ennek függvényében tehát

$$H(\tau, S(\cdot)) = \begin{cases} (S(\tau) - K)^+ \chi\big(\{\min\limits_{t\in[0,\tau]} S(t) > S_B\}\big) & \text{down-and-out call} \\ (K - S(\tau))^+ \chi\big(\{\min\limits_{t\in[0,\tau]} S(t) > S_B\}\big) & \text{down-and-out put} \\ (S(\tau) - K)^+ \chi\big(\{\max\limits_{t\in[0,\tau]} S(t) < S_B\}\big) & \text{up-and-out call} \\ (K - S(\tau))^+ \chi\big(\{\max\limits_{t\in[0,\tau]} S(t) < S_B\}\big) & \text{up-and-out put,} \end{cases}$$

ahol az $S(\cdot)$ jelölést arra vezettük be, hogy a kifizetés az $(S(t))_{t\in[0,T]}$ folyamat több időpontban felvett értékétől is függ - ebben a példában minden $t \in [0,\tau]$ időpontbeli értéktől; a *knock-in* opciók kifizetése pedig

$$H(\tau, S(\cdot)) = \begin{cases} (S(\tau) - K)^+ \chi\big(\{\min\limits_{t\in[0,\tau]} S(t) \le S_B\}\big) & \text{down-and-in call} \\ (K - S(\tau))^+ \chi\big(\{\min\limits_{t\in[0,\tau]} S(t) \le S_B\}\big) & \text{down-and-in put} \\ (S(\tau) - K)^+ \chi\big(\{\max\limits_{t\in[0,\tau]} S(t) \ge S_B\}\big) & \text{up-and-in call} \\ (K - S(\tau))^+ \chi\big(\{\max\limits_{t\in[0,\tau]} S(t) \ge S_B\}\big) & \text{up-and-in put,} \end{cases}$$

az előbbi jelöléssel.

Felhívjuk rá a figyelmet, hogy a fenti kifejezések alatt néha bonyolultabb limitáras opciókat értenek: szokás *alsó korlátosnak* nevezi azt a barrier opciót, ahol a feltétel a trigger árfolyam felülről való elérése, és *felső korlátosnak* azt, ahol a trigger árfolyamot alulról kell elérni, vagyis ilyenkor nem az számít, hogy az érintési árfolyam az alaptermék kezdeti árfolyamához képest hol helyezkedik el, de a továbbiakban ezzel a terminológiával nem foglalkozunk.

Gyakran előfordul, hogy az opció megszűnésének/ aktiválódásának több - tipikusan kettő - korlát elérése a feltétele

- dupla korlátos limitáras opció,

és ezekhez a korlátokhoz szokás elérési sorrendet is társítani [15].

További módosítási lehetőség, ha az opció megszűnéséhez vagy aktiválódásához az alaptermék árfolyamatának nem elég elérnie az érintési árfolyamot, hanem bizonyos időt mögötte is kell töltenie. Ennek két változata van használatban:

- párizsi opció,
- kumulatív párizsi opció.

Párizsi opció (*Parisian option*) esetén az a feltétel, hogy az előírt D időtartamot a trigger árfolyam mögött megszakítás nélkül töltse az alaptermék árfolyamata. Tehát egy *párizsi down-and-out call opció* lehíváskori kifizetése

$$H\big(\tau, S(\tau), \Theta(\tau)\big) = (S(\tau) - K)^{+}\chi\big(\{\Theta(\tau) < D\}\big),$$

ahol $\Theta(t) = \sup\{|t_i - t_j| : t_i, t_j \in [0,t],\ t_i \leq t_j,\ \ \forall t_k \in\ [t_i, t_j] : S(t_k) \leq S_B\}$.
Átírva olyan formába, mely az árazásnál könnyebben alkalmazható:

$$H\big(\tau, S(\tau), \tilde{\Theta}(\tau)\big) = (S(\tau) - K)^{+}\chi\big(\{\sup_{t\in[0,\tau]} \tilde{\Theta}(t) < D\}\big),$$

ahol $\tilde{\Theta}(t) = t - \sup\{t' : t' \in [0,t], S(t') \geq S_B\}$.

Míg a kumulatív párizsi opció (*Parasian option*) esetén az érintési árfolyam mögött töltött időnek összesen kell elérnie a D időtartamot. Tehát az *down-and-out call opció* kifizetését a *kumulatív párizsi* esetre felírva azt kapjuk, hogy

$$H\big(\tau, S(\tau), \hat{\Theta}(\tau)\big) = (S(\tau) - K)^{+}\chi\big(\{\hat{\Theta}(\tau) < D\}\big),$$

ahol $\hat{\Theta}(t) = \sum\{|t_i - t_j| : t_i, t_j \in [0,t], t_i \leq t_j, \forall t_k \in (t_i, t_j) : S(t_k) < S_B, S(t_i) = S_B, S(t_j) = S_B\}$.

Azzal a feltétellel is szokás élni, hogy a trigger árfolyam mögött töltött idő fokozatosan csökkenti az opció értékét, ez a

- step opció.

A *step down-and-out call opció* kifizetése:

$$H\big(\tau, S(\tau), \hat{\Theta}(\tau)\big) = (S(\tau) - K)^{+}e^{-r\hat{\Theta}(\tau)}$$

ahol $\hat{\Theta}(t) = \sum\{|t_i - t_j| : t_i, t_j \in [0,t], t_i \leq t_j, \forall t_k \in (t_i, t_j) : S(t_k) < S_B, S(t_i) = S_B, S(t_j) = S_B\}$.

Érdemes megemlíteni a limitáras opció még néhány további fajtáját, nevezetesen azt, amikor a kötési árfolyam vagy a trigger árfolyam változhat.

A kötési árfolyam változhat az idő függvényében, ami azt jelenti, hogy előre rögzített időpontokban a kötési árfolyam lecserélődik az alaptermék aktuális árára, amennyiben ez az opció típusától függően (call/put) kedvez az opció tartójának; illetve változhat úgy is, hogy bizonyos szinteket rögzítünk előre, és akkor cserélődik le a kötési árfolyam egy előre rögzített szintre, ha azt az alaptermék árfolyamata eléri:

- reset opció rögzített időpontokkal,
- reset opció rögzített szintekkel.

A trigger árfolyam változásán pedig azt értjük, hogy az érintési árfolyam az időnek - általában szakaszonként lineáris - függvénye:

- időfüggő-limitáras opció.

Az *időfüggő-limitáras down-and-out call opció* lejáratkori kifizetése tehát

$$H(\tau, S) = (S(\tau) - K)^+ \chi(\{S(t) > S_B(t),\ \forall t \in \Pi \cap [0, \tau]\}),$$

ahol $\Pi \subseteq [0, T]$ jelöli azon időpontok halmazát, melyekre aktív az előírt korlát.

3.2. Visszatekintő opciók

A visszatekintő opciók (más néven *lookback opciók*) kifizetésében megjelennek az alaptermék árfolyamatának szélsőértékei. Az alapján, hogy a megfelelő szélsőértékkel a plain vanilla opció kifizetésében a lehíváskori árfolyamot vagy a kötési árfolyamot helyettesítjük, megkülönböztetjük az alábbi két típust

- fix végpontú visszatekintő (*fixed strike lookback*),
- szabad végpontú visszatekintő (*floating strike lookback*).

Mindkét esetben beszélhetünk call és put opcióról, a megfelelő kifizetések:

$$H(\tau, S(\cdot)) = \begin{cases} \left(\max\limits_{t \in [0,\tau]} S(t) - K\right)^+ & \text{fixed strike lookback call} \\ \\ \left(K - \min\limits_{t \in [0,\tau]} S(t)\right)^+ & \text{fixed strike lookback put,} \end{cases}$$

$$H(\tau, S(\cdot)) = \begin{cases} S(\tau) - \min\limits_{t \in [0,\tau]} S(t) & \text{floating strike lookback call} \\ \\ \max\limits_{t \in [0,\tau]} S(t) - S(\tau) & \text{floating strike lookback put.} \end{cases}$$

Egy magasabb kifizetést eredményező - és épp ezért drágább - opciót kapunk, ha a lejáratkori értéket a két szélsőérték különbségeként határozzuk meg

- maxmin opció

$$H(\tau, S(\cdot)) = \max_{t\in[0,\tau]} S(t) - \min_{t\in[0,\tau]} S(t).$$

A fix végpontú visszatekintő opción kívül a többi esetnek létezik két-eszközös verziója, amikor a kifizetésként adódó különbség két tagjában nem ugyanannak az alapterméknek az árfolyamata szerepel [15]:

- két-eszközös szabad végpontú visszatekintő,
- két-eszközös maxmin.

A visszatekintő opciók amerikai változatai széles körben elterjedt pénzügyi termékek, a szakirodalomban *orosz opcióként* (*Russian option*) szokás rájuk hivatkozni [6].

A limitáras és a visszatekintő opciók nem állnak olyan távol egymástól, mint azt elsőre gondolnánk. Ha ugyanis egy rögzített időpontokkal megadott reset opciót nézünk, és a vizsgált szomszédos időpontok közötti legnagyobb távolságot nullához közelítjük, akkor a limitáras reset opcióból visszatekintő opciót kapunk; és ugyanez mondható el akkor is, ha egy rögzített szintekkel megadott reset opciónál csökkentjük a szomszédos szintek közti különbséget.

3.3. Ázsiai opciók

Az ázsiai opciók (*Asian options*) kifizetésében fontos szerepet játszik az alaptermék árfolyamata által felvett értékek *átlaga*. Jelölje a továbbiakban $(A(t))_{t\in[0,T]}$ az átlagfolyamatot. Ez lehet

- aritmetikai átlag vagy
- geometriai átlag,

a mintavételezés pedig történhet

- diszkréten vagy
- folytonosan.

Fontos továbbá rögzíteni, hogy az átlagot milyen időintervallumon vesszük. Leggyakrabban az opció egész élettartamán: $[0, \tau]$-n szokás átlagolni, de előfordul, hogy csak τ-hoz közeli időpontokat néznek, illetve diszkrét mintavételezésnél gyakori, hogy csak bizonyos sorszámú megfigyelésekből számolják az átlagot (például havi adatokból). Mi az átlagolási időszakot $[0, \tau]$-nak fogjuk választani.

A fentiek alapján $A(\tau)$ négy különböző értéket vehet fel, attól függően, hogy milyen mintavételezéssel és milyen átlagot nézünk:

$$A(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} S(t_i) & \text{diszkrét aritmetikai átlag} \\ \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau} S(\nu)\,\mathrm{d}\nu & \text{folytonos aritmetikai átlag} \\ \left(\prod\limits_{i=0}^{n-1} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\ln S(t_i)} & \text{diszkrét geometriai átlag} \\ e^{\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\ln S(\nu)\,\mathrm{d}\nu} & \text{folytonos geometriai átlag,} \end{cases}$$

ahol $0 = t_0 \le t_i < t_j \le t_{n-1} = \tau: \ \forall i,j \in \mathbb{N},\ 0 \le i < j \le n-1$.

Ugyanúgy ahogy a visszatekintő opciónál, itt is megkülönböztetünk

- fix végpontú ázsiai (*fixed strike asian*) és
- szabad végpontú ázsiai (*floating strike asian*)

opciót, aszerint, hogy a megfelelő plain vanilla opció kifizetésében az alaptermék lehíváskori árfolyamát vagy a kötési árfolyamot helyettesítjük az átlagárral.

A lehíváskori kifizetések tehát:

$$H(\tau, S(\tau)), A(\tau)) = \begin{cases} (A(\tau) - K)^+ & \text{fixed strike asian call} \\ (K - A(\tau))^+ & \text{fixed strike asian put,} \end{cases}$$

$$H(\tau, S(\tau), A(\tau)) = \begin{cases} (S(\tau) - A(\tau))^+ & \text{floating strike asian call} \\ (A(\tau) - S(\tau))^+ & \text{floating strike asian put.} \end{cases}$$

3.4. További egzotikus opciók

- Később induló opció (*forward start option*):

Olyan opció, melyet a jelenben kötünk, de az opció élettartama csak egy jövőbeli rögzített időpontban (T^*) kezdődik, és a kötési árfolyamként tipikusan az alaptermék árfolyamata által az opció kezdetekor felvett értéket szokás megállapítani.

A *később induló vanilla* opciók lehíváskori kifizetése ($\tau \ge T^*$):

$$H(\tau, S(\cdot)) = \begin{cases} (S(\tau) - S(T^*))^+ & \text{forward start vanilla call} \\ (S(T^*) - S(\tau))^+ & \text{forward start vanilla put.} \end{cases}$$

- Kikiáltó opció (*shout option*):

Olyan opció, melynél a tartó az opció élettartama alatt bármelyik időpontban dönthet úgy, hogy megváltoztatja az eredetileg rögzített kötési árfolyamot az alaptermék aktuális árfolyamára.

- Összetett opció (*compound option*):

Összetett opciónak nevezzük azokat az opciókat, amelyeknél az alaptermék is opció. Ezekhez tehát két lejárati idő: T^*, T ($T^* < T$), és két kötési árfolyam: K^*, K tartozik. T^*-ban dönthetünk, hogy megvesszük-e K^* árfolyamon a mögöttes opciót, amihez T lejárati idő és K kötési árfolyam tartozik.

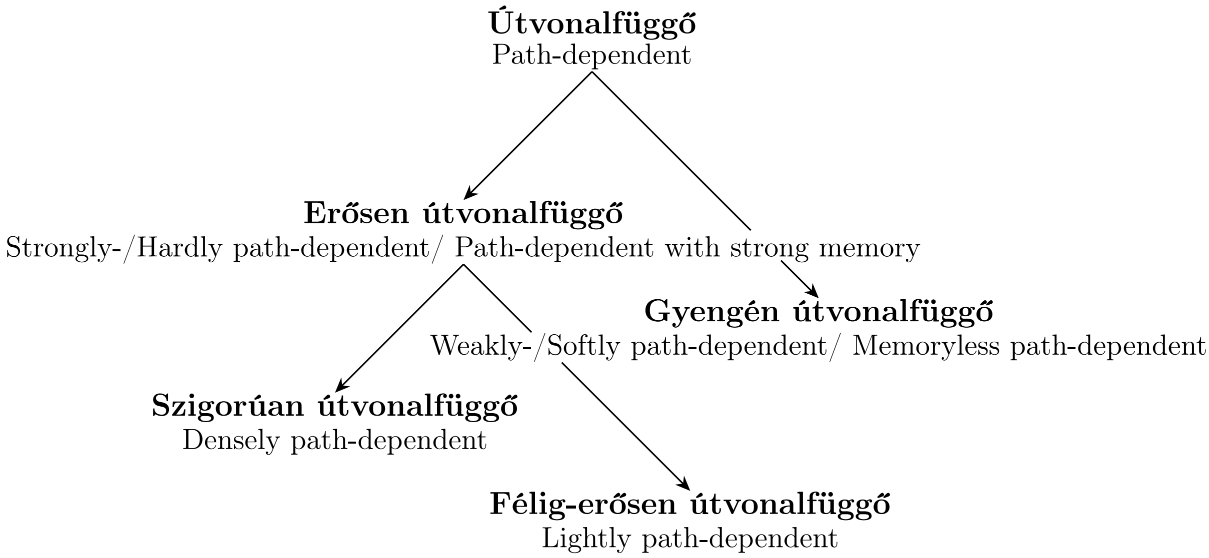
4. Eltérő értelmezések

Az útvonalfüggőséget szokás két csoportra bontani: *erős-* és *gyenge* verzióra; azonban a szétbontás legtöbbször intuitív jellegű, sok szerző definiálás nélkül használja ezeket a fogalmakat, és csak kevés helyen találni rá egzakt meghatározást, ráadásul a használatban lévő értelmezések is meglehetősen eltérőek.

Ennek a fejezetnek a célja bemutatni a különféle értelmezéseket, felhívni a figyelmet a köztük lévő eltérésekre, és adott esetben kritikákat/ továbbfejlesztési lehetőségeket megfogalmazni.

Az angol nyelvű szakirodalom az erős útvonalfüggőségen belül is gyakran megkülönböztet további két kategóriát, mi ezeket *szigorú* és *félig-erős* útvonalfüggőségre fordítottuk az eredeti *dense*, illetve *light* elnevezés után.

A szakirodalommal való könnyebb összevethetőség érdekében az alábbi ábrán feltüntettük a fenti kifejezések használatban lévő angol megfelelőit is.



Megemlítjük, hogy az erősen útvonalfüggő opciókra - a fenti elnevezéseken túl - előfordul még a *heavily path-dependent* [13] és a *highly path-dependent* [17] kifejezés is, de ezek csak intuitív jelzőként vannak használatban, nem képezik részletes tárgyalás részét, ezért az ábrán sem tüntettük fel őket.

Alapvető eltérést fog jelenteni az amerikai típusú plain vanillia opciók megítélése, melyek helyzetét még komplikáltabbá teszi, hogy bizonyos értelmezés szerint nem is útvonalfüggőek. Létezik ugyanis olyan forrás [30], amely szerint azon opciók, melyek kifizetése csak az alaptermék lehíváskori árfolyamától függ, nem tekintendők útvonalfüggőnek, így ezen értelmezés szerint az amerikai és a bermuda típusú opciók nem mindig útvonalfüggőek, az útvonalfüggőség megállapításához meg kell vizsgálni az opció szerkezetét. Mi azonban a dolgozat hátralévő részeiben az amerikai és a bermuda opciókat - a szerkezetüktől függetlenül - útvonalfüggőnek tekintjük.

Az amerikai opciók helyzetét minden megközelítés végén külön tárgyaljuk; így a továbbiakban ha egy opciónak nem hivatkozunk a lehívhatósági típusára, mindig európai opcióra gondolunk.

4.1. I. megközelítés - Meghatározó értékek száma alapján

Ez a csoportosítás erősen az intuícióra hagyatkozik, és nem törekszik precíz matematikai definiálásra, mégis talán ennek a meghatározásnak a használata a legelterjedtebb. Megtalálhatjuk többek között Taleb 1996-os, dinamikus fedezésről írt könyvében [23], Christian Ekstrand 2011-es művében [7], Roger Lord, Remmert Koekkoek, Dick van Dijk közös cikkében [17], és az interneten elérhető Investment&Finance pénzügyi enciklopédiában [28] is.

4.1. Definíció (Gyengén útvonalfüggő I.). *Ebben a megközelítésben gyengén útvonalfüggőnek azokat az útvonalfüggő opciókat nevezzük, melyek kifizetése az alaptermék áralakulásának csak viszonylag kevés - gyakran egyetlen - értékétől függ.*

Ezeket a meghatározó értékeket, és azt, hogy mikor veszi fel őket az árfolyamat, nem feltétlenül tudjuk előre, de lehíváskor - az addig realizált útvonal ismeretében - már biztosan meg tudjuk mondani.

Ide sorolható például a *knock-out opció*, mivel kifizetése - a lehíváskori árfolyamon kívül - csupán attól függ, hogy az árfolyamat átlépte-e az előre rögzített értéket, és a *visszatekintő opciók*, melyeknek a lehíváskori kifizetéséhez szükséges plusz információ csak az árfolyamat szélsőértékeiből származik.

4.2. Definíció (Erősen útvonalfüggő I.). *Erősen útvonalfüggőnek ez alapján akkor nevezünk egy opciót, ha lehíváskori kifizetése az alaptermék áralakulásának egy adott időszakban felvett több értékétől függ.*

Ide tartoznak például az *ázsiai opciók*, ahol a lehíváskori kifizetés függ az alaptermék egy adott időszakbeli teljes árfolyamalakulásától.

Az erős útvonalfüggőséget szokás tovább-bontani szigorú, illetve félig-erős útvonalfüggőségre.

4.3. Definíció (Szigorúan-/Félig-erősen útvonalfüggő I.). *A szigorúan útvonalfüggő opciók kifizetésének meghatározásakor az alaptermék áralakulásának minden lépését figyelembe vesszük, míg az félig-erősen útvonalfüggő opcióknál csak az értékek többségét.*

Például egy olyan *ázsiai opció*, amelynél az alaptermék árfolyamáról óránkénti megfigyelések állnak rendelkezésünkre, és az összes érték szerint átlagolunk szigorúan útvonalfüggőnek tekintendő, míg egy olyan, ahol a havi vagy negyedévi adatokból vesszük az átlagot csak félig-erősen útvonalfüggő.

Amerikai opciók besorolása

Az amerikai opciók besorolása már ezen megközelítés keretein belül sem egységes, mivel a pontatlan definíciók nem teszik egyértelművé a kategóriákat. Vizsgáljuk először az amerikai plain vanilla opciókat. Mint a fejezet elején említettük, már az sem általános, hogy ezeket az egyszerű opciókat útvonalfüggőnek tekinti-e az ember, de mi a dolgozatban az útvonalfüggőségük mellett foglaltunk állást, így értelmes feltennünk a kérdést, hogy vajon gyenge vagy erős útvonalfüggőségről van-e szó.

Egyrészt szokás úgy érvelni, hogy mivel az amerikai plain vanilla opció kifizetése csupán a lehíváskori árfolyamból és a kötési árfolyamból számolódik, ezért teljesül rá a gyenge útvonalfüggőség definíciójában megfogalmazott feltétel, hiszen az opció kifizetése az alaptermék áralakulásának csak kevés - egész pontosan egyetlen - értékétől függ. Erre alapozva

– lehetne az amerikai plain vanilla opciókat a gyengén útvonalfüggő opciók közé sorolni.

Így nézve az európai típusú útvonalfüggő opciók útvonalfüggőségi fokozata öröklődne az amerikai változatra, vagyis mondhatnánk, hogy

– minden európai típusú gyengén útvonalfüggő opció amerikai változata is gyengén útvonalfüggő, és

– minden európai típusú erősen útvonalfüggő opció amerikai változata is erősen útvonalfüggő,

hiszen a kifizetésben csak annyi változás történik, hogy az alaptermék lejáratkori árfolyama helyett a lehíváskori árfolyamát kell venni.

Másrészt - bár a konkrét realizált útvonal ismeretében tényleg ilyen egyszerűen számolódik az amerikai opciók kifizetése - valójában minden megfigyelés meghatározó érték a kifizetés szempontjából. Például egy európai típusú szabad végpontú visszatekintő put opciónál a meghatározó két érték az alaptermék árfolyamának útvonalából a maximuma és a lejáratkori értéke. Ha ezeket fixen tartjuk (a maximumnak elég az értékét meghagyni, a helyét nem szükséges), akkor bárhogy változik az útvonal, a kifizetés ugyanannyi lesz, tehát valóban teljesül, hogy a trajektóriából csak ez a két érték a meghatározó. Ezzel szemben ennek az opciónak az amerikai változatáról már nem mondhatjuk el ugyanezt, hiszen a maximum és a lejáratkori árfolyam fixen tartása mellett is alakulhat úgy a trajektória, hogy megváltozzon a lehívás időpontja, és így a kifizetésben szerepet kapó lehíváskori árfolyam eltérhet. Sőt az is elképzelhető, hogy az alaptermék árfolyamata úgy módosul, hogy hamarabb lehívjuk az opciót, mint ahogy az árfolyamat felveszi a maximumát, és így a kifizetésben megjelenő lokális maximum sem fog megegyezni az európai opciónál használt globális maximummal. Ezzel a megközelítéssel tehát azt kapjuk - és a dolgozat további részeiben is arra hivatkozunk -, hogy a meghatározó értékek száma alapján döntve

– *minden amerikai típusú opció (így a plain vanilla is) erősen, mégpedig szigorúan útvonalfüggő.*

E szerint a *bermuda típusú* opciók szintén *szigorúan útvonalfüggőek*, mert - bár csak megadott időpontokban hívható le az opció, - az, hogy élünk-e a lehívási joggal, függ attól, hogy az alaptermék árfolyamata hogyan alakult az elmúlt időszakban.

Az ismertetett elvek alapján tehát a következőképp osztályozhatjuk a példaként vett opciókat:

	Gyengén útvonalfüggő I.	Erősen útvonalfüggő I.
knock-out/ knock-in	✓	
párizsi		✓
időfüggő-limitáras		✓
visszatekintő	✓	
ázsiai		✓
később induló vanilla	✓	
kikiáltó		✓
vanilla-vanilla összetett	✓	
amerikai vanilla		✓
amerikai knock-out/knock-in		✓
orosz		✓

4.2. II. megközelítés - Változók száma alapján

Az útvonalfüggőség ezen osztályozásának alapötlete az, hogy az opció értékfolyamatának - $V(t, S(\cdot))$-nek - a felírásához be kell-e vezetnünk az idő és az alaptermék aktuális ára mellé új - az útvonal valamely tulajdonságát kifejező - változót.

Bár maga a csoportosítás nem modellspecifikus, nem él semmilyen feltételezéssel, mi a fejezet további részében - a szemléletes példák használhatósága érdekében - megköveteljük a Black–Scholes modell néhány feltevését, nevezetesen azt, hogy

- az alaptermék árfolyamata geometriai Brown-mozgást követ, azaz $\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t)$, ahol $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+, (W(t))_{t\in[0,T]}$ Wiener-folyamat
- a kockázatmentes kamatláb - r - konstans,
- nincs tranzakciós költség,
- van rövidre eladás és
- tetszőleges számú termékkel, tetszőleges időpontban kereskedhetünk.

Eltekintünk viszont azoktól a feltételezésektől, hogy a lejáratkori kifizetés egyedül az alaptermék lejáratkori árfolyamától függ, hogy az alaptermék nem generál jövedelmet az opció élettartama alatt, és a **??**. alfejezetben attól is, hogy az ügylet kizárólag lejáratkor esedékes.

Így a szétbontás alapgondolata egy technikai feltételhez vezet, nevezetesen ahhoz, hogy az adott útvonalfüggő opció árazható-e az európai plain vanilla opciókra adódó árazóegyenlettel, néhány plusz feltétel mellett, vagy egészen új árazóegyenletre van szükségünk, további független változókat bevéve. Tehát az útvonaltól való függést itt inkább úgy kell érteni, hogy az árazóegyenletben szerepet játszik-e a részvényár útvonalának valamely egyedi változója; mégis szokás ez alapján szétbontani az útvonalfüggőséget, ezeket a definíciókat használja Wilmott is a derivatívákról szóló 1998-as alapművében [25].

A fenti feltételezések mellett az európai plain vanilla opciók árazására adódó parciális differenciálegyenlet a jól ismert Black–Scholes egyenlet:

$$\partial_1 V(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_2^2 V(t,s) + (r-q)s\partial_2 V(t,s) - rV(t,s) = 0,$$

ahol q az osztalék százalékban kifejezett értékét jelöli.

4.4. Definíció (Gyengén útvonalfüggő II.). *Gyengén útvonalfüggőnek nevezzük azokat az útvonalfüggő opciókat, melyek értékfolyamata felírható az idő és az alaptermék aktuális árának függvényeként, az útvonal egyéb paramétere nélkül.*

A gyengén útvonalfüggő opciók árazásához tehát használható az európai plain vanilla opcióknál adódó Black–Scholes parciális differenciálegyenlet, ahhoz új változó hozzávételére nincs szükség, csak plusz korlátozó feltételekkel, az értékfolyamat szűkebb értelmezési tartományának (D_V) megadásával bővítjük a modellt.

Ide tartoznak többek között az *egyszerűbb limitáras opciók*, a *később induló vanilla opciók* és a *compound opciók*. Az értékfolyamat lejáratkori értéke a lejáratkori kifizetésekből kapható meg, melyeket a 3. fejezetben már megadtunk, a modell felírásához szükség van még az értelmezési tartomány meghatározására és további peremfeltételekre. Ezekre mutatunk példát az alábbiakban.

– *knock-out call opció* esetén:

$$D_V = \begin{cases} \{(t,s) : t \in [0,T],\ s \in [S_B, \infty),\ (t,s) \neq (T, S_B)\} & \text{down-and-out} \\ \{(t,s) : t \in [0,T],\ s \in [0, S_B],\ (t,s) \neq (T, S_B)\} & \text{up-and-out} \end{cases}$$

$$V(t, S_B) = 0, \quad \forall t \in [0,T)$$

$$V(T,s) = \begin{cases} (s-K)^+, & \forall s \in (S_B, \infty) \quad \text{down-and-out} \\ (s-K)^+, & \forall s \in [0, S_B) \quad \text{up-and-out} \end{cases}$$

A (T, S_B) pontot azért kellett kizárnunk az értelmezési tartományból, hogy a peremfeltétel folytonos legyen.

– *knock-in opció* esetén:

$$D_V = \begin{cases} \{(t,s) : t \in [0,T],\ s \in [S_B, \infty),\ (t,s) \neq (T, S_B)\} & \text{down-and-in} \\ \{(t,s) : t \in [0,T],\ s \in [0, S_B],\ (t,s) \neq (T, S_B)\} & \text{up-and-in} \end{cases}$$

$$V(t, S_B) = \begin{cases} V_C(t, S_B), & \forall t \in [0,T) \quad \text{call} \\ V_P(t, S_B), & \forall t \in [0,T) \quad \text{put} \end{cases}$$

$$V(T, s) = \begin{cases} 0, & \forall s \in (S_B, \infty) \quad \text{down-and-in} \\ 0, & \forall s \in [0, S_B) \quad \text{up-and-in} \end{cases}$$

ahol $V_C(t,s)$ az európai call opció, $V_P(t,s)$ pedig az európai put opció értékfolyamatát jelöli.

– *időfüggő-limitáras down-and-out call opció* esetén, ha $\Pi = [0,T]$:

$$\begin{aligned} &D_V = \{(t,s) : t \in [0,T],\ s \in [S_B(t), \infty),\ (t,s) \neq (T, S_B(T))\} \\ &V(t, S_B(t)) = 0, \quad \forall t \in [0,T) \\ &V(T,s) = (s-K)^+, \quad \forall s \in (S_B(T), \infty) \end{aligned}$$

4.5. Definíció (Erősen útvonalfüggő II.). *Erősen útvonalfüggőnek nevezzük azokat az opciókat, melyek értékfolyamatának felírásához szükség van az idő és az alaptermék aktuális ára mellett további - az alaptermék árfolyamatának útvonalát jellemző - változóra.*

Következésképp az erősen útvonalfüggő opciók árazásakor az európai plain vanilla opcióknál kapott parciális differenciálegyenlethez nem csupán megszorításokat kell hozzávenni, hanem legalább egy új változót is az értékfolyamathoz, és így árazóegyenletként legalább eggyel magasabb dimenziós parciális differenciálegyenletet kapunk.

Ezek alapján adódik az erős útvonalfüggőség alábbi kézenfekvő tovább-bontása.

4.6. Definíció (Szigorúan-/Félig-erősen útvonalfüggő II.). *A szigorúan útvonalfüggő opciók értékfolyamatának megadásához az időn és az alaptermék aktuális árán túl szükség van legalább két további változóra, míg a félig-erősen útvonalfüggő opciók értékfolyamatához elég az alaptermék árfolyamatának egyetlen további tulajdonságát bevenni.*

4.1. Megjegyzés. *Az árazóegyenlet ismeretében, annak dimenziója alapján az útvonalfüggő opciók besorolhatók a fenti kategóriák valamelyikébe, de ha így osztályozunk, akkor óvatosan kell eljárnunk, mert nem mindegy, hogy ugyanannak az opciónak az értékfolyamatára felírt parciális differenciálegyenletek közül melyiket vizsgáljuk, hiszen jó ármérce választásával csökkenthető az árazóegyenlet dimenziója.*

Erősen útvonalfüggő például a *párizsi opció*, a *visszatekintő opciók*, az *ázsiai opciók* és a *kikiáltó opciók*.

Nézzük végig az *aritmetikai ázsiai opció* példáján keresztül (folytonos átlagolást és teljes átlagolási időszakot véve), hogy erősen útvonalfüggő opciókra hogyan kaphatjuk meg az árazómodellt!

Jelölje az opció értékfolyamatát $\left(V(t,S(t),A(t))\right)_{t\in[0,T]}$, ahol $A(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t S(\nu)\,\mathrm{d}\nu$, továbbá jelölje $\Pi(t)$ annak a portfóliónak a t-beli értékét ($t \in [0,T]$), amelyben tartunk egy darab opciót, és shortolunk $\delta(t)$ darab alapterméket:

$$\Pi(t) = V(t,S(t),A(t)) - \delta(t)S(t), \quad \forall t \in [0,T].$$

A portfólió értékváltozása:

$$\mathrm{d}\Pi(t) = \mathrm{d}V(t,S(t),A(t)) - \delta(t)\mathrm{d}S(t) - \delta(t)qS(t)\mathrm{d}t.$$

$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t)$, mivel az alaptermék árfolyamata geometriai Brown-mozgást követ, $\mathrm{d}V$ értékét pedig megkaphatjuk a többváltozós Itô-formulából, amennyiben teljesül, hogy az időt leszámítva minden változója Itô-folyamat. A harmadik - útvonalfüggő - változó dinamikájának könnyebb felírása érdekében legyen

$$a(t) := \int\limits_0^t S(\nu)\,\mathrm{d}\nu,$$

és tekintsük innentől a $V(t,S(t),a(T))$ értékfolyamatot. Mivel

$$a(t) = \int\limits_0^t S(\nu)\,\mathrm{d}\nu \Rightarrow \mathrm{d}a(t) = S(t)\mathrm{d}t,$$

ezért alkalmazhatjuk az Itô-formulát, amiből egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(t,S(t),a(t)) = {}& \partial_1 V(t,S(t),a(t))\mathrm{d}t + \partial_2 V(t,S(t),a(t))\mathrm{d}S(t) + \\ & + \partial_3 V(t,S(t),a(t))\mathrm{d}a(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\partial_2^2 V(t,S(t),a(t))\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$\mathrm{d}a(t)$ értékét behelyettesítve:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(t,S(t),a(t)) = {}& \Big(\partial_1 V(t,S(t),a(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\partial_2^2 V(t,S(t),a(t)) + \\ & + S(t)\partial_3 V(t,S(t),a(t))\Big)\mathrm{d}t + \partial_2 V(t,S(t),a(t))\mathrm{d}S(t).\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Pi(t) = {}& \Big(\partial_1 V(t,S(t),a(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\partial_2^2 V(t,S(t),a(t)) + \\ & + S(t)\partial_3 V(t,S(t),a(t)) - \delta(t)qS(t)\Big)\mathrm{d}t + \Big(\partial_2 V(t,S(t),a(t)) - \delta(t)\Big)\mathrm{d}S(t).\end{aligned}$$

Ha $\delta(t)$-t úgy választjuk meg, hogy a sztochasztikus tag kiessen, akkor a portfólió kockázatmentesnek tekinthető, és hozama az r kockázatmentes kamatláb lesz. Tehát

$$\delta(t) := \partial_2 V(t,S(t),a(t)) = \Delta(t)$$

választás mellett egyrészt

$$\mathrm{d}\Pi(t) = \Big(\partial_1 V(t,S(t),A(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\partial_2^2 V(t,S(t),A(t)) + \\ + S(t)\partial_3 V(t,S(t),A(t)) - qS(t)\partial_2 V(t,S(t),A(t))\Big)\mathrm{d}t,$$

másrészt

$$\mathrm{d}\Pi(t) = r\Pi(t)\mathrm{d}t = r\Big(V(t,S(t),A(t)) - \partial_2 V(t,S(t),A(t))S(t)\Big)\mathrm{d}t.$$

Így adódik az alábbi árazóegyenlet

$$\partial_1 V(t,s,a) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_2^2 V(t,s,a) + s\partial_3 V(t,s,a) + (r-q)s\partial_2 V(t,s,a) - rV(t,s,a) = 0,$$

ahol az értelmezési tartomány

$$D_V = \{(t,s,a) : t \in [0,T],\ s \in \mathbb{R}_+,\ a \in \mathbb{R}_+\},$$

a peremfeltétel pedig

$$V(T,s,a) = H(T,s,\tfrac{1}{T}a),$$

ahol $H(T,s,\frac{1}{T}a)$ jelöli a lejáratkori kifizetést (lsd. 3.3. alfejezet).

További egzotikus opciókra felírt árazómodellek szerepelnek a [25], [12] könyvekben, a [10], [27] cikkekben és [3]-ban, melyekben a többi itt közölt árazómodell részletes levezetését is megtalálhatjuk.

A fenti levezetés nem alkalmazható minden erősen útvonalfüggő opcióra analóg módon, a visszatekintő opcióknál például körültekintőbben kell eljárni, mivel az értékfolyamatban megjelenő $\max\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ illetve $\min\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ változók nem differenciálhatóak t szerint.

– *szabad végpontú visszatekintő put opció* esetén:

$D_V = \{(t,s,m) : t \in [0,T],\ 0 \le s \le m < \infty\}$

$\partial_1 V(t,s,m) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_2^2 V(t,s,m) + (r-q)s\partial_2 V(t,s,m) - rV(t,s,m) = 0, \quad \text{ha } s < m$

$\partial_3 V(t,s,m) = 0, \quad t \in [0,T],\ m \in \mathbb{R}_+,\ s = m$

$V(T,s,m) = m - s$

– *párizsi down-and-out opció* esetén:

$$D_V = \{(t,s,\vartheta) : t \in [0,T],\ s \in \mathbb{R}_+,\ \vartheta \in [0,D]\}$$

$$\begin{cases} \partial_1 V(t,s,\vartheta) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_2^2 V(t,s,\vartheta) + rs\partial_2 V(t,s,\vartheta) - rV(t,s,\vartheta) = 0, & \text{ha } s > S_B \\ \partial_1 V(t,s,\vartheta) + \partial_3 V(t,s,\vartheta) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_2^2 V(t,s,\vartheta) + rs\partial_2 V(t,s,\vartheta) - rV(t,s,\vartheta) = 0, & \text{ha } s < S_B \end{cases}$$

$$V(t,s,D) = 0, \quad \forall t \in [0,T], \forall s \in \mathbb{R}_+$$

$$V(t,S_B,\vartheta) = V(t,S_B,0), \quad \forall t \in [0,T], \forall \vartheta \in [0,D]$$

$$V(T,s,\vartheta) = \begin{cases} (s-K)^+ & \text{call} \\ (K-s)^+ & \text{put} \end{cases}$$

Amerikai opciók besorolása

Az amerikai opciók árazása mozgó határfelületi problémára (*free boundary problem*) vezet, ugyanis a peremfeltételek mellett, a kapott értelmezési tartományon megoldandó egyenletként a következő adódik:

$$\min\{-\mathcal{L}(V(\cdot)); V(\cdot) - H(\cdot)\} = 0,$$

ahol $V(\cdot)$ az értékfolyamat, $H(\cdot)$ a kifizetés - ezek többváltozós függvények, a jelölés itt arra utal, hogy a fenti formula nem függ attól, hogy pontosan hány változójuk van - és $\mathcal{L}(V(\cdot))$ az a - $V(\cdot)$ parciális deriváltjait tartalmazó - kifejezés, melyet az opció európai változatára felírt árazómodellben nullával tettünk egyenlővé.

A [25] könyv terminológiáját követve amerikai opció árazásakor az európai változatra felírt árazómodellt csak egy plusz korlátozó feltétellel bővítjük, nevezetesen azzal, hogy

$$V(\cdot) \geq H(\cdot),$$

a $\Delta(\cdot)$ folytonossága mellett.

Ez a megközelítés tehát az amerikai plain vanilla opciókat gyengén útvonalfüggőnek tekinti, útvonalfüggő amerikai típusú opciókra pedig öröklődik az útvonalfüggőségi fokozat az európai változatról.

Összefoglalásképp elkészítünk egy táblázatot az előző alfejezet végén osztályozott opciók besorolásával.

	Gyengén útvonalfüggő II.	Erősen útvonalfüggő II.
knock-out/ knock-in	✓	
párizsi		✓
időfüggő-limitáras	✓	
visszatekintő		✓
ázsiai		✓
később induló vanilla	✓	
kikiáltó		✓
vanilla-vanilla összetett	✓	
amerikai vanilla	✓	
amerikai knock-out/knock-in	✓	
orosz		✓

4.3. III. megközelítés - Típus alapján

Létezik olyan szemlélet is, mely szerint az opció típusa és nem a szerkezete határozza meg, hogy az útvonalfüggőség erős vagy gyenge [12].

4.7. Definíció (Gyengén útvonalfüggő III.). *Ebben a megközelítésben gyengén útvonalfüggőnek nevezzük azokat az opciókat, melyek kifizetésének értéke azon múlik, hogy az alaptermék árfolyamata elér-e egy (vagy több) előre rögzített szintet vagy sem.*

Ez épp a *limitáras opciók* meghatározása, tehát a 3.1. alfejezetben felsorolt minden opció ide tartozik, és rajtuk kívül csak az ottaniak általánosításai, más szerkezetűek nem.

4.8. Definíció (Erősen útvonalfüggő III.). *Erősen útvonalfüggőnek pedig azokat az opciókat tekintjük, melyek lehíváskori kifizetésében az alaptermék lehíváskori árfolyamán kívül (vagy helyett) megjelenik az alaptermék árfolyamatának átlaga vagy valamely extrémuma, mely az opció élettartamának valamekkora részéből (akár egészéből) számolódik.*

Tehát az erősen útvonalfüggő opciók a különféle *visszatekintő* és *ázsiai opciók*, vagyis a 4.1. és a 3.3. alfejezetben felsoroltak.

Ez a szétbontás nagyban hasonlít az előzőre, amikor a változók száma alapján osztályoztuk az útvonalfüggő opciókat, hiszen a visszatekintő és az ázsiai opciók útvonalfüggősége mindkét csoportosítás szerint erős, és az egyszerűbb limitáras opcióké mindkettő szerint gyenge. Van azonban eltérés a két megközelítés között, bonyolultabb limitáras opciók, például a *párizsi opció* besorolása különbözik a két szempont szerint.

Nagy hátránya továbbá a típus szerinti kategorizálásnak, hogy összetettebb egzotikus opciókról ez alapján nem tudjuk megállapítani az útvonalfüggőség erősségét, illetve gondot okozhat azon opciók besorolása is, melyek valamely két típus határán vannak, mint például a rögzített szintekkel megadott reset opció, ahol a szomszédos szintek közötti távolság nullához tart. Bár ez utóbbi a gyakorlatban nem okoz problémát, hiszen előre meghatározott szintek esetén a legkisebb távolság is szigorúan pozitív érték, ami nem csökken tovább.

Amerikai opciók besorolása

Az amerikai plain vanilla opciók a fenti kategóriák egyikébe sem esnek bele, de Lishang Jiang a Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing című könyvében [12] - amelyben részletes leírást találhatunk a típus szerinti osztályozásról, és amely ennek az alfejezetnek az alapját képezi - külön kitér rá, hogy a limitáras opciókon túl az egyszerű amerikai opciókat is gyengén útvonalfüggőnek tekinti.

Egyéb esetekben az útvonalfüggőségi fokozat öröklődik az európai opciókról az amerikaiakra, vagyis minden európai gyengén útvonalfüggő opció amerikai változata is gyengén útvonalfüggő, minden európai erősen útvonalfüggő opció amerikai változata is erősen útvonalfüggő, és egy európai opciót pontosan akkor tudunk besorolni a kategóriák valamelyikébe, ha az amerikai változatára teljesülnek valamely csoport feltételei.

A típus alapján történő besorolásról készített táblázat:

	Gyengén útvonalfüggő III.	Erősen útvonalfüggő III.
knock-out/ knock-in	✓	
párizsi	✓	
időfüggő-limitáras	✓	
visszatekintő		✓
ázsiai		✓
amerikai vanilla	✓	
amerikai knock-out/knock-in	✓	
orosz		✓

4.4. IV. megközelítés - Folytonosság alapján

A használatban lévő csoportosításokkal szemben megfogalmazott fő kritikáink azok voltak, hogy az I. eset nem ad precíz matematikai definíciókat, a II. eset inkább technikai feltétellel él, nem tükrözi az útvonalfüggőség szemléletes jelentését, a III. eset pedig nem teszi lehetővé minden útvonalfüggő termék besorolását. Ezek kiküszöbölése érdekében, most bemutatunk egy IV. lehetséges szétbontást, mely a kifizetésnek, mint a trajektóriák függvényének egy kézenfekvő tulajdonsága mentén választja szét a két nagy útvonalfüggőségi csoportot.

Érdemes kiemelni, hogy bár logikusnak tűnnek az így kapott definíciók, a szakirodalomban nem találkoztunk ezen csoportosítással, és a vizsgált útvonalfüggő opciók ez alapján történő besorolása - mint azt látni fogjuk - sok esetben az eddigiektől eltérő eredményt ad.

A továbbiakban az alaptermék árfolyamatának mindkét változóját feltüntetjük, és $H\big(T, S(\omega,\cdot)\big)$-val jelöljük az opció lejáratkori kifizetését az alaptermék áralakulásának

$S(\omega,\cdot)$ realizációja mellett. Feltesszük továbbá, hogy

$$S(\omega,0) = S_0 > 0 \quad \text{és} \quad S(\omega,T) = S_T \geq S_0, \quad \forall\omega\in\Omega.$$

4.9. Definíció (Gyengén útvonalfüggő IV.). *Nevezzük egy útvonalfüggő európai opció útvonalfüggőségét gyengének akkor, ha a lejáratkori kifizetése a $[0,T]$-n vett trajektóriák egyenletesen folytonos függvénye, vagyis ha teljesül, hogy*

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall\omega,\omega'\in\Omega):$$
$$\Big(\|S(\omega,\cdot)-S(\omega',\cdot)\|<\delta \Rightarrow \big|H\big(T,S(\omega,\cdot)\big)-H\big(T,S(\omega',\cdot)\big)\big|<\varepsilon\Big)$$

egy alkalmasan választott normában.

4.10. Definíció (Erősen útvonalfüggő IV.). *Ebben a megközelítésben azokat az útvonalfüggő európai opciókat nevezzük erősen útvonalfüggőnek, melyek lejáratkori kifizetésére, mint a $[0,T]$-n vett trajektóriák függvényére nem teljesül az egyenletes folytonosság, azaz ha*

$$(\exists\varepsilon>0)\,(\forall\delta>0)\,(\exists\omega,\omega'\in\Omega):$$
$$\Big(\|S(\omega,\cdot)-S(\omega',\cdot)\|<\delta,\ \big|H\big(T,S(\omega,\cdot)\big)-H\big(T,S(\omega',\cdot)\big)\big|\geq\varepsilon\Big)$$

az előbb választott normában.

A motiváció ezek mögött a meghatározások mögött az, hogy erős útvonalfüggőség esetén az opció (kifizetése) olyannyira függ az alaptermék árfolyamata által bejárt útvonaltól, hogy a trajektóriának már - valamilyen értelemben vett - kis megváltozása is okozhat nagy eltérést a lejáratkori kifizetésben - még akkor is, ha a végpont rögzített-, míg gyengén útvonalfüggő opcióknál a közeli trajektóriákhoz biztosan közeli kifizetés társul.

A szemléletes jelentéstartalom miatt normaként célszerű választás az L^1-*norma*, ami a két trajektória által közrezárt terület nagyságát határozza meg, vagy a *sup-norma*, ami a pontonkénti eltérések szuprémumát adja. Mi praktikus okokból a *sup*-normát fogjuk használni, de a 4.1. Állításban felhívjuk rá a figyelmet, hogy a kettő között lényeges eltérés van.

4.1. Állítás. *A visszatekintő opciók lejáratkori kifizetése a sup-norma szerint egyenletesen folytonos, míg az L^1-norma szerint nem egyenletesen folytonos függvénye a trajektóriáknak.*

Bizonyítás. Három különböző esetet kell megvizsgálnunk: amikor a kifizetésben az alaptermék árfolyamatának csak a maximuma jelenik meg, amikor csak a minimuma, illetve amikor mindkettő.

1.eset:
Az L^1-*norma* szerint az $f : S(\cdot) \mapsto \max\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ leképezés nem folytonos, hiszen legyen $S(\cdot)$ az a trajektória, ami lineárisan köti össze S_0-t S_T-vel, és tekintsük azt az $(S_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ trajektóriasorozatot ($n\geq\frac{2}{T}$), melyre

$$S_n(t) = \begin{cases} S_0 & \text{ha } t = 0 \\ 2S_T & \text{ha } t = \frac{1}{n} \\ S(t) & \text{ha } t \in [\frac{2}{n}; T] \end{cases}$$

és a $(0; \frac{1}{n})$, $(\frac{1}{n}; \frac{2}{n})$ intervallumokon a megadott értékek között lineáris. Ez a trajektóriasorozat L^1-normában konvergál az $S(\cdot)$ trajektóriához, de $f(S_n(\cdot))$ nem tart $f(S(\cdot))$-hez:

$$S_n(\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} S(\cdot), \quad f(S_n(\cdot)) \equiv 2S_T \underset{n\to\infty}{\not\to} f(S(\cdot)) = S_T.$$

Mivel az $S(\cdot) \mapsto \max\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ leképezés nem folytonos, így az $S(\cdot) \mapsto \big(\max\limits_{t\in[0,T]} S(t) - K\big)^+$ leképezés, vagyis a *fix végpontú visszatekintő call* opció lejáratkori kifizetése és az $S(\cdot) \mapsto \max\limits_{t\in[0,T]} S(t) - S(T)$ leképezés, vagyis a *szabad végpontú visszatekintő put* opció lejáratkori kifizetése sem folytonos az L^1-norma szerint, tehát nem is egyenletesen folytonosak.

A *sup-norma* szerint viszont $\delta := \varepsilon$ választással az $\big|\|S'(\cdot)\| - \|S(\cdot)\|\big| \leq \|S'(\cdot) - S(\cdot)\|$ háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy az $S(\cdot) \mapsto \max\limits_{t\in[0,T]} S(t) = \|S(\cdot)\|_{\text{sup}}$ leképezés egyenletesen folytonos, és így az $S(\cdot) \mapsto \big(\max\limits_{t\in[0,T]} S(t) - K\big)^+$ leképezés és az $S(\cdot) \mapsto \max\limits_{t\in[0,T]} S(t) - S(T)$ leképezés is egyenletesen folytonos a *sup*-norma szerint.

<u>2.eset:</u>
Az L^1-*norma* szerint a $g : S(\cdot) \mapsto \min\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ leképezés sem folytonos, hiszen legyen $S(\cdot)$ ismét az a trajektória, ami lineárisan köti össze S_0-t S_T-vel, és tekintsük azt az $(S_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ trajektóriasorozatot ($n \geq \frac{2}{T}$), melyre

$$S_n(t) = \begin{cases} S_0 & \text{ha } t = 0 \\ 0 & \text{ha } t = \frac{1}{n} \\ S(t) & \text{ha } t \in [\frac{2}{n}; T] \end{cases}$$

és a $(0; \frac{1}{n})$, $(\frac{1}{n}; \frac{2}{n})$ intervallumokon a megadott értékek között lineáris. Ez a trajektóriasorozat L^1-normában konvergál az $S(\cdot)$ trajektóriához, de $g(S_n(\cdot))$ nem tart $g(S(\cdot))$-hez:

$$S_n(\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} S(\cdot), \quad g(S_n(\cdot)) \equiv 0 \underset{n\to\infty}{\not\to} g(S(\cdot)) > 0.$$

Mivel az $S(\cdot) \mapsto \min\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ leképezés nem folytonos, így az $S(\cdot) \mapsto \big(K - \min\limits_{t\in[0,T]} S(t)\big)^+$ leképezés, vagyis a *fix végpontú visszatekintő put* opció lejáratkori kifizetése és az $S(\cdot) \mapsto S(T) - \min\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ leképezés, vagyis a *szabad végpontú visszatekintő call* opció lejáratkori kifizetése sem folytonos az L^1-norma szerint, tehát nem is egyenletesen folytonosak.

A *sup-norma* szerint viszont a $g : S(\cdot) \mapsto \min\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ leképezés egyenletesen folytonos, hiszen ha az $S'(\cdot)$ trajektória az $S(\cdot)$ trajektória δ-sugarú környezetében van, akkor $g(S'(\cdot))$ és $g(S(\cdot))$ távolsága sem lehet δ-nál nagyobb, mert $S'(\cdot)$ minimumhelye (legyen t'_*) vagy megegyezik $S(\cdot)$ minimumhelyével (legyen t_*), amikor is készen vagyunk, vagy máshol veszi fel a minimumát, de ekkor a legnagyobb lehetséges eltérés sem lehet δ-nál nagyobb, mert az ellentmondana annak, hogy t_* az $S(\cdot)$ trajektória minimumhelye:

$$S(t_*) - (S(t'_*) - \delta) > \delta \Leftrightarrow S(t_*) > S(t'_*).$$

Tehát $\delta := \varepsilon$ választással igazoltuk, hogy az $S(\cdot) \mapsto \min\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ leképezés egyenletesen folytonos, és így az $S(\cdot) \mapsto \left(K - \min\limits_{t\in[0,T]} S(t)\right)^+$ leképezés és az $S(\cdot) \mapsto S(T) - \min\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ leképezés is egyenletesen folytonos a *sup*-norma szerint.

3.eset:
Mivel láttuk, hogy a *sup-norma* szerint az $S(\cdot) \mapsto \max\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ és az $S(\cdot) \mapsto \min\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ leképezés is egyenletesen folytonos, ezért a *maxmin opció* kifizetése, vagyis az $h : S(\cdot) \mapsto \max\limits_{t\in[0,T]} S(t) - \min\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ leképezés is egyenletesen folytonos a *sup*-norma szerint.

Annak az igazolásához, hogy ez a kifizetés az L^1-*norma* szerint nem egyenletesen folytonos, jó ellenpélda az 1. esetben adott trajektóriasorozat, hiszen

$$S_n(\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} S(\cdot), \quad h(S_n(\cdot)) \equiv 2S_T - S_0 \underset{n\to\infty}{\not\to} f(S(\cdot)) = S_T - S_0.$$

□

4.1. Következmény. *Tehát - a sup-norma választásával - a visszatekintő opciók gyengén útvonalfüggőek.*

Itt is adódik az erős útvonalfüggőségnek egy kézenfekvő tovább-bontása:

4.11. Definíció (Szigorúan-/ Félig-erősen útvonalfüggő IV.)**.** *Nevezzük egy opció útvonalfüggőségét félig-erősnek akkor, ha kifizetése folytonos, de nem egyenletesen folytonos, és szigorúnak akkor, ha a kifizetése nem is folytonos.*

4.2. Állítás. *A geometriai ázsiai opció lejáratkori kifizetése a sup-norma szerint folytonos, de nem egyenletesen folytonos függvénye a trajektóriáknak.*

Bizonyítás. Az $f : S(\cdot) \mapsto e^{\frac{1}{T}\int\limits_0^T \ln S(\nu)\,\mathrm{d}\nu} = A(T)$ leképezés nem egyenletesen folytonos a *sup*-norma szerint, hiszen legyen $S(\cdot)$ az a trajektória, amelyre

$$S(t) = \begin{cases} S_0 & \text{ha } t \in [0; 0,5T] \\ B & \text{ha } t \in [0,6T; 0,9T] \\ S_T & \text{ha } t = T \end{cases}$$

és a $(0,5T; 0,6T)$, $(0,9T; T)$ intervallumokon lineáris az értékek között, és tekintsük azt az $(S_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ trajektóriasorozatot, melyre

$$S_n(t) = \begin{cases} S_0 & \text{ha } t = 0 \\ e^{-\frac{1}{n}} S_0 & \text{ha } t \in [0,1T; 0,5T] \\ B & \text{ha } t \in [0,6T; 0,9T] \\ S_T & \text{ha } t = T \end{cases}$$

és a $(0;0,1T)$, $(0,5T;0,6T)$, $(0,9T;T)$ intervallumokon ezek között az értékek között lineáris. Ez a trajektóriasorozat *sup*-normában konvergál az $S(\cdot)$ trajektóriához, mert $n \to \infty$ esetén $|S_0 - e^{-\frac{1}{n}} S_0| \to 0$, tehát tetszőleges $\delta > 0$ esetén $\exists n \in \mathbb{N} : \|S_n(\cdot) - S(\cdot)\|_{sup} < \delta$.

$$|f(S_n(\cdot)) - f(S(\cdot))| = \left| e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln S_n(\nu)\,\mathrm{d}\nu} - e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln S(\nu)\,\mathrm{d}\nu} \right| = e^{\frac{1}{T}\int_{0,6T}^{0,9T} \ln B\,\mathrm{d}\nu} \left| e^{\frac{1}{T}\int_0^{0,6T} \ln S_n(\nu)\,\mathrm{d}\nu} - e^{\frac{1}{T}\int_0^{0,6T} \ln S(\nu)\,\mathrm{d}\nu} \right|$$

miatt viszont nem teljesül az egyenletesen folytonosság feltétele, miszerint $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 :$ $\|S_n(\cdot) - S(\cdot)\|_{sup} < \delta \Rightarrow |f(S_n(\cdot)) - f(S(\cdot))| < \varepsilon$, hiszen $|f(S_n(\cdot)) - f(S(\cdot))|$-ben megjelenik egy $e^{\frac{1}{T}\int_{0,6T}^{0,9T} \ln B\,\mathrm{d}\nu}$ szorzótényező, és B tetszőlegesen nagyra megválasztható.

A folytonosság viszont teljesül az f leképezésre, hiszen

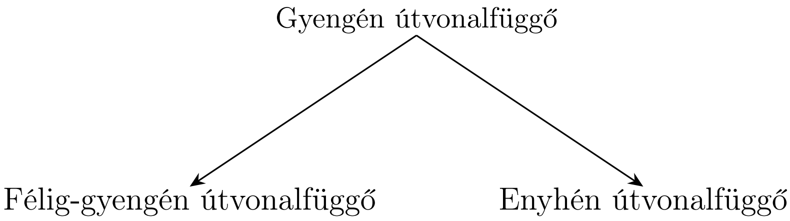
$$S_n(\cdot) \underset{n\to\infty}{\overset{\|\cdot\|_{\sup}}{\longrightarrow}} S(\cdot) \Rightarrow \ln S_n(\cdot) \underset{n\to\infty}{\overset{\|\cdot\|_{\sup}}{\longrightarrow}} \ln S(\cdot) \Rightarrow \int_0^T \ln S_n(\nu)\,\mathrm{d}\nu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \ln S(\nu)\,\mathrm{d}\nu,$$

mivel ha egy Riemann-integrálható függvényekből álló sorozat egyenletesen konvergens, akkor a limeszfüggvény is Riemann-integrálható, és a megfelelő Riemann-integrálok sorozata a limeszfüggvény Riemann-integráljához tart. A konstanssal való szorzás és az exponenciális függvény szintén folytonos, így a velük való komponálás nem rontja el a folytonosságot. Tehát az $S(\cdot) \mapsto e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln S(\nu)\,\mathrm{d}\nu} = A(T)$ leképezés folytonos a *sup*-norma szerint. $\square$

4.2. Következmény. *A geometriai ázsiai opció félig-erősen útvonalfüggő.*

A fenti tovább-bontás főként matematikailag tűnik ésszerűnek, erős közgazdaságtani tartalommal nem tudjuk megtölteni, de a 4.2. Állítás alapján láthatjuk, hogy ha a gyenge útvonalfüggőség definíciójában az egyenletes folytonosság helyett folytonosságot követelünk, akkor szintén egy értelmes, a mostanitól eltérő modellhez jutunk.

Ebben a megközelítésben az eddigiektől eltérően a gyenge útvonalfüggőséget is tovább fogjuk bontani, a kapott alosztályokat *félig-gyenge-* és *enyhe útvonalfüggőségnek* nevezve, ahol a két csoport közül a félig-gyengét tekintjük erősebbnek, és a definíció segítségével jól alkalmazható mérőszámot határozunk meg az enyhén útvonalfüggő opciókra.



4.12. Definíció (Enyhén útvonalfüggő IV.). *Nevezzünk egy útvonalfüggő európai opciót enyhén útvonalfüggőnek, ha a lejáratkori kifizetése a trajektóriák Lipschitz-folytonos függvénye, vagyis ha*

$$(\exists L \in \mathbb{R}^+)\,(\forall \omega, \omega' \in \Omega) : \Big(\big| H\big(T, S(\omega,\cdot)\big) - H\big(T, S(\omega',\cdot)\big) \big| \le L \cdot \|S(\omega,\cdot) - S(\omega',\cdot)\| \Big),$$

ahol a normát a fentiek alapján sup-normaként választjuk meg.

4.3. Állítás. *Az aritmetikai ázsiai opció enyhén útvonalfüggő.*

Bizonyítás. Az aritmetikai ázsiai opciók kifizetése $h : S(\cdot) \mapsto \frac{1}{T}\int\limits_0^T S(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{T}\|S(\cdot)\|_1$, ehhez szeretnénk alkalmas Lipschitz-konstanst megadni.

$\|S'(\cdot) - S(\cdot)\|_{\sup} < \delta \Rightarrow \|S'(\cdot) - S(\cdot)\|_1 < \delta T$, amiből az $\big|\|S'(\cdot)\| - \|S(\cdot)\|\big| \leq \|S'(\cdot) - S(\cdot)\|$ háromszög-egyenlőtlenség alapján következik, hogy $\big|\|S'(\cdot)\| - \|S(\cdot)\|\big| < \delta T$.

Tehát $\left|\frac{1}{T}\|S'(\cdot)\|_1 - \frac{1}{T}\|S(\cdot)\|_1\right| = \left|h(S'(\cdot)) - h(S(\cdot))\right| < \delta$, vagyis a h leképezés Lipschitz-folytonos, és Lipschitz-konstansnak jó választás az $L = 1$. □

4.13. Definíció (Útvonalfüggőségi mutató)**.** *Egy útvonalfüggő opció útvonalfüggőségi száma C, ahol*

$$C := \inf\{L \in \mathbb{R}^+ : \left|H\big(T, S(\omega,\cdot)\big) - H\big(T, S(\omega',\cdot)\big)\right| \leq L \cdot \|S(\omega,\cdot) - S(\omega',\cdot)\|,\ \forall \omega, \omega' \in \Omega\}$$

A definíció szemléletes jelentése, hogy minél nagyobb a kapott útvonalfüggőségi szám, annál jobban függ az útvonaltól a vizsgált opció.

Az alfejezetben eddig kapott eredményeinket összefoglaló táblázat:

	Gyengén útvonalfüggő IV.	Erősen útvonalfüggő IV.
knock-out/ knock-in		✓
visszatekintő	✓	
aritmetikai ázsiai	✓	
geometriai ázsiai		✓
később induló vanilla	✓	

Útvonalfüggőségi mutató

Határozzuk meg szimuláció segítségével néhány opció útvonalfüggőségi számát!
A választott paraméterek:

μ	σ	S_0	S_T	T	n
10%	25%	1	5	1	250

ahol az n választásának szemléletes jelentése, hogy az 1 éves futamidő alatti napi megfigyeléseket rögzítünk.

A vizsgált opciók: szabad és fix végpontú aritmetikai ázsiai call és put, szabad és fix végpontú visszatekintő call és put, maxmin.

A szimulációval szemben nem egyszerű elvárásokat támasztani, mivel a Lipschitz-konstans meghatározásának szintjén már nehézkesebb intuitív jelentéstartalmat adni a számoknak. Így azt a két eredményt várjuk, hogy a fix végpontú opciók útvonalfüggőségi száma (amennyiben pozitív) független legyen a kötési árfolyamtól, illetve azt, hogy az opciók között kialakult rangsor a futtatások túlnyomó többségére megegyezzen.

Vizsgáljuk először azokat az opciókat, amelyek kifizetése nem tartalmazza a kötési árfolyamot. Már alacsony ismétlésszám mellett is kiolvasható az adódó sorrend, ami az ismétlésszám növelésével egyre stabilabb:

$$\begin{gathered}\text{maxmin} \quad \succ \quad \text{szabad végpontú visszatekintő put} \quad \succ \\ \succ \quad \text{szabad végpontú aritmetikai ázsiai call} \quad \succ \quad \text{szabad végpontú visszatekintő call} \quad \succ \\ \succ \quad \text{szabad végpontú aritmetikai ázsiai put,}\end{gathered}$$

ahol az $a \succ b$ reláció azt jelenti, hogy az a opció útvonalfüggőségi száma magasabb, mint a b opció útvonalfüggőségi száma, vagyis ilyen értelemben az a opció jobban függ az alaptermék árfolyamata által bejárt útvonaltól, mint a b opció.

Azon opcióknál, melyek lejáratkori kifizetésében szerepel a kötési árfolyam, szintén a várakozásainknak megfelelőek az eredmények, az útvonalfüggőségi szám - pozitív kifizetés esetén - valóban független a kötési árfolyamtól.

Megjegyezzük azonban, hogy bár az így definiált útvonalfüggőségi szám alapján feláll-ló sorrend stabil, az útvonalfüggőségi szám értéke nem állandó, adott opcióra különböző futtatások során meglehetősen széles skálán változik.

Amerikai opciók besorolása

Érdekes kérdés, hogy a fenti definíciók milyen módosítások mellett lesznek alkalmasak az amerikai opciók osztályozására.

Egy lehetséges kiterjesztés, ha annyi változtatással élünk, hogy a lejáratkori kifizetés helyett a lehíváskori kifizetés lejáratra felkamatoztatott értékét vesszük. Hiszen ha a trajektória *sup*-normában kicsit módosul, akkor azt várjuk, hogy a gyengén útvonalfüggő opció lehívásának időpontja és a lehíváskori kifizetése sem változik drasztikusan, és ha ez teljesül, akkor az útvonalfüggőségi fokozat öröklődik az európai változatról az amerikaira.

5. Összegzés

Messze nem egységes tehát az opciók útvonalfüggőségi fokozatainak meghatározása. A vizsgált példák között egyetlen olyan opció szerepelt (*geometriai ázsiai*), melyet mind a négy megközelítés azonos kategóriába sorolt, de a szakirodalomban fellelhető három megközelítés is gyakran ad különböző eredményeket.

Érdemes megfigyelni, hogy az együtt is dolgozó szerzők mennyiben hagyatkoznak egymás munkájára ezen a téren. Ezt vizsgálva arra jutottunk, hogy még a szerzőpárok között sincs teljes egyetértés az erős- és gyenge útvonalfüggőség definícióját illetően. Min Dai [3] és Lishang Jiang [12], akik több közös cikket is írtak az útvonalfüggő termékekről, mindketten a típus alapú besorolást (III.) használják, de például Yue Kuen Kwok [14] tőlük különbözően, a változók száma szerint osztályoz (I.), pedig ő is számos cikket publikált Min Dai-val közösen, szintén útvonalfüggő opciókról.

Végül álljon itt egy összefoglaló táblázat a különböző értelmezések összevetése céljából:

	Megfigyelések a.	PDE a.	Típus a.	Egy.folytonosság a.
knock-out/ knock-in	gyenge	gyenge	gyenge	erős
párizsi	erős	erős	gyenge	erős
időfüggő-limitáras	erős	gyenge	gyenge	erős
visszatekintő	gyenge	erős	erős	gyenge
aritmetikai ázsiai	erős	erős	erős	gyenge
geometriai ázsiai	erős	erős	erős	erős
később induló vanilla	gyenge	gyenge		
kikiáltó	erős	erős		
vanilla-vanilla összetett	gyenge	gyenge		
amerikai vanilla	erős	gyenge	gyenge	
amerikai knock-out	erős	gyenge		
orosz	erős	erős	erős	

A 4.4. alfejezetben bevezetett útvonalfüggőségi mutató segítségével lehetőségünk nyílik rá, hogy olyan opciók között, melyek lejáratkori kifizetése a trajektóriák Lipschitz-folytonos függvénye, úgynevezett útvonalfüggőségi sorrendet állítsunk fel, vagyis meg tudjuk mondani, hogy két opció közül melyik függ jobban az alaptermék árfolyamata által megtett úttól.

6. Függelék

A 4.4. alfejezet szimulációval kapott eredményeihez az alábbi R programkódot futtatuk.

```
install.packages("sde")
library(sde)

mu=0.1
sigma=0.25
S0=1
ST=5

t0=0
T=1
n=250

W0=0
WT=(log(ST/S0)-(mu-sigma^2/2)*(n-1))/sigma

nn=300
mm=1000
X<-matrix(0,nn,5)
A<-matrix(0,nn,5)

for(s in 1:nn){

W<-matrix(0,mm,n)
for(k in 1:mm){
W[k,]<-BBridge(x=W0, y=WT, t0=t0, T=T, N=n-1) }
#S minden sora egy-egy trajektória
S<-matrix(0,mm,n)
for(k in 1:mm){
for(j in 1:n){
S[k,j]<-S0*exp((mu-sigma^2/2)*(j-1)+sigma*W[k,j]) }}

#floating strike asian call#
q=vector(length=mm)
for(kk in 1:mm){
q[kk]<-max(S[kk,n]-sum(S[kk,])/n,0) }

Q<-matrix(0,mm,mm)
for(i in 1:mm){
for(j in 1:mm){
Q[i,j]<-abs(q[i]-q[j])/max(abs(S[i,]-S[j,]))
Q[i,i]<-0 } }
```

```
X[s,1]<-max(Q)

#floating strike asian put#
q1=vector(length=mm)
for(kk in 1:mm){
q1[kk]<-max(sum(S[kk,])/n-S[kk,n],0) }

Q1<-matrix(0,mm,mm)
for(i in 1:mm){
for(j in 1:mm){
Q1[i,j]<-abs(q1[i]-q1[j])/max(abs(S[i,]-S[j,]))
Q1[i,i]<-0 } }
X[s,2]<-max(Q1)

#floating strike lookback call#
ll=vector(length=mm)
for(kk in 1:mm){
ll[kk]<-(S[kk,n]-min(S[kk,])) }

LL<-matrix(0,mm,mm)
for(i in 1:mm){
for(j in 1:mm){
LL[i,j]<-abs(ll[i]-ll[j])/max(abs(S[i,]-S[j,]))
LL[i,i]<-0 } }
X[s,3]<-max(LL)

#floating strike lookback put#
ll1=vector(length=mm)
for(kk in 1:mm){
ll1[kk]<-(max(S[kk,])-S[kk,n]) }

LL1<-matrix(0,mm,mm)
for(i in 1:mm){
for(j in 1:mm){
LL1[i,j]<-abs(ll1[i]-ll1[j])/max(abs(S[i,]-S[j,]))
LL1[i,i]<-0 } }
X[s,4]<-max(LL1)

#max-min lookback#
lll=vector(length=mm)
for(kk in 1:mm){
lll[kk]<-(max(S[kk,])-min(S[kk,])) }

LLL<-matrix(0,mm,mm)
for(i in 1:mm){
```

```
for(j in 1:mm){
LLL[i,j]<-abs(lll[i]-lll[j])/max(abs(S[i,]-S[j,]))
LLL[i,i]<-0 } }
X[s,5]<-max(LLL)


A[s,]<-sort(X[s,],index.return=TRUE)$ix
}
A


K=c(1,2,3,4,5)
Y<-array(0,dim=c(mm,4,length(K)))
B<-array(0,dim=c(mm,4,length(K)))

for(c in 1:nn){

W<-matrix(0,mm,n)
for(k in 1:mm){
W[k,]<-BBridge(x=W0, y=WT, t0=t0, T=T, N=n-1) }
# S minden sora egy-egy trajektória
S<-matrix(0,mm,n)
for(k in 1:mm){
for(j in 1:n){
S[k,j]<-S0*exp((mu-sigma^2/2)*(j-1)+sigma*W[k,j]) }}

for(s in 1:length(K)){

#fixed strike asian call#
p=vector(length=mm)
for(kk in 1:mm){
p[kk]<-max(sum(S[kk,])/n-K[s],0) }

P<-matrix(0,mm,mm)
for(i in 1:mm){
for(j in 1:mm){
P[i,j]<-abs(p[i]-p[j])/max(abs(S[i,]-S[j,]))
P[i,i]<-0 } }
Y[c,1,s]<-max(P)

#fixed strike asian put#
p1=vector(length=mm)
for(kk in 1:mm){
p1[kk]<-max(K[s]-sum(S[kk,])/n,0) }
```

```
P1<-matrix(0,mm,mm)
for(i in 1:mm){
for(j in 1:mm){
P1[i,j]<-abs(p1[i]-p1[j])/max(abs(S[i,]-S[j,]))
P1[i,i]<-0 } }
Y[c,2,s]<-max(P1)

#fixed strike lookback call#
l=vector(length=mm)
for(kk in 1:mm){
l[kk]<-max(max(S[kk,])-K[s],0) }

L<-matrix(0,mm,mm)
for(i in 1:mm){
for(j in 1:mm){
L[i,j]<-abs(l[i]-l[j])/max(abs(S[i,]-S[j,]))
L[i,i]<-0 } }
Y[c,3,s]<-max(L)

#fixed strike lookback put#
l1=vector(length=mm)
for(kk in 1:mm){
l1[kk]<-max(K[s]-min(S[kk,]),0) }

L1<-matrix(0,mm,mm)
for(i in 1:mm){
for(j in 1:mm){
L1[i,j]<-abs(l1[i]-l1[j])/max(abs(S[i,]-S[j,]))
L1[i,i]<-0 } }
Y[c,4,s]<-max(L1)

B[c,,s]<-sort(Y[c,,s],index.return=TRUE)$ix
} }
Y
B
```

Hivatkozások

[1] Berlinger Edina, Váradi Kata, Kockázati étvágy, *Pénzügyi Szemle/Public Finance Quarterly-Journal of Public Finance* **60.1**, 2015, 45-62.

[2] Fischer Black, Myron Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *The Journal of Political Economy* **81.3**, 1973, 637-654.

[3] Min Dai honlapja: `http://www.math.nus.edu.sg/~matdm/ma4257/chapter5.pdf`

[4] Paul A. David, Clio and the economics of QWERTY, *The American Economic Review* **75.2**, 1985, 332-337.

[5] Paul A. David, Understanding the economics of QWERTY: The necessity of history, In: W. N. Parker (ed.): Economic history and the modern economist, *Blackwell, Oxford*, 1986, 30-49.

[6] J. Darrell Duffie, J. Michael Harrison, Arbitrage pricing of Russian options and perpetual lookback options, *The Annals of Applied Probability* **3.3** 1993, 641-651.

[7] Christian Ekstrand, Financial Derivatives Modeling, *Springer*, 2011.

[8] Pierre Garrouste, Stavros Ioannides, Evolution and Path Dependence in Economic Ideas: Past and Present, *Edward Elgar Publishing*, 2001.

[9] Julien Guyon, Path-dependent volatility, *Quantitative research, Bloomberg L.P.*, 2014.

[10] Richard J. Haber, Phillip J. Schönbucher, Paul Wilmott, Pricing Parisan Options, *The Journal of Derivatives* **6.3**, 1999, 71-79.

[11] J. Hull, A. White, Efficient Procedures for Valuing European and American Path Dependent Options, *The Journal of Derivatives* **1**, 21-31.

[12] Lishang Jiang, Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing, *World Scientific*, 2005.

[13] Michael A. Kouritzin, Path-dependent option pricing with explicit solutions, stochastic approximation and Heston examples, *arXiv preprint arXiv:1608.02028* 2016.

[14] Yue Kuen Kwok, Lattice Tree Methods for Strongly Path Dependent Options, 2009. https://ssrn.com/abstract=1421736

[15] Yue Kuen Kwok, Hoi Ying Wong, Ka Wo Lau, Pricing Algorithms of Multivariate Path Dependent Options, *Journal of Comlexity* **17**, 2001.

[16] Yidong Liu, Numerical Pricing of Path Dependent Options

[17] Roger Lord, Remmert Koekkoek, Dick van Dijk, A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models, *Quantitative Finance* **10.2**, 2010, 177-194.

[18] Medvegyev Péter, Pénzügyi matematika, *egyetemi jegyzet*, 2014.

[19] Hyman P. Minsky, The financial instability hypothesis, *The Jerome Levy Economics Institute Working Paper* **74**, 1992.

[20] Paul Pierson, Increasing Returns, Path Dependence, and the Study of Politics, *American Political Science Review* **94**, 2000, 251-267.

[21] Jan R. M. Röman honlapja: `http://janroman.dhis.org`

[22] Száz János, Devizaopciók és részvényopciók árazása, *egyetemi tankönyv*, 2009.

[23] Nassim Taleb, Dynamic Hedging, Managing vanilla and exotic options, *John Wiley&Sons*, 1996.

[24] Ágnes Vidovics-Dancs, Péter Juhász, János Száz, Path Dependency In Investment Strategies - A Simulation Based Illustration, *ECMS*, 2014.

[25] Paul Wilmott, Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering, *John Wiley & Sons*, 1998.

[26] Paul Wilmott, Frequently Asked Questions in Quantitative Finance, *John Wiley&Sons*, 2009.

[27] H. Windcliff, P. A. Forsyth, K. R. Vetzal, Shout options: a framework for pricing contracts which can be modified by the investor, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **134.1**, 2001, 213-241.

[28] `http://www.investment-and-finance.net/derivatives/p/path-dependent-option-with-strong-memory.html`

[29] `http://www.investopedia.com/terms/p/pathdependentoption.asp`

[30] `http://www.investorwords.com/7433/path_dependent_option.html`

[31] `https://en.wikipedia.org/wiki/Option_style#Non-vanilla_path-dependent_.22exotic.22_options`

[32] `https://hu.wikipedia.org/wiki/Útfüggőség`