TÖBBFAKTOROS KAMATLÁBMODELLEK ÉS EGZOTIKUS OPCIÓK

Készítette: Bondici László

Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak

Kvantitatív pénzügyek szakirány

Budapest, 2017

Témavezető: Michaletzky György egyetemi tanár

ELTE Természettudományi Kar

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem

Közgazdaságtudományi Kar

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Michaletzky György Tanár Úrnak az érdekes témafelvetést, a rendszeres konzultációkat, az építő jellegű megjegyzéseket és tanácsokat, amelyek nélkül ez a diplomamunka nem készülhetett volna el. Köszönöm, hogy többször és nagyon alaposan átnézte a dolgozatot, és köszönöm megértő türelmét. Továbbá köszönöm a családomnak, a barátnőmnek, a barátaimnak és minden hozzám közel állónak, hogy tanulmányaim alatt mindvégig támogattak.

Emberi Erőforrások
Minisztériuma

AZ EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA
ÚJ NEMZETI KIVÁLÓSÁG PROGRAMJÁNAK TÁMOGATÁSÁVAL KÉSZÜLT

Tartalomjegyzék

Jelölések

Jóllehet a dolgozatban végig igyekeztünk a pénzügyi matematikában standardnak számító jelöléseket alkalmazni, mégis célszerűnek tartjuk összefoglalni néhány többször előforduló jelölésünket:

- $p(t,T)$ - az egységnyi névértékű, T-ben lejáró elemi kötvény t-beli ára;
- B_t - az egységnyi pénzből induló bankbetét értéke a t időpontban;
- $\mathbb{P}$ - a fizikai, valós mérték;
- $\mathbb{Q}$ - a bankbetéthez tartozó martingálmérték, a modellezést ez alatt végezzük;
- a parciális deriváltakat az indexbe írt változóval jelöljük, megengedve a magasabb rendű deriváltakra is ezt a jelölést;
- a vektorok koordinátáit zárójelbe tett felső indexszel jelöljük, megkülönböztetve a hatványozástól és a parciális deriválástól;
- a mátrixok elemeire zárójelbe tett kettős felső indexszel hivatkozunk, a vektorok esetén érvényes megfontolások miatt;
- a dolgozat követhetőségének megkönnyítése érdekében a vektorokat félkövér betűtípussal emeljük ki, és oszlopvektorként tekintünk rájuk;
- a mátrixokat nagybetűvel jelöljük.

1. fejezet

Bevezetés

Napjainkban egyre összetettebb kereskedési mechanizmusok látnak napvilágot mind a szabályozott pénzügyi kereskedési platformokon, mind pedig a tőzsdén kívüli (OTC) piacokon, melyek leírása a pénzügyi modellezőket egyre nagyobb kihívás elé állítja. A kamatlábpiacokon megjelenő különféle alap- és származtatott termékek áralakulását leíró egyfaktoros kamatlábmodellek alkalmazása során az illesztési hiba elfogadhatatlanul nagy lehet, ezért célravezetőnek tűnhet bizonyos többfaktoros modellek alkalmazása. A dolgozatban ezen modellek egy részét egységes keretbe foglaljuk, majd némely konkrét modellt tekintve árazóegyenleteket vezetünk le a kamatlábtermékekhez kapcsolódó klasszikus, európai opciókon túlmutató egzotikus opciókra.

A különféle kamatlábmodellekről átfogó kép található Brigo és Mercurio [2] monográfiájában, valamint Musiela és Rutkowski [20] könyvének a második része is ezzel a témakörrel foglalkozik. A Brigo-Mercurio könyv a modellek elméleti bemutatásán túl nagy hangsúlyt fektet a gyakorlati problémákra és megoldásukra is, míg a Musiela-Rutkowski könyvre inkább a matematikaibb tárgyalásmód jellemző. Mindkét könyvben megtalálhatók a fontosabb rövidkamatláb-modellek, valamint a teljes hozamgörbe-alakulást modellező Heath-Jarrow-Morton modell is. A dolgozatban az előbbi családba tartozó modellekkel fogunk foglalkozni. Noha a teljes hozamgörbét

leíró Heath-Jarrow-Morton modell nagyon vonzónak tűnhet, Filipovic [11] cikke és Flesaker [12] könyve mértékletességre int: előbbi empirikus vizsgálatokkal azt találja, hogy a modell inkompatibilis a vizsgált piaci adatokkal, míg utóbbi elméleti szempontból vizsgálja a modell konzisztenciájával kapcsolatos problémákat.

Néhány szó a dolgozatról: a 2. fejezetben bemutatunk egy konzisztens, arbitrázsmentes többfaktoros kamatlábmodellt, melyben a faktorokat absztrakt módon értelmezzük, kiindulásként mellőzve mindennemű interpretációjukat. A modell bemutatása főként Duffie és Kan [10] cikkén alapul. Ahhoz, hogy kamatderivatívák árazására használhassuk ezt a modellt, szükségünk lenne a faktorok piaci adatokhoz való illesztésére. Mint kiderül majd, ennek a megvalósításához hasznos megkövetelni, hogy a modellünk affin lejárati szerkezetet eredményezzen. Az alapul vett cikktől eltérően nem követeljük meg, hogy az elemi kötvényeink időhomogének legyenek, és így vezetünk le árazóegyenletet az elemi kötvényekre. Azt kapjuk azonban, hogy az így származó egyenleteknek nem egyértelmű a megoldása, az egyértelműséghez szükségünk van többletfeltételekre, mint például az elemi kötvények elhagyott időhomogenitására, vagy a rövid kamatlábat a faktorok segítségével megadó függvény ismeretére. Ilyen módon azonban sikerül rávilágítani, hogy milyen más feltételekre cserélhető le a kötvényárfolyamok időhomogenitása. Az utolsó szakaszban megvizsgáljuk, hogy az affin lejárati szerkezet mire enged következtetni a faktorok alakulását leíró differenciálegyenlet alakját illetően.

A következő, 3. fejezet a megelőző fejezetben bemutatott faktormodell absztrakt faktorait konkretizálja különböző példák segítségével. Néhány klasszikus kamatlábmodellen túl bemutatunk egy hozam-faktormodellt is, amely segítségével rámutatunk az affin lejárati szerkezet előnyeire is. A fejezet záró szakaszában bemutatjuk a Chen által (a [4] cikkben, valamint [3] könyvben) kidolgozott háromfaktoros kamatlábmodellt, melyet részletesebben a következő fejezetben vizsgálunk meg.

A 4. fejezet tehát a Chen-féle háromfaktoros modellkeretben való derivatívaárazással foglalkozik. Két részre bomlik: az első szakaszban levezetünk egy általános, fundamentális árazóegyenletet bizonyos kifizetésstruktúrával rendelkező kamatderi-

vatívák esetére, majd a második szakaszban konkrét piaci termékek esetén beazonosítjuk a fundamentális egyenletet és a hozzá tartozó peremfeltételt.

A dolgozatot egy rövid, összefoglaló fejezettel zárjuk, melyben az összegzés mellett kitérünk a dolgozat lehetséges folytatási irányaira és bővítéseire is, melyek esetlegesen egy új dolgozat alapját képezhetik.

2. fejezet

A kamatlábak lejárati szerkezetének általános faktormodellje

Ebben a fejezetben felépítünk egy konzisztens és arbitrázsmentes többfaktoros rövidkamatláb-modellt, amelynek az építőkövei absztrakt faktorok, és amelyek speciális megválasztásával különböző modelleket kaphatunk. Kitérünk azoknak a szükséges és elégséges feltételeknek a tárgyalására is, amelyek segítségével biztosítható, hogy az elemi kötvények lejáratig számított hozamai a faktorok affin függvényei legyenek, vagyis affin lejárati szerkezetű legyen a modell. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben a faktorok alakulását leíró sztochasztikus differenciálegyenlet egy speciális, kanonikus alakot ölt. A felépítést Duffie és Kan [10] cikke alapján végezzük. A cikkben a felépítés során végig felteszik az időhomogenitást, mi ezt a modell felépítése során mellőzzük, és a végén térünk vissza rá. Ezáltal részben általánosabb tárgyalásmódot kapunk, másrészt pedig előtérbe kerül, hogy miért is szükséges bizonyos többletfeltételeket tenni ahhoz, hogy a többfaktoros kamatlábmodellünket termékek árazására használhassuk.

2.1. Motiváció, a modell bemutatása

Általában pénzügyi faktormodellek esetén a faktorok nem figyelhetők meg közvetlenül, a piaci információk alapján nem tudjuk beazonosítani őket direkt módon. Ez sokszor problémássá teszi a modellek piaci árakhoz való kalibrálását, mivel a faktorok értékét csak közvetetten, hibákkal terhelten tudjuk kinyerni a rendelkezésre álló adatokból. A bemutatásra kerülő többfaktoros modell absztrakt faktorokból építkezik, melyeket megfigyelhető piaci tényezőknek választva elkerülhető az identifikáció problémája. Az absztrakt faktorokat választhatjuk például különböző időpontban lejáró elemi kötvények lejáratig számított hozamának is, hiszen ezeket lényegében megfigyelhető adatoknak tekinthetjük. Ha megköveteljük, hogy az elemi kötvények lejáratig számított hozamai az absztrakt faktorok affin függvényei legyenek, akkor bázistranszformációval elérhető, hogy a piacon nem feltétlen megfigyelhető absztrakt faktorok helyett a sokkal kézenfekvőbbnek tűnő, különböző időpontokban lejáró zérókuponok lejáratig számított hozamai segítségével kalibráljuk a modellt. Ennek az eljárásnak a részletezése megtalálható Pearson és Sun [21], valamint Chen és Scott [5] cikkében, de most eltekintünk a részletek ismertetésétől. Ez a gondolat viszont rávilágít arra, hogy miért érdemes az affin lejárati szerkezetet megkövetelni.

A rövid motivációs bevezető után térjünk rá a modell általános szerkezetének ismertetésére. n-faktoros modellt szeretnénk felépíteni, ezért adottnak tekintünk egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt és rajta egy $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ filtrációt, melyet egy $\mathbb{P}$-szerinti n-dimenziós standard $\tilde{\boldsymbol{W}}_t$ Wiener-folyamat generál. Jelöljük az n darab időfüggő absztrakt faktorunkat $X_t^1, X_t^2, \ldots, X_t^n$-nel, vektoros jelölésben tömören $\boldsymbol{X}_t$, $t \geq 0$. Feltesszük még, hogy ez az $\boldsymbol{X}_t$ folyamat Markov-folyamat, amely az értékeit egy $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazból veszi fel (a pontos dinamikát megadó egyenletet később részletezzük).

A piacon kereskedett termékek a különböző időpontokban lejáró elemi kötvények. A T időpontban lejáró, egységnyi névértékű elemi kötvény t-beli árát jelöljük $p(t, T)$-vel. Az elemi kötvény ára természetesen függ a faktorok értékeitől is, így feltesszük,

hogy létezik egy olyan $V : D \times [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ függvény, amely a faktorok, a jelenlegi időpont és a lejárati időpont alapján megadja az elemi kötvény árát. Az $\boldsymbol{X}_t$ folyamat Markov-tulajdonsága miatt a kötvényárfolyamok a faktoroktól csak a jelenlegi állapoton keresztül függenek. Feltesszük továbbá, hogy a V függvény az első változójában legalább kétszer, a második és harmadik változójában pedig legalább egyszer folytonosan differenciálható. A V függvény $\mathcal{C}^{2,1,1}(D \times [0,\infty) \times [0,\infty))$-beliségét az Itô-lemma alkalmazhatósága és a rövid kamatláb definiálhatósága miatt követeljük meg. Tehát $p(t,T) = V(\boldsymbol{X}_t, t, T)$.

A rövid kamatlábat az elemi kötvény árát a faktorok segítségével megadó függvényből definiáljuk, tehát a $\rho : D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény legyen a következő:

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\partial \ln(V(\boldsymbol{x}, t, t))}{\partial T}, \tag{2.1}$$

ahol a $\frac{\partial}{\partial T}$ operátor a harmadik változó szerinti deriválást jelenti. A ρ függvény segítségével definiálható a rövid kamatláb, azaz legyen $r_t = \rho(\boldsymbol{X}_t, t)$. Ha rendelkezésünkre áll a rövid kamatláb, akkor a piacon elérhető a bankbetét, így tehát mint kereskedhető termékhez tartozik egy $\mathbb{Q}$ martingálmérték, mely ekvivalens az eredeti, valós $\mathbb{P}$ mértékkel. Azaz $\mathbb{Q}$ legyen az a mérték, mely szerint egy tetszőleges kereskedhető terméket a $B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$ egységnyi pénzből induló bankbetét ármérce-folyamattal normálva (az első kifizetési időpontig) martingált kapunk.

Az $\boldsymbol{X}_t$ folyamatról feltesszük továbbá, hogy a $\mathbb{Q}$ mérték szerint olyan időhomogén Markov-folyamatot követ, amely kielégíti az alábbi sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$d\boldsymbol{X}_t = \mu(\boldsymbol{X}_t)dt + \sigma(\boldsymbol{X}_t)d\boldsymbol{W}_t, \quad \boldsymbol{X}_0 \in D, \tag{2.2}$$

ahol $\mu : D \to \mathbb{R}^n$ és $\sigma : D \to \mathbb{R}^{n \times n}$ olyan fokú regularitási tulajdonsággal rendelkező függvények, melyek biztosítják, hogy a fenti egyenletnek létezzen egyértelmű (erős) megoldása, $\boldsymbol{W}_t$ pedig egy n-dimenziós standard Wiener-folyamat (a $\mathbb{Q}$ mérték szerint). Ezen megoldhatósági feltételek tárgyalására (affin lejárati szerkezet esetén) a 2.3 szakaszban kitérünk majd.

A következő szakaszban megvizsgáljuk, hogy a μ és σ függvényekre milyen feltételeket kell szabnunk, hogy affin lejárati szerkezetű kamatlábmodellt kaphassunk az $\boldsymbol{X}_t$ folyamatból.

2.2. Az affin lejárati szerkezetű eset

Térjünk most rá annak a vizsgálatára, hogy milyen feltételeknek kell teljesülniük az $\boldsymbol{X}_t$ folyamat differenciálegyenletét meghatározó függvényekre ahhoz, hogy az így nyert kamatlábszerkezet affin legyen. Azt szeretnénk, hogy egy tetszőleges, T-ben lejáró elemi kötvény lejáratig számított hozama a faktorok affin függvényeként legyen felírható, vagyis az előző részben bevezetett V függvény segítségével a következőt szeretnénk megkövetelni:

$$\ln\left(\frac{p(T,T)}{p(t,T)}\right) = \ln\left(\frac{V(\boldsymbol{X}_T,T,T)}{V(\boldsymbol{X}_t,t,T)}\right) = -A(t,T) - B(t,T)^\top \cdot \boldsymbol{X}_t \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow V(\boldsymbol{X}_t,t,T) = \exp(A(t,T) + B(t,T)^\top \cdot \boldsymbol{X}_t), \quad 0 \le t \le T, \tag{2.3}$$

ahol az $A : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ és $B : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ olyan függvények, amelyek biztosítják a V függvényre megkövetelt regularitási tulajdonságokat, vagyis $\mathcal{C}^{1,1}$-beliek. Az átalakítás során felhasználtuk azt, hogy az egységnyi névértékű elemi kötvény lejáratkori értéke 1, azaz $p(T,T) = V(\boldsymbol{X}_T,T,T) = 1$. Mivel $\boldsymbol{X}_T \in D$, ezért a következőket is kézenfekvő megkövetelni a V függvényről:

$$V(\boldsymbol{x},t,T) = \exp(A(t,T) + B(t,T)^\top \cdot \boldsymbol{x}),\ V(\boldsymbol{x},T,T) = 1, \quad \boldsymbol{x} \in D, 0 \le T. \tag{2.4}$$

Ezen feltevések mellett azt kapjuk továbbá (a (2.1) összefüggést figyelembe véve), hogy a rövid kamatláb is a faktorok affin függvénye:

$$\rho(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\partial \ln(V(x,t,t))}{\partial T} = -\frac{\partial(A(t,t) + B(t,t)^\top \cdot \boldsymbol{x})}{\partial T} = -A_T(t,t) - B_T(t,t)^\top \cdot \boldsymbol{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r_t = \rho(\boldsymbol{X}_t,t) = -A_T(t,t) - B_T(t,t)^\top \cdot \boldsymbol{X}_t \tag{2.5}$$

Tekintsünk egy rögzített T lejárati időpontot. A T-ben lejáró elemi kötvény a piacon kereskedett termék, mely csak a lejáratkor teljesít kifizetést, így ha normáljuk a B_t bankbetéttel, akkor a $\mathbb{Q}$ mérték szerint martingált kapunk. Ezt a következőképpen fogjuk kihasználni: az Itô-formula segítségével felírjuk a $\frac{V(\boldsymbol{X}_t,t,T)}{B_t}$ folyamat

dinamikáját a $\mathbb{Q}$ mérték alatt, és az így kapott driftet 0-val tesszük egyenlővé. A megfelelő parciális deriváltakat az eddigiekhez hasonlóan alsó indexben fogjuk jelölni. Először a bankbetét dinamikáját írjuk fel, melyből az Itô formulával azonnal adódik a reciprok folyamat dinamikája is:

$$dB_t = r_t B_t dt \Rightarrow d\frac{1}{B_t} = -r_t \frac{1}{B_t} dt \tag{2.6}$$

A normált kötvényárfolyamra úgy tekintünk, mint a kötvényárfolyam és a bankbetét reciprokának szorzatára, és a szorzatra vonatkozó Itô-formulát felhasználva írjuk fel a dinamikát, kihasználva azt, hogy mind a bankbetét, mind annak a reciproka korlátos változású folyamat, és így a kvadratikus kovariancia 0 lesz.

$$\begin{aligned}
d_t \frac{V(\boldsymbol{X}_t, t, T)}{B_t} &= V(\boldsymbol{X}_t, t, T) d\frac{1}{B_t} + \\
&+ \frac{1}{B_t}\Big(V_t(\boldsymbol{X}_t, t, T)dt + V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}_t, t, T) d\boldsymbol{X}_t + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(V_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{X}_t, t, T) d\langle \boldsymbol{X}\rangle_t)\Big) = \\
&= \frac{1}{B_t}\Big(-r_t V(\boldsymbol{X}_t, t, T) + V_t(\boldsymbol{X}_t, t, T) + V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}_t, t, T)\mu(\boldsymbol{X}_t) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(V_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{X}_t, t, T)\sigma(\boldsymbol{X}_t)\sigma^\top(\boldsymbol{X}_t)\right)\Big) dt + \\
&\qquad + \frac{1}{B_t}\sigma(\boldsymbol{X}_t) d\boldsymbol{W}_t
\end{aligned}$$

Amint azt megállapítottuk, ez a dinamika akkor tartozik egy $\mathbb{Q}$-szerinti martingálhoz, ha a drift egyenlő 0-val. Mivel a B_t értéke szigorúan pozitív bármely t-re, ezért a drift 0 voltát nem befolyásolja, így átrendezés után a következő parciális differenciálegyenletet kapjuk V-re:

$$\begin{aligned}
V_t(\boldsymbol{x}, t, T) + V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, t, T)\mu(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(V_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}, t, T)\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x})\right) - \rho(\boldsymbol{x}, t)V(\boldsymbol{x}, t, T) = 0, \\
\boldsymbol{x} \in D, \quad 0 \le t \le T.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Az egyenlethez tartozó peremfeltételt az elemi kötvény lejárati értékéből kapjuk, azaz $V(\boldsymbol{x}, T, T) = 1$, $x \in D$.

A továbbiakban a (2.7) egyenletben szereplő parciális deriváltakat kiszámítjuk a V alakját meghatározó (2.4) képlet segítségével, így a V-re felírt parciális differenciálegyenletünkben az A és B függvények is megjelennek expliciten. A V-re kirótt peremfeltételt is átírjuk a kitevőben szereplő függvényekre vonatkozó feltételekre, mely során felhasználjuk azt a tényt, hogy ha egy $\mathbb{R}^n$-en értelmezett affin funkcionál azonosan 0 az $\mathbb{R}^n$ egy nyílt halmazán, akkor az affin leképezés együtthatói mind 0-val egyenlők. Ezt az elvet a későbbiekben is kihasználjuk majd, és eltűnési elvként fogunk rá hivatkozni. A pontos megfogalmazást a bizonyítással együtt tartalmazza a következő

2.1. Állítás. *(*Eltűnési elv*) Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy affin funkcionál, $D \subset \mathbb{R}^n$ egy valódi nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben. Ha $A(\boldsymbol{x}) = 0, \forall \boldsymbol{x} \in D$, akkor $A(\boldsymbol{x}) = 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, azaz $A \equiv 0$.*

Bizonyítás. Legyenek az A leképezés együtthatói $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, azaz

$$A(\boldsymbol{x}) = a + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}.$$

Mivel a D halmaz valódi nyílt halmaz, ezért kiválasztható belőle $n+1$ darab affin független pont, azaz $\exists \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n+1} \in D$, melyekre teljesül, hogy az $\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Tudjuk, hogy $A(\boldsymbol{x}_i) = 0, i = 1, 2, \ldots, n, n+1$. Képezzük ezekből is az $\boldsymbol{x}_i$-k esetében látott különbségeket, vagyis

$$\begin{cases} A(\boldsymbol{x}_{n+1}) - A(\boldsymbol{x}_1) &= 0 \\ \quad\ldots \\ A(\boldsymbol{x}_{n+1}) - A(\boldsymbol{x}_n) &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{b}^\top(\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_1) &= 0 \\ \quad\ldots \\ \boldsymbol{b}^\top(\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n) &= 0 \end{cases}$$

Mivel a jobb oldali egyenletrendszerben az $\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ezért a homogén egyenletrendszernek a $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ egyértelmű megoldása. Így viszont az is következik, hogy $a = 0$, tehát valóban $A \equiv 0$.

$\square$

A rövid technikai kitérő után kanyarodjunk vissza az eredeti gondolatmenetünkhöz, és számítsuk ki a parciális deriváltakat.

$$\left.\begin{array}{rcl} V(\boldsymbol{x},t,T) & = & \exp(A(t,T)+B(t,T)^\top\cdot\boldsymbol{x}) \\ V(\boldsymbol{x},T,T) & = & 1, \quad \boldsymbol{x}\in D,\ 0\le T \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl} V_t(\boldsymbol{x},t,T) & = & (A_t(t,T)+B_t(t,T)^\top\cdot\boldsymbol{x})\cdot V(\boldsymbol{x},t,T); \\ V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},t,T) & = & B(t,T)^\top\cdot V(\boldsymbol{x},t,T); \\ V_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},t,T) & = & B(t,T)B(t,T)^\top\cdot V(\boldsymbol{x},t,T); \\ A(T,T) & = & 0; \\ B(T,T) & = & \mathbf{0}. \end{array}\right.$$

Vegyük észre, hogy ha visszahelyettesítjük az imént kiszámolt parciális deriváltakat a (2.7) egyenletbe, akkor mindegyik tagban megjelenik a V függvény szorzótényezőként. Mivel az elemi kötvény ára egy pozitív mennyiség, ezért ezzel végigoszthatjuk az egyenletet, és így már csak az A és B függvények szerepelnek majd az egyenletben.

$$\begin{aligned}(A_t(t,T)+B_t(t,T)^\top\cdot\boldsymbol{x})+B(t,T)^\top\mu(\boldsymbol{x})+ \\ +\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(B(t,T)B(t,T)^\top\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x}))-\rho(\boldsymbol{x},t)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{gathered} A(T,T)=0, \quad B(T,T)=\mathbf{0}, \\ \boldsymbol{x}\in D, \quad 0\le t\le T. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Felhasználva, hogy a Tr nyomfüggvény ciklikusan invariáns, illetve a rövid kamatláb explicit affin szerkezetét megadó (2.2) összefüggést, átrendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned}(A_t(t,T)+B_t(t,T)^\top\cdot\boldsymbol{x})+B(t,T)^\top\mu(\boldsymbol{x})+ \\ +\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(B(t,T)^\top\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x})B(t,T))+A_T(t,t)+B_T(t,t)^\top\cdot\boldsymbol{x}=0.\end{aligned}$$

Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy a bal oldalra kerüljenek a μ és σ függvényeket

nem tartalmazó mennyiségek, a jobb oldalra pedig a fennmaradó rész:

$$
\begin{aligned}
-A_t(t,T) - A_T(t,t) - (B_t(t,T)^\top + B_T(t,t)^\top)\cdot \boldsymbol{x} = \\
= B(t,T)^\top \mu(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(B(t,T)^\top \sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x})B(t,T)),
\end{aligned}
$$

ami a mátrixműveletek kifejtése után a következő alakra hozható:

$$
\Leftrightarrow a(\boldsymbol{x},t,T) = \sum_{i=1}^{n} B^{(i)}(t,T)\mu^{(i)}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B(t,T)^{(i)}B(t,T)^{(j)}S^{(ij)}(\boldsymbol{x}), \tag{2.9}
$$

ahol $a(\boldsymbol{x},t,T) = -A_t(t,T) - A_T(t,t) - (B_t(t,T)^\top + B_T(t,t)^\top)\cdot \boldsymbol{x}$ egy affin függvény, a felső indexben, zárójelben szereplő egész szám pedig az adott vektorértékű függvény megfelelő komponensét jelöli, valamint bevezettük az $S^{(ij)}(\boldsymbol{x})$ jelölést a $\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x})$ szimmetrikus mátrix (i,j)-edik elemére.

Foglaljuk össze, hogy mi történt eddig: affin lejárati szerkezetű kamatlábmodellt szerettünk volna építeni, ezért megköveteltük, hogy az elemi kötvények lejáratig számított hozamai a faktorok affin függvényei legyenek. Ebből következtettünk az elemi kötvény árát megadó V függvény alakjára, melyre egy tetszőlegesen rögzített T lejárat mellett felírtunk egy parciális differenciálegyenletet, majd bizonyos átalakításokat végeztünk rajta. Ebből az egyenletből szeretnénk most következtetéseket levonni az $\boldsymbol{X}_t$ folyamat differenciálegyenletében ((2.2)) szereplő függvényekre.

Mielőtt továbbmennénk, definiálnunk kell egy fogalmat. Meg szeretnénk követelni, hogy a különböző T lejáratokhoz tartozó $B(t,T)$ vektorértékű függvények kellően általánosak legyenek, vagyis létezzenek olyan lejáratok, amelyekre ezek a függvények lineárisan függetlenek. Ezen túlmenően azt is szeretnénk még a modellünktől, hogy a $B(t,T)$ vektorok komponenseiből képzett kettős szorzatokat vektorként tekintve szintén függetlenek legyenek. Ennek a precíz definiálása következik most. Ezen követelmény fontosságára a következő állítás bizonyítása világít majd rá. Az előzőekben felvázolt követelményekre röviden nem-degeneráltsági feltételekként fogunk hivatkozni.

Képezzük tehát a következő, $N = n + \frac{n(n+1)}{2}$ elemű $u(t,T)$ vektorokat:

$$\begin{cases} u^{(i)}(t,T) &= B^{(i)}(t,T), & \text{ha } i \le n; \\ u^{(i)}(t,T) &= \frac{1}{2}(B^{(j)}(t,T))^2, & \text{ha } j = 1,\dots,n, \text{ és } i = j+n; \\ & & \text{ha } i = f(j,k), \text{ ahol az } f : K \to L \text{ bijekció}, \\ u^{(i)}(t,T) &= B^{(j)}(t,T)B^{(k)}(t,T), & K = \{(j,k) | j,k = 1,2,\dots,n, j < k\}, \\ & & L = \left\{2n+1,\dots,n+\frac{n(n+1)}{2} = N\right\}. \end{cases}$$

N darab különböző $T_1, T_2, \dots, T_N$ lejárati időpont és $t < T_1$ esetén képezzük az $U(t, T_1, T_2, \dots, T_N)$ mátrixot, melynek sorai az $u(t, T_i)^\top$ vektorok, $i = 1, 2, \dots, N$.

2.2. Definíció. *Ha léteznek olyan $T_1, T_2, \dots, T_N$ lejárati időpontok és $t < T_1$, melyekre az $U(t, T_1, T_2, \dots, T_N)$ mátrix invertálható, akkor azt mondjuk, hogy a modellre teljesülnek a* nem-degeneráltsági feltételek.

Ezen előkészületek után rátérhetünk az alfejezet egyik fő gondolatát tartalmazó állítás bizonyítására.

2.3. Állítás. *Ha a kamatlábak affin lejárati szerkezetűek, akkor a nem-degeneráltsági feltételek mellett a μ és a $\sigma\sigma^\top$ függvények affin függvények a D értelmezési tartományukon.*

Bizonyítás. A $\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x})$ mátrix szimmetrikus, tehát $S^{(ij)}(\boldsymbol{x}) = S^{(ji)}(\boldsymbol{x})$ minden $i, j = 1, 2, \dots, n$ esetén. Megmutatjuk, hogy a $\mu(\boldsymbol{x})$ és $\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x})$ komponensenként affin függvények, és utóbbi esetén a szimmetria miatt csak a felső-háromszög mátrixra szorítkozunk. Vezessük be a következő H függvényt:

$$H(\boldsymbol{x}) = (\mu^{(1)}(\boldsymbol{x}), \mu^{(2)}(\boldsymbol{x}), \dots, \mu^{(n)}(\boldsymbol{x}), S^{(11)}(\boldsymbol{x}), S^{(12)}(\boldsymbol{x}), \dots, S^{(nn)}(\boldsymbol{x})).$$

A H függvényben a $\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x})$ mátrixból csak a felső-háromszög része szerepel, így ez egy $D \to \mathbb{R}^N$ függvény, ahol $N = n + \frac{n(n+1)}{2}$. Írjuk át a (2.9) egyenletet a most bevezetett H függvény segítségével a következő alakra:

$$a(\boldsymbol{x}, t, T) = c(t, T)^\top H(\boldsymbol{x}), \tag{2.10}$$

ahol a $c(t,T) \in \mathbb{R}^N$ vektort a nem-degeneráltsági feltételek előkészítése során bevezetett $u(t,T)$ vektorokhoz hasonlóan a $B^{(i)}(t,T)$ elemek segítségével számolhatjuk ki komponensenként:

$$\begin{cases} c^{(i)}(t,T) &= B^{(i)}(t,T), & \text{ha } i \le n; \\ c^{(i)}(t,T) &= \frac{1}{2}(B^{(j)}(t,T))^2, & \text{ha } H^{(i)}(t,T) = S^{(jj)}(\boldsymbol{x}); \\ c^{(i)}(t,T) &= B^{(j)}(t,T)B^{(k)}(t,T), & \text{ha } H^{(i)}(t,T) = S^{(jk)}(\boldsymbol{x}), j < k. \end{cases}$$

Tekintsük azt az N darab különböző $T_1 < T_2 < \cdots < T_N$ lejáratot és $t < T_1$ időpontot, melyre teljesülnek a nem-degeneráltsági feltételek. Írjuk fel a (2.10) egyenletet minden T_i-re, $i = 1, 2, \ldots, N$. Az egyenletrendszer bal oldalát egy vektorba, a jobb oldalát pedig egy mátrixszorzásba összefogva a következőt írhatjuk:

$$A(\boldsymbol{x}, t, T_1, T_2, \ldots, T_N) = C(t, T_1, T_2, \ldots, T_N)H(\boldsymbol{x}), \tag{2.11}$$

ahol

$$A^{(i)}(\boldsymbol{x}, t, T_1, T_2, \ldots, T_N) = a(\boldsymbol{x}, t, T_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N;$$
$$C^{(ij)}(t, T_1, T_2, \ldots, T_N) = c^{(j)}(t, T_i), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Mivel épp azokat a lejárati időpontokat tekintettük, melyekre a nem-degeneráltsági feltételek teljesülnek, ezért a C mátrix invertálható, azaz a (2.11) egyenletnek van egyértelmű megoldása $H(\boldsymbol{x})$-re. Mivel az $a(\boldsymbol{x}, t, T_i)$ függvény $\boldsymbol{x}$-nek affin függvénye, ezért a $H(\boldsymbol{x}) = C^{-1}(t, T_1, T_2, \ldots, T_N)A(\boldsymbol{x}, t, T_1, T_2, \ldots, T_N)$ minden komponense maga is affin függvény lesz, amivel beláttuk az állításunkat. □

Megjegyzés. *Ha nem teljesülnek a nem-degeneráltsági feltételek, azaz ha nincs olyan $(T_1, T_2, \ldots, T_N)$ időpont-N-es és $t < T_1$ időpont, amire a C (U) mátrix invertálható, akkor, amint azt a fogalom definiálása előtti motivációs részben említettük, az azt jelenti, hogy minden időpont-N-esre a sorok lineárisan összefüggenek, vagyis a $B(t, T_1), B(t, T_2), \ldots, B(t, T_N)$ vektorok az $N \times n$-dimenziós Lebesgue-mérték szerint egy 0-mértékű zárt halmazba esnek. Ha megköveteljük, hogy ez ne fordulhasson elő, akkor lesz megfelelő időpont-N-es és t időpont, hozzájuk tartozó, invertálható C mátrix, és vele együtt egyértelmű $H(\boldsymbol{x})$ megoldás. Mivel ez a feltétel nem túlságosan megszorító, ezért feltehető.*

A továbbiakban feltesszük a nem-degeneráltsági feltételek teljesülését. Így a $\mu(\boldsymbol{x})$ és $\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x})$ függvények $\boldsymbol{x}$-ben affin függvénynek tekinthetők. Térjünk vissza a (2.9) egyenlethez. Ki szeretnénk használni, hogy az előbbi megállapítások alapján ez $\boldsymbol{x}$-ben egy affin kifejezés, így alkalmazható lesz az eltűnési elv. Ehhez vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mu^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \alpha^{(i)} + \boldsymbol{\beta}^{(i)\top}\boldsymbol{x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$(\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x}))^{(ij)} = S^{(ij)}(\boldsymbol{x}) = \gamma^{(ij)} + \boldsymbol{\delta}^{(ij)\top}\boldsymbol{x}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

ahol $\alpha^{(i)}, \gamma^{(ij)} \in \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{\beta}^{(i)}, \boldsymbol{\delta}^{(ij)} \in \mathbb{R}^n$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Mivel a $\sigma(\boldsymbol{x})\sigma(\boldsymbol{x})^\top$ mátrix pozitív szemidefinit, a γ és $\boldsymbol{\delta}$ együtthatókat csak úgy választhatjuk meg, hogy a keletkező mátrixra is teljesüljön mindez. Így a (2.3) egyenlet a következő alakra hozható:

$$a(\boldsymbol{x}, t, T) = \sum_{i=1}^{n} B^{(i)}(t,T)\mu^{(i)}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B(t,T)^{(i)}B(t,T)^{(j)}S^{(ij)}(\boldsymbol{x}).$$

Az $a(\boldsymbol{x}, t, T)$ függvény definícióját, valamint a μ és a $\sigma\sigma^\top$ függvények feltételezett alakjait beírva, az egyenlet a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}
&-A_t(t,T) - A_T(t,t) - (B_t(t,T)^\top + B_T(t,t)^\top)\cdot\boldsymbol{x} = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n}(B^{(i)}(t,T)\alpha^{(i)} + B^{(i)}(t,T)\boldsymbol{\beta}^{(i)\top}\boldsymbol{x}) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(B(t,T)^{(i)}B(t,T)^{(j)}\gamma^{(ij)} + B(t,T)^{(i)}B(t,T)^{(j)}\boldsymbol{\delta}^{(ij)\top}\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

Rendezzük át az egyenletet, csoportosítva az $\boldsymbol{x}$-et tartalmazó, illetve nem tartalmazó részeket:

$$\begin{aligned}
&\left(A_t(t,T) + A_T(t,t) + \sum_{i=1}^{n} B^{(i)}(t,T)\alpha^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(B(t,T)^{(i)}B(t,T)^{(j)}\gamma^{(ij)}\right) + \\
&+\left(B_t(t,T)^\top + B_T(t,t)^\top + \sum_{i=1}^{n} B^{(i)}(t,T)\boldsymbol{\beta}^{(i)\top} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(B(t,T)^{(i)}B(t,T)^{(j)}\boldsymbol{\delta}^{(ij)\top}\right)\boldsymbol{x} = 0.
\end{aligned}$$

Az eltűnési elvet (2.1 állítás) használva azt kapjuk, hogy mind a két zárójeles kifejezés eltűnik, és kapunk két egyenletet, melyekhez a korábban már megállapított

peremfeltételek tartoznak:

$$A_t(t,T) + A_T(t,t) + \sum_{i=1}^{n} B^{(i)}(t,T)\alpha^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(B(t,T)^{(i)}B(t,T)^{(j)}\gamma^{(ij)} = 0, \quad (2.12)$$

$$B_t(t,T) + B_T(t,t) + \sum_{i=1}^{n} B^{(i)}(t,T)\boldsymbol{\beta}^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(B(t,T)^{(i)}B(t,T)^{(j)}\boldsymbol{\delta}^{(ij)} = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

$$A(T,T) = 0, B(T,T) = \mathbf{0}.$$

Ha a (2.13) egyenletnek létezik megoldása, és az egyértelmű, akkor a kapott $B(t,T)$ megoldást a (2.12) egyenletbe behelyettesítve, majd $A(t,T)$-re megoldva (feltéve, hogy meg tudjuk oldani, és ennek is egyértelmű a megoldása) megkaphatjuk annak az értékeit is. Ezek segítségével pedig felírható az elemi kötvények árát megadó V függvény is.

Sajnos azonban nem ez a helyzet, a fenti egyenleteknek, ha egyáltalán létezik megoldásuk, akkor azok nem egyértelműek. Tekintsünk ugyanis az első egyenlet helyett egy egyszerűbb egyenletet:

$$F_t(t,T) + F_T(t,t) = 0, \quad F(T,T) = 0 \quad (0 \le t \le T, F \in \mathcal{C}^{1,1}([0,\infty) \times [0,\infty)))$$

A peremfeltételt kihasználva a következők írhatók fel:

$$\begin{cases} F(T,T) - F(t,T) &= \int_t^T F_t(s,T)ds \\ F(t,T) - F(t,t) &= \int_t^T F_T(t,s)ds \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad F(t,T) = \int_t^T F_T(t,s)ds = -\int_t^T F_t(s,T)ds.$$

Integráljuk az egyenletünket t és T között, és használjuk ki a fenti egyenlőségeket:

$$\int_t^T F_t(s,T)ds + \int_t^T F_T(s,s)ds = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_t^T F_T(s,s)ds - \int_t^T F_T(t,s)ds = 0.$$

Az utolsó egyenletet deriváljuk T szerint:

$$F_T(T,T) - F_T(t,T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_T(T,T) = F_T(t,T).$$

Tehát $F_T(t,T)$ nem függ t-től, ezért vezessük be a $g(s) = F_T(t,s)$ jelölést. Ekkor

$$F(t,T) = \int_t^T F_T(t,s)ds = \int_t^T g(s)ds \quad \Rightarrow \quad F_t(t,T) = -g(t).$$

Így $F_t(t,T) + F_T(t,t) = -g(t) + g(t) = 0$, azaz a g függvényt tetszőlegesen előírhatjuk, így különböző $F(t,T)$ megoldásokat kapunk (viszont ha rögzítettünk egy g függvényt, onnan már egyértelmű a megoldás). Tehát az egyszerűsített egyenletnek nincs egyértelmű megoldása.

Térjünk vissza kiindulási (2.12) és (2.13) egyenletekhez. Ha a $B(t,T)$ függvényt sikerült meghatározni, akkor a fentihez hasonló gondolatmenettel azt kapjuk, hogy ennyi információból még nem tudjuk egyértelműen meghatározni az $A(t,T)$ függvényt. Viszont a $B(t,T)$ függvényt meghatározó egyenletre is elmondható ugyanez, tehát a nem-egyértelműség problémája már egy lépéssel korábban jelentkezik. Ezen felül további problémát okoz, hogy ez az egyenlet Riccati-típusú, tehát a megoldás létezése sem triviális kérdés.

Gondoljunk bele, mi lehet mindennek az oka. Az $\boldsymbol{X}_t$ folyamatot csak a $\mathbb{Q}$ mérték kapcsolta a kötvénypiacunkhoz. Viszont mi azt szerettük volna, hogy az absztrakt faktorokat megtestesítő $\boldsymbol{X}_t$ folyamatból ki tudjuk számolni az elemi kötvények árait. Ezen az úton értünk el az $A(t,T)$ és $B(t,T)$ függvényeinket meghatározó (2.12) és (2.13) egyenletekig, amiktől azt szerettük volna, hogy egyértelműen határozzák meg a kötvények árait. Ismerjük az egyenleteket minden T lejáratra, de ahhoz, hogy a kötvények áraira egyértelműen következtetni tudjunk, szükségünk van még további információkra.

Az egyértelműséghez szükséges többletinformációk különfélék lehetnek. Az egyik lehetőség, hogy megadjuk a rövid kamatlábat megadó $\rho(\boldsymbol{x},t)$ affin függvény együtthatóit. Amint az a (2.2) képletből látszik, ez tulajdonképpen az $A_T(t,t)$ és $B_T(t,t)$ függvények megadását jelenti. Ekkor a (2.12) és (2.13) parciális differenciálegyenletek közönséges differenciálegyenletekké válnak, így az $A(t,T)$ függvényt közvetlen integrálással is megkaphatjuk a $B(t,T)$ függvény értékeiből. Ehhez szükséges, hogy a $B(t,T)$-re adódó Riccati-típusú egyenletnek létezzen megoldása, amihez további feltételek lehetnek szükségesek a $\boldsymbol{\beta}$ és $\boldsymbol{\delta}$ együtthatókra.

Másik lehetőség lehet az egyértelműség biztosítására, ha megköveteljük azt, hogy az $A(t,T)$ és $B(t,T)$ függvények csak a két paraméter különbségétől függjenek,

vagyis egyváltozós függvények legyenek. Ekkor is egyszerűsödnek a parciális differenciálegyenleteink közönséges differenciálegyenletekre, tehát reménykedhetünk az egyértelműségben. Ez a feltétel az elemi kötvények áraira azzal a következménnyel jár, hogy az értékük csak a lejáratig hátralévő időtől függ, azaz időhomogének. Tehát ha megköveteljük a kötvényárak időhomogenitását és az affin lejárati szerkezetet, akkor van esély arra, hogy az absztrakt faktorokból (melyeknek csak a $\mathbb{Q}$ mértéken keresztül van kapcsolata a kötvénypiacunkkal) egyértelműen ki tudjuk számolni az elemi kötvények árait.

2.3. Affin eset: a faktorok alakulását megadó sztochasztikus differenciálegyenlet

Az előző fejezetben azt kaptuk, hogy (bizonyos technikai feltételek mellett) a μ és $\sigma\sigma^\top$ függvények affin függvények. Most ezeket az eredményeket vesszük górcső alá; egyrészt azt szeretnénk vizsgálni, hogy pontosabban milyen alakú a $\sigma\sigma^\top$-at megadó affin függvény, másrészt milyen feltételeket kell teljesítenie ahhoz, hogy a faktorok alakulását leíró (2.2) egyenletnek legyen egyértelmű (erős) megoldása. Kiderül, hogy a $\sigma\sigma^\top$, és ezzel a faktorok alakulását megadó egyenlet is egy bizonyos kanonikus alakra hozható. Ami az egyértelmű (erős) megoldást illeti, inkább technikai jellegű feltétel fogja biztosítani mindezeket, és a nyers számolás helyett szemléletes indoklást csatolunk hozzájuk.

Kezdjük először a $\sigma\sigma^\top$ vizsgálatával. Megtartva a korábbi jelöléseinket, legyen $(\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x}))^{(ij)} = S^{(ij)}(\boldsymbol{x}) = \gamma^{(ij)} + \boldsymbol{\delta}^{(ij)\top}\boldsymbol{x}$. Az előző fejezetben elöljáróban annyit már megjegyeztünk, hogy ennek a leképezésnek pozitív szemidefinitnek kell lennie. Ebből rögtön következik, hogy a főátlóbeli elemei nemnegatívak. Valóban, legyen e_i az $\mathbb{R}^n$ i. egységvektora a standard bázisban. Mivel $\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^\top(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{x})$ pozitív szemidefinit, ezért $e_i^\top S(\boldsymbol{x})e_i \geq 0$, vagyis $S^{(ii)}(\boldsymbol{x}) \geq 0$. Ennél azonban többet is állíthatunk, ehhez viszont először néhány lemmát kell belátnunk.

Jelölje L azon indexeket, amelyekre az általuk meghatározott, $S(\boldsymbol{x})$ főátlójában lévő elemek nem konstansok, tehát $L = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \boldsymbol{\delta}^{(ii)} \neq \mathbf{0}\}$. Legyen továbbá minden L-beli i indexre A_i az az $(n-1)$-dimenziós hipersík, amelyen eltűnik az $S(\boldsymbol{x})$ főátlójában lévő i. elem, azaz $A_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \gamma^{(ii)} + \boldsymbol{\delta}^{(ii)\top}\boldsymbol{x} = 0\}$. Előfordulhat, hogy két különböző indexre ezek a hipersíkok egybeesnek, ezért legyen $K \subset L$ az indexek azon részhalmaza, amire $A_i \neq A_j$, ha $i \neq j$ $(i, j \in K)$. Így eltávolítottuk azon $(\gamma^{(ii)}, \boldsymbol{\delta}^{(ii)\top})$ vektorokat, melyek egy másik skalárszorosai, az viszont még előfordulhat, hogy a $\{\boldsymbol{\delta}^{(ii)}, i \in K\}$ halmaz lineárisan nem független. Mivel a későbbiek során erre viszont szükségünk lesz és ez nem jelenti az általánosság túlzott megszorítását, ezért ezt meg szeretnénk követelni. Így a következő fogalmat vezetjük be.

2.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $S(\boldsymbol{x})$ nem-elfajult, *ha a* $\Delta_K = \{\boldsymbol{\delta}^{(ii)}, i \in K\}$ *halmaz lineárisan független.*

Eddig a $D \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazról, mint állapottérről nem feltételeztünk semmilyen konkrét alakot. Most ennek a részletezésére térünk ki. Legyen $\bar{D}$ azon zárt félterek metszete, melyeket az A_i hipersíkok határolnak, és melyekre $S(\boldsymbol{x})^{(ii)} \geq 0$, azaz $\bar{D} = \bigcap_{i \in K}\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \gamma^{(ii)} + \boldsymbol{\delta}^{(ii)\top}\boldsymbol{x} \geq 0\}$. Ennek segítségével definiáljuk a D állapotteret, legyen ennek a halmaznak a belseje: $D = Int(\bar{D})$. Az $S(\boldsymbol{x})$ függvényt olyan alakban keressük majd, hogy minden D-beli $\boldsymbol{x}$-re pozitív szemidefinit legyen. Miért célszerű ezt választani D-nek? Egyrészt tudjuk, hogy a $D \subset \bar{D}$ tartalmazásnak fenn kell állnia, mert különben sérülne az $S(\boldsymbol{x})$ pozitív szemidefinitása. Viszont ha a D az $Int(\bar{D})$-nek valódi részhalmaza, akkor az $\boldsymbol{X}_t$ folyamat kiléphet a D halmazból, mivel a határánál még nem nulla a volatilitása. Természetesen, mivel az $S(\boldsymbol{x})$ függvény affin, ezért az értelmezési tartományát nem kell megszorítanunk a D halmazra, nyugodtan értelmezhetjük az egész $\mathbb{R}^n$-en, tehát a D határán is, ahol a megfelelő főátlóbeli elemek eltűnnek. A D nyíltságára az $\boldsymbol{X}_t$ folyamatot meghatározó egyenlet megoldhatóságának tárgyalásakor lesz csak szükség.

Mielőtt rátérnénk a lemmák tárgyalására, vezessünk be még egy fogalmat, mely megkönnyíti a gondolatmenetünk tovagörgetését.

2.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy* $D \subset \mathbb{R}^n$ *halmaz egy* sáv*ban van, ha léteznek*

olyan $c, d \in \mathbb{R}$ konstansok és $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ nem nulla vektor, amelyekre $c \leq \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x} \leq d$, $\forall \boldsymbol{x} \in D$.

Következzen az első lemma.

2.6. Lemma. *Ha az $S(\boldsymbol{x})$ nem-elfajult, akkor a $\bar{D}$ halmazt nem tartalmazhatja egy sáv.*

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, vagyis léteznek olyan $c, d \in \mathbb{R}$ konstansok és $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ nem nulla vektor, melyre $c \leq \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x} \leq d$, $\forall \boldsymbol{x} \in \bar{D}$. Rögzítsünk egy ilyen $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ vektort, és válasszuk hozzá a lehető legnagyobb c-t, illetve legkisebb d-t, vagyis legyen $c_0 = \sup\{c \in \mathbb{R} \mid c \leq \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in D\}$, valamint $d_0 = \inf\{d \in \mathbb{R} \mid d \geq \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \bar{D}\}$. Ezeken felül legyen A egy olyan $n \times n$-es invertálható mátrix, melyre $(A\boldsymbol{x})^{(1)} = \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, vagyis az A első sora legyen $\boldsymbol{u}^\top$.

Mivel az $S(\boldsymbol{x})$ nem-elfajult, ezért a $\Delta_K = \{\boldsymbol{\delta}^{(ii)}, i \in K\}$ halmaz lineárisan független. Legyen $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^i = (A^{-1})^\top \boldsymbol{\delta}^{(ii)}$ minden $i \in K$ esetén, vagyis $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{i\top} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\delta}^{(ii)\top} \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. A Δ_K halmaz lineáris függetlensége miatt a $\tilde{\Delta}_K = \{\tilde{\boldsymbol{\delta}}^i, i \in K\}$ halmaz is lineárisan független, így létezik olyan $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$ és $i \in K$, amelyre $\tilde{\boldsymbol{y}}^{(1)} \neq 0$, valamint $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{j\top} \tilde{\boldsymbol{y}} = 0$, minden $j \in K$ esetén, $j \neq i$, és $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{i\top} \tilde{\boldsymbol{y}} \geq 0$.

Képezzük a következő összeget: tetszőleges $\boldsymbol{x} \in \bar{D}$ esetén legyen $\boldsymbol{x} + A^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}}$. Megmutatjuk, hogy ez az összeg is eleme $\bar{D}$-nak. Tudjuk, hogy a $\bar{D}$ halmaz zárt félterek metszeteként áll elő, így azt kell ellenőriznünk, hogy teljesül-e, hogy minden $i \in K$ esetén $\gamma^{(ii)} + \boldsymbol{\delta}^{(ii)\top}(\boldsymbol{x} + A^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}}) \geq 0$. Kifejtve a zárójelet, és a második tagot tekintve azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{\delta}^{(ii)\top} A^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}} = \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{i\top}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq 0$ az $\tilde{\boldsymbol{y}}$ megválasztásából kifolyólag. Viszont mivel az $\boldsymbol{x}$-et $\bar{D}$-belinek választottuk, ezért $\gamma^{(ii)} + \boldsymbol{\delta}^{(ii)\top}(\boldsymbol{x}) \geq 0$, így a két egyenlőtlenséget összegezve látható, hogy $\boldsymbol{x} + A^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}} \in \bar{D}$. Ekkor viszont egyrészt $c_0 \leq \boldsymbol{u}^\top(\boldsymbol{x} + A^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^\top A^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x} + (A(A^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}}))^{(1)} = u^\top \boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{y}}^{(1)}$, és mivel ez tetszőleges $\boldsymbol{x} \in \bar{D}$ esetén igaz, valamint a c_0-t maximálisnak választottuk, ezért $\tilde{\boldsymbol{y}}^{(1)} \geq 0$ kell legyen, azonban $\tilde{\boldsymbol{y}}^{(1)} \neq 0$ miatt $\tilde{\boldsymbol{y}}^{(1)} > 0$ teljesül. Másrészt azonban, teljesen hasonló gondolatmenettel azt kapjuk, hogy $d_0 \geq \boldsymbol{u}^\top(\boldsymbol{x} + A^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^\top A^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{y}}^{(1)}$, vagyis $\tilde{\boldsymbol{y}}^{(1)} < 0$ kell legyen. Ezzel viszont ellentmondásra jutottunk, így igazoltuk a lemma állítását. □

Kanyarodjunk vissza egy kicsit a D halmazt meghatározó A_i hipersíkokhoz, $i \in L$. Az ezen hipersíkok által meghatározott ($S^{(ii)}(\boldsymbol{x}) \geq 0$ feltételt biztosító) zárt félterek metszetét $\bar{D}$-tal jelöltük (és ennek a belseje volt a D). Ha az L indexhalmaz helyett a K indexhalmazt tekintenénk, akkor ugyanezeket a hipersíkokat kapnánk meg, viszont mindegyiket csak egyszer. A következő lemma bizonyítása során azonban szeretnénk az összes esetet lefedni, így célszerű az ismétlődéseket is megengedni. Ha feltesszük, hogy $S(\boldsymbol{x})$ nem-elfajult, akkor a $\bar{D}$-t határoló $\hat{A}_i = A_i \cap \bar{D}$ lapok szintén $(n-1)$-dimenziósak, melyeknek az $(n-1)$-dimenziós relatív belsejük nem üres, és a D határát megkaphatjuk ezen lapok uniójaként: $\partial D = \partial \bar{D} = \cup_{i \in L} \hat{A}_i = \cup_{i \in K} \hat{A}_i$.

A második lemma előtt vezessünk be még egy fogalmat.

2.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $S(\boldsymbol{x})$-re vonatkozó eredmény* esetleges újraindexeléssel *teljesül, ha van olyan $\pi : \{1, 2, \ldots n\} \to \{1, 2, \ldots n\}$ permutáció, melyre az adott eredmény teljesül az $(S^{(\pi(i)\pi(j))}(\boldsymbol{x}))_{i,j=1,2,\ldots,n}$ függvényre.*

Ha olyan $\boldsymbol{x}$-et tekintünk, amelyre az $S(\boldsymbol{x})$ mátrix pozitív szemidefinit, akkor egyértelműen létezik szimmetrikus pozitív szemidefinit valós „négyzetgyöke", és ez az $\boldsymbol{x}$-től folytonosan függ, vagyis egyértelműen létezik olyan $s(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (a folytonosságból következően mérhető) függvény, amelyre $s(\boldsymbol{x}) = s^\top(\boldsymbol{x})$ és $S(\boldsymbol{x}) = (s(\boldsymbol{x}))^2$.

Ezen előkészítés után térjünk rá a második lemmára.

2.8. Lemma. *Ha az $S(\boldsymbol{x})$ mátrix nem-elfajult, akkor esetleges újraindexeléssel a következő alakra hozható:*

$$S(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} B_1(v_1 + \boldsymbol{u_1}^\top \boldsymbol{x}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2(v_2 + \boldsymbol{u_2}^\top \boldsymbol{x}) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & B_M(v_M + \boldsymbol{u_M}^\top \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} \in \bar{D},$$

ahol $1 \leq M \leq n$, és $i \in \{1, 2, \ldots, M\}$ esetén a B_i egy $N_i \times N_i$-es pozitív szemidefinit szimmetrikus valós mátrix $\left(\sum_{i=1}^{M} N_i = n\right)$, $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_M} \in \mathbb{R}^n$ páronként lineárisan független vektorok, és $v_1, v_2, \ldots, v_M \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Az $S(\boldsymbol{x})$ komponenseire olyan megkötéseket szeretnénk levezetni, melyek biztosítják, hogy minden $\boldsymbol{x} \in \bar{D}$ esetén az $S(\boldsymbol{x})$ mátrix pozitív szemidefinit legyen. Ennek a kívánalomnak a segítségével definiáljuk majd a B_i mátrixokat, az u_i vektorokat, valamint a v_i skalárokat, de ennek a részletezésére csak a bizonyítás végén térünk vissza.

Először az $S^{(ij)}(\boldsymbol{x})$ komponenseket és a köztük lévő kapcsolatokat vizsgáljuk. Legyen tehát $\boldsymbol{x} \in \bar{D}$, ekkor $S(\boldsymbol{x})$ pozitív szemidefinit, így vehetjük egy szimmetrikus valós „négyzetgyökét", azaz legyen $s(\boldsymbol{x})$ olyan, hogy $S(\boldsymbol{x}) = (s(\boldsymbol{x}))^2$. Írjuk ezt ki a komponensek segítségével, és az $s(\boldsymbol{x})$ szimmetriáját kihasználva alakítsuk át a kapott kifejezést:

$$S^{(ij)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} s^{(ik)}(\boldsymbol{x}) s^{(kj)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} s^{(ik)}(\boldsymbol{x}) s^{(jk)}(\boldsymbol{x}).$$

Az $S(\boldsymbol{x})$ főátlóbeli elemeire ez a következőt jelenti:

$$S^{(ii)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left(s^{(ik)}(\boldsymbol{x})\right)^2,$$

vagyis ha $S^{(ii)}(\boldsymbol{x}) = 0$, akkor $s^{(ik)}(\boldsymbol{x}) = 0, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, és így $S^{(ik)}(\boldsymbol{x}) = S^{(ki)}(\boldsymbol{x}) = 0, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ is fennáll.

Következő lépésként azt mutatjuk meg, hogy az $S^{(ij)}(\boldsymbol{x})$ függvény konstansszorosa (esetlegesen nullaszorosa) az $S^{(ii)}(\boldsymbol{x})$ függvénynek. Két esetet különböztetünk meg:

I.: $S^{(ii)}(\boldsymbol{x})$ nem konstans függvény, $i \in L$.

Mivel $S^{(ii)}(\boldsymbol{x}) = 0$ az A_i halmazon, következésképpen az $\hat{A}_i$ lapon is, ezért a bizonyítás bevezető gondolatmenete segítségével látható, hogy ekkor $S^{(ik)}(\boldsymbol{x}) = 0$ az $\hat{A}_i$ lapon, minden $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén, mivel itt az $S(\boldsymbol{x})$ mátrix pozitív szemidefinit. Az $S(\boldsymbol{x})$ mátrix nem-elfajultsága miatt az $\hat{A}_i$ egy nem üres relatív belsejű halmaz az $(n-1)$-dimenziós A_i hipersíkban. Erre az A_i hipersíkra úgy is tekinthetünk, mint a $\boldsymbol{\delta}^{(ii)}$ vektorra merőleges M_i lineáris altérnek a $\boldsymbol{\delta}^{(ii)}$ vektornak egy alkalmas konstansszorosával való eltoltjára. Mivel az $S^{(ik)}(\boldsymbol{x})$ is eltűnik a nem üres relatív belsejű $\hat{A}_i$ halmazon, ezért eltűnik az egész A_i

hipersíkon is, így azt kapjuk, hogy a $\boldsymbol{\delta}^{ik}$ vektor szintén merőleges az M_i lineáris altérre, tehát létezik olyan $c^{(ik)}$ konstans, hogy $\boldsymbol{\delta}^{(ik)} = c^{(ik)}\boldsymbol{\delta}^{ii}$. Tehát $\gamma^{(ii)} + \boldsymbol{\delta}^{(ii)\top}\boldsymbol{x} = 0 = \gamma^{(ik)} + \boldsymbol{\delta}^{(ik)\top}\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \gamma^{(ii)} + \boldsymbol{\delta}^{(ii)\top}\boldsymbol{x} = 0 = \gamma^{(ik)} + c^{(ik)}\boldsymbol{\delta}^{(ii)\top}\boldsymbol{x}$ az $\hat{A}_i$-n, ami $(n-1)$-dimenziós, így az eltűnési elv (2.1 állítás) bizonyítása során ismertetett gondolatmenethez hasonlóan azt kapjuk, hogy $\gamma^{(ik)} = c^{(ik)}\gamma^{(ii)}$, vagyis tényleg $S^{(ik)}(\boldsymbol{x}) = c^{(ik)}S^{(ii)}(\boldsymbol{x})$.

II.: $S^{(ii)}(\boldsymbol{x})$ konstans függvény, $i \in L$.

Megmutatjuk, hogy ekkor az $S^{(ik)}(\boldsymbol{x})$ szintén konstans. Mivel az $S(\boldsymbol{x})$ nemelfajult, ezért a 2.6 Lemma miatt a $\bar{D}$ halmazt nem tartalmazhatja egy sáv. Indirekt módon bizonyítunk, tegyük fel, hogy az $S^{(ik)}(\boldsymbol{x})$ függvény nem konstans. Tekintsük a következő 2×2-es almátrixot:

$$\begin{pmatrix} S^{(ii)}(\boldsymbol{x}) & S^{(ik)}(\boldsymbol{x}) \\ S^{(ki)}(\boldsymbol{x}) & S^{(kk)}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy az $S(\boldsymbol{x})$ mátrix pozitív szemidefinit lehessen, ennek a részmátrixnak is annak kell lennie. Megmutatjuk, hogy ez nem teljesül, ezáltal ellentmondásra jutva.

Két aleset lehetséges. Ha az $S^{(kk)}(\boldsymbol{x})$ szintén konstans, akkor a fenti 2×2-es mátrix determinánsa, $S^{(ii)}(\boldsymbol{x})S^{(kk)}(\boldsymbol{x}) - (S^{(ik)}(\boldsymbol{x}))^2$ tetszőlegesen nagy negatív értéket is felvehet. Valóban, mivel a $\bar{D}$ halmaz nincs egy sávban, ezért az $S^{(ik)}(\boldsymbol{x})$ függvény nem korlátos a $\bar{D}$ halmazon, és mivel ennek a négyzete negatív előjellel szerepel a determinánsban, amiben rajta kívül csak konstansok szerepelnek, ezért negatív értéket is fel tud venni, vagyis sérül a pozitív szemidefinitás.

A másik alesetben $S^{(kk)}(\boldsymbol{x})$ nem konstans, így alkalmazható rá az I. eset eredménye, vagyis létezik egy $c^{(ki)}$ konstans úgy, hogy $S^{(ki)}(\boldsymbol{x}) = c^{(ki)}S^{(kk)}(\boldsymbol{x})$. Indirekt feltevésünk alapján $S^{(ki)}(\boldsymbol{x})$ nem konstans, így $c^{(ki)} \neq 0$. A 2×2-es almátrix determinánsa most a következő alakra hozható: $S^{(ii)}(\boldsymbol{x})S^{(kk)}(\boldsymbol{x}) - (c^{(ki)}S^{(kk)}(\boldsymbol{x}))^2$. Az előző alesethez hasonlóan az $S^{(kk)}(\boldsymbol{x})$ függvény nem korlátos a $\bar{D}$ halmazon, mivel nincs benne egy sávban, így a determináns, mely az $S^{(kk)}(\boldsymbol{x})$-nek negatív főegyütthatós másodfokú függvénye, tetszőlegesen nagy

negatív értéket is felvehet, vagyis ismét sérül a pozitív szemidefinitás, ellenmondásra jutottunk.

Térjünk vissza a B_i mátrixok, u_i vektorok és v_i skalárok megválasztásához. Tekintsünk két főátlóbeli nem konstans elemet, legyenek ezek az $S^{(ii)}(\boldsymbol{x}) = \gamma^{(ii)} + \boldsymbol{\delta}^{(ii)\top}\boldsymbol{x}$, illetve $S^{(kk)}(\boldsymbol{x}) = \gamma^{(kk)} + \boldsymbol{\delta}^{(kk)\top}\boldsymbol{x}$ elemek. Ha van olyan c konstans, amire $\boldsymbol{\delta}^{(ii)} = c\boldsymbol{\delta}^{(kk)}$, de $\gamma^{(ii)} \neq c\gamma^{(kk)}$ (tehát az A_i és A_k hipersíkok párhuzamosak, de nem esnek egybe), akkor sérül az $S(\boldsymbol{x})$ nem-elfajultsága, így ez az eset nem fordulhat elő. Ha $\boldsymbol{\delta}^{(ii)} = c\boldsymbol{\delta}^{(kk)}$, akkor $S^{(ii)}(\boldsymbol{x}) = cS^{(kk)}(\boldsymbol{x})$ is teljesül. Ha $\boldsymbol{\delta}^{(ii)}$ és $\boldsymbol{\delta}^{(kk)}$ nem párhuzamosak, akkor az $S^{(ik)}(\boldsymbol{x})$ csak a 0 lehet, mert csak így lehet mindkettőnek konstansszorosa. Ugyanez a helyzet akkor is, ha az egyik főátlóbeli elem konstans, míg a másik nem.

A fentiek alapján látható, hogyan kapjuk az $S(\boldsymbol{x})$ mátrixnak az állításban szereplő blokk-alakját. Gyűjtsük össze a főátlóból a konstans tagokat, ezek kerüljenek az első blokkba. Itt az $\boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{0}$ és $v_1 = 1$ választással élhetünk, a B_1 mátrixba pedig bekerülnek a szóban forgó konstansok (a főátlójába az eddig is a főátlóban szereplő konstansok, a többi helyre pedig a megfelelő $c^{(ik)}$ együtthatók).

A többi blokk alapját pedig a $\Delta_K = \{\boldsymbol{\delta}^{(ii)}, i \in K\}$ halmaz egy-egy eleme fogja képezni. Azonos blokkba kerülnek azok az i és k indexek, amelyek esetén van olyan c, amire $S^{(ii)}(\boldsymbol{x}) = cS^{(kk)}(\boldsymbol{x})$. Az egyik $S^{(ii)}(\boldsymbol{x})$ leképezést kiválasztjuk, ebből kiolvassuk az u_j vektort és v_j skalárt ($\boldsymbol{u_j} = \boldsymbol{\delta}^{(ii)}$, $v_j = \gamma^{(ii)}$), a B_j mátrixot pedig a főátlóbeli elemek között kapcsolatot teremtő c konstansokból, valamint az azonos sorban és oszlopban lévő elemek közötti arányosságot biztosító $c^{(ik)}$ konstansokból számoljuk ki.

Így biztosítottuk, hogy a $v_j + \boldsymbol{u_j}^\top\boldsymbol{x}$ mennyiségek $\boldsymbol{x} \in \bar{D}$ esetén nemnegatívak, és ha a B_j mátrixok pozitív szemidefinitek, akkor a teljes $S(\boldsymbol{x})$ mátrix is pozitív szemidefinit lesz, ellenkező esetben azonban sérül ez a feltétel. □

Az alfejezet elején említett kanonikus alak a következő állítás következményéből fog adódni. Az állítás bizonyítása során felhasználunk egy lemmát a szimmetrikus

és pozitív definit mátrixok szimultán diagonalizálhatóságáról, melyet itt most nem bizonyítunk, csak kimondunk. A bizonyítás megtalálható a [14] könyvben, a 10.12-es alfejezetben.

2.9. Lemma. *Ha az A és B két $n \times n$-es szimmetrikus valós mátrix, továbbá a B pozitív definit is, akkor létezik olyan reguláris V mátrix, melyre a $VAV^\top$ mátrix diagonális, a $VBV^\top$ mátrix pedig az egységmátrix.*

Ezt követően rátérhetünk az említett állítás bizonyítására.

2.10. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $S(\boldsymbol{x})$ nem-elfajult, valamint hogy van olyan $\bar{\boldsymbol{x}} \in \bar{D}$ elem, hogy az $S(\bar{\boldsymbol{x}})$ pozitív definit. Ekkor létezik olyan reguláris $n \times n$-es konstans R mátrix, amely segítségével az $S(\boldsymbol{x})$ diagonalizálható:*

$$RS(\boldsymbol{x})R^\top = \begin{pmatrix} p_1 + \boldsymbol{q_1}^\top \boldsymbol{x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 + \boldsymbol{q_2}^\top \boldsymbol{x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n + \boldsymbol{q_n}^\top \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

ahol $\boldsymbol{q_i} \in \mathbb{R}^n$ vektorok és $p_i \in \mathbb{R}$ skalárok, $i = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. Mivel az $S(\boldsymbol{x})$ mátrix nem-elfajult, ezért alkalmazhatjuk az előző, 2.8 Lemmát, és kiindulhatunk az $S(\boldsymbol{x})$ ottani alakjából, amit átírhatunk a következőképpen:

$$S(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \boldsymbol{u_1}^\top \boldsymbol{x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 \boldsymbol{u_2}^\top \boldsymbol{x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_M \boldsymbol{u_M}^\top \boldsymbol{x} \end{pmatrix},$$

ahol bevezettük az $A_i = B_i v_i$, $i = 1, 2, \dots, M$ jelölést. Az első tagot nevezzük el A-nak, a másodikat pedig $B(\boldsymbol{x})$-nek, így $S(\boldsymbol{x}) = A + B(\boldsymbol{x})$.

Mivel az A mátrix szimmetrikus, ezért diagonalizálható, vagyis létezik olyan ortogonális konstans P mátrix, melyre a $C = PAP^\top$ mátrix diagonális.

Vizsgáljuk meg a $PB(\boldsymbol{x})P^\top$ mátrixot. Ez szimmetrikus, és mivel a $B(\boldsymbol{x})$ mátrix pozitív szemidefinit, és a bázistranszformáció nem változtat a definitségen, ezért a $PB(\boldsymbol{x})P^\top$ szintén pozitív szemidefinit. Mivel a $B(\boldsymbol{x})$ elemei lineáris függvények, ezért a $PB(\boldsymbol{x})P^\top$ szintén ilyen. Az előzőek alapján azt kapjuk, hogy a $PB(\boldsymbol{x})P^\top$ esetleges újraindexeléssel olyan alakú, mint a 2.8 Lemmában az $S(\boldsymbol{x})$, csak az affin függvények helyén itt lineáris függvények szerepelnek. A blokkdiagonális felírásban a szimmetrikus blokkmátrixokat jelöljük D_j-vel, míg a lineáris függvényt megadó vektorokat $\boldsymbol{w_j}$-vel, $j = 1, 2, \ldots, K$.

Így azt kaptuk, hogy esetleges újraindexeléssel a $PS(\boldsymbol{x})P^\top$ mátrix a következő alakú:

$$PS(\boldsymbol{x})P^\top = \begin{pmatrix} C_1 + D_1\boldsymbol{w_1}^\top\boldsymbol{x} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C_2 + D_2\boldsymbol{w_2}^\top\boldsymbol{x} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & C_K + D_K\boldsymbol{w_K}^\top\boldsymbol{x} \end{pmatrix},$$

ahol a C_j diagonális mátrixok a C mátrix megfelelő főátlóbeli elemeiből származnak, $j = 1, 2, \ldots, K$.

Feltevésünk szerint van olyan $\bar{\boldsymbol{x}} \in \bar{D}$, melyre az $S(\boldsymbol{x})$ pozitív definit, ezért minden $C_j + D_j\boldsymbol{w_j}^\top\bar{\boldsymbol{x}}$ is az. Válasszunk ki egy j indexet, $j \in \{1, 2, \ldots, K\}$. Használjuk fel a 2.9 Lemmát a következő szereposztással: a szimmetrikus mátrix legyen a D_j, míg a pozitív definit mátrix legyen a $C_j + D_j\boldsymbol{w_j}^\top\bar{\boldsymbol{x}}$. Ekkor a lemma állítása szerint van olyan R_j invertálható, $n_j \times n_j$ (a C_j és D_j mátrixok méretével megegyező) méretű mátrix, amelyre $I_{n_j} = R_j(C_j + D_j\boldsymbol{w_j}^\top\bar{\boldsymbol{x}})R_j^\top$ az egységmátrix, valamint a $\tilde{D}_j = R_jD_jR_j^\top$ diagonális.

Át szeretnénk térni a speciálisan megválasztott $\bar{\boldsymbol{x}}$-ről egy tetszőleges $\boldsymbol{x}$-re. Ehhez írjuk fel a következő azonosságot:

$$C_j + D_j\boldsymbol{w_j}^\top\boldsymbol{x} = (C_j + D_j\boldsymbol{w_j}^\top\bar{\boldsymbol{x}}) + D_j(\boldsymbol{w_j}^\top\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w_j}^\top\bar{\boldsymbol{x}}).$$

Alkalmazzuk az R_j által indukált bázistranszformációt:

$$R_j(C_j + D_j\boldsymbol{w_j}^\top \boldsymbol{x})R_j^\top = R_j(C_j + D_j\boldsymbol{w_j}^\top \bar{\boldsymbol{x}})R_j^\top + R_jD_j(\boldsymbol{w_j}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{w_j}^\top \bar{\boldsymbol{x}})R_j^\top =$$
$$= I_{n_j} + R_jD_jR_j^\top(\boldsymbol{w_j}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{w_j}^\top \bar{\boldsymbol{x}}) = (I_{n_j} - \tilde{D}_j\boldsymbol{w_j}^\top \bar{\boldsymbol{x}}) + \tilde{D}_j\boldsymbol{w_j}^\top \boldsymbol{x}.$$

Mivel az I_{n_j} egységmátrix mellett a $\tilde{D}_j$ mátrix is diagonális, ezért azt kaptuk, hogy az R_j mátrix által meghatározott bázistranszformáció után a $C_j + D_j\boldsymbol{w_j}^\top \boldsymbol{x}$ blokk diagonálissá vált, és a főátlóban affin függvények szerepelnek.

Ennek segítségével már le tudjuk gyártani az állításban szereplő R mátrixot. Először tekintsük a következő, R_0-lal jelölt blokkmátrixot:

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_K \end{pmatrix}.$$

Az R_0 által meghatározott bázistranszformáció segítségével sikerült diagonalizálni a $PS(\boldsymbol{x})P^\top$ mátrixot. Vegyük hozzá az R_0-hoz a P-t is, és legyen $R = R_0P$. Az ezzel az R-rel végzett bázistranszformáció épp a kívánt alakra hozza az $S(\boldsymbol{x})$ mátrixunkat.

□

Ezen állítás következménye jelenti az utolsó lépést a faktorok alakulását leíró sztochasztikus differenciálegyenlet kanonikus alakjának felírásában.

2.11. Következmény. *Ha teljesülnek a 2.10 állítás feltételei, akkor a $\sigma(\boldsymbol{x})$ függvény a következő alakú:*

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \Sigma \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_1 + \boldsymbol{\delta_1}^\top \boldsymbol{x}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2 + \boldsymbol{\delta_2}^\top \boldsymbol{x}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\gamma_n + \boldsymbol{\delta_n}^\top \boldsymbol{x}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} \in \bar{D},$$

ahol $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konstans mátrix, $\boldsymbol{\delta_i} \in \mathbb{R}^n$ konstans vektorok, valamint γ_i valós számok, $i = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. A 2.10 állítás alapján legyen R egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $RS(\boldsymbol{x})R^\top$ diagonális, és a főátlóban $\boldsymbol{x}$-nek affin függvényei szerepelnek. Írjuk fel ezt a mátrixot a következő alakban:

$$RS(\boldsymbol{x})R^\top = \begin{pmatrix} \gamma_1 + \boldsymbol{\delta_1}^\top \boldsymbol{x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 + \boldsymbol{\delta_2}^\top \boldsymbol{x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n + \boldsymbol{\delta_n}^\top \boldsymbol{x} \end{pmatrix}.$$

Mivel a pozitív szemidefinitás a transzformáció után is megmarad, ezért a főátlóban lévő elemek $\boldsymbol{x} \in \bar{D}$ esetén nemnegatívak. Így vehetjük a gyököket, és az $S(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{x})\sigma(\boldsymbol{x})^\top$ alakot behelyettesítve a következő adódik:

$$R\sigma(\boldsymbol{x})\sigma(\boldsymbol{x})^\top R^\top = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_1 + \boldsymbol{\delta_1}^\top \boldsymbol{x}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2 + \boldsymbol{\delta_2}^\top \boldsymbol{x}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\gamma_n + \boldsymbol{\delta_n}^\top \boldsymbol{x}} \end{pmatrix}^2.$$

Így az $\Sigma = R^{-1}$ választással azonnal megkapjuk a kívánt alakot. □

Foglaljuk össze az eddigi eredményeinket. A következő tételt bizonyítottuk be az előző lemmákon és állításokon keresztül:

2.12. Tétel. *Affin lejárati szerkezet esetén megmutatható, hogy bizonyos technikai feltételek (nem-degeneráltság, nem-elfajultság) mellett a faktorok (esetleges újraindexeléssel) a következő alakú sztochasztikus differenciálegyenletet elégítik ki:*

$$d\boldsymbol{X}_t = (A\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{b})dt + \Sigma \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_1 + \boldsymbol{\delta_1}^\top \boldsymbol{X}_t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2 + \boldsymbol{\delta_2}^\top \boldsymbol{X}_t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\gamma_n + \boldsymbol{\delta_n}^\top \boldsymbol{X}_t} \end{pmatrix} d\boldsymbol{W}_t,$$

ahol $\boldsymbol{X}_0 \in D$, $\boldsymbol{W}_t$ egy n-dimenziós standard Wiener-folyamat (a $\mathbb{Q}$ mérték szerint), az együtthatók rendre a következő alakúak: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{\delta_i} \in \mathbb{R}^n$, és a D halmaz pedig a $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \gamma_i + \boldsymbol{\delta_i}^\top \boldsymbol{x} > 0\}$ nyílt félterek metszetéből áll, $i = 1, 2, \dots, n$.

Sikerült a faktorok egyenletét kanonikus alakra hozni, viszont még nem esett szó az egyenlet megoldhatóságáról. A következő tétel erről szól. A bizonyítást mellőzzük (megtalálható Duffie és Kan [10] cikkének függelékében), de a tételben szereplő feltételek szükségességéhez szemléletes indoklást fűzünk.

2.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy a faktorok alakulását a 2.12 tételben szereplő sztochasztikus differenciálegyenlet adja meg. Tegyük fel továbbá, hogy teljesül a következő két feltétel minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén:*

(i) Ha egy $\boldsymbol{x}$-re $\gamma_i + \boldsymbol{\delta_i}^\top \boldsymbol{x} = 0$, akkor $\boldsymbol{\delta_i}^\top (A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) > \boldsymbol{\delta_i}^\top \Sigma\Sigma^\top \boldsymbol{\delta_i}/2$;

(ii) Ha $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $(\boldsymbol{\delta_i}\Sigma)_j \neq 0$, akkor $\gamma_i + \boldsymbol{\delta_i}^\top \boldsymbol{x} = \gamma_j + \boldsymbol{\delta_j}^\top \boldsymbol{x}$.

Ekkor az egyenletnek létezik egyértelmű (erős) megoldása a D halmazon, és 1 valószínűséggel minden $t > 0$ esetén $\gamma_i + \boldsymbol{\delta_i}^\top \boldsymbol{x} > 0$, minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

A fenti tételben szereplő feltételek biztosítják azt, hogy a $\partial D_i = \{\boldsymbol{x} \in \bar{D} \mid \gamma_i + \boldsymbol{\delta_i}\boldsymbol{x} = 0\}$ határon kellően nagy driftje legyen a folyamatnak ahhoz, hogy a volatilitástagok a pozitív tartományban maradjanak.

A feltételek közül az (i) technikai jellegűbb, Ikeda és Watanabe [15] könyvében található egyváltozós feltétel többdimenziós megfelelője. Biztosítja, hogy az állapottér határának közelében kellően erős legyen a drift, hogy a folyamat vissza tudjon fordulni. A (ii) feltétel azt biztosítja, hogy ha az i. volatilitástag 0 (a ∂D_i határon), akkor egy másik, j. volatilitástaggal való összefüggése nem lendíti át a negatív tartományba.

Zárásként megjegyezzük, hogy sztochasztikus volatilitás esetén mindig legyártható úgy a rövid kamatlábat a faktorok segítségével megadó $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ affin függvény, hogy az pozitív legyen. Például a $\sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma_i + \boldsymbol{\delta_i}^\top \boldsymbol{x})$, $\alpha_i > 0$ függvény megfelel, mert $\boldsymbol{X}_t \in D$ esetén $(\gamma_i + \boldsymbol{\delta_i}^\top \boldsymbol{X}_t) > 0$, vagyis $r_t = \rho(\boldsymbol{X}_t, t) > 0$. Ha a volatilitás konstans, akkor a D halmaz a teljes $\mathbb{R}^n$, így ekkor a faktorok affin függvényei (és így maga az r_t is) negatív értéket is felvehetnek.

A következő fejezetben azt vizsgáljuk majd, hogy a faktorok különféle megválasztásával milyen modelleket kaphatunk.

3. fejezet

Faktorválasztás

A fejezet célja, hogy az eddigi absztrakt faktorokból építkező többfaktoros kamatlábmodellt kicsit megfoghatóbbá tegye, és egyúttal bemutassa sokoldalúságát is. Első lépésben bemutatjuk, hogy néhány klasszikusnak számító modell hogyan ágyazható be az előző fejezetben felépített affin lejárati szerkezetű többfaktoros modellbe. A második szakaszban egy más jellegű faktorválasztást mutatunk be: az affin lejárati szerkezet miatt lineáris transzformációval az absztrakt faktorainkat az elemi kötvények lejáratig számított hozamainak feleltetjük meg, kiemelve így az affin eset gyakorlati hasznosságát. A harmadik szakaszban pedig egy speciális háromfaktoros modellt mutatunk be, amely ugyancsak magába foglal több klasszikus kamatlábalakulást leíró modellt, és amelyet a következő fejezetben alaposabban is megvizsgálunk.

3.1. Klasszikus modellek

Ebben a szakaszban a kamatlábmodellek fejlődése során létrejött fontosabb modellek közül említünk meg néhányat, amelyek beleférnek az előző fejezetben felépített faktormodellbe. Ellenőrizzük továbbá azt is, hogy teljesülnek-e a 2.13 tételben szereplő feltételek, és ennek segítségével mit mondhatunk a megoldás egyértelműségéről.

3.1.1. A Merton-modell

Merton [19] cikkében a vállalati hitelezést vizsgálta sztochasztikus kamatlábak mellett. A rövid kamatláb alakulásának leírására a következő modellt vezette be:

$$dr_t = \theta dt + \sigma dW_t, \quad r_0 > 0,$$

ahol $\theta, \sigma > 0$ konstansok, valamint a W_t egydimenziós Wiener-folyamat (a $\mathbb{Q}$ mérték alatt). Ezt a modellt tekinthetjük egy egyfaktoros modellnek, melyben a következőképpen választjuk a faktort, az együtthatókat és az értelmezési tartományt:

$$\begin{array}{rclrclrcl} X_t & = & r_t; & b & = & \theta; & \gamma & = & 1; \\ A & = & 0; & \Sigma & = & \sigma; & \delta & = & 0. \end{array}$$

A D állapottér a teljes $\mathbb{R}$-rel egyenlő. Vizsgáljuk meg, hogy teljesülnek-e a modell paramétereire a 2.13 tétel feltételei. Mivel $\gamma = 1, \delta = 0$, ezért mindkét feltétel teljesül, és így van egyértelmű (erős) megoldása az egyenletnek.

3.1.2. A Vasicek-modell

Vasicek [23] cikkében a kamatlábalakulást egy Ornstein-Uhlenbeck folyamattal reprezentálja. A modell szokásos paraméterezése a következő:

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad r_0 > 0,$$

ahol $k, \theta, \sigma > 0$ konstansok, illetve a W_t ismét egydimenziós Wiener-folyamat (a $\mathbb{Q}$ mérték alatt). Ez a modell is belefér az általunk felépített modellkeretbe a következő faktor- és paraméterválasztással:

$$\begin{array}{rclrclrcl} X_t & = & r_t; & b & = & k\theta; & \gamma & = & 1; \\ A & = & -k; & \Sigma & = & \sigma; & \delta & = & 0. \end{array}$$

Ismét egy egyfaktoros modellt kaptunk, aminek a D állapottere szintén a teljes $\mathbb{R}$. Mivel a δ itt is 0, ezért teljesülnek a 2.13 tétel feltételei, tehát ennek az egyenletnek is van egyértelmű (erős) megoldása.

A többfaktoros modellkeretből kézenfekvő módon adódik az egyfaktoros Vasicek-modell kiterjeszthetősége. A $\boldsymbol{\delta_i}$ vektorokat válasszuk $\mathbf{0}$-nak, ekkor az $\boldsymbol{X}_t$ folyamat volatilitása konstans lesz. A rövid kamatlábat természetesen a faktorok affin kombinációjából kapjuk.

3.1.3. A Cox-Ingersoll-Ross modell

Cox, Ingersoll és Ross az egymást követő [6] és [7] cikkeiben megjelent kamatlábmodell az előző modellekkel ellentétben nemnegatív rövid kamatlábat eredményez. Írjuk fel a rövid kamatláb alakulást megadó egyenletet a szokásos paraméterekkel:

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad r_0 > 0,$$

ahol $k, \theta, \sigma > 0$ konstansok, és a W_t egy $\mathbb{Q}$ mérték alatti Wiener-folyamat. Nézzük meg, hogy milyen paraméterválasztással illeszthető be a többfaktoros keretünkbe (az egyedüli faktor ismét a rövid kamatláb lesz):

$$\begin{array}{rclrclrcl} X_t & = & r_t; & b & = & k\theta; & \gamma & = & 0; \\ A & = & -k; & \Sigma & = & \sigma; & \delta & = & 1. \end{array}$$

Ennél a folyamatnál már nem konstans a volatilitás, így a D állapottér is leszűkül, az előző modellekkel szemben már csak $D = (0, \infty)$.

Ennél a modellnél már nem semmitmondók a 2.13 tétel feltételei. A (ii) feltétel ugyan automatikusan teljesül, mivel csak egy faktorunk van, de az (i) feltétel teljesüléséhez a konstansokra a következő összefüggésnek kell teljesülni: $k\theta > \sigma^2/2 \Leftrightarrow 2k\theta > \sigma^2$. Ez a feltétel biztosítja, hogy az r_t ne vegye fel a 0 értéket.

3.2. Affin hozam-faktor modell

Térjünk át most egy más jellegű faktorválasztásra. Az eddigi faktorválasztásoktól eltérően most a rövid kamatlábat nem szerepeltetjük a faktorok között. Ahogy

a bevezetőben említettük, az affin szerkezetet kihasználva az absztrakt faktorainkat egy lineáris transzformációval le szeretnénk cserélni különböző lejárati időponttal rendelkező elemi kötvények lejáratig számított hozamára, mivel az a piaci információk alapján könnyebben megismerhetőnek tekinthető. A modell felépítését Duffie és Kan [10] cikke alapján végezzük, de mint az előző fejezetben, kiindulásként nem követeljük meg a kötvényárak időhomogenitását.

Tekintsünk tehát n darab különböző lejárati időpontot, legyenek ezek rendre $T_1, T_2, \ldots, T_n$. A lejáratig hátralévő időt jelölje $\tau_i = T_i - t$. A T időpontban lejáró elemi kötvény árfolyamát a t $(t < T)$ időpontban a $V(\boldsymbol{x}, t, T)$ függvény adta meg. Affin lejárati szerkezet esetén ez a következő alakot öltötte:

$$V(\boldsymbol{x}, t, T) = \exp(A(t,T) + B(t,T)^\top \boldsymbol{x}), \quad V(\boldsymbol{x}, T, T) = 1, \quad \boldsymbol{x} \in D. \tag{3.1}$$

A T_i-ben lejáró kötvény lejáratig számított hozamát jelöljük y_i-vel, ekkor:

$$p(t, T_i) = \exp(-(T_i - t) y_i) \quad \Leftrightarrow \quad y_i = -\frac{\ln p(t, T_i)}{T_i - t} = -\frac{\ln p(t, T_i)}{\tau_i}.$$

A (3.1) formulát használva, a $p(t, T_i)$ árakat az $\boldsymbol{x}$ függvényében kifejezve a következőket kapjuk, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$y_i = -\frac{\ln V(\boldsymbol{x}, t, T_i)}{\tau_i} = -\frac{-A(t,T_i) - B(t,T_i)^\top \boldsymbol{x}}{\tau_i} = -\frac{A(t,T_i)}{\tau_i} - \frac{B(t,T_i)^\top}{\tau_i} \boldsymbol{x}. \tag{3.2}$$

Készítsük el a következő vektort és mátrixot:

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} -\frac{A(t,T_1)}{\tau_1} \\ -\frac{A(t,T_2)}{\tau_2} \\ \vdots \\ -\frac{A(t,T_n)}{\tau_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad K = \begin{pmatrix} -\frac{B(t,T_1)^\top}{\tau_1} \\ -\frac{B(t,T_2)^\top}{\tau_2} \\ \vdots \\ -\frac{B(t,T_n)^\top}{\tau_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Ezek segítségével a (3.2) összefüggés a következő módon írható fel:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{k} + K\boldsymbol{x}. \tag{3.3}$$

Ha teljesülnek a nem-degeneráltsági feltételek (2.2), akkor a $T_1, T_2, \ldots, T_n$ lejárati időpontok úgy is megválaszthatók, hogy a $B(t,T_1), B(t,T_2), \ldots, B(t,T_n)$ vektorok lineárisan függetlenek legyenek. Mivel korábban is már szükséges volt a nem-degeneráltsági feltételek teljesülését megkövetelni, és ez nem jelenti az általánosság

túlzott megszorítását, ezért most is feltesszük, és így választjuk meg a $T_1, T_2, \ldots, T_n$ időpontokat. Ekkor a K mátrix invertálható, és az $\boldsymbol{x}$-et is ki tudjuk fejezni egyértelműen az $\boldsymbol{y}$ segítségével a (3.3) összefüggésből:

$$\boldsymbol{x} = K^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k}).$$

Helyettesítsük be ezt a (3.1) egyenletbe. Jelöljük a kapott függvényt $\tilde{V}(\boldsymbol{y}, t, T)$-mal.

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\boldsymbol{y}, t, T) &= \exp(A(t,T) + B(t,T)^\top (K^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k}))) = \\ &= \exp((A(t,T) - B(t,T)^\top K^{-1}\boldsymbol{k}) + (B(t,T)^\top K^{-1})\boldsymbol{y}) = \\ &= \exp(\tilde{A}(t,T) + \tilde{B}(t,T)^\top \boldsymbol{y}),\end{aligned}$$

ahol bevezettük a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(t,T) &= (A(t,T) - B(t,T)^\top K^{-1}\boldsymbol{k}, \\ \tilde{B}(t,T) &= (K^{-1})^\top B(t,T).\end{aligned}$$

Tehát az $\boldsymbol{y}$ változóra áttérve egy hasonló alakú árazófüggvényt kaptunk, mint az $\boldsymbol{x}$ változó esetén. Ki szeretnénk számítani a $B(t,T)^\top K$ sorvektort a $T = T_1, T_2, \ldots, T_n$ pontokban. Ehhez idézzünk fel egy összefüggést.

3.1. Lemma. *Legyenek $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n} \in \mathbb{R}^n$ lineárisan független vektorok. Képezzük az U vektort az $\boldsymbol{u_i}^\top$ vektorok $c_i \neq 0$ konstansszorosaiból:*

$$U = \begin{pmatrix} c_1\boldsymbol{u_1}^\top \\ c_2\boldsymbol{u_2}^\top \\ \vdots \\ c_n\boldsymbol{u_n}^\top \end{pmatrix}$$

Ekkor $\boldsymbol{u_i}^\top U^{-1} = \frac{1}{c_i}\boldsymbol{e_i}^\top$, ahol az $\boldsymbol{e_i}$ az i. egységvektor, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Bizonyítás. Mivel az $\boldsymbol{u_i}$ vektorok lineárisan függetlenek, ezért az U mátrix invertálható. Az U mátrix konstrukciója miatt $\boldsymbol{e_i}^\top U = c_i\boldsymbol{u_i}^\top$. Szorozzunk be jobbról U^{-1}-zel: $\boldsymbol{u_i}^\top U^{-1} = \frac{1}{c_i}\boldsymbol{e_i}^\top$, és végeztünk is a bizonyítással. □

Alkalmazzuk ezt a lemmát a lineárisan független $B(t,T_1), B(t,T_2), \ldots, B(t,T_n)$ vektorokra és a $-\frac{1}{\tau_1}, -\frac{1}{\tau_2}, \ldots, -\frac{1}{\tau_n}$ konstansokra. Azt kapjuk, hogy $B(t,T_i)^\top K^{-1} = -\tau_i e_i^\top$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

A $V(\boldsymbol{x}, T, T) = 1$ peremfeltételből az eltűnési elvet (2.1) használva azt kaptuk, hogy $A(T,T) = 0, B(T,T) = 0$, ezért $\tilde{A}(T,T) = 0, \tilde{B}(T,T) = 0$, $T > 0$. Viszont most többletfeltételeket is kapunk $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén:

$$\tilde{A}(t,T_i) = A(t,T_i) - B(t,T_i)^\top K^{-1}\boldsymbol{k} = A(t,T_i) + \tau_i e_i^\top \boldsymbol{k} = A(t,T_i) + \tau_i \frac{A(t,T_i)}{-\tau_i} = 0$$

$$\tilde{B}(t,T_i)^\top = B(t,T_i)^\top K^{-1} = -\tau_i \boldsymbol{e_i}^\top.$$

Ezen kiegészítő peremfeltételek segítségével már van remény arra, hogy az elemi kötvény árazásához használt (2.12) és (2.13) egyenleteket egyértelműen meg tudjuk oldani, anélkül, hogy a 2.2 szakasz végén található okfejtés szerinti kiegészítő feltételezésekkel élnénk. Világos a mögöttes intuíció: az absztrakt faktorokról áttértünk a piaci információkat használó faktorokra, így a modellünk már nem csak a $\mathbb{Q}$ mértéken keresztül kapcsolódik a piaci termékekhez, ezért meghatározhatja azok áralakulását.

Fel kell még írnunk az új faktorok, vagyis az $\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{k} + K\boldsymbol{X}_t$ alakulását megadó sztochasztikus differenciálegyenletet. Az eredeti D állapottér a transzformáció hatására a $\tilde{D} = \{\boldsymbol{k} + K\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in D\}$ halmazra módosul, ami továbbra is $\mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaza. Alkalmazzuk tehát az Itô-formulát a $\boldsymbol{X}_t$ folyamatra és az $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k} + K\boldsymbol{x}$ transzformációra. A parciális deriváltak:

$$f_t(\boldsymbol{x}) = 0, \quad f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = K, \quad f_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = 0,$$

így a transzformált folyamat egyenlete a következő alakot ölti:

$$d\boldsymbol{Y}_t = df(\boldsymbol{X}_t) = f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}_t)d\boldsymbol{X}_t = K\left(\mu(\boldsymbol{X}_t)dt + \sigma(\boldsymbol{X}_t)d\boldsymbol{W}_t\right).$$

A jobb oldalt át szeretnénk alakítani úgy, hogy az $\boldsymbol{X}_t$ folyamat helyett az $\boldsymbol{Y}_t$ folyamat szerepeljen.

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{Y}_t &= K\left[\mu\left(K^{-1}(\boldsymbol{Y}_t - \boldsymbol{k})\right)dt + \sigma\left(K^{-1}(\boldsymbol{Y}_t - \boldsymbol{k})\right)d\boldsymbol{W}_t\right] \\ &= K\left[\mu\left(K^{-1}\boldsymbol{Y}_t - K^{-1}\boldsymbol{k}\right)dt + \sigma\left(K^{-1}\boldsymbol{Y}_t - K^{-1}\boldsymbol{k}\right)d\boldsymbol{W}_t\right]. \end{aligned}$$

Az jelölések egyszerűsítése érdekében vezessük be a következő függvényeket:

$$\tilde{\mu}(\boldsymbol{y}) = K\mu\left(K^{-1}\boldsymbol{y} - K^{-1}\boldsymbol{k}\right),$$
$$\tilde{\sigma}(\boldsymbol{y}) = K\sigma\left(K^{-1}\boldsymbol{y} - K^{-1}\boldsymbol{k}\right).$$

Mivel affin modellből indultunk ki, a 2.12 tétel alapján tudjuk, hogy milyen alakú a μ és σ függvény. Ha elvégezzük a fenti transzformációkat, a $\tilde{\mu}$ és $\tilde{\sigma}$ függvények ugyanilyen alakúak maradnak, összhangban azzal, hogy továbbra is affin lejárati szerkezetű modellel van dolgunk.

Az előbb bevezetett $\tilde{\mu}$ és $\tilde{\sigma}$ függvények segítségével az $\boldsymbol{Y}_t$ faktorok differenciálegyenletét a következő alakra hozhatjuk:

$$d\boldsymbol{Y}_t = \tilde{\mu}(\boldsymbol{Y}_t)dt + \tilde{\sigma}(\boldsymbol{Y}_t)d\boldsymbol{W}_t, \qquad \boldsymbol{Y}_0 = \boldsymbol{k} + K\boldsymbol{X}_0.$$

Foglaljuk össze, hogyan jártunk el ebben a szakaszban: kiindultunk egy absztrakt faktorokat tartalmazó modellből, majd lineáris transzformációval lecseréltük az absztrakt faktorainkat a piaci adatokból megismerhető lejáratig számított hozamokra. Az összképet azonban beárnyékolja egy tényező, mégpedig a K mátrix. Ennek a felírásához ismerni kell a $B(t,T_1), B(t,T_2), \ldots, B(t,T_n)$ vektorokat, amiket a (2.13) egyenlet megoldásából kaphatunk meg. Ahhoz viszont ismernünk kell az eredeti modellben szereplő μ és σ függvényeket is, nem elég csak a transzformált modellt kalibrálni. Ezért célravezetőbbnek tűnik az a gondolat, hogy absztrakt faktorok helyett eleve a lejáratig számított hozamokból, mint faktorokból induljunk ki, mellőzve a transzformálás által okozott problémákat. Kétfaktoros esetben (melyben az egyik faktor a rövid kamatláb, a másik pedig a lejáratig számított hozam) erre az eljárásra található egy kidolgozott példa Duffie és Kan [10] cikkében.

3.3. A Chen-féle háromfaktoros kamatlábmodell

Ebben a szakaszban a Chen-féle háromfaktoros modellt mutatjuk be. Eredetileg a [4] cikkben jelent meg a modell, majd a [3] könyvben a modell ismertetésén

túl különféle alkalmazásait is bemutatja a szerző. A modell összesen 10 paraméterrel rendelkezik, így kellően rugalmas ahhoz, hogy jól kalibrálható legyen a piacon megfigyelhető adatok alapján.

3.3.1. Motiváció, kapcsolat más kamatlábmodellekkel

Az ismertetésre kerülő modell három faktorból építkezik: a rövid kamatlábból, a rövid kamatláb rövid távú egyensúlyi értékéből, valamint a rövid kamatláb volatilitásából. A rövid kamatlábon túl a másik két faktor alakulásáról is sztochasztikus dinamikát tételezünk fel.

Empirikus vizsgálatokkal azt találták, hogy a rövid kamatlábra jellemző egy bizonyos egyensúlyi érték körüli ingadozás, amit átlaghoz való visszahúzásnak hívnak. Azonban ez az egyensúlyi érték nem feltétlenül időben állandó mennyiség, amint azt például a Chan, Karolyi, Longstaff és Sanders által írt [16] cikkben megmutatták. Ezért célravezetőnek tűnik olyan modellt tekinteni, amelyben a rövid kamatláb egy időben lassabban változó érték körül ingadozik, és ezt a rövid távú egyensúlyi értéket modellezni egy olyan folyamattal, mely ennek egy hosszú távú konstans egyensúlyi értékhez való visszahúzását biztosítja.

Ugyancsak empirikus vizsgálatok alapján találták azt is, hogy a rövid kamatláb volatilitása sem állandó időben. A rövid kamatláb eloszlásában megjelenő vastag szélek sztochasztikus volatilitásra engednek következtetni. A volatilitás sztochasztikus modellezése közvetlenül megjelenik a modellben, mivel központi szerep jut számára két fontos probléma kezelésében is: egyrészt a kamatláb-derivatívák értékelésében, másrészt a kamatlábkockázat fedezésében. A volatilitás a sztochasztikus dinamikán túl ugyancsak rendelkezik az átlaghoz való visszahúzás jellegével, amint arra rávilágít Litterman és Scheinkman [17] cikke. Célszerű választásnak tűnik ezek alapján a rövid kamatláb volatilitását négyzetgyökös diffúzión (CIR folyamat) keresztül modellezni. Így az átlaghoz való visszahúzáson túl a pozitív tartományban marad a volatilitás, ellentétben a Stein és Stein [22] cikkében bemutatott, Ornstein-Uhlenbeck folyamatra épülő modellel, mely negatív volatilitást is eredményezhet, vagy a Heston [13]

cikkében kidolgozott lognormális folyamatból származó volatilitással, amely viszont nem átlaghoz visszahúzó.

A rendelkezésre álló 10 paraméter megválasztásával több klasszikus rövidkamatláb-modell is megkapható: a 3.1 alszakaszban bemutatott modelleken túl például a Dothan [8] cikkében bemutatott modell, a Brennan-Schwartz [1] cikkében szereplő kétfaktoros modell vagy a Longstaff-Schwartz által a [18] cikkben tárgyalt, szintén kétfaktoros modell.

A motivációs bevezető után rátérhetünk a modell ismertetésére.

3.3.2. A modell bemutatása

Legyen $\boldsymbol{B} = (B^1, B^2, B^3)$ egy háromdimenziós Wiener-folyamat a $\mathbb{Q}$ kockázatsemleges mérték szerint, melynek koordinátái korreláltak a következő pillanati korrelációstruktúra szerint:

$$\begin{aligned} dB_t^{(1)} dB_t^{(2)} &= \rho^{(12)} dt, \\ dB^{(1)} dB^{(3)} &= \rho^{(13)} dt, \\ dB^{(2)} dB^{(3)} &= \rho^{(23)} dt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

A $\rho^{(12)}$, $\rho^{(13)}$, $\rho^{(23)}$ (-1 és 1 közötti) konstansokat csak úgy választhatjuk meg, hogy a belőlük képzett

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho^{(12)} & \rho^{(13)} \\ \rho^{(12)} & 1 & \rho^{(23)} \\ \rho^{(13)} & \rho^{(23)} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

mátrix pozitív szemidefinit kell legyen.

Jelölje szokás szerint $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ a $\boldsymbol{B}$ folyamat által generált filtrációt. Feltesszük, hogy a filtráció egy $\mathcal{F}_t$ elemét úgy interpretálhatjuk, mint a piaci információk összességét az adott $t > 0$ időpontig. A kockázatsemleges mérték szerint vett feltételes várható értéken alapuló árazási formulában e szerint vesszük a feltételes várható értéket.

A modellben szereplő három faktor dinamikáját a következő egyenletek határozzák meg:

1. A rövid kamatlábat jelölje szokásosan r_t. Egyenlete a következő alakú:

$$dr_t = k(\theta_t - r_t)dt + \sqrt{v_t}\sqrt{r_t}dB_t^{(1)}, \quad r_0 > 0, \tag{3.6}$$

   ahol θ_t a rövid kamatláb rövid távú egyensúlyi értéke, valamint v_t a rövid kamatláb volatilitása (az alakulásukat leíró egyenleteket a 2. és 3. pontban ismertetjük), illetve a $k > 0$ konstans.

2. A rövid kamatláb rövid távú egyensúlyi értékének, a θ_t-nek az alakulását a következő egyenlet adja meg:

$$d\theta_t = \mu(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \zeta\sqrt{\theta_t}dB_t^{(2)}, \quad \theta_0 > 0, \tag{3.7}$$

   ahol a $\bar{\theta} > 0$ a rövid távú kamatláb hosszú távú egyensúlyi értéke, a $\mu > 0$ konstans a rövid távú átlag hosszú távú átlaghoz való konvergenciájának sebessége, valamint a $\zeta > 0$ konstans a rövid távú átlag volatilitását határozza meg.

3. A rövid kamatláb volatilitása, v_t a következő egyenletet elégíti ki:

$$dv_t = \nu(\bar{v} - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}dB_t^{(3)}, \quad v_0 > 0, \tag{3.8}$$

   ahol a $\bar{v} > 0$ konstans a rövid kamatláb volatilitásának hosszú távú átlaga, a $\nu > 0$ konstans a volatilitás hosszú távú átlaghoz való visszahúzásának sebességét jellemzi, valamint az $\eta > 0$ konstans a rövid kamatláb volatilitásának volatilitását adja meg.

Legyen $\boldsymbol{W} = (W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)})$ egy háromdimenziós standard Wiener-folyamat, ugyancsak a $\mathbb{Q}$ mérték szerint. Ekkor a (3.5) korrelációs struktúrát figyelembe véve a következő formális azonosság írható fel:

$$d\boldsymbol{B}_t = Sd\boldsymbol{W}_t,$$

ahol bevezettük az S jelölést a (3.5)-ben szereplő R mátrix egyértelmű pozitív szemidefinit négyzetgyökére.

Az alszakasz zárásaként felírjuk még, hogy milyen $\mu(\boldsymbol{x})$ és $\sigma(\boldsymbol{x})$ választással írja le az (2.2) dinamika az előbb ismertetett modellt. A három faktor nyilvánvalóan az $X_t^{(1)} = r_t$, $X_t^{(2)} = \theta_t$ és $X_t^{(3)} = v_t$. Legyenek a $\mu(\boldsymbol{x})$ és $\sigma(\boldsymbol{x})$ függvények a következő alakúak:

$$\mu(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} k(x_2 - x_1) \\ \mu(\bar{\theta} - x_2) \\ \nu(\bar{v} - x_3) \end{pmatrix}, \quad \sigma(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_3}\sqrt{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \zeta\sqrt{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \nu\sqrt{x_3} \end{pmatrix} S.$$

Ekkor a

$$d\boldsymbol{X}_t = \mu(\boldsymbol{X}_t)dt + \sigma(\boldsymbol{X}_t)d\boldsymbol{W}_t, \quad \boldsymbol{X}_0 = (r_0, \theta_0, v_0)^\top,$$

dinamika ugyanazokat a folyamatokat határozza meg, mint a (3.6)-(3.8) egyenletek. Ebből a felírásból világosan látszik, hogy a háromfaktoros modell Markov-folyamatot határoz meg, ami egyrészt a különféle kamatderivatívák árazásánál fontos szerepet tölt majd be, másrészt pedig összhangban áll a hatékony piacok hipotézisével.

Látható, hogy a $\mu(\boldsymbol{x})$ affin függvény, azonban a $\sigma(\boldsymbol{x})\sigma(\boldsymbol{x})^\top$ függvény nem lineáris függvény (két változót összeszorzunk), így a Chen-féle háromfaktoros modell a 2.12 tétel alapján nem affin lejárati szerkezetű kamatlábmodell.

A következő fejezetben illusztráljuk, hogyan alkalmazható ez a modell különféle kamatderivatívák árazására. Levezetünk egy általános árazó egyenletet, majd megvizsgáljuk, hogy mi a helyzet a különféle piaci termékek esetén.

4. fejezet

Kötvény- és opcióárazás a Chen-féle háromfaktoros kamatlábmodellben

4.1. Fundamentális árazóegyenlet

Ebben a szakaszban a háromfaktoros Chen-modell segítségével speciális kifizetésstruktúrával rendelkező kamatlábtermékekre levezetünk egy peremfeltételekkel megadott parciális differenciálegyenletet, amelynek időfüggő megoldása megadja az adott termék áralakulását.

A következő kifizetésstruktúrával rendelkező termékeket szeretnénk árazni: a termék a T időpontban jár le, a kifizetéseit ekkor és esetlegesen a futamidő alatt teljesíti. A termék árazását egy adott $0 < T_0 \leq T$ időpontig tartó intervallumon szeretnénk elvégezni. A futamidő alatt esedékes teljesítéseket az intenzitásukkal jellemezzük, ehhez legyen $C = \{C_t, 0 \leq t \leq T\}$ egy olyan sztochasztikus folyamat, melyre a C_t mérhető a $\boldsymbol{B}_t$ által generált σ-algebrára nézve, ahol a modellünket meghajtó $\boldsymbol{B}_t$ Wiener-folyamat a 3.3.2 alszakaszban bevezetett korrelációs struktúrával rendelkezik. Ez azt jelenti, hogy az r_t, θ_t, illetve v_t ismeretében már meghatározható a C_t. A lejáratkori kifizetés nagyságát megadó G_T valószínűségi változóról feltesszük, hogy csak a T_0-beli, vagy az ezt követő időszakbeli $\boldsymbol{B}_t$ értékekből táplálkozik, vagy-

is mérhető a $\{\boldsymbol{B}_t, T_0 \leq t \leq T\}$ által generált σ-algebrára nézve. A C_t folyamatnál említettekhez hasonlóan ez azt jelenti, hogy a G_T megismeréséhez az r_t, θ_t és v_t folyamatokat elegendő a $[T_0, T]$ intervallumon ismerni.

Gondoljuk meg, hogy milyen jellegű termékeket tudunk ilyen keretben modellezni. A determinisztikus időpontokban előre meghatározott pénzáramlást teljesítő termékek esetén a mérhetőség nem jelent megkötést, így az elemi kötvényeket és a fix kamatozású kötvényeket tudjuk árazni. Úgyszintén árazhatók a kamatcsereügyletek, melyek determinisztikus időpontokban teljesítenek véletlen nagyságú kifizetéseket. Hasonlóképpen a cap és floor ügyletek árazása is lehetséges ezzel az eljárással. Ezeknek a részletezésére, illetve további példák bemutatására a következő szakaszban térünk ki.

Miért van szükségünk ezekre a speciális mérhetőségi feltételekre? A Chen-modell három faktora Markov-folyamatot követ, ez a modellt definiáló (3.6), (3.7) és (3.8) egyenletekből következik. Ahhoz, hogy egy fentebb részletezett terméket beárazzunk egy $t \leq T_0$ időpontban, diszkontálnunk kell a hátralévő kifizetéseit erre az időpontra, majd a diszkontáló folyamathoz tartozó martingálmérték szerinti feltételes várható értékét kell vennünk az $\mathcal{F}_t$ σ-algebra szerint. A Markov-tulajdonságot ezen a ponton tudjuk majd kihasználni. Mivel a futamidő alatti kifizetéseket modellező folyamat t időponthoz tartozó eleme, a C_t az (r_t, θ_t, v_t) folyamat aktuális, t időpontbeli állapotából meghatározható, ezért egy adott t időpont utáni C_s $(s \geq t)$ kifizetés-intenzitások értékeinek meghatározásához elegendő csak az (r_t, θ_t, v_t) folyamat t utáni értékeit ismerni. Hasonló a helyzet a G_T lejáratkori kifizetéssel is, a $t \leq T_0$ feltevés és a G_T $\sigma(\boldsymbol{B}_t, T_0 \leq t \leq T)$-mérhetősége miatt szintén csak a meghajtó háromdimenziós folyamat t-nél későbbi értékeire van szükségünk. A Markov-tulajdonság miatt ekkor a feltételes várható értékben a feltételi $\mathcal{F}_t$ σ-algebrát lecserélhetjük a t időpontbeli folyamatérték, az (r_t, θ_t, v_t) által generált σ-algebrára, és a t időpontbeli ár így ennek a három változónak a függvényeként fog adódni. Mivel előfordulhat, hogy különböző t időpontokhoz más és más háromváltozós függvény tartozik, ezért a termék időbeni áralakulását egy négyváltozós függvény adja meg, amit jelöljünk $F(r_t, \theta_t, v_t; t)$-vel, $0 \leq t \leq T_0$. Ebbe a jelölésbe belesűrítettük tehát, hogy a három faktor által meghatá-

rozott folyamat Markov-tulajdonsága miatt a kamatderivatívánk ára a t időpontban csak a faktorok t-beli értékén keresztül függ. Erre a függvényre fogunk levezetni egy parciális differenciálegyenletet alkalmas peremfeltételekkel.

Az idézett Chen-cikk és könyv ([4] és [3]) nem tartalmazza az említett parciális differenciálegyenlet levezetését, csupán utal a Duffie [9] könyvében lévő bizonyításra. Ennek a könyvnek az E függeléke foglalkozik a szóban forgó bizonyítással, ami a Feynman-Kac formulára épít. Azonban más úton haladunk tovább: a szakasz hátralévő részében közvetlen levezetéssel jutunk el az egyenletig. Nem törekszünk minden részletet megvizsgálni, ezért a felbukkanó függvényekről feltesszük, hogy kellően simák ahhoz, hogy érvényben maradjanak a számítások. Általában ezek nem jelentenek túlságosan szigorú megszorításokat.

Amint azt már említettük, egy jövőbeli kifizetéseket teljesítő pénzügyi termék ára a diszkontált kifizetések összegének martingálmérték szerinti feltételes várható értékével egyenlő, ahol a feltétel az értékelés napjáig felhalmozott információ, vagyis a t időpont esetén $\mathcal{F}_t$. Jelöljük a bankbetét-folyamatot B_t-vel a szokásos $B_0 = 1$ feltételezés mellett, azaz

$$B_t = \mathrm{e}^{\int_0^t r_u du},$$

és a hozzá tartozó martingálmértéket $\mathbb{Q}$-val, amint azt eddig is tettük. Ekkor a három faktor által leírt folyamat Markov-jellegét is figyelembe véve a derivatíva árára a következőket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} F(r_t, \theta_t, v_t; t) =& E_{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T \mathrm{e}^{-\int_t^s r_u du} C_s ds + \mathrm{e}^{-\int_t^T r_u du} G_T \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ =& E_{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T \mathrm{e}^{-\int_t^s r_u du} C_s ds + \mathrm{e}^{-\int_t^T r_u du} G_T \mid (r_t, \theta_t, v_t)\right), \quad 0 \le t \le T_0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Egy ilyen kifizetésstruktúrával rendelkező pénzügyi termék, ellentétben az elemi kötvénnyel, az egész futamidő alatt teljesíthet kifizetéseket, ezért nem marad érvényben az az állítás, hogy a bankbetéttel normálva martingált kapunk, mivel minden egyes kifizetés után egy új termékünk keletkezik. Azonban az elemi kötvényre vonatkozó parciális differenciálegyenlet levezetésénél alkalmazott gondolatmenetet (a (2.7) egyenlethez vezető gondolatmenetet) itt is megpróbáljuk alkalmazni.

Első lépésként bontsuk két részre a fenti kifejezést:

$$H(r_t,\theta_t,v_t;t) = E_{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T \mathrm{e}^{-\int_t^s r_u du} C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) = E_{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T \mathrm{e}^{-\int_t^s r_u du} C_s ds \mid (r_t,\theta_t,v_t)\right),$$
$$J(r_t,\theta_t,v_t;t) = E_{\mathbb{Q}}\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_u du} G_T \mid \mathcal{F}_t\right) = E_{\mathbb{Q}}\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_u du} G_T \mid (r_t,\theta_t,v_t)\right), \quad 0 \le t \le T_0.$$

Így tehát $F(r_t,\theta_t,v_t;t) = H(r_t,\theta_t,v_t;t) + J(r_t,\theta_t,v_t;t)$.

Kezdjük a $J(r_t,\theta_t,v_t;t)$ mennyiség vizsgálatával.

$$\frac{J(r_t,\theta_t,v_t;t)}{B_t} = \frac{1}{B_t} E_{\mathbb{Q}}\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_u du} G_T \mid \mathcal{F}_t\right) =$$
$$= E_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\int_t^T r_u du} G_T}{B_t} \mid \mathcal{F}_t\right) = E_{\mathbb{Q}}\left(\mathrm{e}^{-\int_0^T r_u du} G_T \mid \mathcal{F}_t\right), \quad 0 \le t \le T_0.$$

A második lépésben kihasználtuk, hogy a B_t $\mathcal{F}$-mérhető, és így bevihető a feltételes várható érték alá. Mivel azt kaptuk, hogy a $\frac{J(r_t,\theta_t,v_t;t)}{B_t}$ egy rögzített valószínűségi változónak egy filtráció szerint vett feltételes várhatóérték-folyamata, ezért tudjuk, hogy egy $\mathcal{F}_t$-adaptált $\mathbb{Q}$-martingált kaptunk a $[0,T_0]$ intervallumon (és ez összhangban van azzal, hogy a $J(r_t,\theta_t,v_t;t)$ folyamat egy olyan pénzügyi eszköz értékfolyamatának tekinthető, mely csak a lejáratkor teljesít kifizetést). Az Itô-formulát felhasználva felírjuk a folyamat dinamikáját, majd kihasználjuk, hogy a martingálság miatt a driftnek 0-nak kell lennie. A megfelelő parciális deriváltakat az indexbe írt r,θ,v és t jelöli. A (2.6) egyenlet alapján tudjuk, hogy a B_t folyamat reciproka a

$$d\frac{1}{B_t} = -r_t \frac{1}{B_t} dt$$

egyenletet elégíti ki. A B_t korlátos változású, így a reciprok is az, azaz a kvadratikus kovariancia 0 lesz.

$$
\begin{aligned}
d_t\frac{J(r_t,\theta_t,v_t;t)}{B_t} &= \frac{1}{B_t}dJ(r_t,\theta_t,v_t;t) + J(r_t,\theta_t,v_t;t)d\frac{1}{B_t} = \\
&= \frac{1}{B_t}\Big[J_t(r_t,\theta_t,v_t;t)dt+ \\
&\quad +J_r(r_t,\theta_t,v_t;t)dr_t + J_\theta(r_t,\theta_t,v_t;t)d\theta_t + J_v(r_t,\theta_t,v_t;t)dv_t+ \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(J_{rr}(r_t,\theta_t,v_t;t)d\langle r\rangle_t + J_{\theta\theta}(r_t,\theta_t,v_t;t)d\langle\theta\rangle_t + J_{vv}(r_t,\theta_t,v_t;t)d\langle v\rangle_t\right) + \\
&\quad +J_{r\theta}(r_t,\theta_t,v_t;t)d\langle r,\theta\rangle_t + J_{rv}(r_t,\theta_t,v_t;t)d\langle r,v\rangle_t + J_{\theta v}(r_t,\theta_t,v_t;t)d\langle\theta,v\rangle_t\Big]- \\
&\quad -\frac{1}{B_t}r_tJ(r_t,\theta_t,v_t;t)dt.
\end{aligned}
$$

Helyettesítsük be a (3.6), a (3.7), valamint a (3.8) dinamikákat. Azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
d_t\frac{J(r_t,\theta_t,v_t;t)}{B_t} = \frac{1}{B_t}\Big[&J_t(r_t,\theta_t,v_t;t)dt+ \\
&+J_r(r_t,\theta_t,v_t;t)\left(k(\theta_t-r_t)dt+\sqrt{v_t}\sqrt{r_t}dB_t^{(1)}\right)+ \\
&+J_\theta(r_t,\theta_t,v_t;t)\left(\mu(\bar\theta-\theta_t)dt+\zeta\sqrt{\theta_t}dB_t^{(2)}\right)+ \\
&+J_v(r_t,\theta_t,v_t;t)\left(\nu(\bar v-v_t)dt+\eta\sqrt{v_t}dB_t^{(3)}\right)+ \\
&+\frac{1}{2}\Big(J_{rr}(r_t,\theta_t,v_t;t)v_tr_tdt+ \\
&\quad +J_{\theta\theta}(r_t,\theta_t,v_t;t)\zeta^2\theta_tdt+ \\
&\quad +J_{vv}(r_t,\theta_t,v_t;t)\eta^2v_tdt\Big)+ \\
&+J_{r\theta}(r_t,\theta_t,v_t;t)\sqrt{v_t}\sqrt{r_t}\zeta\sqrt{\theta_t}\rho^{(12)}dt+ \\
&+J_{rv}(r_t,\theta_t,v_t;t)\sqrt{r_t}v_t\eta\rho^{(13)}dt+ \\
&+J_{\theta v}(r_t,\theta_t,v_t;t)\sqrt{\theta_t}\sqrt{v_t}\zeta\eta\rho^{(23)}dt\Big] \\
-\frac{1}{B_t}&r_tJ(r_t,\theta_t,v_t;t)dt.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

A továbbiakban számunkra kiemelt fontosságú lesz a megjelenő Itô-folyamatok driftje. Annak érdekében, hogy minél jobban a minket érdeklő részekre tudjunk fókuszálni, bevezetünk egy operátort, mely egy Itô-folyamat esetén visszaadja annak drift-együtthatóját.

4.1. Definíció. *Egy* $dX_t = a_tdt + \boldsymbol{b}_t^\top d\boldsymbol{W}_t$ *egyenlettel megadott Itô-folyamat esetén*

jelölje $Drift[X_t]$ az X_t folyamat drift-együtthatóját, azaz legyen

$$Drift[X_t] = Drift\left[X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \boldsymbol{b}_s^\top d\boldsymbol{W}_s\right] = a_t.$$

A $Drift[\cdot]$ operátort drift-operátor*nak nevezzük.*

Csoportosítsuk a tagokat a (4.2) egyenletben, különítsük el az idő szerinti integrált a Wiener-folyamat szerinti integráloktól. Az imént bevezetett drift-operátor segítségével a következő írható fel:

$$\begin{aligned}
Drift\left[\frac{J(r_t,\theta_t,v_t;t)}{B_t}\right] = \frac{1}{B_t}\Big[&J_t(r_t,\theta_t,v_t;t) - r_t J(r_t,\theta_t,v_t;t) + \\
&+J_r(r_t,\theta_t,v_t;t)k(\theta_t - r_t) + J_\theta(r_t,\theta_t,v_t;t)\mu(\bar{\theta} - \theta_t) + J_v(r_t,\theta_t,v_t;t)\nu(\bar{v} - v_t) + \\
&+\frac{1}{2}\Big(J_{rr}(r_t,\theta_t,v_t;t)v_t r_t + J_{\theta\theta}(r_t,\theta_t,v_t;t)\zeta^2\theta_t + J_{vv}(r_t,\theta_t,v_t;t)\eta^2 v_t\Big) + \\
&+J_{r\theta}(r_t,\theta_t,v_t;t)\zeta\sqrt{r_t}\sqrt{\theta_t}\sqrt{v_t}\rho^{(12)} + J_{rv}(r_t,\theta_t,v_t;t)\eta v_t\sqrt{r_t}\rho^{(13)} + \\
&+J_{\theta v}(r_t,\theta_t,v_t;t)\zeta\eta\sqrt{\theta_t}\sqrt{v_t}\rho^{(23)}\Big].
\end{aligned}$$

Amint korábban megállapítottuk, a martingálság miatt a driftnek 0-nak kell lennie. A B_t pozitív értéket vesz fel, ezért végigoszthatunk vele. Mivel az r_t, θ_t és v_t CIR-jellegű folyamatot követnek, ezért nemnegatív értékűek. Mivel a modellezést csak a $[0, T_0]$ intervallumon végezzük (itt érvényesek a kiinduló egyenleteink), ezért a t időváltozó a $[0, T_0]$ intervallumból vehet fel értékeket. Az egyenlethez tartozó peremfeltételt a derivatíva-rész T_0-beli értékéből kapjuk:

$$\begin{aligned}
J(r_{T_0},\theta_{T_0},v_{T_0};T_0) &= E_{\mathbb{Q}}\left(\mathrm{e}^{-\int_{T_0}^T r_u du} G_T \mid \mathcal{F}_{T_0}\right) = \\
&= E_{\mathbb{Q}}\left(\mathrm{e}^{-\int_{T_0}^T r_u du} G_T \mid (r_{T_0},\theta_{T_0},v_{T_0})\right) = j(r_{T_0},\theta_{T_0},v_{T_0}), \quad (4.3)
\end{aligned}$$

ahol a j függvény a Doob-lemmából származó, a valószínűségi változó szerinti feltételes várható értéket az adott valószínűségi változók függvényében megadó mérhető függvény.

Mindezeket egybevetve J-re a következő peremfeltétellel adott parciális differenciálegyenletet kaptuk:

$$\begin{aligned}
&J_t(r,\theta,v;t) + J_r(r,\theta,v;t)k(\theta - r) + J_\theta(r,\theta,v;t)\mu(\bar{\theta} - \theta) + J_v(r,\theta,v;t)\nu(\bar{v} - v) + \\
&+\frac{1}{2}\Big(J_{rr}(r,\theta,v;t)vr + J_{\theta\theta}(r,\theta,v;t)\zeta^2\theta + J_{vv}(r,\theta,v;t)\eta^2 v\Big) + \\
&+J_{r\theta}(r,\theta,v;t)\rho^{(12)}\zeta\sqrt{r\theta v} + J_{rv}(r,\theta,v;t)\rho^{(13)}\eta v\sqrt{r} + J_{\theta v}(r,\theta,v;t)\rho^{(23)}\zeta\eta\sqrt{\theta v} - \\
&-rJ(r,\theta,v;t) = 0, \quad J(r,\theta,v;T_0) = j(r,\theta,v), \quad (r,\theta,v,t) \in \mathbb{R}_+^3 \times [0,T_0]. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Hasonló egyenletet szeretnénk levezetni a H függvényre is, ezért a fenti gondolatmenetet elvégezzük a $\frac{H(r_t,\theta_t,v_t;t)}{B_t}$ folyamatra is. Ehhez először egy apróbb átalakítást kell elvégeznünk:

$$\begin{aligned}
\frac{H(r_t,\theta_t,v_t;t)}{B_t} &= E_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\int_t^T \mathrm{e}^{-\int_t^s r_u du} C_s ds}{\mathrm{e}^{\int_0^t r_u du}} \mid \mathcal{F}_t\right) = E_{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T \mathrm{e}^{-\int_0^s r_u du} C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-\int_0^s r_u du} C_s ds - \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s r_u du} C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-\int_0^s r_u du} C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s r_u du} C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right).
\end{aligned}$$

A második tagban a külső integrálást a $[0,t]$ intervallumon végezzük (a kitevőben lévő integrálást pedig ennek egy részintervallumán), tehát az integrál kiszámításához az r_t és C_t folyamatokat elegendő csak a $[0,t]$ intervallumon ismerni. Mivel C_t-ről feltettük, hogy mérhető a $\boldsymbol{B}_t$ által generált σ-algebrára, ezért a feltételes várható érték jel alatti mennyiség mérhető $\mathcal{F}_t$-re nézve, így az integrál feltételes várható értéke önmagával egyenlő. Átrendezés után így a következőt kapjuk:

$$\frac{H(r_t,\theta_t,v_t;t)}{B_t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s r_u du} C_s ds = E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T \mathrm{e}^{-\int_0^s r_u du} C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right). \qquad (4.5)$$

A jobb oldal itt is egy rögzített valószínűségi változó filtráció szerint vett feltételes várhatóérték-folyamata, tehát martingál a $[0,T_0]$ intervallumon, így tehát ha felírjuk a dinamikáját, akkor a driftnek 0-nak kell lennie. Mivel az első tagból adódó drift-rész teljesen megegyezik a J függvényre vonatkozó levezetés során kapott drifttel (csupán a J függvény helyett a H függvényt kell szerepeltetni), ezért ezt nem kell újból kiszámítanunk. A drift-részhez teljesen hasonlóan a Wiener-folyamat szerinti integrálok esetén is csupán a J függvényt kell lecserélni a H függvényre. Ne

feledkezzünk meg a másik drift-komponensről sem, amely a második tagból, az idő szerinti integrálból adódik. Írjuk fel ennek a dinamikáját:

$$d_t\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s r_u du} C_s ds\right) = \mathrm{e}^{-\int_0^t r_u du} C_t dt = \frac{C_t}{B_t} dt.$$

Összegezve mindezt, azt kaptuk, hogy a (4.5) folyamat driftje a drift-operátor segítségével a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned}
Drift\left[\frac{H(r_t,\theta_t,v_t;t)}{B_t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s r_u du} C_s ds\right] = \frac{1}{B_t}\Big[&H_t(r_t,\theta_t,v_t;t) - r_t H(r_t,\theta_t,v_t;t) + \\
&+H_r(r_t,\theta_t,v_t;t)k(\theta_t - r_t) + H_\theta(r_t,\theta_t,v_t;t)\mu(\bar{\theta}-\theta_t) + H_v(r_t,\theta_t,v_t;t)\nu(\bar{v}-v_t) + \\
&+\frac{1}{2}\Big(J_{rr}(r_t,\theta_t,v_t;t)v_t r_t + H_{\theta\theta}(r_t,\theta_t,v_t;t)\zeta^2\theta_t + H_{vv}(r_t,\theta_t,v_t;t)\eta^2 v_t\Big) + \\
&+H_{r\theta}(r_t,\theta_t,v_t;t)\zeta\sqrt{r_t}\sqrt{\theta_t}\sqrt{v_t}\rho^{(12)} + H_{rv}(r_t,\theta_t,v_t;t)\eta v_t\sqrt{r_t}\rho^{(13)} + \\
&+H_{\theta v}(r_t,\theta_t,v_t;t)\zeta\eta\sqrt{\theta_t}\sqrt{v_t}\rho^{(23)}\Big] + \frac{1}{B_t}C_t.
\end{aligned}$$

A B_t pozitivitása miatt nem változtat a drift 0 voltán. Mivel feltevés szerint a C_t mérhető az (r_t,θ_t,v_t) által generált σ-algebrára, ezért a Doob-lemma miatt van olyan mérhető c függvény, amelyre $C_t = c(r_t,\theta_t,v_t;t)$. A peremfeltételt ebben az esetben a másik derivatíva-rész T_0-beli árából kapjuk. Jelölje h azt a (Doob-lemma által biztosított) mérhető függvényt, melybe behelyettesítve az r_{T_0}, θ_{T_0} és v_{T_0} értékeket, megkapjuk a derivatíva-rész T_0-beli árát, vagyis

$$\begin{aligned}
H(r_{T_0},\theta_{T_0},v_{T_0};T_0) &= E_{\mathbb{Q}}\left(\int_{T_0}^T \mathrm{e}^{-\int_{T_0}^s r_u du} C_s ds \mid \mathcal{F}_{T_0}\right) = \\
&= E_{\mathbb{Q}}\left(\int_{T_0}^T \mathrm{e}^{-\int_{T_0}^s r_u du} C_s ds \mid (r_{T_0},\theta_{T_0},v_{T_0})\right) = h(r_{T_0},\theta_{T_0},v_{T_0}). \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Így a következő peremfeltétellel adott parciális differenciálegyenletet kaptuk H-ra:

$$\begin{aligned}
&H_t(r,\theta,v;t) + H_r(r,\theta,v;t)k(\theta - r) + H_\theta(r,\theta,v;t)\mu(\bar{\theta}-\theta) + H_v(r,\theta,v;t)\nu(\bar{v}-v) + \\
&+\frac{1}{2}\Big(H_{rr}(r,\theta,v;t)vr + H_{\theta\theta}(r,\theta,v;t)\zeta^2\theta + H_{vv}(r,\theta,v;t)\eta^2 v\Big) + \\
&+H_{r\theta}(r,\theta,v;t)\rho^{(12)}\zeta\sqrt{r\theta v} + H_{rv}(r,\theta,v;t)\rho^{(13)}\eta v\sqrt{r} + H_{\theta v}(r,\theta,v;t)\rho^{(23)}\zeta\eta\sqrt{\theta v} - \\
&-rH(r,\theta,v;t) + c(r,\theta,v;t) = 0,\ \ H(r,\theta,v;T_0) = h(r,\theta,v), \quad (r,\theta,v,t) \in \mathbb{R}_+^3 \times [0,T_0].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Mivel az F függvény a H és J függvények összegeként áll elő, és a H-ra és J-re hasonló szerkezetű parciális differenciálegyenletet kaptunk, ezért az F is kielégíti ugyanezt az egyenletet, és peremfeltételnek a H-ra és J-re vonatkozó peremfeltételek összegét kell venni.

A szakasz zárásaként összegezzük az eredményeinket egy tételben.

4.2. Tétel. *Tekintsük a 3.3.2 alszakaszban bemutatott háromfaktoros rövidkamatlábmodellt. Vegyünk egy T időpontban lejáró pénzügyi terméket, mely kifizetéseit két csoportba sorolhatjuk: egyrészt a lejáratkor teljesít egy G_T nagyságú kifizetést, másrészt a futamidő alatt is teljesíthet kifizetéseket, ezeknek az intenzitását jelöljük C_t-vel, $0 \le t \le T$. Feltesszük, hogy van olyan $0 < T_0 \le T$ időpont, melyre a G_T mérhető a $\sigma\{\boldsymbol{B}_t, T_0 \le t \le T\}$ generált σ-algebrára nézve, valamint hogy a C_t kifizetés-intenzitás mérhető a $\sigma(\boldsymbol{B}_t)$-re nézve, $0 \le t \le T$. Ekkor létezik olyan mérhető $F(r,\theta,v;t)$ függvény, amely megadja a faktorok függvényében a derivatíva árát a $[0,T_0]$ intervallumon, és ha ez kellően sima, akkor kielégíti a következő peremfeltételekkel megadott parciális differenciálegyenletet*

$$
\begin{aligned}
&F_t(r,\theta,v;t) + F_r(r,\theta,v;t)k(\theta - r) + F_\theta(r,\theta,v;t)\mu(\bar{\theta} - \theta) + F_v(r,\theta,v;t)\nu(\bar{v} - v) + \\
&+\frac{1}{2}\Big(F_{rr}(r,\theta,v;t)vr + F_{\theta\theta}(r,\theta,v;t)\zeta^2\theta + F_{vv}(r,\theta,v;t)\eta^2 v\Big) + \\
&+F_{r\theta}(r,\theta,v;t)\rho^{(12)}\zeta\sqrt{r\theta v} + F_{rv}(r,\theta,v;t)\rho^{(13)}\eta v\sqrt{r} + F_{\theta v}(r,\theta,v;t)\rho^{(23)}\zeta\eta\sqrt{\theta v} - \\
&-rF(r,\theta,v;t) + c(r,\theta,v;t) = 0, \\
&\quad F(r,\theta,v;T_0) = h(r,\theta,v) + j(r,\theta,v), \quad (r,\theta,v,t) \in \mathbb{R}_+^3 \times [0,T_0],
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

ahol a h és j függvények a (4.3) és (4.6) képletekhez kapcsolódóan voltak definiálva, a c függvényre pedig a $C_t = c(r_t,\theta_t,v_t;t)$ összefüggés teljesül. A (4.8) egyenletre a továbbiakban fundamentális árazóegyenlet*ként hivatkozunk majd.*

A következő szakaszban megvizsgáljuk a fundamentális árazóegyenlet egy speciális alakját, illetve felírjuk néhány piaci termék esetén a peremfeltételeket.

4.2. Piaci termékek árazása

Mielőtt rátérnénk néhány piaci termék árazóegyenletének felírására, vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha a G_T kifizetésfüggvény $\sigma(\boldsymbol{B}_T)$-mérhető, vagyis van olyan g függvény, amelyre $G_T = g(r_T, \theta_T, v_T)$. Ekkor a T_0 választható T-nek is, így a terméket a teljes futamidő alatt tudjuk modellezni. A (4.8) fundamentális árazóegyenlet természetesen érvényben marad, viszont a peremfeltételek jelentősen egyszerűsödnek. A (4.6) egyenletben a $T_0 = T$ választással azt kapjuk, hogy $h \equiv 0$, a (4.3) egyenletben pedig a j választható a g-nek. Összesítve azt kaptuk, hogy ebben az esetben az F-re vonatkozó peremfeltétel a következő lesz: $F(r, \theta, v; T) = g(r, \theta, v)$.

Mi a helyzet, ha $T_0 < T$? Ekkor a peremfeltétel meghatározásához egy ugyanolyan jellegű feltételes várható értéket kell kiszámolni, mint az eredeti árazási formula, csupán egy rövidebb időintervallumra. Gyakorlati szempontból ez sajnos rossz hír, mert nem egyszerű ennek a kiszámítása, mégis van pozitív hozadéka: egyrészt rövidebb intervallumon kell kiszámolni a feltételes várható értéket, ami numerikus esetben pontosabb számítást eredményez, másrészt ha két termék a T_0 után azonos kifizetésekkel rendelkezik, akkor közös lesz a peremfeltétel is, így az árazáshoz már csak a fundamentális árazóegyenletet kell megoldani. Ebbe a kategóriába tartoznak az útvonalfüggő termékek, például a visszatekintő (lookback) vagy a limitáras (barrier) opciók. A fundamentális árazóegyenlet megoldásával be tudjuk árazni az ügyletet, mielőtt az létrejönne, azonban ezt követően, a futamidő alatti újraértékelésre már nem alkalmazhatjuk ezt a módszert.

Mit mondhatunk a fundamentális árazóegyenlet megoldhatóságáról? Bizonyos termékek esetén (tehát bizonyos peremfeltételek mellett) bonyolult, de analitikus megoldást is kaphatunk. Ennek érdekében a parciális differenciálegyenletek megoldása során használatos, Green-függvényen alapuló módszert lehet alkalmazni. Az említett [4] és [3] Chen-cikkben és könyvben a szerző bemutat néhány példát, amiknek az ismertetésétől terjedelmi okok miatt eltekintünk. Az analitikus módszereken túl természetesen rendelkezésre állnak numerikus módszerek is a fundamentális árazóegyenlet megoldására.

Térjünk most rá annak a vizsgálatára, hogy néhány piaci termék esetén mi lesz a fundamentális árazóegyenlet alakja, illetve mi lesz a hozzá tartozó peremfeltétel.

4.2.1. Elemi és kamatozó kötvény

Egységnyi névértékű elemi kötvény esetén a futamidő végén egységnyi pénzt kapunk, tehát $G_T = 1$, így a $g(r, \theta, v) = 1$ is teljesül tetszőleges $(r, \theta, v) \in \mathbb{R}^3_+$ esetén, továbbá a T_0 értékének választható a T, vagyis a teljes futamidő alatt tudjuk modellezni az áralakulást. A futamidő alatt nincs kifizetés, így $c(r, \theta, v; t) = 0$.

Kamatozó kötvénynél hasonló a helyzet, $T_0 = T$ lehetséges választás, $G_T = 1$ miatt pedig $g(r, \theta, v) = 1$ szintén teljesül. A kamatfizetés folytonos pénzáramlás esetén determinisztikus (speciel konstans) C_t-vel modellezhető, vagyis determinisztikus $c(r, \theta, v; t)$ a jó választás, míg a diszkrét időpontokban esedékes kifizetés esetén

$$C_t = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta(t - t_k),$$

így tehát

$$c(r, \theta, v; t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta(t - t_k)$$

a megfelelő választás. Itt t_k a kuponfizetések időpontját jelöli, míg a c_k a kupon értékét, $k = 1, 2, \ldots, n$. A $\delta(\cdot)$ általánosított függvény (disztribúció) a Dirac-delta függvény, melyre $\delta(x) = 0$ minden $x \neq 0$ esetén, azonban $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$.

4.2.2. Kamatcsereügylet (interest rate swap)

Kamatcsereügylet esetén két fél egy meghatározott időszakban, rögzített névértékre vetítve elcseréli a lebegő kamatlábat egy előre rögzített, fix kamatlábra, nettó elszámolással. Azonos pénznem esetén sem a futamidő elején, sem a futamidő végén nem cserélik ki a névértéket, tehát $G_T = 0$, így $g(r, \theta, v) = 0$, vagyis a $T_0 = T$ választás megengedett. Jelölje r^* az előre rögzített fix kamatszintet. Egységnyi névértékű hosszú (long) kamatcsereügylet esetén, folytonos pénzáramlás mellett a $C_t = r_t - r^*$,

ezért a $c(r,\theta,v;t) = r - r^*$ választás írja le a nettó pénzmozgást, míg diszkrét időpontokban történő fizetés esetén a kamatozó kötvényhez hasonlóan járhatunk el:

$$C_t = \sum_{k=1}^{n} (r_t - r^*)\delta(t - t_k),$$

ezért

$$c(r,\theta,v;t) = \sum_{k=1}^{n} (r - r^*)\delta(t - t_k).$$

Az ellenoldali, rövid (short) kamatcsereügylet teljesen hasonlóan árazható, csupán fel kell cserélni az r és r^* szerepeit, vagyis a hosszú ügylet kifizetéseinek meg kell változtatni az előjelét.

4.2.3. Kamatplafon (cap), kamatpadló (floor), kamatcsere-opció (swaption)

Kamatplafon ügyletnél a vevő a megemelkedő kamatok ellen szeretne védelmet, ezért egy előre rögzített korlátnál magasabb kamatszint esetén jogosult a többletkamatra, melyet egy előre rögzített névértékre vetítenek. Ellenben ha a kamatszint alatta marad a korlátnak, akkor az opció kiírója nem teljesít kifizetést. Lejáratkor nincs pénzmozgás, így $T_0 = T$ itt is megfelel, és $G_T = 0$ miatt $g(r,\theta,v) = 0$-nak is teljesülni kell. Egységnyi névértékű kamatplafon-ügylet esetén, r^*-gal jelölve az előre rögzített korlátot, folytonos pénzáramlást feltételezve a $C_t = (r_t - r^*)^+$, ezért a $c(r,\theta,v;t) = (r - r^*)^+$ kifizetés írja le a futamidő alatti kifizetéseket, ahol $(x)^+$ jelöli az x pozitív részét, azaz a $\max(x,0)$ mennyiséget. Diszkrét pénzáramlás esetén a már említett konstrukció használható, azaz

$$C_t = \sum_{k=1}^{n} (r_t - r^*)^+\delta(t - t_k)$$

miatt

$$c(r,\theta,v;t) = \sum_{k=1}^{n} (r - r^*)^+\delta(t - t_k)$$

a jó választás.

Kamatpadló ügyletnél a vevő a túlságosan alacsony kamatszintek ellen keres menedéket, így az opció kiírója csak akkor teljesít, ha a kamatszint egy előre rögzített korlát alá esik, és ekkor a hiánykamatot fizeti, egy előre rögzített névértékre vetítve. A kamatplafonnál elmondottakon csak egy keveset kell változtatni, fel kell cserélni az r és az r^* szerepét.

Vételi (call) kamatcsere-opció esetén a T lejáratkor az opció vevőjének joga van arra, hogy előre megállapított K árért cserébe belépjen egy T-ben induló, T_1-ben lejáró ($T_1 > T$), előre rögzített paraméterekkel (fix kamatozás mértéke, kamatfizetés gyakorisága, névérték) rendelkező hosszú kamatcsere-ügyletbe. Mivel csak lejáratkor van pénzáramlás, ezért $C_t = 0$, azaz $c(r, \theta, v; t) = 0$ minden $0 \leq t \leq T$ esetén. A lejáratkori kifizetés $G_T = (SW^{T_1}(r_T, \theta_T, v_T; T) - K)^+$, ahol az $SW^{T_1}(r, \theta, v; t)$ függvény írja le az alaptermék szerepét játszó swap ügylet időbeni alkulását. Ekkor az $g(r, \theta, v) = SW^{T_1}(r, \theta, v; T)$ a jó választás, és mivel G_T mérhető a $\sigma(\boldsymbol{B}_T)$-re nézve, ezért a $T_0 = T$ választás is lehetséges.

Eladási (put) swaption esetén hasonlóképpen járhatunk el, annyi különbséggel, hogy az alaptermék szerepét egy rövid swap ügylet játssza.

4.2.4. Bináris opció

Egy bináris vételi opció a T lejáratkor akkor fizet egy rögzített összeget, ha a lejáratkori kamatszint egy előre rögzített r^* korlát fölött van, különben teljesítés nélkül zárul az ügylet. Ezért a $C_t = 0$ a teljes futamidő alatt, ezért $c(r, \theta, v; t) = 0$ minden $0 \leq t \leq T$ esetén. Lejáratkor a $G_T = b\mathcal{H}(r_T - r^*)$ kifizetést teljesíti, ahol b egy rögzített pozitív szám, mely a kifizetés nagyságát határozza meg, a $\mathcal{H}$ függvény pedig a Heaviside-függvény: $\mathcal{H}(x) = 1$, ha $x \geq 0$, és $\mathcal{H}(x) = 0$ az $x < 0$ esetben. A $g(r, \theta, v) = b\mathcal{H}(r - r^*)$ választás megfelel, és T_0 is választható T-nek.

A bináris eladási opció esetén annyi a különbség, hogy akkor fizeti a rögzített összeget, ha a kamatszint az rögzített korlát alatt van lejáratkor.

4.2.5. Bináris kamatplafon, kamatpadló

Hasonló ügylet a klasszikus cap és floor ügyletekhez, csupán a kifizetések nem arányosak az r^* korlát meghaladásával, illetve alulmúlásával, hanem egy előre rögzített összeget fizetnek. Ennek megfelelően bináris kamatplafon esetén, folytonos fizetés mellett a $C_t = b(t)\mathcal{H}(r_t - r^*)$, így $c(r, \theta, v; t) = b(t)\mathcal{H}(r - r^*)$, míg diszkrét esetben

$$c(r, \theta, v; t) = \sum_{k=1}^{n} b_k \mathcal{H}(r - r^*)\delta(t - t_k).$$

A kamatpadló esete teljesen hasonlóan kezelhető.

4.2.6. Kosár (basket) opció

Vételi (call) basket opció esetén a T lejáratkor jogosulttá válunk egy előre rögzített K áron egy előre meghatározott kötvénykosár megvásárlására. A futamidő alatt nincs kifizetés, így $C_t = 0$, vagyis $c(r, \theta, v) = 0$. Legyenek $T_1, T_2, \ldots, T_m$ T-nél későbbi lejáratok. Ekkor a basket opció T-beli pénzáramlása:

$$G_T = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k B(T, T_k) - K \right)^+,$$

ahol $a_k > 0$ jelöli a T_k-ban lejáró, a futamidő alatt esetlegesen kamatot fizető $B(t, T_k)$ kötvény mennyiségét a kosárban. Ha $B^{T_k}(r, \theta, v; t)$ jelöli a kosárban szereplő, rögzített kamatozással rendelkező, T_k-ban lejáró kötvény árfolyamalakulását megadó függvényt, akkor

$$g(r, \theta, v) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k B^{T_k}(r, \theta, v; T) - K \right)^+$$

a jó választás. Mivel G_T mérhető a $\sigma(\boldsymbol{B}_T)$-re nézve, ezért $T_0 = T$ megengedett választás.

Az eladási (put) basket opció a vételi basket opció értelemszerű párja.

A kötvényeken túl más eszközök is bekerülhetnek a kosárba, ezekre az eszközökre is kiterjeszthető a fenti gondolatmenet.

4.2.7. SYCURVE(T_1, T_2)-opció

A SYCURVE(T_1, T_2)-opció (slope of the yield curve option) T-beli, lejáratkori kifizetése az akkor érvényes hozamgörbe T_1 és T_2 pontját összekötő egyenes meredekségétől függ ($T < T_1 < T_2$). Lejáratig nem teljesít kifizetést, ezért $C_t = 0$, illetve $c(r, \theta, v) = 0$ a futamidő alatt. A lejárati kifizetéshez vezessünk be a t időpontbeli hozamgörbe pontjait megadó $R(t, T)$ függvényt, ahol $T > t$ a lejárat jelöli. Ezt az egységnyi névértékű elemi kötvényeken keresztül definiáljuk:

$$R(t, T) = -\frac{\ln p(t, T)}{T - t}.$$

Ha a T-ben lejáró, egységnyi névértékű elemi kötvény áralakulását megadó függvényt a szokásos módon a $V(r, \theta, v; t, T)$ függvény jelöli, akkor ennek segítségével elkészíthetjük a hozamgörbét a faktorok függvényében megadó függvényt is:

$$y(r, \theta, v; t, T) = -\frac{\ln V(r, \theta, v; t, T)}{T - t},$$

tehát $y(r_t, \theta_t, v_t; t, T) = R(t, T)$. A t időpontban érvényes hozamgörbe T_1 és T_2 pontjait összekötő egyenes meredekségére vezessük be az

$$S(t; T_1, T_2) = \frac{R(t, T_2) - R(t, T_1)}{T_2 - T_1}$$

függvényt. A meredekséget a faktorok segítségével is ki szeretnénk fejezni, legyen erre a célra az m függvény:

$$m(r, \theta, v; t, T_1, T_2) = \frac{y(r, \theta, v; t, T_2) - y(r, \theta, v; t, T_1)}{T_2 - T_1},$$

melyre teljesül az $m(r_t, \theta_t, v_t; t, T_1, T_2) = S(t; T_1, T_2)$ összefüggés.

Egy vételi (call) SYCURVE(T_1, T_2)-opció birtokosa a T lejáratkor jogosult az előre rögzített m_K meredekséget meghaladó $S(T; T_1, T_2)$ meredekség esetén a meredekség-többletre, mindezt egy előre meghatározott névértékre vetítve. Egységnyi névérték esetén ez a

$$G_T = (S(T; T_1, T_2) - m_K)^+$$

kifizetést jelenti, ami $\sigma(\boldsymbol{B}_T)$-mérhető, így $T_0 = T$ lehetséges választás, és ezért a fundamentális árazóegyenlet peremfeltételét megadó g függvényre a következőt kapjuk:

$$g(r, \theta, v) = (m(r, \theta, v; t, T_1, T_2) - m_K)^+ .$$

Az eladási (put) SYCURVE(T_1, T_2)-opcióra hasonló peremfeltételt kapunk, csupán kézenfekvő módosításokat kell elvégezni. A vételi SYCURVE(T_1, T_2)-opció birtokosa a két időpont közötti hozamgörbe-rész meredekebbé válásában érdekelt, míg az eladási SYCURVE(T_1, T_2)-opció tulajdonosának az említett hozamgörbe-szakasz laposodása kedvez.

4.2.8. Volatilitásra szóló opció

Mivel a háromfaktoros modellben a rövid kamatláb volatilitása az egyik faktor, így a volatilitásra szóló eladási és vételi opciók is árazhatók a fundamentális árazóegyenlet segítségével.

Egy volatilitásra szóló vételi opció tulajdonosa a T lejáratkor jogosult az előre meghatározott v_K volatilitást meghaladó v_T volatilitás esetén a volatilitás-többletre, természetesen egy rögzített névértékre vetítve. Mivel a futamidő alatt nincs pénzáramlás, ezért $C_t = 0$, illetve $c(r, \theta, v; t) = 0$ a teljes $[0, T]$ intervallumon. Egységnyi névérték esetén pedig a G_T kifizetés a $(v_T - v_K)^+$ mennyiséggel egyenlő, ezért a $T_0 = T$ megengedett választás. A peremfeltételt meghatározó g függvény pedig a következő alakú: $g(r, \theta, v) = (v - v_K)^+$.

A volatilitásra szóló eladási opció a vételi opció természetszerű párja. A volatilitásra szóló vételi opció birtokosa a kamatlábpiaci árfolyammozgások erősödésében, míg az eladási opció tulajdonosa az árfolyammozgások csendesülésében érdekelt.

5. fejezet

Összefoglalás és kitekintés

A dolgozat vége felé közeledve tekintsük át, hogy miről volt szó, illetve hogy milyen irányokba lehetne továbbhaladni.

Az általános faktormodellből kiindulva megvizsgáltuk, hogy affin lejárati szerkezet feltételezése mellett hogyan lehet elemi kötvényeket árazni. Az időhomogenitást a levezetés során mellőztük, így a kapott egyenleteknek nem volt egyértelmű a megoldása, ezzel rávilágítottunk arra, hogy ahhoz, hogy termékárazásra használható modellt kapjunk, szükséges valamiféle kapcsolatot feltételeznünk az absztrakt faktorok és az általunk modellezett kamatlábpiac között. Ilyen volt az elemi kötvények árának időhomogenitása, vagy a rövid kamatlábat a faktorok segítségével előállító ρ függvény explicit megadása. Meg lehetne vizsgálni, hogy milyen egyéb feltételek biztosíthatják azt, hogy a modellünk árazásra használható legyen.

Ezután az affin lejárati szerkezetű esettel foglalkoztunk. Megmutattuk, hogy ebben az esetben a faktorok alakulását leíró sztochasztikus differenciálegyenlet egy bizonyos kanonikus alakra hozható. Az affin szerkezet bemutatott előnyei mellett nemkívánatos jelenségeket is okozhat, például tetszőlegesen nagy, negatív kamatlábakat. Ennek kiküszöbölésére egy lehetséges megoldás lenne, ha az affin szerkezet helyett kvadratikus szerkezetet tekintenénk. Alkalmas feltételekkel ezáltal biztosítva lenne a kamatlábnak a nemnegatív tartományban maradása.

A következő fejezetben különféle lehetséges faktorválasztásokat mutattunk be. Megmutattuk néhány klasszikus kamatlábmodellről, hogy beilleszthető az affin szerkezetbe. Hozam-faktor modellre is mutattunk példát, ismételten rávilágítva az affin szerkezet előnyeire. Lehetséges továbbhaladási irány lenne más modellek beillesztése ebbe a faktormodellbe, illetve ezen modellek numerikus megvalósítása, így tesztelhetővé és összehasonlíthatóvá téve őket. Valós piaci adatok alapján kalibrálni lehetne a modelleket bizonyos termékeken, utána pedig validálhatnánk a kalibrált modelleket más termékek segítségével.

A dolgozat utolsó részében a háromfaktoros Chen-modellt elemeztük. Bemutattuk, hogy milyen motivációk indokolják egy ilyen modell bevezetését, ismertettük a modell szerkezetét, majd levezettünk egy, a modellhez tartozó fundamentális árazóegyenletet. Ezt követően különböző pénzügyi termékekre, egzotikus opciókra írtuk fel ennek az egyenletnek a szerkezetét, illetve a hozzájuk tartozó peremfeltételeket. Kézenfekvő továbbhaladási irány lenne ez esetben szintén a modell numerikus megvalósítása, illetve a Chen [3] könyvében bemutatott módszerekkel analitikus eredmények levezetése.

A levezetéseink esetén, ha bizonyos technikai feltételek teljesülését kellett feltételeznünk, akkor rendszerint eltekintettünk ezeknek az ellenőrzésétől. A matematikailag teljesen precíz tárgyalásmód megkívánta volna mindezt, azonban a sok technikai feltétel között könnyebben elhomályosult volna a lényegi mondanivaló. Mindazonáltal lehetséges lenne ezen feltételeket megvizsgálni, és egy függelékben szerepeltetni, de a gyakorlati, valós életbeli problémák megoldásához csak igen kis mértékben járulna ez hozzá.

Irodalomjegyzék

[1] Michael J. Brennan and Eduardo S. Schwartz. A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds. *Journal of Banking and Finance*, (3):133–155, 1979. 38

[2] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice. With Smile, Inflation and Credit*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, second edition, 2006. 2

[3] Lin Chen. *Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing, and Risk Management*. Number 435 in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, Berlin Heidelberg, 1996. 3, 36, 43, 50, 58

[4] Lin Chen. Stochastic Mean and Stochastic Volatility - A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and Its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives. *Financial Markets, Institutions and Instruments*, (5):1–88, 1996. 3, 36, 43, 50

[5] Ren-Raw Chen and Louis Scott. Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates. *The Journal of Fixed Income*, (Vol. 3, No. 3):14–31, December 1993. 6

[6] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross. An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices. *Econometrica*, (Vol. 53, No. 2):363–384, 1985. 32

[7] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, (Vol. 53, No. 2):385–408, 1985. 32

[8] L. Uri Dothan. On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, (6):59–69, 1978. 38

[9] Darrell Duffie. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, third edition, 2001. 43

[10] Darrell Duffie and Rui Kan. A Yield-Factor Model of Interest Rates. *Mathematical Finance*, (Vol. 6, No. 4):379–406, October 1996. 3, 5, 29, 33, 36

[11] Damir Filipovic. *Consistency Problems for Heath-Jarrow-Morton Interest Rate Models*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001. 3

[12] Bjorn Flesaker. Testing the Heath-Jarrow-Morton/Ho-Lee Model of Interest Rate Contingent Claims Pricing. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(4):483–495, 1993. 3

[13] Steven L. Heston. Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility. *Review of Financial Studies*, (6:2):327–343, 1993. 37

[14] Franz Edward Hohn. *Elementary Matrix Algebra*. Dover Publications Inc., Mineola, New York, third edition, 2012. 25

[15] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North Holland, Amsterdam, second edition, 1989. 29

[16] Chan K.C., G. Andrew Karolyi, Francis A. Longstaff, and Anthony B. Sanders. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rates. *The Journal of Finance*, (Vol. 47, No. 3):1209–1228, 1992. 37

[17] Robert Litterman and José Scheinkman. Common Factors Affecting Bond Returns. *The Journal of Fixed Income*, pages 54–61, 1991. 37

[18] Francis A. Longstaff and Eduardo S. Schwartz. Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model. *Journal of Finance*, (47):1259–1282, 1992. 38

[19] Robert C. Merton. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, (29):449–470, 1974. 31

[20] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale methods in financial modelling*, volume 36. Springer Science & Business Media, second edition, 2006. 2

[21] Neil D. Pearson and Tong-Sheng Sun. Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model. *The Journal of Finance*, (Vol. 49, No. 4):1279–1304, September 1994. 6

[22] Elias M. Stein and Jeremy C. Stein. Stock Price Distribution with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. *Review of Financial Studies*, (4):727–752, 1991. 37

[23] Oldrich Vasicek. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, (5):177–188, 1977. 31