

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
MATEMATIKA INTÉZET

KISS MÁTYÁS JÓZSEF
ÁRAZÓ MODELLEK AZ FX PIACON

MSc szakdolgozat

Kvantitatív pénzügyek szakirány

Témavezető: Molnár-Sáska Gábor



ELTE Valószínűségszámítás és Statisztika Tanszék

2017. Budapest

Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet kifejezni konzulensemnek, Molnár-Sáska Gábornak, hogy mindig rendelkezésre állt, amikor szükség volt rá.

I would also like to thank Sanjeev Kumar without whom this thesis would have never been finished.

Tartalomjegyzék

Bevezetés, téma ismertetése	1
1. A Foreign Exchange piac általános jellemzői	3
1.1. Alapvető jellemzők	3
1.2. Az árjegyzés konvenciója	4
1.3. A Black-Scholes modell FX piacokon	6
1.3.1. Szimmetria a Black-Scholes piacon	7
1.4. A delta-jegyzés konvenciója	9
1.5. Volatilitás-mosoly	9
1.5.1. At-the-money	10
1.5.2. Market Strangle	10
1.5.3. Smile Strangle és Risk Reversal	11
1.5.4. A volatilitásmosoly vizualizációja	12
2. Modellezési lehetőségek	16
2.1. Interpolálási lehetőségek	16
2.2. A lokális volatilitás modell	18
2.3. A sztochasztikus volatilitás modell	19
2.4. A kevert volatilitás modell	20
3. Implementáció, eredmények	22
3.1. Implementációs kérdések	22
3.2. Eredmények	24
4. A fenti modellek gyengeségei, további modellezési lehetőségek	32
Összefoglalás	35
Irodalomjegyzék	36
Melléklet	37

Bevezetés, téma ismertetése

Motiváció

Az egyetemi óráimon sokat hallottam arról, milyen modellezési lehetőségek vannak a pénzügyi piacokon. Legérdekesebbnek a derivatívák árazását találtam. Nagyon tetszett a matematikai eszköztár, amit használt, és aminek a segítségével nagyon leegyszerűsödött egy-egy bonyolultnak tűnő termék fair árának meghatározása.

A tanulmányaim során szinte mindig az volt a kiinduló helyzet, hogy adott egy "értékmérő", aminek segítségével árazzuk a kockázatos alaptermékre szóló derivatívát. Ezt az értékmérőt gondoltuk a pénznek, a valós életben való alkalmazás során jellemzően amerikai dollár, euró, japán jen, vagy bármelyik más deviza. Azonban az idő múlásával látókörömbe került az FX azaz Foreign Exchange market, magyar nevén a devizapiac (továbbiakban FX piac). A részletekbe belemerülés nélkül is érezhető, hogy az FX piacon egyáltalán nem egyértelmű, hogy mi a fizetési eszköz, és mi a kockázatos termék. Sőt, jobban belegondolva az, hogy egy deviza "drágább lett" vagy "olcsóbb lett" szintén nem értelmezhető, hiszen azonnal felmerül a kérdés, hogy miben kell mérni egy deviza értékét. Amikor ezzel először találkoztam, nagyon tetszett nekem az FX piac fentebb illusztrált szimmetriája. Olyan benyomást keltett bennem, hogy nem abszolút, csak relatív; az egész FX piac olyan, mint egy világ, ahol nincs biztos pont.

Az FX piac másik számomra tetsző jellegzetessége, hogy első ránézésre a call és a put opció sem értelmezhető, hiszen például ha egy vanilla opció, ami az euró / dollár árfolyamtól függ, euró call, akkor egyszerre dollár put is. Valójában ez egy részvényopciónál is így van, hiszen ha van egy call opció egy részvényre, akkor valójában egyszerre ez egy put opció is a pénzre (részvényért cserébe). Ám amíg a részvénypiacon konvenció szerint mindig a részvényre értjük, hogy call vagy put, úgy a devizapiacon megint csak nem egyértelmű, hogy melyik devizára értjük, hogy call vagy put.

A fentiek miatt elnyerte a tetszésem az FX piac, így úgy határoztam, hogy szakdolgozatom témájaként az ezen a piacon lévő derivatíva-árazó modelleket választom. Kíváncsi voltam arra, milyen modellezési jellegzetességek adódnak a fent leírt szimmetriából, egyáltalán ennek van-e hatása a modellekre. Kíváncsi voltam arra is, hogy mik a különbségek, és ezek miből fakadnak az FX piac és más piacok között, mint például a részvénypiac (Equity market), az árupiac (Commodity market), vagy a kamatláb-derivatíva piac (interest rate market) között.

Téma ismertetése

Szakkolgozatom témája tehát az FX piacon használatos árazási modellek tanulmányozása. Első lépésben egy áttekintést adok az FX piac legfontosabb jellemzőiről az 1. fejezetben. Ennek részeként ismertetem az FX piacra jellemző konvenciókat az 1.2. és az 1.4. fejezetben, továbbá néhány számszerű statisztikát is mutatok az FX piacról a 1.1. fejezetben. Ezután bemutatom, hogy a jól ismert Black-Scholes modell hogyan adaptálható az FX piacra az 1.3 fejezetben. Végül, de nem utolsó sorban a 1.5. fejezetben bemutatom, hogy a Black-Scholes modell miért alkalmatlan sok esetben az FX piacon is, illetve hogy a volatilitás-mosoly hogyan jelenik meg.

Miután bemutattam, hogy a Black-Scholes modell a volatilitás-mosolyra való érzéketlensége miatt a legtöbb esetben alkalmatlan, felmerül a kérdés, hogy milyen modelleket szoktak használni helyette. A következő, 2. fejezetben a lehetséges modelleket mutatom be. A különböző alfejezetekben sorra bemutatom a lokális volatilitás modellt, a sztochasztikus volatilitás modellt és végül a kevert volatilitás modellt. Bemutatom ezen modellek előnyeit és hátrányait, illetve hogy az FX piacon melyiket részesítik előnyben, és miért.

A modellek bemutatása mellett implementálom is őket, és ezen keresztül ábrákkal is be tudom mutatni az egyes modellek tulajdonságait. A 3. fejezetben az implementációm eredményeit fogom bemutatni, majd az ezekből levonható következtetésekre térek át.

Legvégül a 4. fejezetben pedig vázolólok a korábban bemutatott modellek gyengeségeit, és a további problémákat, amik felmerülnek modellezési szempontból.

1. fejezet

A Foreign Exchange piac általános jellemzői

1.1. Alapvető jellemzők

A Foreign Exchange piac az egyik legrégebbi pénzügyi piac, ami létezik. Feljegyzések szerint már i.e. 3. században is történt különböző valuták cseréje a görögök és az egyiptomiak között. Egészen az 1970-es évekig a devizapiac résztvevői azok maradtak, akik a tevékenységükből fakadóan szorultak rá devizák cseréjére (pl. nemzetközi vállalatok). Más szóval kevésbé volt jellemző szereplő a piacon a spekuláns, illetve az arbitrázsőr. Mára azonban az FX piac az egyik legnagyobb piaccá fejlődött, különböző becslések szerint a napi lebonyolított forgalom 3-5 ezer milliárd amerikai dollár között mozog. Ennek egyik oka a globalizáció, illetve az internet széleskörű elterjedése, ugyanis ezáltal egy mozdulattal tud létrejönni egy FX ügylet két olyan fél között, akik a világ különböző részein vannak. Szintén nagyon fontos jellemző, hogy (ellentétben például az árupiaccal) a kereskedés tárgya nem igényel további specifikációt, illetve nincs szállítási költsége sem. Ezzel ellentétben például a búza vagy az elektromos áram önmagában még nem elég pontos meghatározás, illetve a szállításuk is sokkal nehezebb és költségesebb, mintha például egy amerikai dollárt szeretne egy ember eljuttatni egy, a bolygó másik felén lévő üzleti partnerének.

Azontúl, hogy az FX piac nagyon likvid, a hétvégi napok kivételével még folyamatosan, a nap 24 órájában kereskedett is. Ez is természetesen abból fakad, hogy ugyanannak a piacnak a résztvevői a Föld teljesen különböző pontjain vannak. Korábban említettem, hogy a kereskedés tárgya jól definiált, azaz nincs különbség két USA dollár között. Ebből következik az a jellemzője is a piacnak, hogy a túlnyomó része OTC (over the counter), azaz tőzsdén kívül zajlik, ugyanis nincs szükség a tőzsdék standardizálására. A tőzsdék partnerkockázat-csökkentő hatásának hiányában az ügyletek nagyon nagy részének legalább az egyik résztvevője egy pénzügyi szolgáltató (pl. bank). Az FX ügyletek legnagyobb része természetesen a világ nagy pénzügyi központjaiban zajlik, úgy mint New York, London, Tokió, Hong Kong, Frankfurt vagy Szingapúr.

A piac méretét korábban USA dollárban fejeztem ki. Ennek az is az oka, hogy az amerikai dollár

messze a legtöbbet kereskedett deviza az FX piacon. Az ügyletek 80-90%-a az USA dollár és a valamilyen más deviza árfolyamától függ (azaz ez az FX ráta az alaptermék). Az amerikai dollár után leggyakrabban kereskedett devizák a kanadai dollár, az euró, a japán jen, az angol font, a svájci frank és az ausztrál dollár. Még további, közepesen gyakori devizák az új-zélandi dollár, a svéd korona, a norvég korona és a dán korona. Érdekesség, hogy a magyar forint a 24. leggyakrabban kereskedett deviza, a globális FX piacnak 0,4%-át teszi ki, ami nagyjából napi 20 milliárd dollárnyi forgalmat jelent.

Az egyes devizák után szeretnék devizapárokat is kiemelni gyakoriság alapján. A kereskedés alapja mindig egy (esetenként több) devizapár árfolyama. Pl. az USD/EUR¹ árfolyam az euró és az amerikai dollár átváltási arányát mutatja. A leggyakoribb kereskedett devizapárok az USD/EUR, USD/GBP, JPY/USD, USD/CHF, USD/CAD, GBP/JPY.

A legtipikusabb termékek a piacon a forwardok. Ez viszont modellezési szempontból nem vet fel sok kérdést, így az opciók piacát tekintve a leggyakoribb termék ezen a piacon is a vanilla opció. Ez túlnyomórészt a spot exchange rate-re szól, azonban a CME-n (Chicago Merchantile Exchange, azaz Chicago-i tőzsdén) lehet futures árfolyamra szóló opciót is venni. Ezen kívül kifejezetten likvid még a barrier opciók piaca, azon belül is kiemelkedik a double knockout opció.

1.2. Az árjegyzés konvenciója

Az ebben a fejezetben bemutatott konvenciók leírásához forrásnak Iain J. Clark az [1] forrás alatt megjelölt szakkönyvét használtam.

Magára a devizapár jelölésére kialakult egy konvenció. Magától értetődőnek tűnhet, az USD/EUR jelölés. Azonban az USD/EUR kifejezés félrevezető lehet, hiszen lehet úgy érteni, hogy ha az USD/EUR értéke 1,06, akkor 1,06 dollárt kell fizetni minden egyes euróért. De úgy is lehet érteni, hogy ha $\frac{USD}{EUR} = 1,06$, akkor $USD = 1,06EUR$. Talán ennek hatására a szokásos jelölés mellőzi a / jel használatát:

Az elterjedt jelölés az EURUSD. Ez azt fejezi ki, hogy 1 euróért mennyi amerikai dollárt lehet kapni. Azaz ha azt mondjuk, hogy EURUSD = 1,06, akkor azt úgy kell érteni, hogy 1 EUR = 1,06 USD. Ez minden devizapárra jellemző, tehát mindenhol XXXYYY alakban szokás jegyezni az árat.

A korábbi fejezetekben látható volt, hogy nem egyértelmű az árjegyzés sem, azaz, hogy melyik devizára normáljuk le a cserearányt. Például ugyanannyira logikus kifejezni a (amerikai) dollár árát euróban, és viszont, azaz 1 dollár = 0,94 euró vagy 1 euró = 1,06 dollár. Ez semelyik másik piacon nem jellemző, hiszen senki nem használná az OTP részvényt értékmérőnek. Ezen ok miatt az FX piacon historikus módon kialakult egy konvenció arról, hogy a devizapárokat hogyan jegyzik. Ez sajnos nem írható le egyetlen szabállyal, de a főbb devizákat le lehet írni egy hierarchiával: EUR > GBP > AUD > NZD > USD > CAD > CHF > JPY. A két deviza közül a "nagyobb" fog előrébb szerepelni az XXXYYY típusú árjegyzésben.

¹A dolgozat további részében mindig az ISO-kódokkal (International Organization for Standardization) fogom jelölni az egyes devizákat. A leggyakoribbak az USD (amerikai dollár), EUR (euró), JPY (japán jen), GBP (angol font sterling).

Az árfolyamokat általában 4 tizedesjegy pontossággal jegyzik, azaz $EURUSD = 1,0613$. A legutolsó tizedesjegyet hívják pip-nek.

Szót kell ejteni az ügyletek és az opciók árjegyzési lehetőségeiről is. Egy adott ügylet méretének meghatározására két lehetőség is adódik. Ezt egy általános példán keresztül fogom illusztrálni, amely a példában a devizapárt jelöljük úgy, hogy XXXYYY. X-re gondolhatunk "hazai" devizaként (domestic currency), az Y-ra pedig, mint "külföldi" deviza (foreign currency). Továbbá példa kedvéért tekintsünk egy long call vanilla opciót, ahol a call pozíciónak lehetősége adódik vennie meghatározott mennyiségű Y valutát meghatározott árfolyamon (strike). A strike legyen a példa kedvéért 2. Az ügylet méretét mérhetjük X és Y devizában is. Nézzük először X devizában: ekkor ha azt mondjuk, hogy az ügylet mérete 100.000 XXX (másként mondva a notional currency az X és a notional értéke 100.000), akkor a long pozíciónak lehetősége van eladni 100.000 XXX-t és cserébe kapni 200.000 YYY-t. Az opció árát konvenció szerint egységnyi notional-re adjuk meg, ettől függetlenül viszont lehet akár XXX-ben, akár YYY-ban. Az árat XXX-ben megadva tehát azt kapjuk, hogy egy X devizára vetítve mennyibe kerül az opció. Ezt a szakirodalom és a piaci konvenció úgy jelöli, hogy %XXX. Továbbra is egységnyi X-re vetítve megadhatjuk az árat Y-ban is. Ezt úgy jelöli a piac, hogy Y pips. Ugyanígy megadhatjuk az árat X illetve Y devizában akkor is, ha az ügylet mérete Y devizában van mérve, és az árat is egységnyi Y devizára vetítve adjuk meg.

Az árjegyzési konvenciókról alább adok egy rövidebb, tömörebb összefoglalót is a 1.1 táblázatban. Ehhez a következő jelöléseket használom:

- S_0 spot (azaz jelen pillanatban megfigyelhető) ár
- N az ügylet mérete. N_d , ha a hazai (domestic) devizában van megadva, N_f , ha a külföldiben (foreign)
- V az opció ára. Az indexelésben jelölöm, hogy melyik árjegyzést használom.
- K a strike árfolyam.

A feljebb bemutatott módon az egységnyi ügylet-méretre vetített árjegyzési lehetőségeket mutattam be. Természetesen ebből már azonnal kiszámolható egy ügylet abszolút ára. Hazai devizában az ügylet ára $V_d = N_f \cdot V_{d/f}$, míg külföldi devizában $V_f = \frac{1}{S_0} \cdot N_f \cdot V_{d/f}$ (feltéve, hogy az árat $V_{d/f}$ formában, az ügylet méretét pedig külföldi devizában ismerem).

Fontos megjegyzés, hogy a fent bemutatott árjegyzési lehetőségek csak akkor működnek, ha mindkét devizában adott egy ügylet-méret (notional), és a kettő között rögzített átváltási arány van (strike). Például ha adott egy olyan ügylet, amely fizet egy dollárt, ha az EURUSD árfolyam valamilyen határ alatt vagy fölött van, akkor ennek %USD és EUR pips (azaz EUR / USD) típusú árjegyzése létezik csak. Nincs értelme annak, hogy egy euróra vetítve mennyibe kerül ez az ügylet.

long EURUSD call opció			
Ügylet		Ügylet ára	
USD	EUR	USD-ben	EUR-ban
$-K$	$+1$	$V_{d,pips} \equiv V_{d/f}$	$V_{\%d} = \frac{V_{d/f}}{S_0}$
-1	$+\frac{1}{K}$	$V_{\%d} = \frac{V_{d/f}}{K}$	$V_{f,pips} \equiv V_{f/d} = \frac{V_{d/f}}{S_0 \cdot K}$

1.1. ábra. Négyféle árjegyzési lehetőség egységnyi méretű ügyletre vetítve

1.3. A Black-Scholes modell FX piacokon

A következő fejezetben bemutatom, hogy a jól ismert Black-Scholes modellt hogyan lehet az FX piacra alkalmazni. Az itt összefoglalt eredmények eredetileg Garman és Kohlhagen munkájaként jelentek meg 1983-ban (10 évvel Black és Scholes publikációja után). A könyv a [2] hivatkozás alatt található. A hagyományos Black-Scholes modellt nem fejtem ki ebben a dolgozatban. Részletes leírás található például John C. Hull: Options, Futures and Other Derivatives című könyvében. A fejezet célja ehelyett az, hogy az eredeti modellhez képesti különbségeket bemutassam.

Az eredeti modellfeltevések szinte szó szerint megismételhetők. Annyit érdemes közülük megemlíteni, hogy a feltételezett lognormális folyamat most természetesen a devizaárfolyamról szól, illetve hogy konstans és kockázatmentes kamatláb elérhető *mindkét* devizában:

$$dS_t = (r^d - r^f)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

A bonyodalmat az okozza, hogy míg a részvénypiacon a részvény a dinamikus delta-hedge céljából kereskedett termék, addig ez az FX piacon nem lehet egyik vagy másik deviza, esetleg a devizaárfolyam, ezek helyett a külföldi kötvény fogja betölteni ezt a szerepet. Világos, hogy ha a fedezés céljából valamennyi külföldi devizát tartanánk, attól az még nem kamatozik. Tehát a fedezéshez használt "alaptermék" ára nem S_t , hanem $B_t^f \cdot S_t$. Így tehát a lefedezett Π_t portfólió a t időpontban a következő módon néz ki:

$$\Pi_t = V_t - \Delta_t \cdot B_t^f \cdot S_t$$

Fel kell írunk a fedező, Π_t folyamat differenciáját.

$$d\Pi_t = dV_t - \Delta_t d(B_t^f S_t) =$$

Itt használva a szorzási szabályt, behelyettesítve az S_t dinamikáját, majd a származtatott követelést, azaz V_t -t is behelyettesítve az Ito-lemma használatával kapott kifejezéssel kapjuk, hogy

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta_t B_t^f r^d S_t + \frac{\partial V}{\partial S} (r^d - r^f) S_t \right] dt + \left[\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_t B_t^f \right] \sigma S_t dW_t$$

Ebből látható, hogy annak érdekében, hogy ne legyen sztochasztikus tag a fedező portfóliónk dinamikájában, a következő módon kell választanunk a Δ_t -t:

$$\Delta_t = \frac{1}{B_t^f} \frac{\partial V}{\partial S}$$

Ezt behelyettesítve, illetve megkövetelve, hogy a lefedezett portfóliónk a hazai kockázatmentes hozam sebességével nőjön (azaz $d\Pi_t = r^d \Pi_t dt$), kis átalakítás után kapjuk a jól ismert Black-Scholes differenciálegyenlet FX piacon használt változatát:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r^d - r^f) S \frac{\partial V}{\partial S} - r^d V = 0$$

Ez csupán annyiban tér el az eredeti Black-Scholes egyenlettől, hogy egy ponton az r (vagyis r^d) helyett $(r^d - r^f)$ jelenik meg. Azaz a külföldi deviza kockázatmentes hozama helyett csak az eltérése számít a hazai deviza kockázatmentes hozamától. Külön erre gyakran be szokták vezetni az r^u jelölést, azaz $r^u = r^d - r^f$.

Levezetés nélkül közlöm az európai call opció árát is (lásd az [1] alatt megjelölt forrást), ami szintén majdnem pontosan ugyanaz, mint az eredeti Black-Scholes modellben:

$$V_{call} = S_0 e^{-r^f T} N(d_1) - K e^{-r^d T} N(d_2)$$

ahol a d_1 és d_2 jelölések is kísértetiesen is hasonlítanak a Black-Scholes-ban lévő párjukra:

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r^d - r^f \pm \frac{1}{2}\sigma^2) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Az $N(x)$ függvény a szokásos jelölés szerint (és a dolgozat további részében) a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli.

1.3.1. Szimmetria a Black-Scholes piacon

Más piacokkal ellentétben az FX piacon érdemes vizsgálni azt a kérdést is, hogy ha nem az egyik, hanem a másik befektető szemszögéből vizsgáljuk meg egy call opció árát, vajon ugyanaz az ár jön-e ki. A másik befektető szemszögéből nézve egy short put opció ára (a saját devizájában) kell, hogy megegyezzen az első befektető long call opció árával.

Ennek megvizsgálásához először érdemes azt is megvizsgálni, hogy egy Black-Scholes típusú dinamika mellett a reciprok folyamat dinamikája hogy fog kinézni. Ehhez az Ito-formulát kell alkalmaznunk a $f(S, t) = \frac{1}{S}$ függvényre. Emlékeztetőül, a Black-Scholes dinamika a következő:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Az Ito-formula szerint

$$df(S, t) = \frac{\partial f(S, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(S, t)}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S, t)}{\partial S^2} dS dS$$

Ebbe behelyettesítve a fenti dinamikát, és a transzformáló f függvényt a következőt kapjuk:

$$d\left(\frac{1}{S}\right) = 0 + -\frac{1}{S^2} (\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2} \frac{2}{S^3} dS dS$$

Felhasználva, hogy a Wiener-folyamat kvadratikus variációja egy t hosszú intervallumon éppen t

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{S}\right) &= -\frac{1}{S^2} (\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2} \frac{2}{S^3} \sigma^2 S^2 dt \\ d\left(\frac{1}{S}\right) &= \left[-\mu \left(\frac{1}{S}\right) + \sigma^2 \left(\frac{1}{S}\right)\right] dt + (-\sigma) \left(\frac{1}{S}\right) dW \end{aligned}$$

Ez az eredmény megfelel az intuíciónak. A drift iránya ellenkezője az eredeti folyamatnak, maga a dinamika típusa azonban mégsem változik meg.

Most vizsgáljuk meg a short put opció árát a külföldi devizában! A külföldi befektető nézőpontjából mind a spot mind a strike a reciprokára változik, tehát legyen $\hat{S} = \frac{1}{S}$ és $\hat{K} = \frac{1}{K}$. Mivel a külföldi befektető a saját devizájában számolva short put opciót tart, ezért annak az értéke a következőképpen fest:

$$\hat{V}_T = K \left(\hat{S}_T - \hat{K}\right)^- = K \left(\hat{S}_T - \hat{K}\right) \mathbb{1}_{\{\hat{S}_T \leq \hat{K}\}}$$

Annak érdekében, hogy ennek a T -beli kifizetésnek az értékét megkapjuk $t = 0$ -ban, csak venni kell a külföldi deviza szerinti kockázatsemleges mértékben vett várható értékét, majd vissza kell diszkontálni:

$$\hat{V}_0 = e^{-r^f T} \mathbf{E}^f \left[\hat{V}_T \right]$$

Behelyettesítve \hat{V}_T helyére a fenti kifejezést

$$\hat{V}_0 = e^{-r^f T} \mathbf{E}^f \left[K \left(\hat{S}_T - \hat{K}\right) \mathbb{1}_{\{\hat{S}_T \leq \hat{K}\}} \right]$$

Mivel K egy valós szám, ezért kivihető a várható értékből. Ezen kívül a várható érték linearitását kihasználva szétbontom a várható értékben lévő kifejezést:

$$\hat{V}_0 = e^{-r^f T} K \mathbf{E}^f \left[\hat{S}_T \mathbb{1}_{\{\hat{S}_T \leq \hat{K}\}} \right] - e^{-r^f T} K \hat{K} \mathbf{E}^f \left[\mathbb{1}_{\{\hat{S}_T \leq \hat{K}\}} \right]$$

Most kihasználhatjuk, hogy $K \hat{K} = 1$, illetve hogy $\{\hat{S}_T \leq \hat{K}\}$ esemény pontosan akkor teljesül, amikor a $\{S_T \geq K\}$ esemény.

$$\hat{V}_0 = e^{-r^f T} K \mathbf{E}^f \left[\hat{S}_T \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} \right] - e^{-r^f T} \mathbf{E}^f \left[\mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} \right]$$

Felhasználva, hogy $\mathbf{E}^f \left[\hat{S}_T \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} \right] = \hat{S}_0 e^{(\sigma^2 - \mu^f) T} \mathbf{E}^f \left[\frac{d\mathbf{P}^d}{d\mathbf{P}^f} \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} \right]$:

$$\hat{V}_0 = e^{-r^f T} K \hat{S}_0 e^{(\sigma^2 - \mu^f) T} \mathbf{E}^f \left[\frac{d\mathbf{P}^d}{d\mathbf{P}^f} \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} \right] - e^{-r^f T} \mathbf{P}^f [S_T \geq K]$$

A várható érték a mértékcsere után a \mathbf{P}^d mérték szerint lesz, és mivel az indikátorfüggvény várható értékét vesszük, ezért (a második taghoz hasonlóan) egy esemény valószínűségévé egyszerűsödik.

$$\hat{V}_0 = Ke^{-r^d T} \hat{S}_0 \mathbf{P}^d [S_T \geq K] - e^{-r^f T} \mathbf{P}^f [S_T \geq K]$$

Azaz

$$\hat{V}_0 = \frac{K}{\hat{S}_0} e^{-r^d T} N(d_2) - e^{-r^f T} N(D_1)$$

Ezt hazai devizába visszaváltva kapjuk, hogy

$$\hat{S}_0 \hat{V}_0 = Ke^{-r^d T} N(d_2) - S_0 e^{-r^f T} N(D_1) = -V_0$$

Azaz megkaptuk, hogy a belföldi devizában számoló befektetővel ellentétes pozíció ára külföldi devizában számolva éppen ellentettje a hazai devizában lévő árnak.

1.4. A delta-jegyzés konvenciója

A többféle árjegyzési lehetőség azonnal felveti a kérdést, hogy a deltát miben jegyzik. A sok árjegyzési lehetőség miatt a delta jegyzésére is rögtön sok lehetőség adódik. Az első két lehetőség az, ha az alaptermék devizaárfolyam százalékos változását hazai, vagy külföldi devizában mérjük. A második két lehetőség, ha a forward árfolyam százalékos változására való érzékenységet vizsgáljuk. Ez utóbbinál az opció jövőértékének változását szokás nézni.

Az ötödik, egyben utolsó, és általam legjobban vizsgált eset az úgynevezett "egyszerű" delta. Szigorú értelemben ez nem parciális deriváltja az árnak sem a spot ár szerint sem a forward ár szerint. Ehelyett ennek a célja a moneyness mérése, valamilyen köztes módon $N(d_1)$ és $N(d_2)$ között. A definíciója a következő:

$$\Delta = N(d) \text{ ahol } d = \frac{\ln\left(\frac{F_{0,T}}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

Tehát a d -ből a $\frac{\pm \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$ le van hagyva, ezzel létrehozva egy "köztes" d -t.

Szokásos jelölés, hogy bevezetnek egy ω változót, amire $\omega^2 = 1$ és a $+1$ értéke jelenti azt, hogy az opció call, és a -1 érték jelenti azt, hogy put. Ezt a jelölést is felhasználva:

$$\Delta = \omega N(\omega d) \text{ ahol } d = \frac{\ln\left(\frac{F_{0,T}}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

1.5. Volatilitás-mosoly

Közismert, hogy a Black-Scholes modell legnagyobb gyengesége, hogy a feltevései között szerepel, hogy a strike függvényében konstans a volatilitás. Ez a valóságban egyáltalán nincs így sem FX-en, sem más piacokon. Ha a megfigyelt opció-árakból visszaszámoljuk a Black-Scholes-féle implicit volatilitást, akkor megkapjuk az implicit volatilitás-mosolyt. Ebben a fejezetben bemutatom, hogy milyen jelölési konvenciók vannak az FX piacokon az implicit volatilitás-mosoly jelölésére.

1.5.1. At-the-money

At-the-money (ATM) opciónak hívjuk azt, ami valahol félúton van az In-the-money (ITM) és az Out-of-the-money (OTM) között. De az, hogy ezalatt pontosan mit értünk, az nem feltétlenül egyértelmű. Alább mutatok két lehetséges értelmezést.

ATM - Forward

A legegyszerűbbnek tűnő módszer, ha azt a strike-ot hívjuk ATM-nek, ami az adott lejáratra szóló forward értéke (vagyis amilyen árfolyamon lehet kezdő költség nélkül belépni egy forward ügyletbe). A dolog kézenfekvősége ellenére ezt a módszert kizárólag a latin-amerikai államok fejlődő piacai használják, például a mexikói peso (MXN) vagy a brazil reál (BRL) esetén.

ATM - Delta-neutral

Egy másik (elsőre kevésbé logikus, azonban jobban mögénézve már sokkal természetesebb) módszer az ATM strike megválasztására, ha úgy definiáljuk az ATM strike szintjét, hogy a hozzá tartozó straddle pozíciónak 0 legyen a deltája. Ezen a módon "tisztán" lehet nagyobb vagy alacsonyabb volatilitásra "fogadni", azaz vegát vásárolni / eladni. Valójában éppen ez az az ok, ami miatt ez terjedt el széleskörűen az FX piacon. Tudvalevő, hogy a straddle pozíció egy azonos strike-ú call és put opció összege. Ezáltal tehát a K_{DNS} (azaz delta-neutral strike) úgy van definiálva, hogy:

$$\Delta(\text{call}, K_{DNS}, T, \sigma_{ATM}) + \Delta(\text{put}, K_{DNS}, T, \sigma_{ATM}) = 0.$$

ATM volatilitás

A fenti módon definiált strike-hoz tartozik egy piacon megfigyelt ár. Azonban az FX piacon jellemzően implicit volatilitásban jegyzik az árat, tehát a fenti módon meghatározott strike-ból még a Black-Scholes modell alapján ki kell számolni az implicit volatilitást. Ebből kapunk tehát egy ATM volatilitást minden olyan lejáratra, ami a piacon kereskedett. Az aktuális piaci adatok láthatóak a 1.1 táblázatban.

1.5.2. Market Strangle

A volatilitásmosoly "erősségére" használatos mennyiség az úgynevezett Market Strangle. Ehhez tételezzük fel, hogy a volatilitás a strike függvényében, ha nem is konstans, de szimmetrikus az at-the-money volatilitásra. Szintén tételezzük fel, hogy adott egy long out-of-the-money (OTM) put és call opció, melyek az at-the-money szinttől egyenlő távolságra helyezkednek el moneyness értelemben. Ez utóbbi alatt azt kell érteni, hogy előjeltől eltekintve a két opció deltája megegyezik. A piaci árjegyzésben az ötlet az, hogy a fenti portfólióban szereplő két opció konkrét árának ismerete nélkül meg lehet mondani a volatilitásmosoly erősségét a következő módon: mindkét opciót beárazzuk a Black-Scholes

modellel, amiben volatilitásnak az at-the-money volatilitáshoz hozzá van adva egy $\sigma_{25d,MS}$ prémium (ez az árra is pozitívan hat, hiszen a Black-Scholes modellben egy opció végálya mindig pozitív).

Többféle lehetőség adódik arra, hogy ezeket a moneyness értelemben egyenlő távolságra lévő opciókat hogy válasszuk meg. A leggyakoribb eljárás az, hogy a $\pm 0,25$ deltájú opciókhoz tartozó prémium volatilitást adják meg. Azaz a

$$\Delta(\text{call}, K_{25d,\text{call},MS}, T, \sigma_{ATM} + \sigma_{25d,MS}) = 0,25$$

és a

$$\Delta(\text{put}, K_{25d,\text{put},MS}, T, \sigma_{ATM} + \sigma_{25d,MS}) = -0,25$$

egyenletek megoldásaiként kapott strike-hoz tartozó opciók a vizsgálat tárgyai.

Fontos azonban megjegyezni, hogy ezen két opció ára **nem** egyezik meg azzal a Black-Scholes árral, ami a $K_{25d,\text{call},MS}$ illetve a $K_{25d,\text{put},MS}$ strike-hoz tartozik és a $\sigma_{ATM} + \sigma_{25d,MS}$ volatilitással vannak beárázva. Akkor lenne ez igaz, ha a volatilitásmosoly valóban szimmetrikus lenne, azonban a piacon megfigyelhető adatok alapján nem az. Ehelyett az igaz, hogy a fenti két opció (piaci) árának összege egyenlő a $\sigma_{ATM} + \sigma_{25d,MS}$ volatilitással kiszámolt Black-Scholes árak összegével. Azaz

$$V_{25d,MS} = V(\text{call}, K_{25d,\text{call},MS}, T, \sigma_{ATM} + \sigma_{25d,MS}) + V(\text{put}, K_{25d,\text{put},MS}, T, \sigma_{ATM} + \sigma_{25d,MS})$$

Ahol $V_{25d,MS}$ -vel a 25-delta Market Strangle pozíció értékét jelölöm, az egyenlet jobb oldalán szereplő V -k pedig az egyes opciók értékét jelölik.

1.5.3. Smile Strangle és Risk Reversal

A továbbiakban bemutatom, hogy lehet egy jellemző paramétert rendelni a volatilitásmosoly aszimmetriájához. Ez a mérőszám a Risk Reversal lesz, ennek a definíciója a [3] hivatkozás alatt található cikkben jelent meg először.

Az at-the-money és a Market Strangle volatilitással ellentétben itt már fel kell tételeznünk, hogy létezik egy $\sigma_X(K)$ függvény, ami a strike függvényében megadja a volatilitást. Ezt a függvényt valamilyen előre meghatározott parametrikus formában lehet megadni, illetve teljesülnie kell rá néhány feltételnek. Először is a legtermészetesebb elvárás, hogy az at-the-money strike helyen a függvény az at-the-money volatilitást vegye fel, azaz

$$\sigma_X(K_{ATM}) = \sigma_{ATM}$$

A függvénynek továbbá konzisztensen kell viselkednie a Market Strangle-el, azaz olyan volatilitásértékeket kell felvennie a $K_{25-\text{delta},\text{put}}$ és a $K_{25-\text{delta},\text{call}}$ helyeken, hogy az ezzel a két volatilitással beárázott opciók árának összege megegyezzen a Market Strangle-el.

$$V_{25d,MS} = V(\text{call}, K_{25d,\text{call},MS}, T, \sigma_X(K_{25d,\text{call},MS})) + V(\text{put}, K_{25d,\text{put},MS}, T, \sigma_X(K_{25d,\text{put},MS}))$$

Ezek után a Market Strangle-höz hasonlóan meg kell határozni azokat a $K_{25d,call}$ és $K_{25d,put}$ strike-okat, amikre teljesül, hogy

$$\Delta(call, K_{25d,call}, T, \sigma(K_{25d,call})) = 0,25$$

illetve

$$\Delta(put, K_{25d,put}, T, \sigma(K_{25d,put})) = -0,25$$

Fontos megjegyezni, hogy a $K_{25d,call,MS}$ és $K_{25d,put,MS}$ strike-ok tipikusan nem azonosak a $K_{25d,call}$ és $K_{25d,put}$ strike-okkal. Amint a 25d strike-okat az előbbi két egyenletből meghatároztuk, adja magát a definíció, hogy $\sigma_{25d,call} = \sigma_X(K_{25d,call})$ illetve $\sigma_{25d,put} = \sigma_X(K_{25d,put})$. A volatilitásmosoly aszimmetriáját pedig ezen két volatilitás különbségeként definiálják, azaz

$$\sigma_{25d,RR} = \sigma_{25d,call} - \sigma_{25d,put}$$

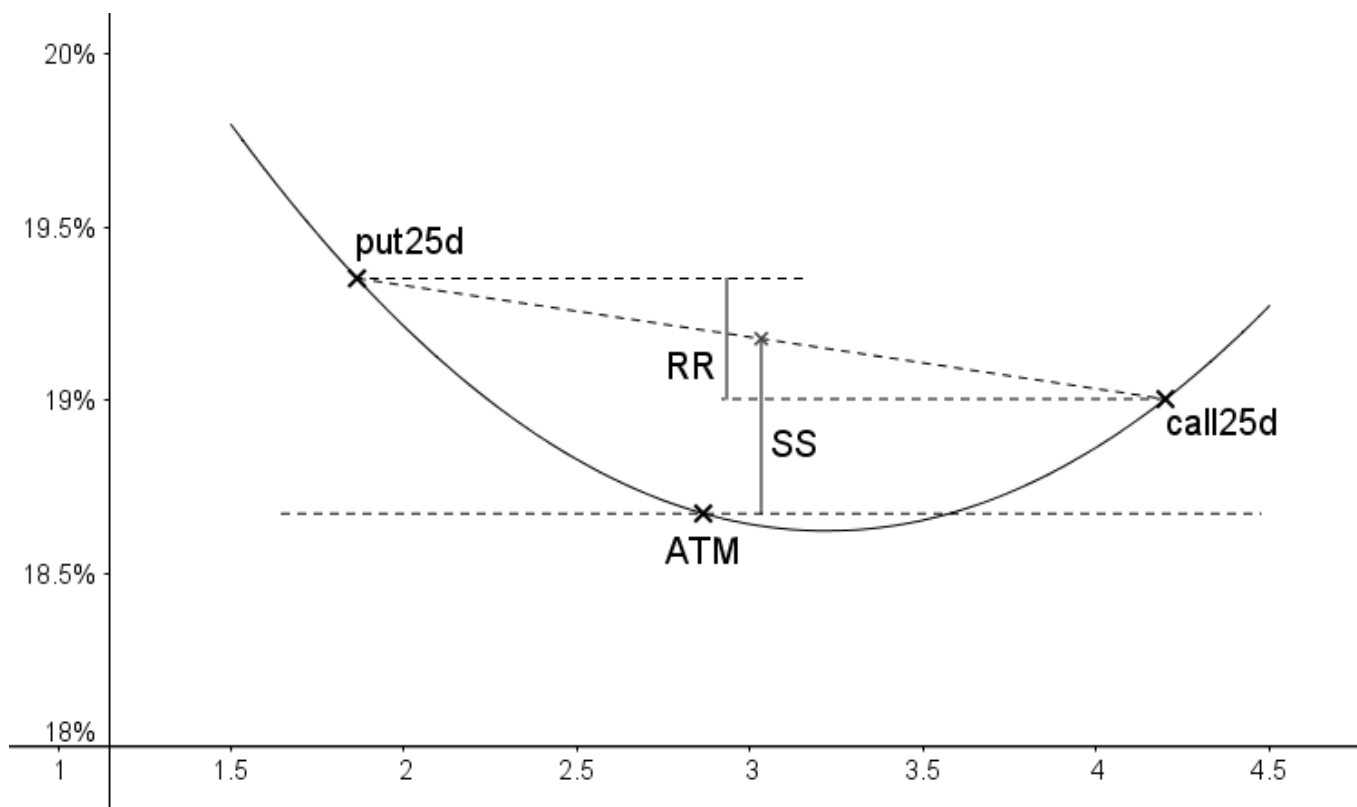
Devizapártól függően a fenti különbség néha ellentétes előjellel szerepel. A másik szokásosan jegyzett, volatilitásmosolyt jellemző mérőszám a Smile Strangle, ami a Market Strangle-höz hasonlóan a mosoly "erősségét" hivatott mérni. Ez a at-the-money és a 25-delta opciók átlagának a távolságát mondja meg, azaz

$$\sigma_{25d,SS} = \frac{\sigma_{25d,call} + \sigma_{25d,put}}{2} - \sigma_{ATM}$$

Itt jegyzem meg, hogy a likvidebb devizapárookra, illetve a közepesen likvid devizapárok rövidebb lejáratára a piacokon a 25-delta volatilitásokon kívül a 10-delta volatilitásokat szokták jegyezni.

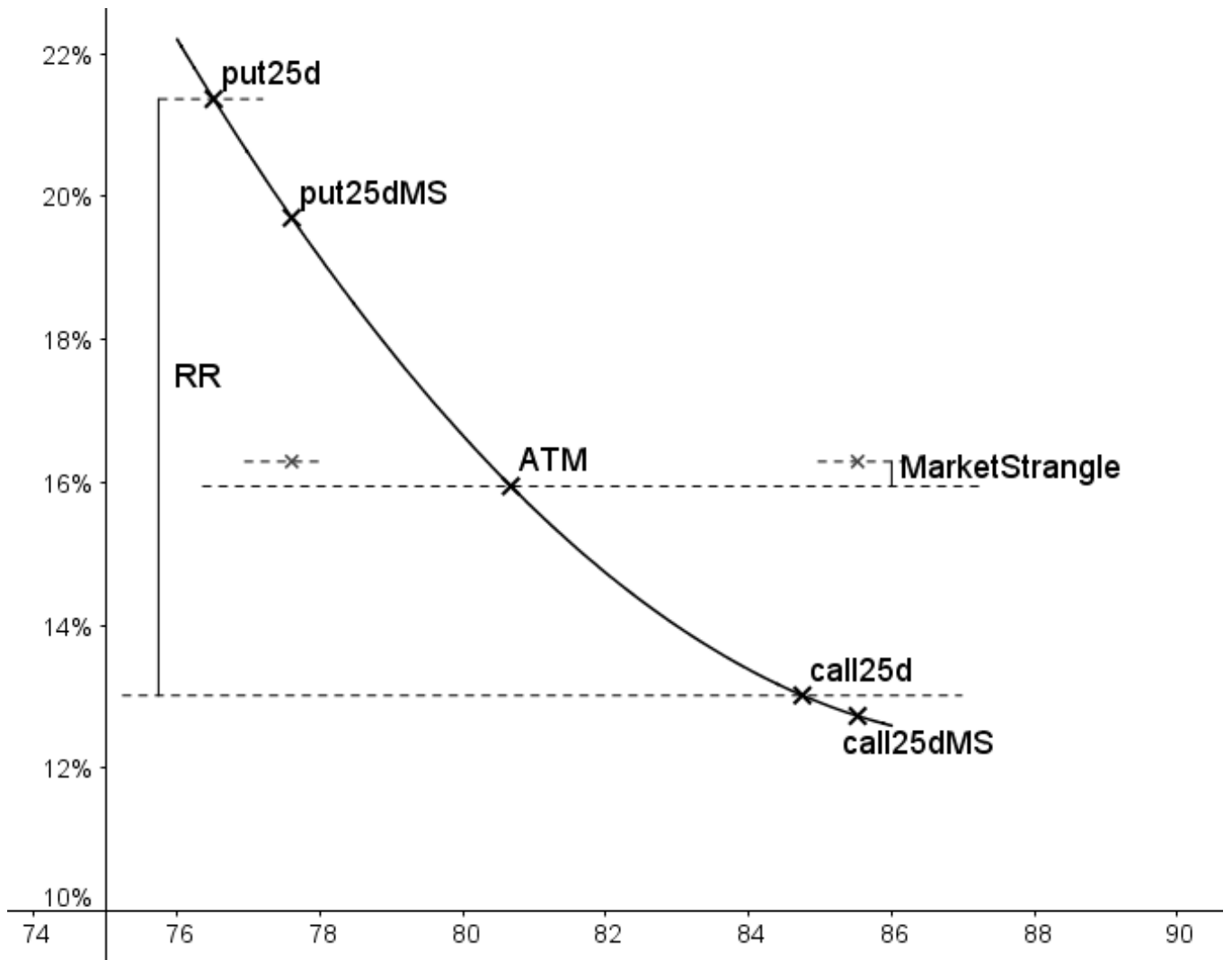
1.5.4. A volatilitásmosoly vizualizációja

A fenti definíciókat könnyebb megérteni, ha a volatilitásmosolyt jellemző mérőszámokat egy ábrán szemléltetve is el tudjuk képzelni. A 1.2 ábrán mutatok erre egy példát. Az egyszerűség kedvéért egy parabolikus paraméteres görbét használtam a volatilitásmosolyra. Az ábrán látható hosszabb szaggatott vonal jelzi az at-the-money volatilitás szintjét, ami nem feltétlenül kell, hogy a minimum legyen. A Risk Reversal a 25d call és put opciók különbsége, míg a Smile Strangle a 25d opciók átlagának és az ATM volatilitás szintnek a különbsége.



1.2. ábra. Tipikus volatilitásmosoly (a példában a spot lehet EURUSD). x-tengelyen a strike, y-tengelyen a volatilitás

Az ábra alapján már könnyű elképzelni, hogy nagy Smile Strangle szinthez "mély" volatilitásmosoly tartozik, míg a nagy Risk Reversal-hoz nagyon elferdült mosoly. Utóbbira egy példa látható az 1.3 ábrán. Ezen az ábrán az is látható, hogy habár a Market Strangle strike-ok közel vannak, mégsem ugyanazok, mint a Risk Reversal-hoz és Smile Strangle-hez kiszámolt 25d strike-ok.



1.3. ábra. Extrém ferde volatilitásmosoly. A devizapár a példában USDJPY. x-tengelyen a strike, y-tengelyen a volatilitás

Az ábrákon az egyszerűség kedvéért nem szerepeltettem, de a 10d strike-ok (és az azokhoz tartozó volatilitások) még kijebb szerepelnének, mind a 25d strike-ok.

Összefoglalva tehát legalább három, de a 10d pontokkal együtt tipikusan öt pont figyelhető meg a piacon az implicit volatilitásmosolyból. Ezek a pontok általában különbözőek és külön megfigyelhetőek minden egyes likvid lejáráthoz.

A 1.1 táblázatban bemutatom az aktuális piacon megfigyelhető adatokat. Az adatok forrása a Bloomberg.

Lejárat	ATM	25d SS	25d RR	10d SS	10d RR
1D	7,5	0,25	-0,5	0,625	-0,625
1W	7,5	0,2	-0,2	0,55	-0,28
2W	8,25	0,19	-0,15	0,541	-0,225
1M	7,525	0,175	-0,125	0,516	-0,2
2M	7,175	0,2	-0,125	0,6	-0,2
3M	7	0,225	-0,15	0,686	-0,248
6M	7,325	0,26	-0,45	0,819	-0,77
9M	7,55	0,28	-0,6	0,91	-1,008
1Y	7,8	0,295	-0,7	1,033	-1,155
2Y	8,093	0,3	-0,45	1,074	-0,787
3Y	8,36	0,29	-0,275	1,16	-0,509
4Y	8,558	0,29	-0,125	1,189	-0,231
5Y	8,657	0,29	-0,1	1,211	-0,185
6Y	8,677	0,28	-0,1	1,15	-0,35
7Y	8,756	0,3	-0,125	1,15	-0,35
10Y	9,053	0,3	-0,15	1,15	-0,35
12Y	9,504	0,2	-0,175	0,9	-0,35
15Y	10,201	0,15	-0,15	0,35	-0,2
20Y	11,202	0,1	-0,15	0,35	-0,2
30Y	12,202	0,05	-0,175	0,2	-0,2

1.1. táblázat. Volatilitás felület az FX piacon EURUSD devizapárra

2. fejezet

Modellezési lehetőségek

A következő fejezetben egy áttekintést adok arról, hogy milyen modellezési lehetőségek adódnak az FX piacon. Ezek közül melyiket szokás illetve nem szokás használni, illetve ezeknek mik az okai. A 2.1 részben felvázolom, hogy a diszkrét megfigyelhető piaci adatokból milyen módokon lehet interpolálással folytonos "megfigyelést" létrehozni. Utána a 2.2-2.4 fejezetekben egy-egy konkrét piacmodell fogok bemutatni.

2.1. Interpolálási lehetőségek

Habár ez a kérdés nem tartozik szoros értelemben a modellhez (azaz például független a feltételezett sztochasztikus dinamikától), mégis úgy gondoltam, hogy a dolog önkéntes választása miatt ebben a fejezetben beszélek róla. Továbbá a dolgozat véges terjedelme miatt nem merülök el ebben a kérdésben teljes mértékig, csupán érintőlegesen.

Az interpolálás kérdése két helyen is felmerül: egyszer az at-the-money volatilitások közötti interpolálásnál. Azaz, ha egy nem likvid lejáratú opciót szeretnénk árazni, mindenképpen szükség van a (piacon tehát közvetlenül nem megfigyelhető) at-the-money volatilitásra. Másodszer pedig egy konkrét lejárat esetén, amikor három vagy öt pontot tudunk megfigyelni, és ezekből szeretnénk minden strike-hoz egy volatilitást megadni. Ez utóbbi kérdés impliciten már felmerült a dolgozat egy korábbi részében: nem másról van itt szó, mint a 1.5.3. fejezetben szereplő $\sigma_X(K)$ alakjának megválasztásáról.

At-the-money volatilitások közötti interpolálás

Az első, naív ötlet könnyen lehet az, hogy lineárisan interpoláljunk a likvid tenorok között. Azonban ez a gyakorlatban sosincs alkalmazva, mert könnyen vezethet irreális forward volatilitás dinamikához (például negatív forward varianciához).

Az ebben az alfejezetben bemutatott módszer az úgynevezett Flat Forward interpolációs eljárás. Ehhez tegyük fel, hogy a t_1, t_2, \dots, t_N időpontokban rendre adott a $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ at-the-money volatilitás. Ekkor definíció szerint az interpoláló függvény legyen:

$$\sigma_{flatfwd}(t) = \begin{cases} \sigma_1 & t \leq t_1 \\ \sqrt{\frac{\sigma_i^2 t_i + \sigma_{i,i+1}^2 (t-t_i)}{t}} & t_i \leq t \leq t_{i+1} \text{ ha } i < N \\ \sigma_N & t \geq t_N \end{cases}$$

ahol $t_0 = 0$ illetve definíció szerint

$$\sigma_{i,i+1}^2 = \frac{\sigma_{i+1}^2 t_{i+1} - \sigma_i^2 t_i}{t_{i+1} - t_i}$$

Ennek az interpolációs eljárásnak az előnyét a következő tétel mutatja meg.

1. Tétel. *A feljebb definiált interpolációs eljárás ekvivalens az $f(t) = \int_0^t \sigma_s^2 ds$ össz-varianciában lineáris interpolálással.*

A tétel kimondása és bizonyítása fellelhető az [1] alatt megjelölt forrásban.

Bizonyítás. Legyen t tetszőleges úgy, hogy $t_1 \leq t \leq t_2$ illetve $\sigma_{lin}(t_1) = \sigma_1$ és $\sigma_{lin}(t_2) = \sigma_2$. Az össz-varianciában lineáris interpolálás úgy definiálja a $\sigma_{lin}(t)$ -t, hogy a $\sigma_{lin}^2(t)t$ a $\sigma_1^2 t_1$ és $\sigma_2^2 t_2$ közötti szakaszon legyen, azaz

$$\sigma_{lin}^2(t) \cdot t = \frac{t_2-t}{t_2-t_1} \sigma_1^2 t_1 + \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \sigma_2^2 t_2$$

Írjuk fel a Flat Forward interpolációval a volatilitást t -re (amire továbbra is $t_1 \leq t \leq t_2$):

$$\sigma_{flatfwd}(t) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 t_1 + \sigma_{1,2}^2 (t-t_1)}{t}}$$

Ennek a varianciája:

$$\sigma_{flatfwd}^2(t) \cdot t = \sigma_1^2 t_1 + \sigma_{1,2}^2 (t - t_1)$$

Ebbe behelyettesítve $\sigma_{i,i+1}$ definícióját, kapjuk, hogy

$$\sigma_{flatfwd}^2(t) \cdot t = \sigma_1^2 t_1 + \frac{\sigma_2^2 t_2 - \sigma_1^2 t_1}{t_2 - t_1} (t - t_1) = \sigma_1^2 t_1 \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} + \frac{\sigma_2^2 t_2 - \sigma_1^2 t_1}{t_2 - t_1} (t - t_1) = \frac{\sigma_1^2 t_1 (t_2 - t) + \sigma_2^2 t_2 (t - t_1)}{t_2 - t_1}$$

Ami ugyanaz, mint feljebb definiált $\sigma_{lin}^2(t) \cdot t$.

□

Egy lejáráthoz tartozó volatilitásmosoly interpolálása

Ebben az alfejezetben egy, gyakori módszert mutatok be. Ez a módszer olyan módon adja meg a 1.5.3. fejezetben szereplő $\sigma_X(K)$ függvényt, hogy az a 1.4 fejezetben definiált deltában valamilyen értelemben polinomiális. A definíció a következő:

$$\sigma_X(K) = \exp\left(f\left(\ln\left(\frac{F_{0,T}}{K}\right)\right)\right)$$

ahol definíció szerint

$$f(x) = c_0 + c_1\delta(x) + c_2\delta^2(x)$$

és

$$\delta(x) = N\left(\frac{x}{\delta_0\sqrt{T}}\right)$$

valamint

$$\sigma_0 = \exp(c_0)$$

A c_0 , c_1 , c_2 paraméterek úgy vannak kiválasztva, hogy minimalizálják az illeszkedés hibáját. Erre numerikus módszer található a [4] forrásban megjelölt szakirodalomban.

2.2. A lokális volatilitás modell

Mint ahogy a 1.5 fejezetben is megemlíttem, a Black-Scholes modell fő gyengesége, hogy a

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dinamikájában a σ mind időben, mind a strike lehetséges szintjeire konstans. Az első probléma megoldására még megoldás lehet ez egy időfüggő Black-Scholes modell, aminek a dinamikájában már a drift és a volatilitás is időfüggő, de determinisztikus:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

Ebben a dinamikában tehát minden időpontra adott egy kezdetben determinisztikusan meghatározott, pillanatnyi volatilitás illetve drift. Azonban ez a modell még mindig nem képes a volatilitásmo-
solyhoz kalibrálni, tehát szükség van egy olyan modellre, aminek a dinamikájában az aktuális spot ár függvényében más a pillanatnyi volatilitás.

Dupire publikálta 1993-ban a modelljét az [5] és a [6] forrásban megjelölt cikkekben, ami választ ad a fenti problémára. Az általa definiált modell dinamikájában az időfüggő Black-Scholes modellhez képest a volatilitás nem konstans a spot ár függvényében, hanem egy úgynevezett lokális volatilitás függvény adja meg:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_{lok}(S_t, t) S_t dW_t$$

A modell központi kérdése természetesen az, hogy ezt a lokális volatilitás függvényt hogyan lehet megadni. Dupire a munkájában erre is választ ad. Mivel a dolgozatom fő célja az FX piac bemutatása és a modellek áttekintése, így az eredmények mellett azok elemzését és levezetését a dolgozat véges hossza miatt itt nem mutatom be. Az eredeti cikkek mellett részletes leírás található az [1] alatt található forrásban is.

Első lépésként azt az esetet mutatom be, amikor a kamatláb *mindkét devizában és minden időpontban* 0. Itt jegyzem meg, hogy az FX modellek világában nagyon gyakori kérdés, hogy a kamatlábbal

mit lehet kezdeni. A legegyszerűbb természetesen az, ha a kamatláb konstans 0, és ezt fokozatosan lehet bővíteni azzal, hogy nullától különböző konstans, azzal, hogy időfüggő, de determinisztikus, illetve végül azzal, ha a kamatláb is sztochasztikusan modellezve van. Tehát Dupire munkájában 0 kamatláb mellett a

$$\sigma_{lok}(K, T) = \sqrt{\frac{2 \frac{\partial C(K, T)}{\partial T}}{K^2 \frac{\partial^2 C(K, T)}{\partial K^2}}}$$

módon számolható ki a lokális volatilitás függvény, ahol $C(K, T)$ -vel a call opció árát jelöli. Fontos észrevétel, hogy ezen modell konstrukciójához szükséges, hogy az opció ára kétszer folytososan differenciálható legyen a strike függvényében.

Második esetként az eggyel bonyolultabb kamatlábbal rendelkező esetet mutatom be, vagyis amikor nullától különböző, de időben konstans a kamatláb. Ebben az esetben Dupire eredménye szerint

$$\sigma_{lok}(K, T) = \sqrt{\frac{2 \frac{\partial C(K, T)}{\partial T} + (r^d - r^f) K \frac{\partial C(K, T)}{\partial K} + r^f C(K, T)}{K^2 \frac{\partial^2 C(K, T)}{\partial K^2}}}$$

Ez a képlet használhatóságában nagyon hasonlít az előzőre, itt sincs többre szükség, mint a $C(K, T)$ függvény K -ban való másodrendű folytonos differenciálhatóságára.

2.3. A sztochasztikus volatilitás modell

Az előző szakaszban bemutatott lokális volatilitás modell alkalmas arra, hogy európai opciók árát pontosan eltalálja. Azonban egzotikus opciók árazására már kevésbé alkalmas, mert tipikusan alulbecsli a forward volatilitásmosolyt. Ezen kívül a volatilitásmosoly historikus alakulását megvizsgálva látható, hogy távolról sem konstans. Ez tehát indokolja egy olyan modell bevezetését, amiben maga a volatilitás is sztochasztikusan alakul az idő függvényében.

Legszélesebb körben elterjedt modellt Heston javasolta 1993-ban a [7] cikkében. Ebben a munkájában a spot ár dinamikája mellett megjelenik a volatilitásnak is egy dinamikája, amiben a "motor" egy másik Wiener-folyamat. Mint az látható is a lejjebbi képletekben, a két Wiener-folyamat lehet egymással korrelált.

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^{(1)} \\ dV_t &= \kappa(m - V_t) dt + \alpha \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} \\ \langle dW_t^{(1)}, dW_t^{(2)} \rangle &= \rho dt \end{aligned}$$

A dinamikát stabilitási okokból nagyon sokszor szokták a logspot térbe transzformálni, úgyhogy a teljesség kedvéért itt is megemlítem a dinamika ezen verzióját. Ehhez a spot folyamat dinamikájára kell az Ito-formulát alkalmazni az $f(S, t) = \frac{1}{S}$ függvénnyel. A logspotot a szakirodalommal összhangban X_t -vel fogom jelölni:

$$dX_t = (\mu_t - \frac{1}{2}V_t) dt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a volatilitásfolyamat ugyanaz, mint Cox-Ingersoll-Ross modellben a rövid kamatláb dinamikája. Ez a dinamika azért kedvező mind a kamatlábmodellek területén, mind Heston modelljében, mert Feller-feltétel teljesülése esetén a kiinduló ($t = 0$ -ban) volatilitás pozitivitása esetén a volatilitás értéke végig pozitív marad.

A Feller-feltétel a következő:

2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $v_0 \geq 0$ és $\frac{2\kappa m}{\alpha^2} \geq 1$. Ekkor $V_t > 0, \forall t > 0$ 1 valószínűséggel.*

Az állítás bizonyítása megtalálható a [8] forrásban. A rövidítés kedvéért a Feller-feltételben található $\frac{2\kappa m}{\alpha^2}$ kifejezést szokták β -val jelölni. Sajnálatos módon azonban a Feller-feltétel az FX piacon tipikusan nem szokott teljesülni. Mivel így a volatilitásfolyamat pozitív valószínűséggel vehet fel negatív értéket, ezért a gyakorlatban szokássá vált, hogy a volatilitásfolyamat 0-ban elnyelődik.

Az 2.1 táblázatban látható néhány fontosabb devizapárra a Heston modell paramétereiből kiszámolt Feller-feltétel β -ja.

Devizapár	Lejárat	κ	m	α	β
EURUSD	1Y	5	0,74%	37,901%	0,515146
USDJPY	1Y	5	0,68%	47,33%	0,303554
GBPUSD	1Y	5	0,81%	42,558%	0,447221
EURGBP	1Y	5	0,81%	39,354%	0,523007
AUDUSD	1Y	5	1,16%	47,565%	0,512723

2.1. táblázat. Piaci adatok a Heston modellről. A bekalibrált paraméterek értékének forrása a Bloomberg adatszolgáltató. A piaci adatok dátuma 2017. május 29.

2.4. A kevert volatilitás modell

A gyakorlatban a fenti két modell egyike sem képes tökéletesen leírni az FX piac működését. A sztochasztikus volatilitás modell hátrányát a szakirodalomban a sticky-delta jelenségnek hívják, ami azt jelenti, hogy adott moneyness-ű (azaz adott deltájú) opció implicit volatilitása nem változik a spot ár változásával. Ez gyorsan látszik a modelltől, hiszen a dinamika diffúziós tagja egyáltalán nem függ a spot ártól. A lokális volatilitás modell hátrányát pedig sticky-strike jelenségnek szokás hívni. Ez majdnem ugyanaz a jelenség, csak most adott abszolút strike-al rendelkező opció implicit volatilitása nem változik a spot ár változásának függvényében. Az igazság tehát a két modell között van félúton, amivel el is érkeztünk a kevert volatilitás ¹ modellhez.

¹ A szakirodalomban Local Stochastic Volatility Model vagy Mixed Volatility Model

Először a [9] forrásban megjelölt szakirodalomban foglalkozott a kérdéssel Jex, Henderson és Wang. Az általuk felvázolt modellben a dinamikában már kézzel fogható a kevert volatilitás, ugyanis a diffúziós tagban mind a sztochasztikus volatilitás, mind a lokális volatilitás tag megjelenik:

$$\begin{aligned}
 dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{V_t} A(S_t, t) S_t dW_t^{(1)} \\
 dV_t &= \kappa(m - V_t) dt + \alpha \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} \\
 &\langle dW_t^{(1)}, dW_t^{(2)} \rangle = \rho dt
 \end{aligned}$$

A Heston modellhez hasonlóan itt is (lehet) korrelált a két Wiener-folyamat, és a volatilitásfolyamat dinamikája itt is a Cox-Ingersoll-Ross modellhez hasonló. Az egyetlen különbség, hogy a diffúziós tagban megjelenik $A(S_t, t)$ függvény, ami a lokális volatilitás szerepét tölti be.

Felmerül a kérdés, hogy a modell bővítésével szükségszerűen megjelenő további kalibrálható paramétereket hogyan kalibráljuk, ha a piacon megfigyelhető adatok mennyisége nem nőtt az előző modellhez képest. A válasz erre az, hogy bizonyos értelemben nőhet a piacon megfigyelhető adatok száma is, pontosabban a gyengébb modellek nem feltétlenül használják fel az összes megfigyelhető adatot. Például eddig minden modell csak a likvid vanilla opciók implicit volatilitásához kalibrált, azonban az FX piacon még nagyon likvid néhány barrier opció is. Ki lehet dolgozni a kalibrációs eljárásokat úgy, hogy egy-egy paraméter a barrier opciókhoz legyen kalibrálva.

A kevert volatilitás modell további központi kérdése az úgynevezett mixing weight, ami heurisztikusan a (tisztán) sztochasztikus és a (tisztán) lokális volatilitás modellek közötti súly. Ennek a megválasztása vagy a modellező (illetve a modell felhasználó) feladata, vagy valamilyen likvid barrier opcióhoz szokás kalibrálni. Szokásos értékei 0,5 és 0,8 között szórnak. Amikor ez a súly 0, az jelenti a tisztán lokális volatilitás modellt, amikor pedig 1, akkor a tisztán sztochasztikus modellt.

3. fejezet

Implementáció, eredmények

A dolgozat keretében egy kiválasztott modellt implementáltam C++ programnyelven. A célom az volt, hogy egy konkrét modellnek az elméleti oldalról való áttekintése mellett a használatába és a viselkedésébe is konkrétabb betekintést nyújtsak. Különböző szempontok mérlegelése után úgy döntöttem, hogy Heston modelljének az FX piacra való adaptációjával fogok foglalkozni.

Piaci adatokhoz a Bloomberg adatszolgáltatón keresztül jutottam. Nagyon hamar felmerült az a kérdés, hogy az implementáció részeként a modell kalibrálását is el akarom-e végezni. Végül arra jutottam, hogy a modell ezen részét kihagyom, mert ez önmagában is egy olyan szerteágazó és sokrétű probléma, hogy ezen dolgozat keretei között nem lehetséges minden kapcsolódó kérdést kifejteni. A fejezet későbbi részében bemutatott eredmények azonban mégis aktuális piaci adatokról szólnak, mert a Bloomberg adatszolgáltató FX opciók árazására való felületén a bekalibrált modell paraméterei is elérhetőek.

A fejezet további részében először bemutatom, hogy milyen kérdésekbe ütköztem az implementáció fejlesztésekor, majd ezekre milyen (sokszor önkényes) megoldást választottam. Ezután pedig néhány ábrával szemléltetem a modell működését az aktuális piaci helyzetre vonatkoztatva.

3.1. Implementációs kérdések

Mint ahogy a fejezet bevezetésében említettem, a modellhez már bekalibrált paraméterek elérhetőek voltak Bloomberg-ben. Erre mutatok alább egy példát, hogy szemléletes legyen, mi volt kéznél, és mi nem:

Spot ár	1,1279
r_d	1,702%
r_f	-0,509%
vol-of-vol	0,37887
Korreláció	-0,1567
Kezdeti variancia	0,59%
Hosszútávú variancia	0,74%
Átlaghoz visszahúzás együtthatója	5.0

3.1. táblázat. EURUSD árfolyamra és egy éves lejáratra szóló opció esetén piaci adatokhoz kalibrált paraméterei a Heston modellnek. Az adatok forrása a Bloomberg adatszolgáltató. Az adatok dátuma 2017. május 29.

Az implementáció során Monte Carlo eljárást használtam, azaz a modell által definiált dinamika szerint generáltam trajektóriákat. Ennek segítségével már ki lehet rajzolni a lejáratkori eloszlást, amit a modell generál. Azonban nem mindegy, hogy szimulálást hogyan végezzük. Ennek a szakirodalma is nagyon tág, és minden részletre kiterjedően itt nem tudok vele foglalkozni. Viszont már az is különbséget jelent, hogy a spot térben léptetjük előre az időt, vagy a logspot térben. Utóbbi esetben a szimulálás stabilabb lesz, kisebb zajt okozva. Másképpen mondva ha tudjuk, hogy

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^{(1)},$$

akkor nem úgy szimulálok, hogy

$$S_{t+1} = S_t + \mu_t S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^{(1)},$$

hanem úgy, hogy

$$S_{t+1} = S_t \cdot \exp \left[\left(\mu_t - \frac{1}{2} V_t \right) dt + \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} \right].$$

Többek között ezen stabilitás miatt is mutattam be már a 2.3 fejezetben a Heston modell dinamikáját a logspot térben is.

A szimulálás természetes velejárója, hogy véletlen számot kellett generálni. Ez különösebb nehézség nélkül mindenféle programozási nyelven elérhető az interneten. Ennek eredményeképpen egy $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót kapunk, ami a random függvény minden meghívásakor más értéket ad vissza. Ezt utána a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének inverzébe helyettesítve kaphatunk egy standard normális eloszlású valószínűségi változót. Ez tudja tehát a Wiener-folyamat változását szimulálni.

Az előző kérdés rögtön ez el is vezet a következő kérdéshez, nevezetesen hogy mekkora legyen a lépésköz. Ugyanis a standard normális eloszlást $\sqrt{\frac{1}{lpskz}}$ -el szorozva fogjuk megkapni a Wiener-folyamat

változását a megfelelő időintervallumon. Hosszabb időtáv (tehát legalább egy év) esetén célszerű lehet a napi egy érték generálása. Azonban még így sem egyértelmű a választás, ugyanis lehet 252, azaz az évi munkanapok száma, vagy 365, mint a naptári napok száma. Egyébként FX piacon ez a kérdés különösen bonyolult, hiszen minden ügylet legalább két devizát, és ezen keresztül két országot érint, és könnyen megeshet, hogy az egyik országban szünnap van, míg a másikban nem. Úgy döntöttem, hogy ezzel a bonyodalommal nem foglalkozom, és 365 lépéssel szimulálok egy évet.

Egy viszonylag gyakran felbukkanó kérdésbe is belefutottam: a Heston modellben a spot és a volatilitás folyamatokhoz tartozó Wiener-folyamatok korreláltak, én azonban csak független változókat tudok generálni. Azonban a két független változót megfelelően összekombinálva máris kaphatunk korreláló Wiener-folyamatokat: legyen $N_1, N_2 \sim N(0,1)$. Ekkor $X_1 = N_1$ és $X_2 = \rho^2 N_1 + \sqrt{1 - \rho^2} N_2$ választással X_1 és X_2 is $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók lesznek, továbbá $\text{corr}(X_1, X_2) = \rho$.

Az implicit volatilitás számolásánál szükség volt a Black-Scholes árak kiszámolására, ami megkövetelte a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének használatát. Ehhez a függvény egy elterjedt numerikus közelítését használtam, mely szerint a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (K (A_1 + K (A_2 + K (A_3 + K (A_4 + K \cdot A_5))))))$$

függvény jól közelíti az eloszlásfüggvényt a következő paraméter értékek mellett:

$$K = \frac{1}{1+0,2316419 \cdot |x|},$$

$$A_1 = 0,31938153,$$

$$A_2 = -0,356563782,$$

$$A_3 = 1,781477937,$$

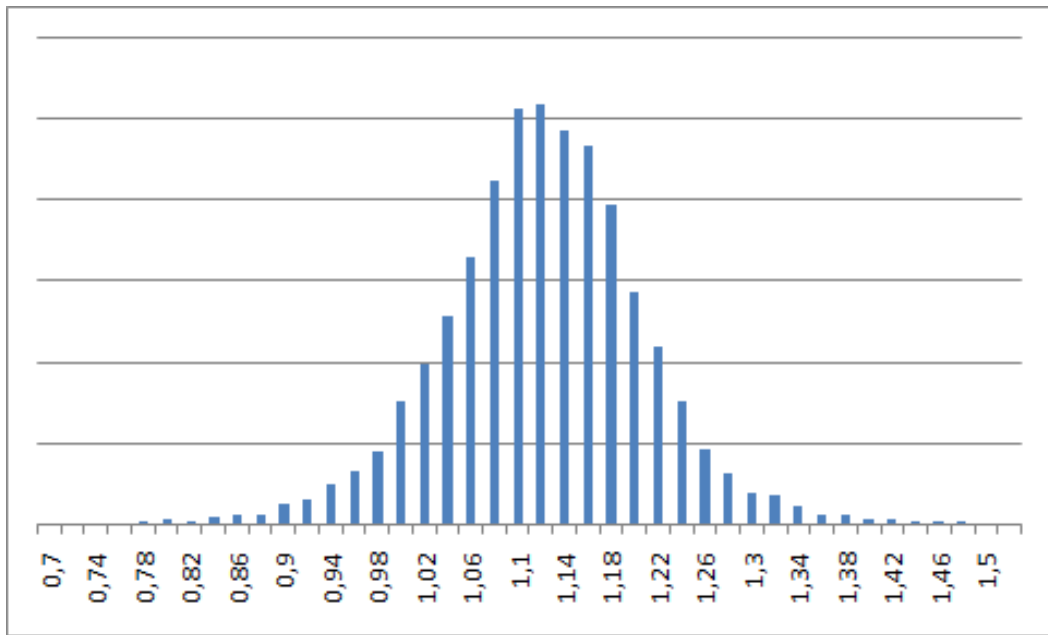
$$A_4 = -1,821255978,$$

$$A_5 = 1,330274429,$$

3.2. Eredmények

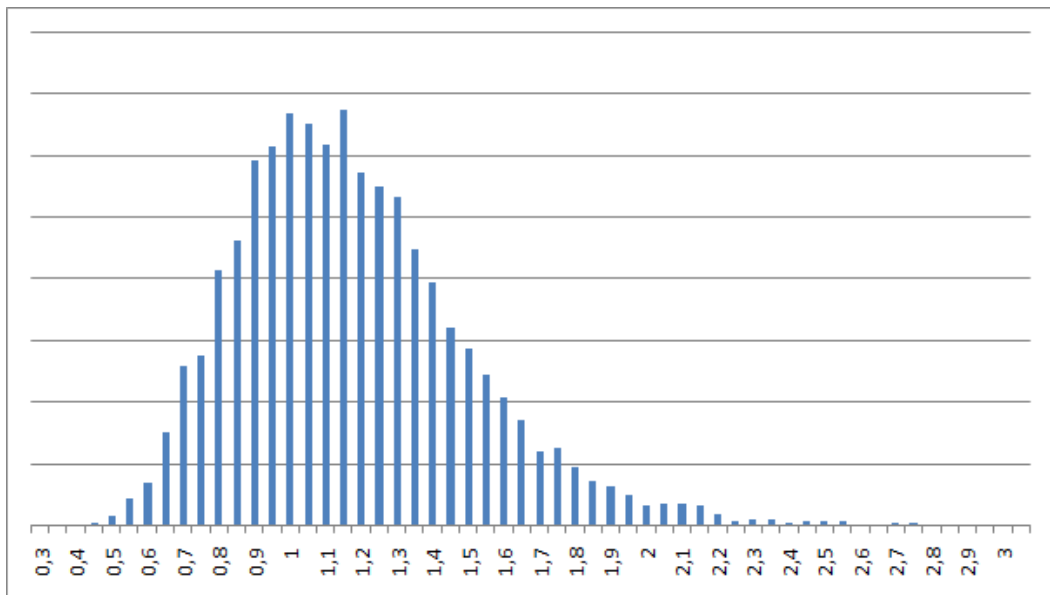
Ebben a fejezetben bemutatok néhány eredményt, amit a saját implementálásommal állítottam elő. Mindenekelőtt kíváncsi voltam a Heston modell által generált eloszlásra. Lejártatnak egy évet választottam, ami nagyjából félúton van a hosszú és a rövid időtávú FX ügyletek között. Több likvid devizapárt is kiválasztottam, hogy látható legyen, hogy a modell viselkedése mennyire változó különböző piaci kondíciók mellett.

A 3.1, 3.3, 3.5, 3.7 ábrákon látható a Heston modell által generált eloszlás rendre az EURUSD, USDJPY, GBPUSD, EURGBP devizapárokra. Látható, hogy az eloszlás normálishoz hasonló első ránézésre. Az is fontos tulajdonsága, hogy a piaci adatokhoz kalibrált paraméter-együttes mellett nagyjából szimmetrikus a generált eloszlás.

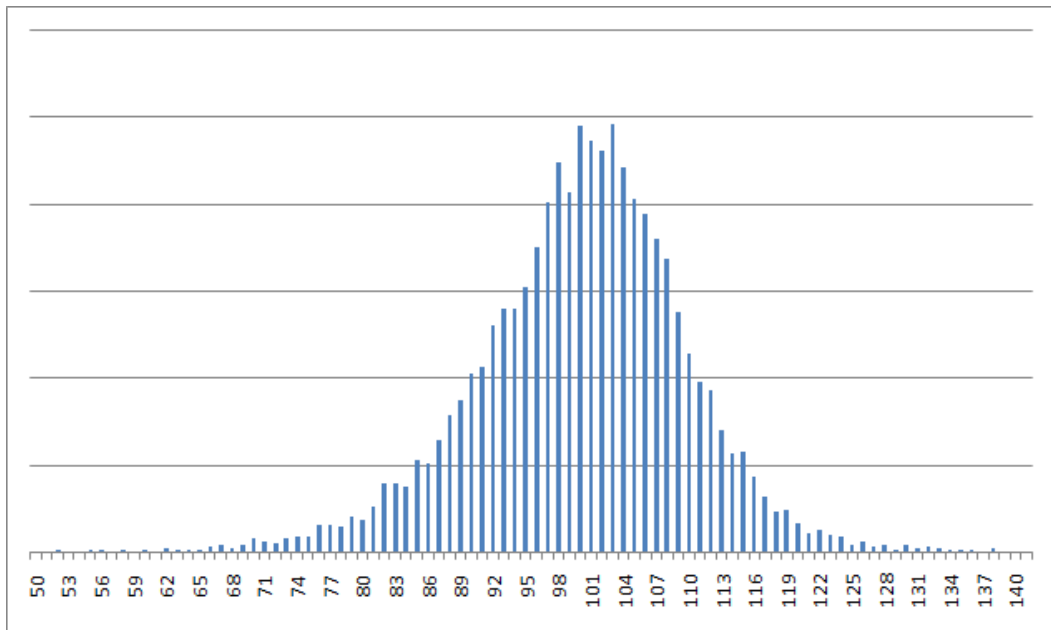


3.1. ábra. Heston modell által generált eloszlás az EURUSD árfolyamra T=1 éves lejáráthoz

Érdekes ezt összevetni a fenti eloszlást a Black-Scholes modell által generált eloszlással (ugyanarra a piacra természetesen). A Black-Scholes modellről ismert, hogy az általa generált eloszlás valamilyen paraméterekkel vett lognormális eloszlás lesz. Ez nagyon szépen kirajzolódik minden devizapárra a 3.2, 3.4, 3.6, 3.8 ábrákon. A devizapárok ugyanazok, mint a Heston modell esetében.

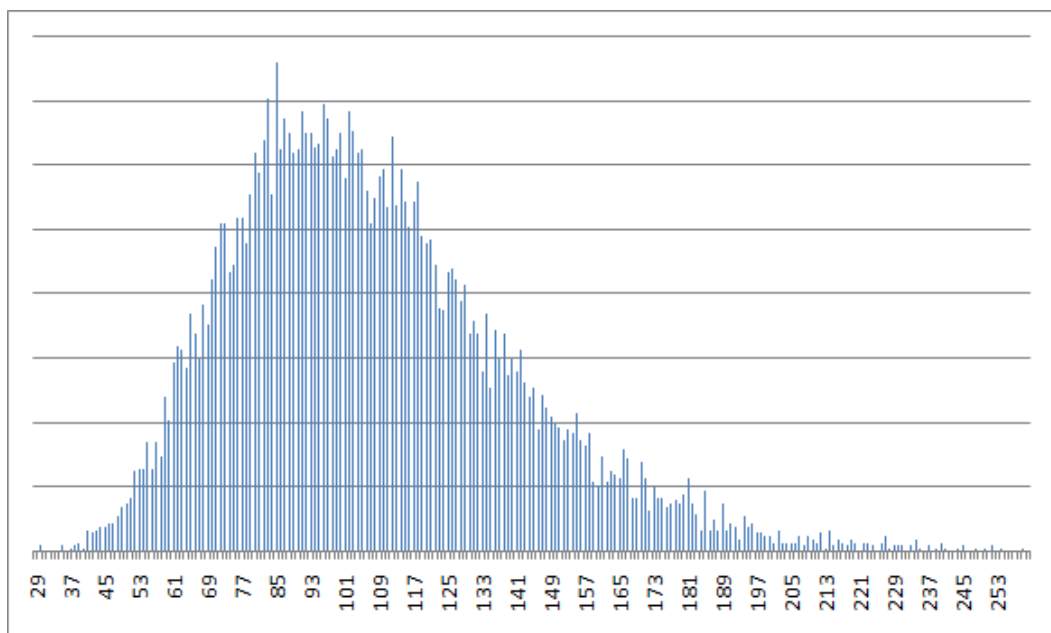


3.2. ábra. Black-Scholes modell által generált eloszlás az EURUSD árfolyamra T=1 éves lejáráthoz

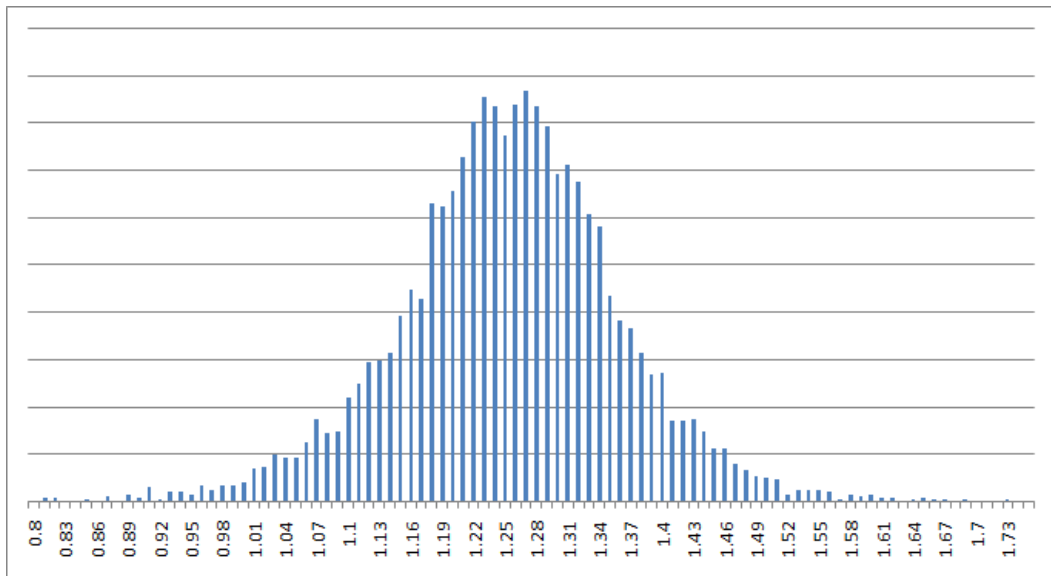


3.3. ábra. Heston modell által generált eloszlás a USDJPY árfolyamra $T=1$ éves lejáráthoz

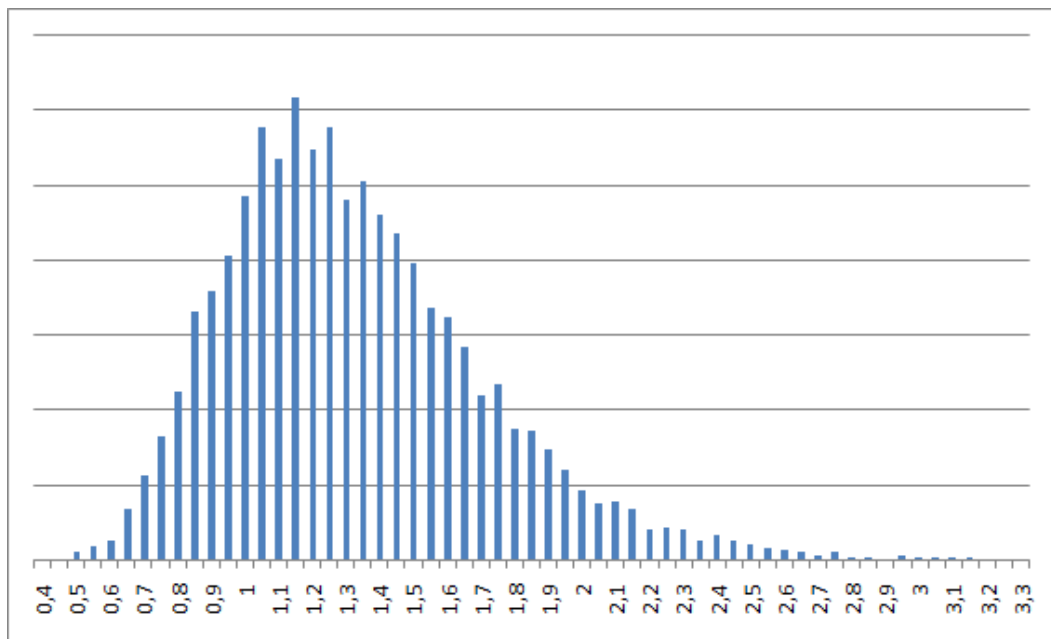
A fenti, 3.3 ábrán látható, hogy a $spot = 103$ körül van egy kissé kiugró érték. Ennek kapcsán érdemes megemlíteni, hogy mint minden szimulálás esetén, most is van Monte Carlo zaj az eredményben. Minden ilyen esetben a fejlesztő azzal az átváltással szembesül, hogy minél több trajektóriát szeretne, annál hosszabb lesz a program futása. Én 10000 trajektóriát generáltam minden esetben, amivel a program mindig egy percen belül lefutott, és már szép, felismerhető eloszlások jöttek ki.



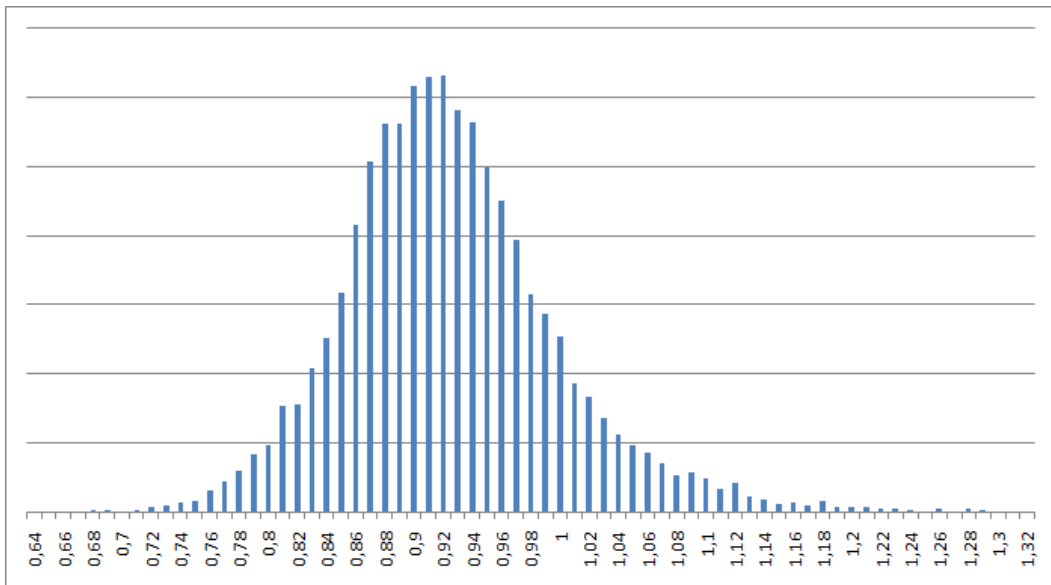
3.4. ábra. Black-Scholes modell által generált eloszlás a USDJPY árfolyamra $T=1$ éves lejáráthoz



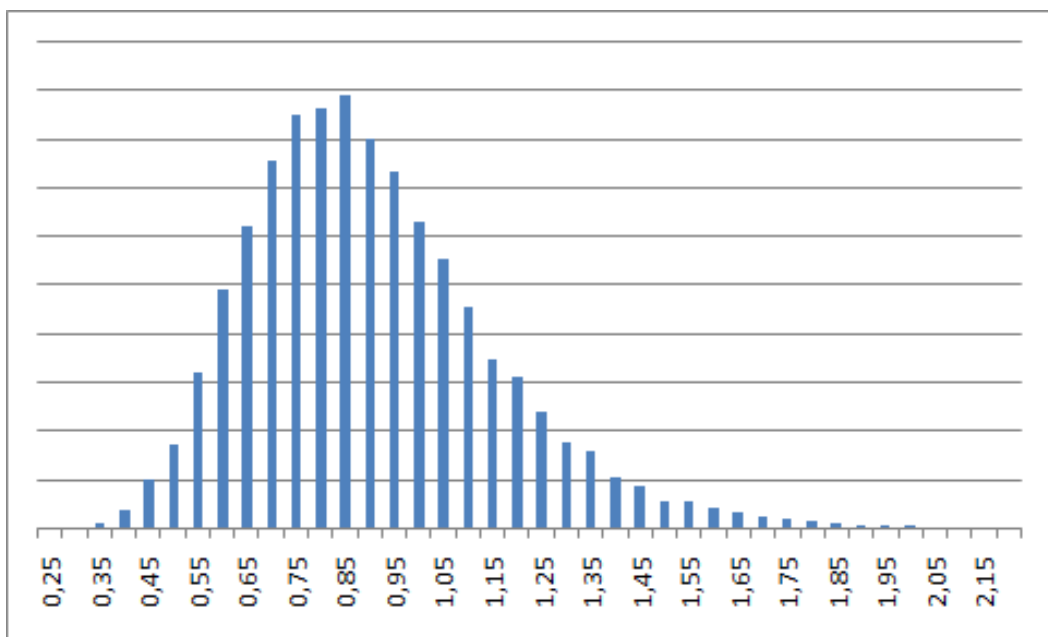
3.5. ábra. Heston modell által generált eloszlás a GBPUSD árfolyamra T=1 éves lejáráthoz



3.6. ábra. Black-Scholes modell által generált eloszlás a GBPUSD árfolyamra T=1 éves lejáráthoz



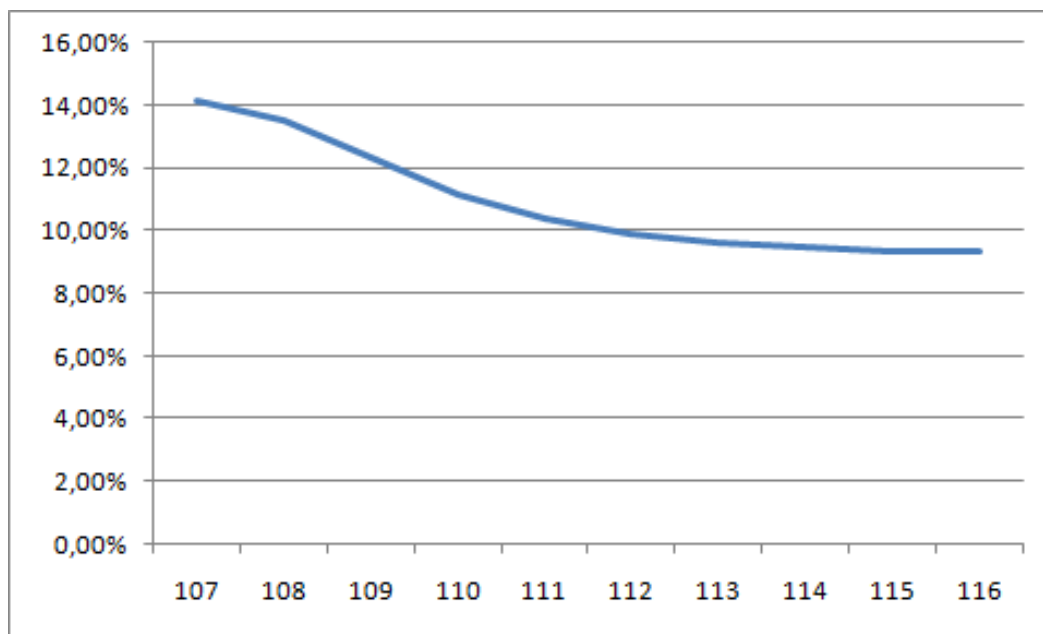
3.7. ábra. Heston modell által generált eloszlás az EURGBP árfolyamra T=1 éves lejáráthoz



3.8. ábra. Black-Scholes modell által generált eloszlás az EURGBP árfolyamra T=1 éves lejáráthoz

A generált eloszlás mellett mindig érdemes foglalkozni a modell által létrehozott implicit volatilitással. Ehhez különböző strike-ok mellett beáraztattam a modellel vanilla call opciókat, majd mindre külön megkerestem azt a konstans σ volatilitás-szintet, amivel a Black-Scholes modell ugyanazt az árat adja. Felhasználtam ennek során, hogy egy long vanilla call opció végája mindig pozitív, azaz a az opció ára mindig nő, ha a volatilitást növeljük. Ily módon egy egyszerű gyökkereső algoritmus is meg képes

találni a keresett σ -t. A Black-Scholes modell által kidobott és a modell által kidobott árak közötti egyezésnél 10^{-4} -es pontossággal számoltam. Implicit volatilitásmosoly tehát minden devizapárra és minden lejáratra lenne, most csak egy példát mutatok, nevezetesen a USDJPY devizapárra és 1 éves lejáratra vonatkozó implicit volatilitásmosolyt.

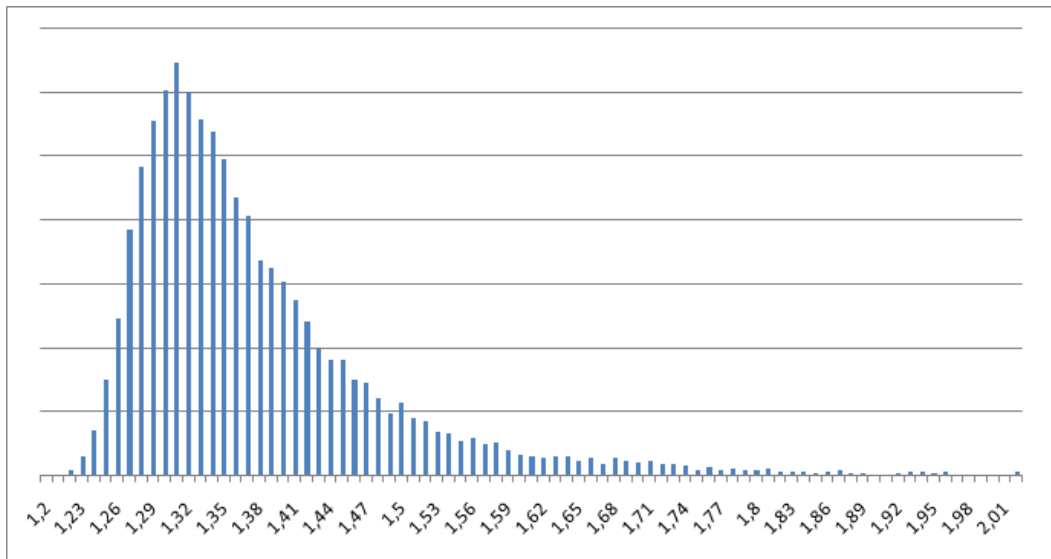


3.9. ábra. Implicit volatilitásmosoly USDJPY devizapárra egy éves lejáratához.

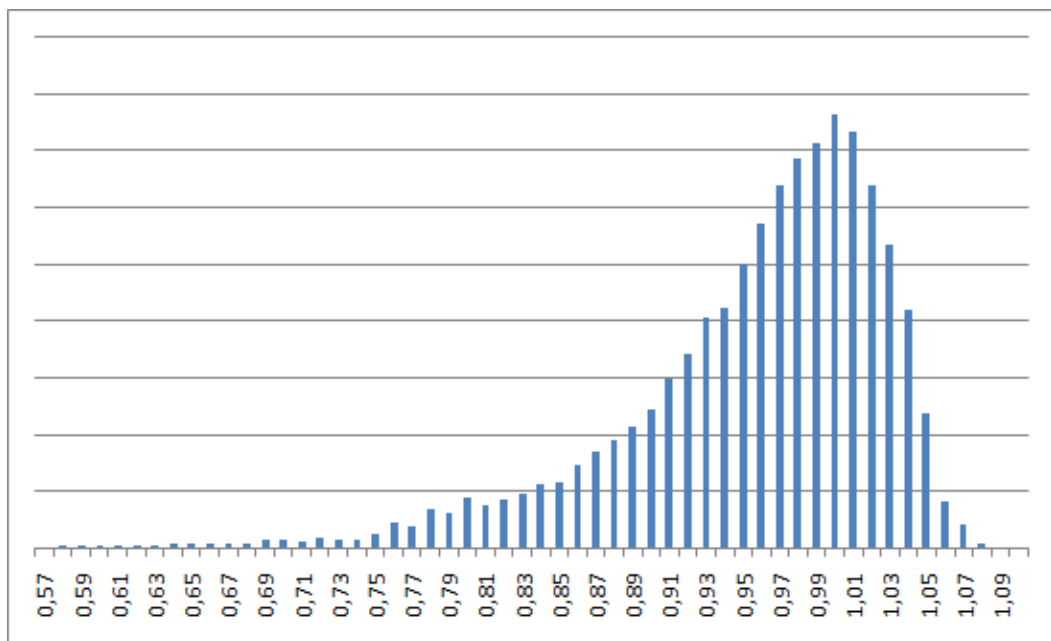
Kíváncsi voltam továbbá a modell érzékenységére, ha a két Wiener-folyamat közötti korrelációt elmozdítjuk. Valójában a vizsgálatom nem teljesen korrekt, mert a korreláció ceterus paribus elmozdítása esetén a modell nem (feltétlenül) marad konzisztens a piachoz. Valójában a modell input adatait kéne elmozdítani, majd a modellt újrakalibrálni. Azonban mivel a modell kalibrációját nem implementáltam, ezért erre nem volt módomban. Jobb híján tehát a korrelációt úgy állítottam át más értékekre, hogy minden más paramétert változatlanul hagytam.

A két szélsőséges esetet vizsgáltam meg, nevezetesen ha a korrelációt 1-re, vagy -1 -re állítom. A generált eloszlások a 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 ábrákon láthatóak.

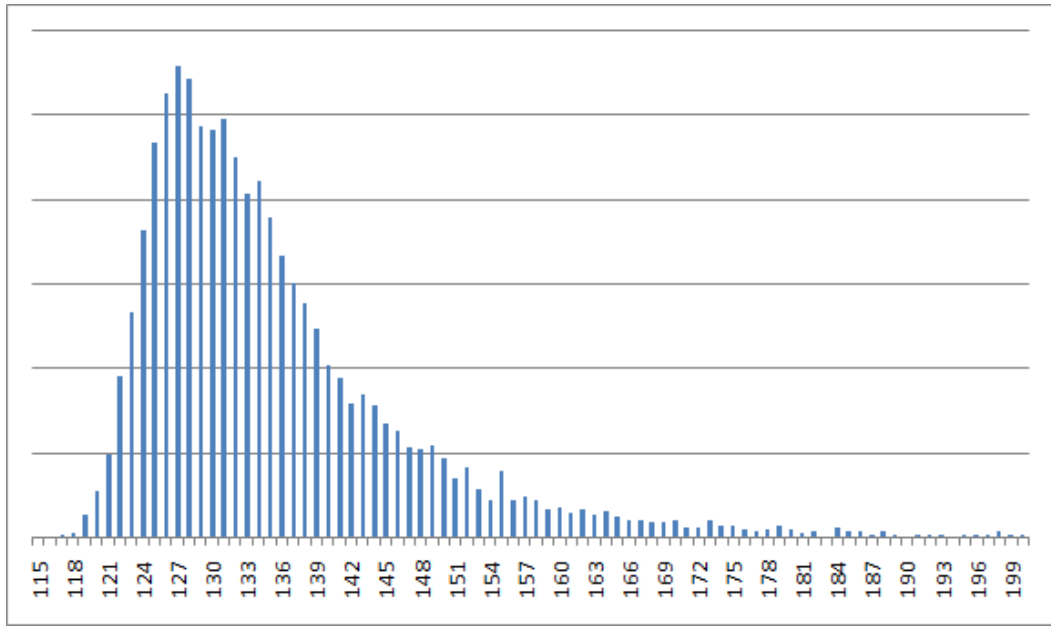
Látható, hogy pozitív korreláció esetén a modell egy balra ferde eloszlást generál mindkét devizapár esetében, míg negatív korreláció esetén jobbra ferdét, tehát a modell a szimmetriáját elveszíti. Ez egyébként az intuíciónak megfelel, hiszen ha erős pozitív a korreláció, akkor a spot ár növekedésével együtt elkezd nőni a volatilitás is. Nagyobb volatilitás mellett az ár vagy gyorsabban visszacsökken, vagy "elszáll" felfelé (ami még nagyobb volatilitást okoz, stb).



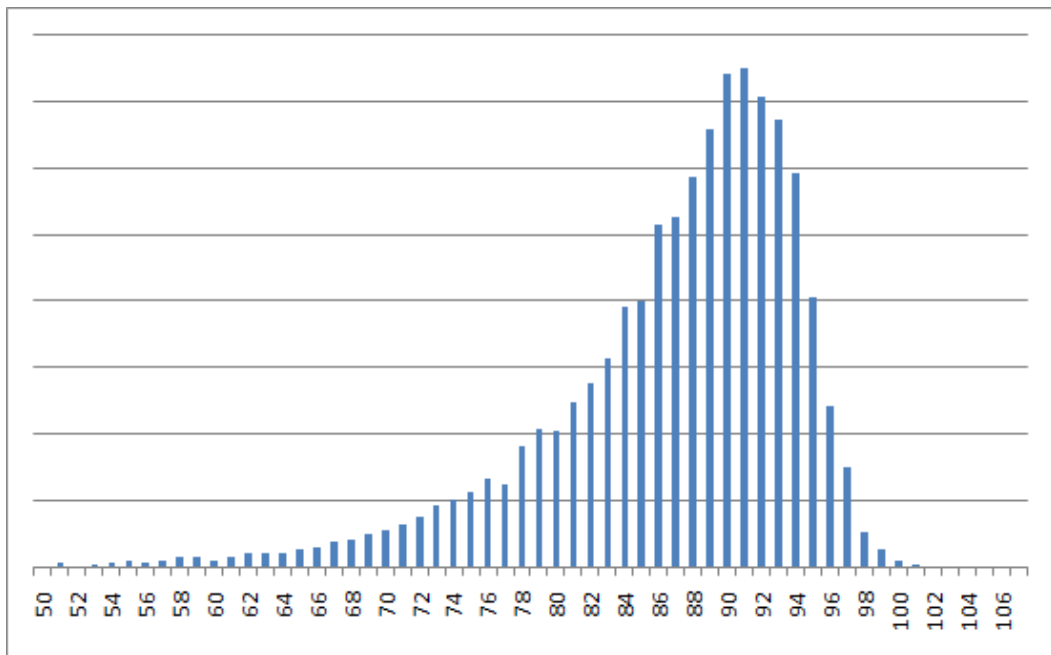
3.10. ábra. Heston modell által generált eloszlás EURUSD devizapárra és 1 éves lejáratra $\rho = 1$ esetén



3.11. ábra. Heston modell által generált eloszlás EURUSD devizapárra és 1 éves lejáratra $\rho = -1$ esetén



3.12. ábra. Heston modell által generált eloszlás USDJPY devizapárra és 1 éves lejáratra $\rho = 1$ esetén



3.13. ábra. Heston modell által generált eloszlás USDJPY devizapárra és 1 éves lejáratra $\rho = -1$ esetén

4. fejezet

A fenti modellek gyengeségei, további modellezési lehetőségek

Ebben a fejezetben bemutatom, hogy milyen potenciális problémák merülhetnek fel a gyakorlatban a korábban vázolt modellek használatakor, illetve milyen elméleti hátrányaik lehetnek.

Az első, és legfontosabb jellemzője mind a sztochasztikus volatilitás modellnek, mind a lokális volatilitás modellnek, illetve ezek kombinációjának is, hogy folytonos modellek, azaz minden generált trajektóriájuk folytonos. Ez azonban több szempontból is hátrány. Az FX piac egész nap elérhető, tehát abból nem fakad probléma, hogy éjszaka nincs kereskedés. Azonban specifikusan erre a piacra jellemző, hogy vannak úgynevezett pegged currency-k, azaz "kötött" devizák. Ez azt jelenti, hogy egy deviza egy másik értékéhez van kötve, rögzített áron lehet a kettőt cserélni. Ezt rendszerint a kisebb deviza jegybankja úgy éri el, hogy az árfolyam elmozdulása esetén egy megfelelő méretű ügylettel elmozdítja az árfolyamot, tehát az ország saját devizájának mennyiségét a külföldi kereslethez igazítja. Ilyen devizapárra példa a szaúd-arábiai riál (USD-hez kötve), vagy a dán korona (euróhoz kötve).

A kötött árfolyamú devizáknál a problémát az okozza, hogy ha az adott ország jegybankja úgy dönt, hogy elengedi az árfolyamot, akkor az ugrásszerűen változhat meg arra az értékre, ahol mesterséges beavatkozás nélkül lenne.

Egy példa a fent leírt problémára a svájci frank esete). 2011 szeptemberében a svájci központi bank monetáris okokból (a defláció elkerülése miatt) az euróhoz kötötte a svájci frank értékét (valójában nem teljesen kötötték az árfolyamot, csupán egy küszöböt határoztak meg neki). Fontos látni, hogy az árfolyamkötésnek a pénzügyi stabilitásért cserébe költségei vannak, amit az adott ország jegybankja fizet meg. Valószínűleg részben emiatt 2015. január 15-én a svájci központi bank bejelentette, hogy megszünteti az árfolyamküszöböt az euróval szemben. Ennek hatására még azon a napon a svájci frank 20%-ot erősödött. A 4.1 ábrán látható a historikus adatsor az EURCHF árfolyamról. Jól látszik, hogy 2015. januárjában az árfolyam hatalmasat zuhan.



4.1. ábra. EURCHF historikus adatok

Világos, hogy az ilyen ugrásokat a folytonos modellek nem tudják modellezni. Éppen ezért nagyon gyakori, hogy a kötött árfolyamú devizapárookra más modelleket használnak. A leggyakrabban használt modellt először Merton modellje alapján írta le Lipton és McGhee (pontos hivatkozások a [10] és a [11] források alatt). Ez a kevert volatilitás modellnek egy további kiterjesztése úgy, hogy a spot árfolyam egy Poisson-folyamat komponenssel bővül:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{V_t} A(S_t, t) S_t dW_t^{(1)} + (e^J - 1) dN_t$$

$$dV_t = \kappa(m - V_t) dt + \alpha \sqrt{V_t} dW_t^{(2)}$$

Itt a N_t folyamat egy Poisson-folyamatot jelöl λ intenzitással, J pedig az ugrás intenzitását állító paraméter.

Az feljebb bemutatott kötött devizákra különösen jellemző a nagyon alacsony ATM volatilitás, hiszen amíg nem engedik el az árfolyamot, addig szinte csak zaj lesz benne. Viszont a volatilitásmosoly nagyon "meredek", mert egy 25 deltájú opciót vásárló befektető arra "fogad", hogy az árfolyamot elengedik, aminek hatására a volatilitás nagyon megnő. Ez az extrém formájú volatilitásmosoly szintén tud problémát okozni a modellben.

A kötött árfolyamú devizapároknál található extrém meredek volatilitásmosoly fel is veti a következő problémát: nem kötött devizáknál is előfordulhat, hogy a volatilitásmosoly olyan formájú lesz, amihez a modell nem tud bekalibrálni. Minden modellnek van egy lehetséges paraméter-halmaza, ami implikál egy piaci környezet-halmazt, amihez a modell tud kalibrálni. Egyáltalán nem biztos, hogy ha a piac ezen a halmazon kívül van esetleg, akkor már rögtön arbitrázsra kell lennie. Tehát minden modellnek van egy korlátos használhatósága. Ezen lehet javítani a flexibilitás növelésével például olyan módon, ha több kalibrálható paraméter is van a modellben. Ez azonban azért veszélyes, mert könnyen

lehet, hogy (több paraméter, mint kalibrációs instrumentum esetén) nem lesz egyértelmű a modell kalibrálása, ami két különféle modell-árhoz is vezethet ugyanazon opció esetén. Szintén probléma lehet több paraméter, és ezáltal nagyobb flexibilitás esetén, hogy maga a kalibrálás folyamata hosszabb lesz, ezáltal a gyakorlatban kevésbé lesz használható. Az iparban az elvárás a modellekkel szemben az, hogy legfeljebb néhány másodperc alatt képesek legyenek kalibrálni.

Még nagyobb probléma, hogy a spot árfolyam hirtelen ugrása nem kötött árfolyamú devizapároknál is előfordulhat. Az 4.2 ábrán látható, hogy a Brexit hatására 2016 júniusában a GBPUSD árfolyam nagyot ugrott. Hasonló volt a helyzet Donald Trump amerikai elnök megválasztásakor is. Ezen esetekben a piac "beárazza" a lehetséges kimeneteleket, azonban a várakozással ellentétben mégis a kevésbé valószínűnek tűnő scenárió valósult meg.



4.2. ábra. GBPUSD historikus adatok

Azonban még kézenfekvőbb egy előre nem jelezhető esemény bekövetkezése. Erre a legalkalmasabb példa a 2011-es tóhokui földrengés, amelynek során Richter-skála szerinti 9,0-s erősségű földrengés következett be Japán csendes-óceáni partjainál, majd egy 10 méter magas cunami okozott a partvidéken pusztítást. A katasztrófa gazdasági hatása a japán GDP-n is érezhető volt, illetve a japán jen többi devizával szembeni árfolyamán is.

Van egy további, a korábbi problémáktól független nyitott kérdés, ez pedig az útvonalfüggő opciók árazásakor merül fel. A modellek többsége az opció lejáratánál megfigyelhető volatilitásmosolyhoz kalibrál (vagy illikvid lejárat esetén a két szomszédos likvid lejáratnál megfigyelt mosolyokból interpolált mosolyhoz). Ezen kívül még esetleg az at-the-money volatilitáshoz szoktak minden lejáratnál kalibrálni a modellek. Így azonban sok piaci információ kimarad a kalibrálásból, hiszen minden lejáratig lévő likvid lejáratra megfigyelhető egy implicit volatilitásmosoly, és nem európai típusú kifizetésnél ezeknek jelentősége is van.

Összefoglalás

Dolgozatom célja az volt, hogy egy átfogó betekintést nyújtsak az FX piac működésébe, különös tekintettel az FX derivatívák mechanikájába. Ehhez először az FX piacot jellemző konvenciókat tekintettem át, ami nélkülözhetetlen és megkerülhetetlen a derivatív piac jobb megértéséhez. Ennek része az árjegyzés és a volatilitásmosoly jegyzésének konvenciója.

Ezután vázoltam a leggyakoribb használt modelleket. Bemutattam a lokális és sztochasztikus volatilitás modelleket (pontosabban ezek egy fajtáját), majd ismertettem az ezekkel szemben preferált kevert volatilitás modellt is.

A dolgozatom harmadik részében a saját implementációm eredményeit mutattam be, amit a C++ programnyelv segítségével készítettem. A dolgozat mellékletében az összes használt forráskód elérhető.

Az utolsó fejezetben pedig általános modellezési problémákkal foglalkozom, nevezetesen hogy a vázolt modellek és más modellek esetén milyen problémák merülnek fel. Igyekeztem minél inkább naprakész dolgot készíteni, azaz a vázolt kérdések jelenleg az iparban is még nyitott kérdések. Sokukra van válasz az akadémiai forrásokban, azonban a kutatások során sokszor nem fókuszálnak a gyakorlatban használhatóságra (például modell gyorsasága, flexibilitása, stb). Igyekeztem a dolgozatomat a felhasználhatóság és a gyakorlat szellemében megírni, érintőlegesen megemlítve azonban a releváns kutatások jelenlegi állását is.

Irodalomjegyzék

- [1] Clark, Iain J. (2011): Foreign exchange option pricing. A Practitioner's Guide. 4, 7, 17, 18
- [2] Garman, Mark B. and Kohlhagen, Steven W. (1983): Foreign currency option values, *Journal of International Money and Finance*, 231-237 6
- [3] Malz, A. (1997) Estimating the Probability Distribution of the Future Exchange Rate from Option Prices, *Journal of Derivatives*, (Winter): 20-36 11
- [4] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. és Flannery, B.P. (2002) Numerical Recipes in C++, második kiadás. Cambridge University Press, Cambridge 18
- [5] Dupire, B. (1993) Pricing and Hedging with Smiles. In proceedings of the AFFI Conference La Boule, June 1993. 18
- [6] Dupire, B. (1994) Pricing with a Smile. *RISK*, 7(1):18-20 18
- [7] Heston, S. L. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 6(2): 327-343. 19
- [8] Feller, W. (1951) Two Singular Diffusion Problems. *Annals of Mathematics*, 54(1): 173-182. 20
- [9] Jex, M., Henderson, R., Wang, D. (1999) Pricing Exotics under the Smile. *RISK*, November: 72-75. 21
- [10] Merton, R. (1976) Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3: 125-144 33
- [11] Lipton, A. és McGhee, W. (2002) Universal Barriers. *RISK*. February: 61-65 33

Melléklet

A dolgozatban bemutatott ábrák elkészítéséhez egy saját készítésű implementációt használtam C++ programnyelven. Alább található a kód, fájlanként.

Header fájlok

BlackScholes.h

```
#pragma once
#include "fixings.h"

class BlackScholes
{
public:
    BlackScholes();
    ~BlackScholes();

    void generate(fixings& F);

    double rd;
    double rf;
    double S0;

private:
    double sigma;

    const double LepsPerEv = 365;

    void readparameters();
};
```

fixings.h

```
#pragma once
#include <vector>
using namespace std;

struct fixings
{
vector<double> dates;
vector<double> S;

int NumFixings;
double Smax;
double Smin;
double Savg;
};
```

Heston.h

```
#pragma once
#include "fixings.h"

class Heston
{
public:
Heston();
~Heston();

void generate(fixings& F);

double rd;
double rf;
double S0;

private:

double vol_of_vol;
double corr;
double V0;
double MRlevel;
```

```
double MRspeed;

const double LepesPerEv = 365;

void readparameters ();

};
```

Random.h

```
#pragma once
#ifndef RANDOM_H
#define RANDOM_H

double StNorm ();

#endif
```

.cpp fájl

BlackScholes.cpp

```
#include "stdafx.h"
#include "BlackScholes.h"
#include <iostream>
#include "Random.h"

BlackScholes::BlackScholes ()
{
}

BlackScholes::~~BlackScholes ()
{
}

void BlackScholes::generate (fixings& F)
{
readparameters ();
```

```

if (F.dates.empty())
{
cout << "Nincsenek megadva fixing idopontok!" << endl;
exit(1);
}

double S_aktualis;
double t = 0.0;
S_aktualis = S0;
double dW;

for (int i = 0; i < F.dates.size(); i++)
{
while (t < F.dates[i])
{
dW = StNorm();

S_aktualis *= exp(((rd - rf) - 0.5 * sigma) *
(1 / LepasPerEv) + sqrt((double)sigma) *
sqrt((double)1 / LepasPerEv) * dW);

t += 1 / LepasPerEv;
}
F.S[i] = S_aktualis;
}
}

void BlackScholes::readparameters()
{
rd = 0.00329;
rf = -0.00509;
S0 = 0.86992;
sigma = 0.07912;
}

```

FXmodellek.cpp

```
#include "stdafx.h"
```

```

#include <iostream>
#include <fstream>
#include "fixings.h"
#include "Heston.h"
#include "StochVol.h"
#include "BlackScholes.h"
#include <algorithm>
#include <vector>
using namespace std;

double vanilla_payoff(double X, double K);
double implied_vol_calculator
(double price, double K, double T, double S, double rd, double rf);
double InverseStdNormDist(double d);

int main()
{
    fixings F1;
    F1.dates.resize(1);
    F1.S.resize(1);
    F1.dates[0] = 1;

    fixings F2;
    F2.dates.resize(1);
    F2.S.resize(1);
    F2.dates[0] = 1;

    fixings F3;
    F3.dates.resize(1);
    F3.S.resize(1);
    F3.dates[0] = 1;

    Heston Heston_1;
    StochVol StochVol_2;
    BlackScholes BlackScholes_3;

    vector <double> strikes;
    vector <double> call_prices;

```

```

vector <double> implied_vols;

strikes.resize(10);
call_prices.resize(10);
implied_vols.resize(10);

strikes[0] = 107;
strikes[1] = 108;
strikes[2] = 109;
strikes[3] = 110;
strikes[4] = 111;
strikes[5] = 112;
strikes[6] = 113;
strikes[7] = 114;
strikes[8] = 115;
strikes[9] = 116;

for (int i = 0; i < call_prices.size(); i++) { call_prices[i] = 0.0; }

ofstream f_H, f_H2;
f_H.open("Heston_output_distribution.csv");
f_H2.open("Heston_output_implied.csv");
for (int i = 0; i < 10000; i++)
{
Heston_1.generate(F1);
f_H << F1.S[0] << ", ";

for (int j = 0; j < call_prices.size(); j++)
{
double weight = j;
//cout << weight / (weight+1) << endl;
call_prices[j] = ( weight / (weight+1) ) * call_prices[j] +
(1 / (weight+1) ) * exp(-Heston_1.rd * F1.dates[0]) *
vanilla_payoff(F1.S[0], strikes[j]) ;
}
}

for (int i = 0; i < implied_vols.size(); i++)

```

```

{
//cout << call_prices[i] << endl;
implied_vols[i] = implied_vol_calculator
(call_prices[i], strikes[i], F1.dates[0],
Heston_1.S0, Heston_1.rd, Heston_1.rf);
f_H2 << implied_vols[i] << ",";
}

```

```

/*
ofstream f_B;
f_B.open("BlackScholes_output.csv");
for (int i = 0; i < 10000; i++)
{
BlackScholes_3.generate(F3);
f_B << F3.S[0] << ",";
}
*/

```

```

/*
ofstream f_S;
f_S.open("StochVol_output.csv");
for (int i = 0; i < 10000; i++)
{
StochVol_2.generate(F2);
f_S << F2.S[0] << ",";
}
*/

```

```

return 0;
}

```

```

double vanilla_payoff(double X, double K)
{
double payoff;
payoff = max(0.0, X - K);
return payoff;
}

```

```

double implied_vol_calculator
(double price, double K, double T, double S, double rd, double rf)
{
double vol_guess, call_guess;
double upper_vol_boundary = 1000.0;
double lower_vol_boundary = 0.0;
int counter = 0;
double d1, d2;

vol_guess = upper_vol_boundary;
d1 = (1 / (vol_guess*sqrt(T))) *
(log(S / K) + (rd - rf + vol_guess*vol_guess / 2)*T);
d2 = (1 / (vol_guess*sqrt(T))) *
(log(S / K) + (rd - rf - vol_guess*vol_guess / 2)*T);
call_guess = InverseStdNormDist(d1)*
S*exp(-rf*T) - InverseStdNormDist(d2)*K*exp(-rd*T);

cout << price << endl;

do {
vol_guess = (upper_vol_boundary + lower_vol_boundary) / 2;
d1 = (1 / (vol_guess*sqrt(T))) *
( log(S / K) + (rd - rf + vol_guess*vol_guess / 2) * T );
d2 = (1 / (vol_guess*sqrt(T))) *
( log(S / K) + (rd - rf - vol_guess*vol_guess / 2) * T );
call_guess = InverseStdNormDist(d1)*
S*exp(-rf*T) - InverseStdNormDist(d2)*K*exp(-rd*T);

//cout << vol_guess << " ; " << call_guess << endl;

if (call_guess < price)
{
lower_vol_boundary= (upper_vol_boundary + lower_vol_boundary) / 2;
}
else
{

```



```

upper_vol_boundary = (upper_vol_boundary + lower_vol_boundary) / 2;
}

counter++;
}
while ( abs(call_guess-price)>10^(-4) && counter < 100 );

//cout << vol_guess << " ; " << call_guess << endl;

return vol_guess;
}

double InverseStdNormDist(double d)
{
//cumulative normal distribution function
const double A1 = 0.31938153;
const double A2 = -0.356563782;
const double A3 = 1.781477937;
const double A4 = -1.821255978;
const double A5 = 1.330274429;
const double RSQRT2PI = 0.39894228040143267793994605993438;

double
K = 1.0 / (1.0 + 0.2316419 * fabs(d));

double
cnd = RSQRT2PI*exp(-0.5*d*d)*
(K*(A1 + K*(A2 + K*(A3 + K*(A4 + K*A5)))));

if (d > 0)
cnd = 1.0 - cnd;

return cnd;
}

```

Heston.cpp

```

#include "stdafx.h"
#include "Heston.h"

```

```

#include <iostream>
#include "Random.h"

Heston::Heston()
{
}

Heston::~~Heston()
{
}

void Heston::generate(fixings& F)
{
    readparameters();

    if (F.dates.empty())
    {
        cout << "Nincsenek megadva fixing idopontok!" << endl;
        exit(1);
    }

    double S_aktualis, V_aktualis;
    double t = 0.0;
    S_aktualis = S0;
    V_aktualis = V0 * V0;
    double dW1, dW2;

    for (int i = 0; i < F.dates.size(); i++)
    {
        while (t < F.dates[i])
        {
            dW1 = StNorm();
            dW2 = corr * dW1 + sqrt(1 - corr*corr)*StNorm();

            V_aktualis += MRspeed * (MRlevel - V_aktualis) * (1 / LepasPerEv)
            + vol_of_vol * sqrt(V_aktualis) * sqrt((double)1 / LepasPerEv) * dW1;
            if (V_aktualis < 0)

```

```

{
V_aktualis = 0;
}

S_aktualis *= exp( ( (rd - rf) - 0.5 * V_aktualis) * (1 / LepasPerEv)
+ sqrt((double)V_aktualis) * sqrt((double)1 / LepasPerEv) * dW2 );

t += 1 / LepasPerEv;
}
F.S[i] = S_aktualis;
}
}

```

```

void Heston::readparameters()
{
rd = -0.00866;
rf = 0.01702;
S0 = 110.85;
vol_of_vol = 0.47633;
corr = -0.3473;
V0 = 0.0068;
MRlevel = 0.0117;
MRspeed = 5.0;
}

```

Random.cpp

```

#include "stdafx.h"
#include <random>
#include "Random.h"
using namespace std;

std::random_device rd;
std::default_random_engine generator;
std::mt19937 mtgenerator(rd());
std::normal_distribution<double> distribution(0.0, 1.0);

double StNorm()
{

```

```
double number = distribution(mtgenerator);  
return number;  
}
```