Rendszerkockázatok modellezése

Kunné Szabó Eszter
Biztosítási és pénzügyi matematika Msc
Kvantitatív pénzügy szakirány

Témavezető:
Backhausz Ágnes
egyetemi adjunktus
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Budapest, 2017

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Gazdálkodástudományi Kar

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék nagy köszönetet mondani témavezetőmnek, Backhausz Ágnesnek, aki állandó támogatásával lehetővé tette, hogy ez a dolgozat elkészülhessen. Időt nem kímélve igyekezett megválaszolni a felmerülő kérdéseket, figyelemmel kísérte a dolgozat készülését és segített a helyes összeállításban, a pontosításban, érthetővé tételben.

Szeretném még megköszönni családomnak a folyamatos támogatást, elsősorban férjemnek, aki átsegített a mélypontokon.

Bevezetés

A rendszerkockázat a mai modern pénzügyi szerkezetben kivételes szerepet tölt be. Sokat lehetne beszélni jelentőségéről, ehelyett beszéljenek helyettünk a legutóbbi rendszerkockázati események, melyek nagy port kavartak a gazdaság egészében.

A rendszerkockázat legutoljára a 2008-2009-es világgazdasági válság során mutatta meg, mekkora hatással van a világunkra. 2008-ban a hatóságok hagyták a Lehman Brothers-t csődbe menni, a pénzintézetek nem bíztak többé egymásban, a partnerek akármikor csődbe mehettek. Emiatt teljesen befagyott a bankközi hitelpiac, a bankok egyáltalán nem, vagy csak nagyon drágán voltak hajlandóak pénzt kölcsönözni egymásnak és emiatt ügyfeleiknek is. Ezt a rendszerkockázati eseményt *információs fertőzés*nek nevezzük.

A 2008-2009-es válság kirobbanása előtt az AIG biztosító biztosítást adott el másodlagos jelzálogkötvényekre, amik mögött - mint utólag kiderült - nem fizető hitelek álltak. Amikor a pénzügyi környezet romlott, nem tudott fizetni a többi pénzügyi intézménynek, így ha az állam nem lép közbe, csődbe megy a biztosító. Az állam kimentette, de ha nem tette volna, az AIG pénzügyi partnereinek egy jó része is csődöt jelentett volna. Amiből az következik, hogy a partnereinek a partnereit is csődbe viheti. Ezt hívjuk *fertőzés*nek. Az AIG leértékelődése miatt a partnereinek többet kellett tartalékolniuk a céggel való ügyleteikre, ami miatt leértékelődtek a partnerek is, hiszen így ők is nehezebben tudták kifizetni a hiteleiket. És így tovább. Tehát nem csak maga a nemfizetés, a nemfizetésnek már a kockázata is súlyos plusz terheket ró a partnerekre.

2007 augusztusa a fedezeti alapok körében volt meghatározó időszak. A piac rendellenesen működött pár napig, ami elég volt ahhoz, hogy meghiúsuljon jó pár kvantitatív befektetési stratégia. Az alapok rá voltak kényszerülve, hogy eladjanak az eszközeikből. Természetesen a leginkább likvid eszközeiket választották. Ezek az eszközök a piacon egymáshoz hasonlóak voltak, az áraik korreláltak. Amikor eladásra kényszerültek, a hasonló termékek árai is zuhanni kezdtek, ami más alapok eszközeinek is csökkentette az értékét. Az alapok nem voltak közvetlen kapcsolatban, de közös faktoroknak voltak kitéve, így ennek hatására a szektorban kisebb válság tört ki.

A fent bemutatott példák jól mutatják, hogy a rendszerkockázatról fontos beszélnünk. Most szeretném bemutatni, hogy a dolgozatban mely részeivel foglalkozunk a rendszerkockázati témakörnek.

Az 1. fejezetben beszélünk a pénzügyi kockázatokról, és elhelyezzük köztük a rendszerkockázatot. Ezen belül megnézzük, hogy milyen típusai lehetnek a rendszerkockázati eseményeknek. Az ilyen kockázatokra vonatkozó szabályozásról is ejtünk pár szót. Magyarországon a rendszerkockázat definiálásában és szabályozás vizsgálatában Lublóy Ágnes fontos szerepet játszik, így az ő megállapításait alapul vehetjük a rendszerkockázat vizsgálatakor. [12, 11]

A 2. fejezetben ismertetünk egy hálózati modellt Glasserman, Paul, és H. Peyton Young [9] cikke alapján. Megnézzük, hogy a hálózatot milyen tulajdonságokkal szeretnénk felruházni, hogy valóban a valóságot tükrözze. Bemutatunk példákat is a könnyebb érthetőség érdekében. Végül definiálunk egy mérőszámot, amellyel a rendszerkockázatot lehet megfogni ebben az adott modellben.

A 3. fejezetben megismerkedünk a Hawkes-ugrófolyamattal, vizsgáljuk a viselkedését speciális esetben, melyet a modellezés során kihasználunk. Megismerünk három hasonló modellt, mely ezt a folyamatot használva megfigyelte a pénzügyi rendszer ok-okozati viszonyán alapuló ármozgásait, így az ebben rejlő kockázatot is. [1, 8, 6]

Végül a 4. fejezetben összefoglaljuk ismereteinket és összehasonlítjuk a különböző modelleket.

1. fejezet

A rendszerkockázat

1.1. Kockázat a pénzügyi szférában

A pénzügyi folyamatokban nagy hangsúlyt kapnak a *kockázatok*. Akkor beszélünk kockázatról, ha a jövőben bekövetkező események kimenetelére vannak forgatókönyveink, így a valószínűségszámítás módszereivel tudunk mondani valamit a jövőről. Abban az esetben, amikor nem tudunk kvantitatív következtetéseket levonni, azt *bizonytalanság*nak hívjuk a pénzügyekben. Ezt egy kicsit tágabb fogalomnak gondoljuk. A kockázaton és bizonytalanságon belül minket kifejezetten a pénzügyi intézményeket érintő kockázatok érdekelnek. Természetesen van másféle pénzügyi kockázat is, például vannak kockázatos értékpapírok, illetve vannak kockázatkereső és kockázatkerülő befektetők. A pénzügyi intézmények kockázatának egy része is ebből adódik, csak jóval összetettebb, hiszen ki kell elégíteniük a befektetők igényeit is, míg a piacon kereskednek. A szabályozóknak és az intézményeknek is fontos, hogy minél jobban meg tudjuk mondani, milyen kockázatnak vannak kitéve a bankok, hogy a folyamatos működésüket semmi ne gátolhassa. A pénzügyi intézmények felől nézve azért fontos, mert valójában ők is egy-egy vállalat, ami működni szeretne; a szabályozók felől meg azért, mert a mai társadalomban a bankok teljesítménye erősen befolyásolja az emberek jólétét.

A pénzügyi intézmények a kockázatokra tőkét tartalékolnak, hogy egy esetleges probléma esetén tudjanak segíteni saját magukon. A bizonytalanságra is tartalékolnak tőkét, de ezzel mi most nem foglalkozunk.

A kockázatoknak különböző típusai vannak. A legszembetűnőbb kockázat a *hitelezési kockázat*. A bankok egyik fő tevékenysége a hitelezés, és ebből adódik a kockázataik nagy része. Ez annak a kockázata, hogy a bank nem kapja vissza a hitelbe nyújtott összeget. Egy másik típus a *piaci kockázat*. Ez természetesen a piaci árak változásából keletkező veszteség kockázata. Hasonlóan mérvadó kockázat a *működési kockázat*. Ilyen kockázattal minden vállalkozás rendelkezik, ez a nem megfelelő működésből adódó hibák kockázata. A fennmaradó kockázatokat az *egyéb kockázat* típusba soroljuk, ugyanis ezek sokkal kisebb mértékűek, mint az előbb felsoroltak. Persze még így sem elhanyagolhatóak. Ide soroljuk a *likviditási*, *stratégiai*, *reputációs*, *politikai*, és – ami számunkra a legérdekesebb – a *rendszerkockázatot*.

Ugyan a kategóriákba csoportosítás során úgy tűnik, hogy a rendszerkockázat akár elhanyagolható lehetne a mérete alapján, ám a 2008-2009-es válság is megmutatta, hogy ugyan kicsi valószínűségű eseményekről beszélünk, ha ezek közül valamelyik bekövetkezik, annak óriási hatása van az emberek mindennapi életére. Ugyanis a pénzügyi veszteségek a reálgazdaságra nézve további következményekkel járnak. Először is az új beruházási projektek finanszírozására kevésbé kapható hitel, sőt a meglévő beruházások hitelezése is elakadhat, ha a bankok likviditáshoz szeretnének jutni, hogy a rövid távú kötelezettségüket tudják teljesíteni. Ettől a beruházás teljesen eredménytelenné válik, az eddig befektetett érték egy része is elveszik. Másodszor egy intézmény csődje jelentős adminisztratív és jogi plusz költségeket hoz magával. Harmadszor, a pénzügyi veszteségek a háztartásokban is kiesést okoznak, így ilyenkor a fogyasztás következetesen csökken. Ebből fakadóan a termelési kapacitás egy része is kihasználatlanul marad a gazdaság egészében. Tehát azt látjuk, hogy – bár sokan kutatják ezeket a hatásokat – a pénzügyi veszteségek és a gazdasági jólét között bekövetkező csökkenés számszerűsítése annyira összetett, hogy csak távoli becslésekkel élhetünk. Csak annyit tudunk, hogy a rendszerkockázat méréséhez két különböző valószínűségi eloszlással foglalkozunk. Az először a kezdeti sokkok eloszlását figyeljük meg az egyes pénzügyi intézményekben, majd ez átalakul a pénzügyi kitettségek rendszerére kiterjedő veszteség-eloszlássá. [9]

1.2. A rendszerkockázatról

A komplex rendszerek többek, mint csupán az elemeik halmaza. Előfordulhat, hogy az egyes egységek önmagukban biztonságosak, azonban maga a rendszer sérülékeny. A rendszerkockázat annak a kockázata, hogy egy vagy néhány külső sokk, amely a rendszer egyes elemeit érinti, a belső kapcsolatokon keresztül más elemekre is hat, majd végül a rendszer egésze összeomlik. Előfordulhat, hogy a sokkok a rendszeren belül keletkeznek, valamilyen strukturális rendellenesség következtében.

Szűkebb értelemben akkor beszélünk rendszerkockázatról, ha egy adott esemény a gazdaság szűk szféráját érintve az idő előrehaladtával, az események egymásutánisága révén egy vagy számos intézményre vagy piacra kedvezőtlenül hat. A lényeg az egymást követő események sorozatán van, amit akár egy egyedi, akár egy korlátozott szisztematikus sokk kiválthat. Széles értelemben az előbbi mellett akkor is rendszerkockázatról beszélünk, ha az adott esemény szimultán módon hat számos intézményre és piacra egy súlyos és kiterjedt sokk következtében. Emellett az adott esemény lehet gyenge vagy erős. [12]

Szűkebb értelmezésben erős esemény bekövetkezésekor *fertőzés*ről van szó. Ha a kezdeti sokk hatására csupán egyetlen intézmény jut csődbe (fertőződik meg), egyedi rendszereseményről beszélünk. Ha a kezdeti sokk következtében számos intézmény jut csődbe, *krízist eredményező fertőzés*ről van szó. A fertőzést az irodalomban szokták még dominóhatásnak is hívni, mikor az egyik bank csődje a másikét eredményezi. Ez a megfogalmazás kevésbé pontos abban az esetben, mikor egy pénzügyi intézmény a piacon keresztül fejti ki hatását a másikra, mint például a bevezetőben ismertetett, a fedezeti alapokkal megtörtént esetben. A dominóhatást hívhatjuk *direkt fertőzés*nek, míg a piacon keresztül kifejtett hatást *indirekt fertőzés*nek.

Az esemény akkor gyenge, ha a kezdeti sokk hatására nem jut csődbe egyetlen intézmény és nem omlik össze egyetlen piac sem. Csupán olyan veszteség keletkezik egy, vagy több intézményben, amelyet a saját tőkepuffere el tud nyelni, így a bank működését nem befolyásolja. Az eseményt erősnek tartunk, ha a sokk következtében legalább egy intézmény vagy piac bedől, pedig ez nem történt volna meg, ha nincs a kezdeti sokk, hiszen az intézmény alapjába véve szolvens volt, illetve a piac is jól működött. A fentebb leírtakat táblázatos formába öntve az 1.1 ábra mutatja.

A rendszerkockázati események csoportosítása

Kezdeti sokk jellege	Egyedi esemény (közvetve csak egy intézményt vagy piacot ránt magával)		Számos esemény (közvetve számos intézményt vagy piacot ránt magával)	
	Gyenge (nincs csőd vagy krach)	Erős (egy intézmény csődje vagy egy piac krachja)	Gyenge (nincs csőd vagy krach)	Erős (számos intézmény csődje vagy piac krachja)
A gazdaság szűk szféráját érintő egyedi sokk vagy korlátozott szisztematikus sokk		**Fertőzés**		**Krízist eredményező fertőzés**
A gazdaság számos szféráját érintő szisztematikus sokk	Ø			Krízis

Szűk értelmezés

Széles értelmezés

Forrás: De Bandt és Hartmann [2000].

1.1. ábra. *A rendszerkockázati események csoportosítása. [12] Ahol üresen hagytuk, ott nincs külön neve a rendszerkockázati eseménynek, ahol egy ∅ jel van, azt már nem tartjuk rendszerkockázati eseménynek.*

A pénzügyi rendszer más rendszerekhez képest magasabb rendszerszintű kockázatnak van kitéve. Egyrészt azért, mert a bankoknak magas a tőkeáttétele, emiatt kevesebb veszteség felszívására képesek. Másrészt a bankok egyik fő feladata a transzformáció rövid és hosszú lejáratú termékek között, azaz a bankok forrásai főként rövid lejáratúak (például a bankbetét), míg az eszközei, – mint például a hitelei – hosszú lejáratúak. Így ha a betétesek kiveszik a rövid távú kitettségeiket, a bank nem jut likviditáshoz, ami csődhöz vezethet.

A kockázatok szabályozásában két típust különböztetünk meg, a mikro- és makroprudenciális szabályozást. A mikroprudenciális szabályozás célja az egyedi bankcsődök valószínűségének csökkentése a betétesek védelmében. Igaz rá a "bottom-up" elv, azaz egy átlagos bankra kialakított feltételeket tesz kötelezővé minden banknak. Illetve a modellekben főként exogén változók szerepelnek. Ezzel szemben a makroprudenciális szabályozás azt tartja szem előtt, hogy a pénzügyi rendszer egészének el kell kerülnie a válságot, és egy esetleges válság bekövetkezésekor annak költsége minimális legyen. Éppen ezért a "top-down" elv érvényesül, vagyis a rendszer egészének szempontjából alakítja ki a szabályokat, ez jelentheti azt, hogy bankonként eltérő szabályozást eredményez. A modellváltozók endogének.

A rendszerkockázatot a Bázel III. szabályozza. Ebben megállapít bizonyos intézményeket, úgynevezett *SIFI*-ket *(Significally Important Financial Institute)*, amelyek vagy túl nagyok (Too Big To Fail), vagy túlságosan központi szerepet játszik (Too Connected To Fail) ahhoz, hogy csődbe menjenek. Ezekre az intézményekre külön tartalékolást állapít meg a szabályozás. Ezeket az intézményeket keressük majd a 2. fejezetben a centralitás fogalmának bevezetésével.

2. fejezet

Hálózatelméleti modell

A következő fejezet Glasserman et al. [9] cikke alapján készült.

2.1. A hálózat tulajdonságai

Képzeljünk el egy rendszert, ami pénzügyi intézményekből áll. Ezeket legtöbbször az egyszerűség kedvéért bankoknak fogjuk hívni. A bankok között hitelkapcsolatot tételezünk fel, azaz tartoznak egymásnak bizonyos összegekkel. A könnyebb elképzelhetőség érdekében a hálózatot ábrázolhatjuk gráfként úgy, hogy a bankokat tekintjük csúcsoknak, a közöttük lévő kötelezettségi viszonyt irányított éleknek. Akkor fut él i bankból j bankba, ha i-nek fizetési kötelezettsége van j felé.

A közgazdaságtanban gyakran használunk teljes gráfokat és körgráfokat, melyek könnyen átláthatóak. Ezek azonban most nem lesznek használhatóak, mert nem írják le elég jól a valóságot. Nézzük meg, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkezik egy valós pénzügyi hálózat, hogy egy hasonló gráfot előállítva, a megfigyeléseinket a valóság jobb megértésére tudjuk felhasználni. Általános feltételezéssel élve kizárjuk a hurokéleket, amelyek egy adott pontból önmagukba mennek, illetve a többszörös éleket, amikor egy csúcsból a másikba több él is megy.

2.1.1. Definíció (Digráf). *A digráf olyan irányított gráf, ami nem tartalmaz sem többszörös élt, sem hurokélt.*

Vezessünk be néhány jelölést. A hálózat csúcsai legyenek $\{1, \dots, n\}$. Legyen A egy $n \times n$-es *szomszédossági mátrix*, azaz $A_{ij} = 1$, ha az i csúcsból a j csúcsba megy él, különben 0. Emellett L-t nevezzük a *kötelezettségek névértékeinek mátrixának*, ahol L_{ij} az i csúcs j-nek való fizetési kötelezettségét jelöli. Jegyezzük meg, hogy $L_{ij} \geq 0\ \forall i, j \in \{1, ..., n\}$, és $L_{ii} = 0\ \forall i$. Sőt, A mátrix főátlójában is mindenhol 0 szerepel.

Egy banknak lehet kötelezettsége nem bank felé is, illetve a nem banki szereplők is tartozhatnak bankoknak. Ezek a bankrendszer gráfjába nem tartoznak bele, így ezekkel most még nem foglalkozunk, de a későbbiekben ezek a kapcsolatok lényeges szerepet játszanak egy fertőzés kialakulásában és végbemenetelében.

2.1.1. Fokszámeloszlás

Egy irányított gráf csúcsainak fokszámainál meg kell különböztetnünk bemenő és kimenő fokszámot, illetve az össz-fokszámot. A fenti jelöléssel A mátrix sorösszegei lesznek az adott csúcs kimenő fokszámai, az oszlopösszegei pedig a bemenő élek száma lesznek, az össz-fokszám természetesen ennek a kettőnek az összege.

Természetesen a gráfról nem tudjuk megmondani, hogy az egyes csúcsoknak pontosan hány éle legyen, de az élek eloszlását meg tudjuk figyelni valós hálózatokon. A legszembetűnőbb valós hálózat például az internet, vagy az emberek kapcsolati hálózata, más néven a szociális hálózat. Ezek empirikus megfigyelései alapján egy szabály gyakran jelen van, a *power law*, vagyis magyarul a *hatványtörvény*. A törvény azt állítja, hogy van egy kisebb domináns csoportja a bankoknak, ami meghatározza a hálózat legfőbb jellemzőit, a maradék nagyobb rész összes befolyása jóval kisebb. Azért hívjuk hatványtörvénynek, mert elképzelhetjük a befolyás mértékét (ami esetünkben a fokszámot jelenti) egy diszkretizált hatványfüggvényként. Az első pár pontnál nagyon magas az érték, ők tartoznak a domináns csoportba, a többinél alacsony értéket vesz fel a hatványfüggvény, ezek lesznek azok, akik sodródnak az árral. Matematikailag leírva, a hatványtörvény igaz egy X eloszlásra, ha a túlélés függvény polinomiálisan cseng le, azaz

$$\frac{P(X \geq t)}{t^{\alpha}} \xrightarrow[t \to \infty]{} c \quad ,$$

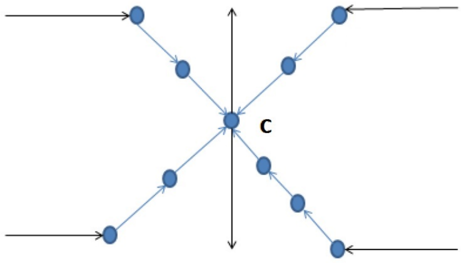
ahol α és $c > 0$ konstans. Ha nem csak végtelenben tart c-hez, hanem egyenlő vele, azaz átalakítva $P(X \geq t) = c \cdot t^{-\alpha}$, akkor pont a Pareto-eloszlást kaptuk meg. Tehát tekinthetünk erre a törvényre a Pareto-eloszlás kiterjesztéseként is. Ez a törvény banki hálózatok esetében is megfigyelhető. Sokan alkalmazzák ezt a feltételezést, Glasserman et al. [9] cikke is felsorol pár példát. Jegyezzük meg, hogy manapság a hálózatkutatásban fontos szerepet játszó véletlen gráf, a Barabási-modell is ezt a hatványtörvényt elégíti ki, emiatt állítja az irodalom, hogy jól modellezi a valóságot.

Félretéve ezt az erős feltételezést, annyit biztosan megállapíthatunk, hogy a banki hálózat erősen ferdített, mivel sok banknak van kevés kapcsolata, míg pár bank nagy számú kapcsolódással rendelkezik. Azt is megfigyelhetjük, hogy lényeges aszimmetria fedezhető fel a bemenő és kimenő fokszámok között. Ugyanis a nagy össz-fokszámú bankoknak főként kifelé menő élei vannak, azaz kötelezettségük van más bankok felé. Ebből következik, hogy a kis össz-fokszámú bankoknak bejövő éleikből van több.

Szerzők egy csoportja arra jutott, hogy az exponenciális farkú eloszlások illeszkednek a legjobban a valósághoz. Az előbb említett cikk [9] hoz erre is példát. Ez a power law-nak ellentmond, de a ferdítettség és a ki- és bemenő élek közötti aszimmetria itt is igaz lesz.

2.1.2. Mag-periféria szerkezet

A fokszámeloszlás ferdesége miatt merül fel a lehetőség a *mag-periféria szerkezet*re. Ez azt jelenti, hogy be tudjuk sorolni a csúcsokat két csoportba, akik a magban vannak, és akik a periférián. A magban lévő csúcsok egymás között teljes gráfot alkotnak, a periférián lévők egymással nem, csak a magban lévő bankokkal vannak kapcsolatban. Emiatt lesz a magbeli csúcsoknak magas fokszámuk, és a periférián lévőknek kicsi. A valóságban persze nem ilyen éles a határ, lehetnek a magban olyan bankok, amik nem kapcsolódnak minden másik magbelivel, de a periférián lévő csúcsok között is lehet kapcsolat. A bankok 10-20%-a tartozik a magba, és azt is megfigyelték, hogy a periférián lévő bankok tőkepuffere fele, vagy harmada az átlagos puffernek, azaz a magbeli, legtöbb kapcsolattal rendelkező bankoknak van a legtöbb tőkéjük is.



2.1. ábra. *Centralitás és mélység*

2.1.3. Centralitás és mélység

Új mérőszámokat keresünk, amelyekkel a csúcs helyzetét a fokszámnál kicsit pontosabban lehet megfogni a gráfon belül. Ehhez bevezetjük a gráfon kívüli teret, a *külvilág*ot. Ebbe beletartozik minden és mindenki, aki nem pénzügyi intézmény, de kapcsolata van legalább egy pénzügyi intézménnyel. Ilyen például a lakosság, a vállalati ügyfélkör és a jegybank is. Mehet irányított él ebből a külvilágból is bármelyik csúcsba, illetve a csúcsokból a külvilágba. Más szóval a bankok a hálózatban fizetési kötelezettséget vállalnak nem banki szereplőknek, illetve a nem banki szereplők is tartozhatnak a banknak.

A *centralitás* a hálózatban egy kitüntetett pont fontosságát mutatja. Megkülönböztetünk jobb és bal centralitást. Egy csúcs jobb centralitása a pontba mutató élektől függ, a bal centralitása meg épp a csúcsból kifelé mutató élektől. Tehát a centralitásra igaz lesz, hogy egy j csúcs jobb centralitása egyenlő azon csúcsok centralitásának élsúlyozott összegével, amelyekből él megy j-be. A mélység a pontból kiinduló sétáktól függ. Gondolhatunk rá úgy, mint adott csúcson egységnyi veszteség felerősödésének mértékére, ahogy a fertőzés előrehaladtával újabb csúcsok fertőződnek meg.

Nézzünk egy példát, hogy jobban el tudjuk képzelni, miről is van szó. A 2.1 ábrán látható C csúcs centrális, azaz központi szerepet tölt be, mivel az érték, ami beérkezik a gráfba, feltétlenül átfolyik a C csúcson. Viszont C sekély (nem mély), mivel az érték, ami beérkezik C-be egyből elhagyja a hálózatot.

2.1.2. Tétel. *Legyen D digráf, A szomszédossági mátrix, $k > 0$ egész szám. Ekkor*

$\left(A^k\right)_{ij}$ *éppen az* i*-ből* j*-be vezető, pontosan* k *hosszú séták száma.*

2.1.3. Definíció (Irreducibilis mátrix). *Egy* A $n \times n$*-es mátrix irreducibilis, ha* $\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \exists\, k \in \mathbb{N}^+$*, melyre* $A_{ij}^k > 0$.

2.1.4. Definíció (Irreducibilis gráf). *Egy digráf irreducibilis, ha* A *szomszédossági mátrixa irreducibilis. Azaz bármely két csúcsa között létezik (pozitív) séta mindkét irányba.*

2.1.5. Tétel (Perron–Frobenius tétel). *Egy irreducibilis,* $A \geq 0$ *mátrixra – azaz amelynek minden eleme nemnegatív – igaz, hogy:*

- *Létezik szigorúan pozitív sajátvektora, mely konstansszorzótól eltekintve egyértelmű.*
- *Az ehhez a sajátvektorhoz tartozó sajátérték valós, pozitív, és megegyezik* $\rho(A)$*-val, az* A *spektrálsugarával. Ez azt jelenti, hogy ez a legnagyobb abszolút értékű sajátérték.*

Ha A szomszédossági mátrix, ahogy előbb láttuk, akkor teljesül rá az irreducibilitás, ha minden csúcsból van séta, amely külvilágba vezet. Akkor lesz minden eleme pozitív, ha nincsenek negatív, vagy nulla élsúlyok. Ez az eset valóban nem léphet fel a modellünkben. Tehát a centralitást egy ilyen sajátérték-sajátvektor pár segítségével lehet definiálni . Ha A a gráf szomszédossági mátrixa, melynek λ egy sajátértéke, a gráf jobb centralitása a sajátértékhez tartozó jobb sajátvektor. Az i. csúcs centralitása pedig a sajátvektor i. koordinátája. Hogy még hasznosabb fogalom legyen, szeretnénk úgy definiálni a centralitást, hogy minden csúcsnak pozitív centralitása legyen és a csúcsok centalitásainak összege éppen 1 legyen. Ezért vegyük az alábbi Q mátrixot:

$$Q_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} A_{ik}}\,.$$

Azaz a szomszédossági mátrix elemeit leosztjuk a sorösszegükkel. Ez egy sztochasztikus mátrix lesz, mivel minden sorösszege definíció szerint 1. A spektrálsugár $\rho(Q) = 1$. Q is irreducibilis, így a Perron–Frobenius tétel alapján az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor minden eleme pozitív. Így ezt tekinthetjük a gráf centralitásának.

A sztochasztikus mátrixtulajdonságból az is következik, hogy tekinthetünk rá úgy, mint egy Markov-lánc átmenet mátrixára. Ez a Markov-lánc a hálózaton keresztül áramló értékek súlyfüggetlen mozgását írja le. Ilyen értelemben a centralitás a hálózatban a véletlen bolyongás során az adott csúcsban eltöltött időt jelenti. A spektrálsugárhoz tartozó bal sajátvektor a Q által meghatározott Markov-lánc *egyensúlyi*, vagy *stacionárius* eloszlása.

2.1.6. Definíció (Stacionárius eloszlás). *Egy Markov-lánc stacionárius eloszlása Y vektor, ha*

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 1 \qquad \textit{és} \qquad Y_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i Q_{ij} \,.$$

Ha az átmenetvalószínűségek időben nem változnak, akkor a Markov-lánc stacionárius eloszlása épp a visszatérési idő reciproka.

Egy másik értelmezésben a centralitást definiálhatjuk közvetlenül az L kötelezettségi mátrix alapján, ugyanis így két bank függését egymástól súlyozottan tudjuk vizsgálni. Ekkor a centralitás értékek pozitívak maradnak, azonban az összegük nem marad 1.

2.1.7. Definíció. *Legyen $\lambda = \rho(L)$ spektrálsugár. Ekkor a hozzá tartozó $\mathbb{u}$ bal sajátvektor a gráf* bal centralitása*, u_j pedig a j csúcs* bal centralitása*. Erre tehát érvényes, hogy*

$$\lambda \cdot u_j = \sum_{i=1}^{n} u_i L_{ij} \,.$$

Ezen feltételek között a centralitás akkor nagyobb, ha a csúcs nagyobb centralitású csúcstól követel. Ezért ezt hívhatnánk *hitelezői centralitás*nak is. Ekkor egy nagy centralitású csúcs csődje likviditási sokkot okoz. Mi ezzel az esettel most nem foglalkozunk.

2.1.8. Definíció. *Legyen $\lambda = \rho(L)$ spektrálsugár. Ekkor a hozzá tartozó $\mathbb{v}$ jobb sajátvektor a gráf* jobb centralitása*, v_j pedig a j csúcs* jobb centralitása*. Erre tehát igaz, hogy*

$$\lambda \cdot v_j = \sum_{i=1}^{n} L_{ij} v_j \,.$$

Ebben az esetben az a csúcs lesz nagyobb centralitású, amelyiknek nagyobb kötelezettségük van más nagy centralitású csúcsok felé. Ezt *adósi centralitás*nak is hívhatjuk. Egy nagy centralitású bank csődje nagy valószínűséggel indít el hitelezési fertőzést.

Térjünk vissza a mélység fogalmára. Ha Q átmenet mátrix a gráfon lévő csúcsokon, d_i jelöli i *mélységét*, ha

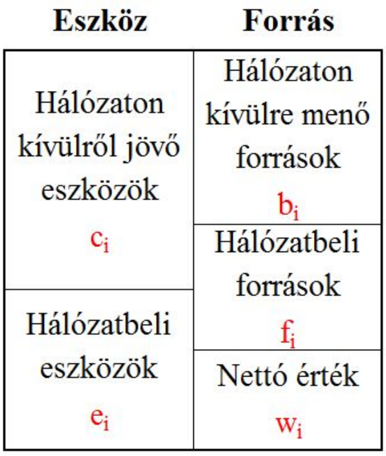
$$d = \left[I + Q + Q^2 + \ldots \right] \cdot \mathbf{1} \,,$$

ahol I az identitás mátrix, $\mathbf{1}$ pedig egy n hosszú, csupa 1-elemű vektor. Q^k a k-lépéses átmenet mátrix. Tehát i mélysége az i-ből induló véletlen bolyongás várható lépéseinek a száma, mielőtt kilép a gráfból. Erre visszatérünk kicsit később, ha már tudjuk, mi történhet a gráfunkkal rendszerkockázati esemény bekövetkezésekor.

2.2. A bankok összekapcsoltsága

Most a hálózat bankjainak tekintsük a mérlegeit. A bemenő nyilaikon érkező értékek az Eszköz oldalon, míg a kimenő nyilaikon menő értékek a Forrás oldalon jelennek meg. Most az egyszerűség kedvéért a mérleg többi tételéről ne is beszéljünk, csak a beáramló tőkére, a kiáramló tőkére, illetve a bank saját tőkéjére koncentráljunk. Így kapjuk meg a 2.2 ábrát.

A fenti jelölésekkel egy i banknak a hálózatbeli eszközei $\overline{e}_i = \sum_{k=1}^{n} L_{ki}$, azaz az L mátrix i. oszlopösszege. Az i hálózatbeli forrásai, azaz $\overline{f}_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}$ az L mátrix i. sorösszege. Ezek más szóval a hálózatbeli kötelezettségek. Jelölje c_i a hálózaton kívülről jövő eszközeit az i banknak, és b_i a hálózaton kívülről jövő forrásait. A külső eszközöket és forrásokat vektorba rendezve kapjuk a hálózatra vonatkozó c és b vektorokat. Jegyezzük meg, hogy $c_i \geq 0$ és $b_i \geq 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. A nettó érték jele legyen w_i. Ezt a bemenő és kimenő nyilak különbségéből számoljuk ki, azaz $w_i = c_i + \overline{e}_i - b_i - \overline{f}_i$. Így kapjuk meg azt, hogy a mérleg eszközeinek és forrásainak értéke egyenlő legyen.



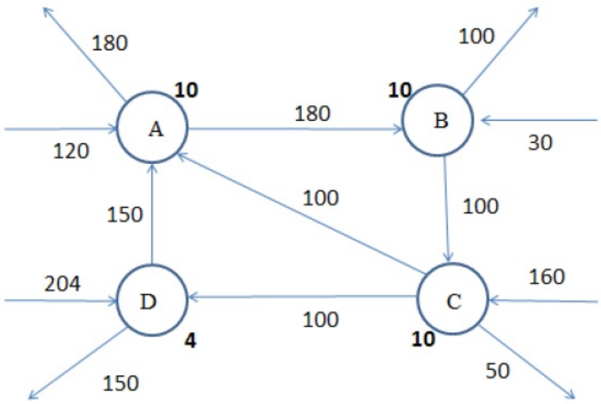
2.2. ábra. *Egy bank leegyszerűsített mérlege [9]*

2.3. Az általános hálózati modell

Ez a rész a [7] cikkben ismertetett modellt fejti ki, melyet az [9] cikk is feldolgozott. Vegyünk egy adott hálózatot, ahol c és b vektorok és L kötelezettségi mátrix ismert. Legyen ezentúl $\overline{p}_i = b_i + \overline{f}_i$ az i bank összes kötelezettsége. Azt megállapíthatjuk, hogy amíg a nettó érték pozitív, nincs a hálózatban probléma, a felek ki tudják fizetni egymásnak a keletkező kötelezettségeket. A gond ott kezdődik, amikor egy $w_i < 0$ lesz. Hogy fordulhat ilyen elő? Úgy fogalmazhatunk, hogy egy sokkhatás éri a rendszert. Ez egy kívülről jövő nemfizetésből alakulhat ki. Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a sokk vektora, azaz egy i bank külső eszköze c_i helyett csak $c_i - x_i$ lesz. Figyeljük meg, hogy $0 \leq x_i \leq c_i$, azaz a sokk nem lehet negatív, és maximum az eredeti kötelezettségük összegével sokkolhatják a külső szereplők az adott bankot. Vizuálisan úgy képzelhetjük el, ha a gráf élén szereplő értéket lecseréljük x_i-vel kevesebbre. A valóságban pedig az történik, hogy az i banknak tartozó nem pénzügyi intézmények nem tudnak fizetni annyit, amennyit kötelesek lennének, csak x_i-vel kevesebbet. Ekkor az i bank nettó értéke is változik:

$$w_i = c_i - x_i + \overline{e}_i - \overline{p}_i$$

Így lehetséges az, hogy a nettó érték negatívvá váljon, így az i bank csődbe ment. Jegyezzük meg, hogy ez csak a direkt fertőzést fogja modellezni, az információs kockázatból eredő rendszerkockázat már akkor is felléphet, ha w_i pozitív. Ekkor



2.3. ábra

nehéz megállapítani, hogy matematikailag mi kell ahhoz, hogy egyik bank a másikat a csődbe vigye, így az indirekt fertőzésre ez a modell nem alkalmazható.

Feltesszük, hogy minden bank kötelezettségei ugyanolyan prioritásúak, azaz egy csőd esetén a veszteségen egyenlő arányban osztoznak a hitelezők. Ehhez definiáljunk a relatív kötelezettségek mátrixát: $\Pi_{ij} = \frac{L_{ij}}{\bar{p}_i}$. Azaz az i bank csődjéből keletkező veszteségből a j bank Π_{ij} arányban részesül. Természetesen a külvilág is osztozik a csődön, $\frac{b_i}{\bar{p}_i}$ arányban, azonban ez a kimenet később nem befolyásolja a rendszerünket, így a számolás szempontjából evvel most nem foglalkozunk.

Vegyünk egy egyszerű példát. Legyen négy bankunk, A, B, C és D. A köztük lévő kapcsolatot mutatja a 2.3 ábra. A nyilak mellett szerepel L_{ij}, c_i és b_i értéke, illetve w_i nettó érték, ami a csúcs melletti vastaggal szedett szám. A példában mindegyik banknak pozitív a külső kötelezettsége és eszköze is, ami a valóságnak megfelelő, hiszen minden bank így működik, kivéve néhány speciális esetet (például jegybank), amivel rendszerkockázati szempontból nem foglalkozunk. Ami még szembetűnő lehet, hogy a bankok nettó értéke nagyságrendekkel kisebb összeg, mint az egyes kötelezettségek. Ez is reális feltételezés, hiszen így tudnak a bankok hatékonyan működni, és megfelelő profitot termelni.

Tegyük fel, hogy minden i csúcsból létezik pozitív séta a külvilágba, azaz $\forall i\ \exists j \in \{1, \ldots, n\}$, hogy i-ből megy séta j-be és $b_j > 0$. Ez garantálja, hogy a Π mátrix spektrálsugara (a mátrix legnagyobb sajátértéke) 1-nél kisebb, ami majd a kialakított modell egyensúlyához lesz szükséges feltétel.

Vegyünk egy x sokkot. Ahol $w_i \geq x_i$, ott lecsökken w_i értéke, és nem fertőzi tovább a rendszert. De ahol $w_i \leq x_i$, ott w_i értéke 0 lesz, és a maradék veszteségen úgy osztoznak a hitelezők, hogy az alábbi lesz az új kötelezettség mátrix:

$$p_{ij}^{(1)}(x) = \begin{cases} \Pi_{ij}\left(c_i - x_i + \overline{e}_i\right), & \text{ha } w_i = 0\,; \\ L_{ij}, & \text{ha } w_i > 0\,. \end{cases}$$

Azaz a fertőzés első körében L_{ij} helyett $p_{ij}^{(1)}(x)$ kerül az élekre, azaz i bank a j-nek már csak $p_{ij}^{(1)}(x)$kötelezettségnek tud eleget tenni. A példánknál maradva legyen $x = (0, 0, 120, 0)$. Ez esetben C nettó értéke 0 lesz. Az A-ból, B-ből és D-ből induló éleken nem történik változás. Azonban a C csúcsnál $p_{CA}^{(1)}(x) = p_{CD}^{(1)}(x) = \frac{100}{100+100+50} \cdot (160 - 120 + 100) = 56$. Láthatjuk, hogy ez akkora bevételkiesés, hogy a többi bank nettó értéke is 0-ra csökken a következő körben. Általánosan a fertőzés n. lépését így írhatjuk fel:

$$p_{ij}^{(n)}(x) = \begin{cases} \Pi_{ij}\left(c_i - x_i + \overline{e}_i^{(n-1)}(x)\right), & \text{ha } w_i = 0\,; \\ L_{ij}, & \text{ha } w_i > 0\,. \end{cases}$$

ahol $\overline{e}_i^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}^{(n)}$. Azaz a példánknál maradva a második körben az A és D csúcsok kerülnek csődbe, A kimenő élein $\frac{180}{180+180} \cdot (120+130+56) = 163$, és D kimenő élein $\frac{150}{150+150} \cdot (204 + 56) = 130$ érték folyik át. Fontos, hogy A bemenő éleinél a D-től jövő értéket még az első kör szerint vettük figyelembe. C csúcs nem fertőződött jobban, és B-t még nem érte el a fertőzés. A harmadik kör lesz az, amikor eléri a B-t is a fertőzés. Ekkor a C és D nem változik, de A-nak újabb eszközkiesése van, amit D a második körben nem tudott neki kifizetni. És így tovább.

Ezek után az a célunk, hogy ez a fertőzés egy idő után leálljon. Ez azt jelenti, hogy a veszteségek elszenvedése után beálljon egy egyensúlyi helyzet, ahol ugyanolyan arányban tartoznak egymásnak a bankok, csak kevesebb érték folyik a hálózatban. Ehhez írjuk fel az alábbi függvényünket egy kicsit másképp.

$$p_{ij}^{(n)}(x) = L_{ij} \wedge \Pi_{ij}\left(c_i - x_i + \overline{e}_i^{(n-1)}(x)\right)\,,$$

ahol $\overline{e}_i^{(0)}(x) = \overline{e}_i$. Megfigyelhetjük, hogy eddig a külvilágba menő élekkel nem foglalkoztunk, ugyanis annak változása nem befolyásolja a fertőzés következő lépését.

Most azonban fel szeretnénk írni az adott csúcsokra vonatkozóan, hogy az hogyan fertőződik. Adjuk össze az adott csúcsból kifolyó mennyiséget. Legyen $p_i^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(n)}(x) + b_i$ az i csúcs kimenő élein távozó összes érték x sokk esetén az n. lépésben. Azaz $p_i^{(n)}(x)$ azt mutatja, hogy i bank az n. lépésben mennyit tud kifizetni x sokk esetén. Ekkor:

$$p_i^{(n)}(x) = \overline{p}_i \wedge \left(c_i - x_i + \sum_j \Pi_{ji} p_j^{(n-1)}(x) \right) , \tag{2.1}$$

ahol $p_i^{(0)}(x) = \overline{p}_i$. Így a megfelelő kifizetési vektor az egyes bankokra $p^{(n)}(x) = \left(p_1^{(n)}(x), \ldots, p_n^{(n)}(x)\right)$ minden lépésben. A rekurzió akkor áll le, ha

$$p_i(x) = \overline{p}_i \wedge \left(c_i - x_i + \sum_j \Pi_{ji} p_j(x) \right) ,$$

azaz ebből a p-ből egy újabb lépés után már önmagát kapnánk vissza. Célunk tehát, hogy találjunk egy $p(x)$ lépésfüggetlen vektort. Ezt hívjuk *clearing vektor*nak, azaz *tisztító vektor*nak, ami megtisztítja a hálózatot a fertőzéstől és újra ugyanannyi lesz az egy csúcsba bemenő és kimenő érték. Tehát a feladatunk az, hogy bebizonyítsuk, hogy van ilyen $p(x)$ vektor. Ehhez vezessük be $\Phi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ leképezést, mely a $p^{(n)}(x)$ vektorra fejti ki hatását.

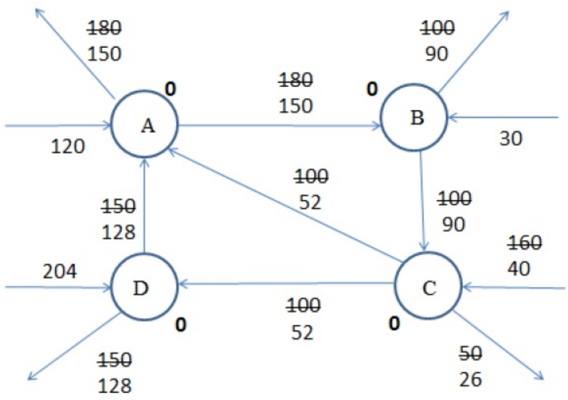
$$\Phi_i(p) = \overline{p}_i \wedge \left(c_i - x_i + \sum_j \Pi_{ji} p_j \right) . \tag{2.2}$$

Ekkor ha $p^{(0)} = \overline{p}$, akkor $p^{(1)} = \Phi(p^{(0)})$, $p^{(2)} = \Phi(p^{(1)}), \ldots, p^{(n)} = \Phi(p^{(n-1)})$. Ha behelyettesítjük Φ-be $p^{(n)}$-t, épp a 2.1 egyenletet kapjuk vissza.

Ezt a leképezést iterálva monoton csökkenő sorozatot kapunk: $p^{(0)} \geq p^{(1)} \geq p^{(2)} \geq \ldots$, mivel a minimum akkor lesz épp $\overline{p}_i$, ha w_i pozitív, azaz még nincs csődben a bank. Ha csődben van, akkor a jobb oldali kifejezés értéke lesz a minimális, ami folyamatosan csökken, ahogy a fertőzés újra meg újra eléri a bankot. A sorozat alulról korlátos 0-ban, így létezik határértéke, legyen ez $p' = p'(x)$. Mivel Φ folytonos leképezés, $p'(x)$ kielégíti a 2.2 egyenletet, ezért $p'(x)$ egy clearing vektor.

A fentebb bemutatott példában is sikerült megtalálni a clearing vektort: $p'(0, 0, 120, 0) = (300, 180, 130, 256)$. Az éleken folyó értéket a 2.4 ábra mutatja.

A clearing vektor létezését *Tarski* általános fixpont tétele garantálja.



2.4. ábra

2.3.1. Definíció (Részben rendezettség). *Egy $(H, \leq)$ párt részben rendezett halmaznak nevezünk, ha H egy halmaz, $\leq$ pedig egy H-n értelmezett részbenrendezés, azaz tetszőleges $a, b, c \in H$ elemekre*

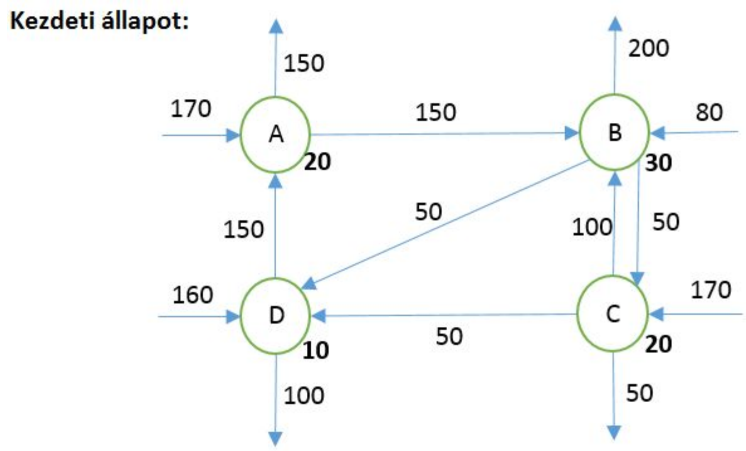
- $a \leq a$;
- *ha* $a \leq b$ *és* $b \leq a$, *akkor* $a = b$;
- $a \leq b$ *és* $b \leq c$, *akkor* $a \leq c$.

2.3.2. Definíció (Teljesség). *Egy részben rendezett halmaz teljes, ha minden véges és végtelen részhalmazának létezik infimuma és szuprémuma.*

2.3.3. Tétel (Tarski fixponttétele). *Legyen H teljes halmaz. Ha $f : H \to H$ függvény nem csökkenő monoton függvény, akkor f-nek létezik fixpontja, és a fixpontjai között létezik legkisebb és legnagyobb fixpont.*

Sőt, ha f fixpontja egyértelmű és ha $\forall x \in H$-ra $x \geq f(x)$, (vagy $\forall x \in H$-ra $x \leq f(x)$), akkor az $x_{k+1} = f(x_k)$ fixpont iterációs sorozat konvergál az f leképezés fixpontjához.

A mi esetünkben $\mathbb{R}^n_+$ kiegészítve végtelennel egy teljes halmaz, amelyen $\Phi(p)$ függvény p-ben nem csökkenő monoton függvény, azaz $\Phi(p+v) \geq \Phi(p)$ bármely $v \geq \mathbf{0}$-ra.

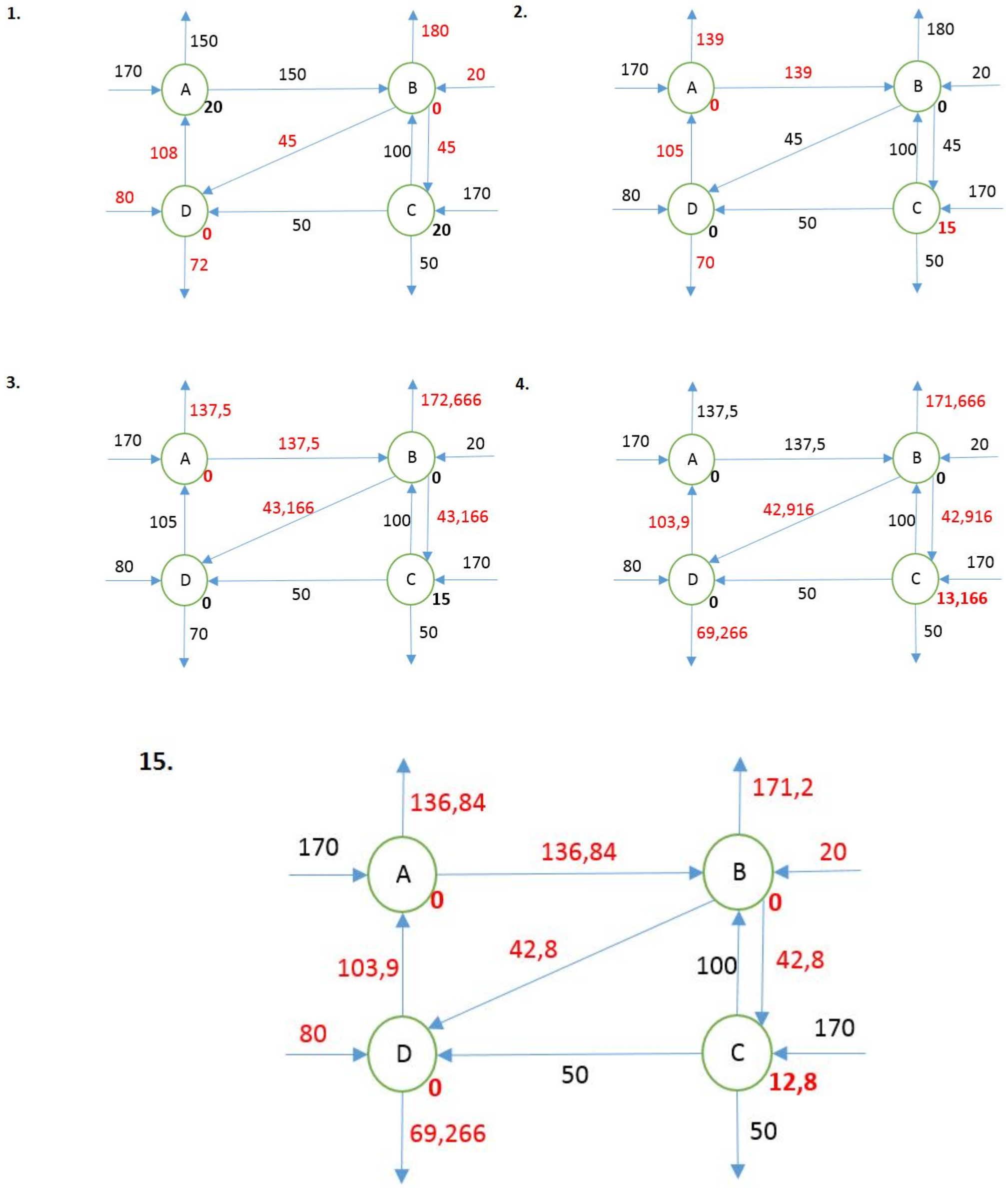


2.5. ábra

Ezért igazak rá a fixponttétel feltételei, tehát létezik fixpont. Ez a fixpont nem lehet a végtelen, mivel Φ minimummal van definiálva, így $\overline{p}$ véges vektor felső korlátja Φ-nek.

2.3.1. Példa

Ebben a fejezetben bemutatok még egy példát, amin az olvasó jobban meg tudja érteni a fertőzés folyamatát. Vegyük a 2.5 ábrán látható rendszert. Erre egy $x = (0, 60, 0, 80)$ sokk hat. Az első három lépésben jól követhető a fertőzés terjedése. A tizenötödik lépésben már 4 tizedesjegyig egyező fix pontot kapunk, azaz $p^{(16)} = \Phi(p^{(15)}) \approx p^{(15)}$. Ez $p'(x) = (273,6842; 256,8421; 200; 172,8070)$. Ezt tekinthetjük a fertőzés után beállt új egyensúlynak. A 2.6 ábra mutatja az éleken átfolyó új egyensúlyi értékeket. A clearing vektor kiszámítását a függelékben szereplő kóddal számolhatjuk ki. Ehhez csak az L mátrixot, és a c, $\overline{p}$, és x vektorokat kellett megadni.



2.6. ábra

2.4. A modell kiterjesztése

Ez az alfejezet újra a [9] cikk gondolataira épül, azokat fejti ki jobban. A fentebb ismertetett modell nagyon leegyszerűsíti a valóságot. A gyakorlatban például a hitelezők között hierarchia van, nem a kitettséggel arányosan osztoznak a veszteségen. Vannak többek közt biztosított hitelek, amelyek nem fizetése esetén a biztosító fizet, illetve bonyolultabb hitelviszony is állhat fent, mint derivatívákon keresztül való kapcsolat. Másik egyszerűsítés az, amikor egy bank csődbe megy és az eszközeiből el kell adnia, ez komoly többlet költséget jelent az adott intézménynek, így a sokk vesztesége mellett még ezzel a veszteséggel is meg kell birkózniuk a pénzügyi intézményeknek, ami az egész rendszerre kihat.

A modell nem tudja kezelni azt az esetet, amikor nem közvetlen a fertőzés, hanem a piacon keresztül hat. Ha egy pénzügyi intézmény külső hitelei elkezdenek nem fizetni, nagyobb tőkét kell tartalékolnia rá, hogy a szabályozásnak megfeleljen. Így el kell adnia kevésbé likvid eszközöket, hogy azt a szabályozásnak megfelelő likvid tőkeként tartsa a portfóliójában. A hirtelen eladásnak köszönhetően a piac alulértékeli az adott terméket és a hozzá hasonlókat is (mivel tudjuk, hogy a piacon erősen korrelálnak a hasonló termékek árai). Emiatt más bankok mérlegében is csökken ezeknek a termékeknek az értéke, így a szabályozásnak való megfelelés érdekében ők is eladásra kényszerülnek. Ezt a jelenséget hívjuk *fire sale*-nek.

Hasonlóan alakul ki a pénzügyi piacokon a *bizalom elvesztése* az adott pénzügyi intézmény iránt. Ez történt például a Lehman Brothers esetében is. A kezdeti bizonytalanság lenyomta a bank forrásainak piaci értékét, ami egyben a bank hitelezőinek az eszközállományát is csökkenti. Ez egy általános hanyatlást eredményezett. Egy ilyen esemény lehet a rendszerkockázat egyik fő csatornája. Az alábbi feltételrendszer modellezi a piaci értékelés miatt induló fertőzést, ahol a piac beárazza az egyes pénzügyi intézmények hitelképességét.

Vegyük az előző hálózati felépítést. Ekkor legyen, mint korábban L_{ij} a követelések névértéke, és legyen V_{ij} ennek a követelésnek a pillanatnyi piaci értéke. Ekkor tudjuk, hogy $0 \leq V_{ij} \leq L_{ij}$. V a piaci értékek mátrixa, i. oszlopa, $V_{\cdot i}$ adja az i bank eszközeit és i. sora, $V_{i\cdot}$ adja a bank forrásait. Bevezetünk egy $\Psi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ függvényt, ami az eszközök értékéről képez le a források értékére. Ez a függvény mutatja az adott bank forrásainak leértékelődését a piacon. Feltehetjük, hogy Ψ_i nem csökkenő és $0 \leq \Psi(V_{\cdot i}) \leq L_{\cdot i}$, ha $0 \leq V_{\cdot i} \leq L_{\cdot i}$. V konzisztens, ha $0 \leq V \leq L$ és $\Psi_i(V_{\cdot i}) = V_{i\cdot} \forall i$. Az, hogy ilyen mátrix létezik, szintén a Tarski-féle fixponttételből következik.

2.4.1. Rendszerveszteség

A modellünk bemutatja adott ponton fellépő veszteség végigterjedését a rendszerben. A feltételrendszerünkben a piac beárazza a pénzügyi intézmények hitelképességét, így a piaci értékeléssel induló fertőzés is modellezhető. Egyéb mutatókat is bevezethetünk ennek alapján. Egyik ilyen lehet egy bank teljes vesztesége, ami a hitelnyújtási képességét befolyásolja. Másodszor bevezethetünk egy mutatót a nem pénzügyi szektorban okozott aggregált veszteségre. Ez a pénzügyi rendszer háztartásoknak és nem pénzügyi intézményeknek kifizetett értékének a csökkenése. Harmadik mutatónk az összes rendszerbeli intézmény és külső szereplők teljes eszközár vesztesége. Ez az az összeg, amennyivel az összes követelés értéke csökkent a névértékhez képest. A mutató neve legyen *systemic loss in value*, röviden *SLV*.

$$SLV = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (L_{ij} - V_{ij})$$

Ebben a felírásban a systemic loss in value a közvetlen, eszközárakban megjelenő veszteséget írja le.

Abban az esetben, ha a végső kifizetések épp a clearing vektorral kapott értékek, SLV épp az összes kifizetések értéke. Ha a clearing vektor $p'(x)$ egy x sokk esetén, akkor

$$SLV = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} (\overline{p}_i - p'_i(x))\,.$$

Ez az előzővel ellentétben systemic loss in value értékét a közvetett veszteségek alapján írja fel, a fertőzés miatt csökkenő kifizetésekkel.

Megjegyezzük, hogy $\sum_{i=1}^{n} x_i$ egyenlő a bankok nettó értékének lecsökkenésével, és a nem pénzügyi szektorba áramló összes kifizetések csökkenésével. A 2.3 ábrával ismertetett példában a sokk értéke 120 volt, és ez épp $10+10+10+4+(180-150)+(100-90)+(50-26)+(150-128)$. Ezzel szemben az SLV értékébe a bankközi értékvesztés is beleszámít, így $SLV = 120 + 158 = 278$.

Az SLV mérték egyenlően kezeli a pénzügyi intézmények közötti és a nem pénzügyi szektor felé történő kitettségeket. Azt könnyű látni, hogy a nem pénzügyi szektorba folyó kifizetések mértéke a gazdaságra hatással van. De a bankok egymás közötti kitettségeinek fontos szerepe van a likviditási szükségletek kezelésében, ahogy közvetítő szerepet vállalnak a külső hitelezők és hitelesek között, meg kell osztaniuk a kockázati kitettséget is. Ezért a pénzügyi intézmények közt folyó értékre gondolhatunk úgy, mint *közvetítő javak*ra, aminek gazdasági értéke van a szerződő felek számára. Így az egész gazdaság számára valós gazdasági veszteséggé válik. [9]

2.4.2. Mélységi tulajdonság

Az alábbi alfejezetben az SLV, a mélység és a centralitás közötti kapcsolatot fogjuk jobban megvizsgálni. Az előzőekről korábban 2.1.3 alfejezetben beszéltünk részletesebben. Az volt a megállapításunk Tarski fixponttétele alapján, hogy ha minden pontból létezik út a külső szektorba, akkor a clearing vektor egyértelmű. Ekkor i csúcsfertőzöttségét így adhatnánk meg:

$$s_i(x) = \overline{p} - {p'}_i(x)\,.$$

Ekkor a systemic loss in value értéke: $SLV(X) = \sum_i x_i + \sum_i s_i$, ahol az összeg első fele a közvetlen veszteség, a második fele a közvetett veszteség. Legyen $D(x)$ a csúcsoknak azon halmaza, amelyek a fertőzés során csődbe mentek. Az alábbi veszteségi egyenletben kihasználjuk, hogy p' egy clearing vektor.

$$s_D \cdot \Pi_D - (w_D - x_D) = s_D\,,$$

ahol w a bankok az eredeti (fertőzés előtti) nettó érték, és mindent csak a D-re szűkítünk le.

Vegyük észre, hogy Π, a relatív kitettségi mátrix egy szubsztochasztikus mátrix, azaz minden sorösszege maximum 1. A gráfból kilépő él arányával lesz 1-nél kisebb. Erre tekinthetünk úgy, mint egy elnyelő Markov-lánc átmenet mátrixa. Így is definiálhatjuk a d mélységi vektort, melyben az élsúlyozást is figyelembe vesszük:

$$d = \left[I + \Pi + \Pi^2 + \ldots\right] \cdot \mathbf{1}\,.$$

Ugyanezt szintén leszűkíthetjük a D halmazra, mivel minket az fog érdekelni, hogy a csődbe került bankok által okozott veszteség hogy jut ki a hálózatból a fertőzés során. A nem csődös bankok veszteségén nem kell a rendszer egészének is osztozkodnia.

Ezért $i \notin D(x)$-re $d_i = 0$-t állítunk be. Ekkor a rendszerkockázati veszteséget az alábbi módon írhatjuk fel:

$$SLV = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} (x_i - w_i) \cdot d_i \, .$$

Ilyen értelemben d a veszteségek felerősödését mutatja a pontok összekapcsoltsága révén.

A centralitást korábban L mátrixszal definiáltuk, mivel még nem ismertük Π mátrixot. Ha a Π mátrix spektrálsugarát és az ehhez tartozó jobb, illetve bal saját-vektorral definiáljuk a centralitást, az élsúlyozás, pozitivitás és normáltság is megmarad.

Vegyük Π transzponáltját, Π^T-t. Ez annak a gráfnak a relatív kitettségi mátrixa lesz, ahol a nyilak épp fordítva állnak, mint az eredeti gráfban. Ez is egy szubsztochasztikus mátrix, mivel a fordított nyilak között is van külvilágba vezető séta minden csúcsból. Ekkor a fordított gráf csúcsainak mélysége

$$d^T = \mathbf{1} \cdot \left[I + \Pi^T + \left(\Pi^T \right)^2 + \dots \right]$$

A transzponált mátrix mélysége épp az eredeti gráf centralitás-vektorát adja meg.

3. fejezet

A rendszerkockázat modellezése Hawkes-folyamattal

Hawkes-folyamattal többen is fejlesztettek rendszerkockázati modellt, így Errais et al. [8], Aït-Sahalia et al. [1] és Dassios et al. [6].

3.1. A Hawkes-folyamat

A pontfolyamat egy valószínűségi modell, mely egy téren (gyakran $\mathbb{R}^D$ fölött) a pontok véletlenszerű szóródását írja le bizonyos feltételezésekkel. Általában véletlenszerű események bekövetkezését szokták pontfolyamattal modellezni, az idő függvényében. A több dimenzió többféle esemény együttes bekövetkezését is képes vizsgálni. A pontfolyamatokat az intenzitás megadásával definiáljuk. Egy sokak által ismert pontfolyamat a Poisson-folyamat, ennek intenzitása az időtől független, konstans elemű λ vektor. Általánosságban azonban ez az intenzitás egy vektor, ami függ a t időponttól is. Ilyen a Hawkes-folyamat is, melyet A. G. Hawkes vezetett be a hetvenes években.

3.1.1. Definíció (Számláló folyamat). *A* számláló folyamat *egy olyan sztochasztikus folyamat, amely nemnegatív egész számokat vesz fel és az idő előrehaladtával növekszik.*

Legyen $\mathcal{F}_t$ filtráció, azaz σ-algebrák bővülő családja. A $\mathcal{F}_t$ filtrációra gondolhatunk úgy, mint a t időpontban rendelkezésre álló információra. Legyen $N_t = \{N_t^i\}_{i=1}^D$ egy D dimenziós számláló folyamat vektor, amelynek minden koordinátája egy számláló folyamat. A szintén D dimenziós vektor $\lambda_t = \{\lambda_t^i\}_{i=1}^D$ *intenzitás vektor*, ha

$$\lambda_t = \lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1} E\left[N_{t+\Delta} - N_t | \mathcal{F}_t\right] ,$$

vagy kevésbé precízen, de annál érthetőbben $\lambda_t^i dt = E(dN_t^i | \mathcal{F}_t^i)$. Tehát az intenzitás megváltozása t időpontban a folyamat megváltozásának várható értéke. A Hawkes-folyamat intenzitásvektora egy lineáris függvénye a folyamat t-ig bekövetkező ugrásainak. Ezzel a vektorral definiáljuk.

3.1.2. Definíció (Hawkes-folyamat). *A Hawkes-folyamat egy olyan számláló folyamat, melynek az intenzitásvektora a következőképpen írható le:*

$$\lambda_t^i = \mu_t^i + \sum_{j=1}^{D} \int_0^t \Phi^{ij}(t-s) dN_s^j$$

ahol $\mu_t = \{\mu_t^i\}_{i=1}^D$ *egy* i*-re jellemző, determinisztikus intenzitás,* $\Phi(t) = \{\Phi(t)^{ij}\}_{i,j=1}^D$ *pedig magfüggvények mátrixa.* Φ*-re igaz, hogy*

- $\Phi^{ij}(t) \geq 0 \quad \forall\, i,j \in \{1,\ldots,D\}$
- *ha* $t \leq 0$*, akkor* $\Phi^{ij}(t) = 0 \quad \forall\, i,j \in \{1,\ldots,D\}$
- $\Phi^{ij}(t) \in \mathcal{L}^1$*, azaz Lebesgue-integrálható függvény.*

Φ^{ij}-re egy adott t időpontban gondolhatunk úgy, hogy egy j típusú esemény mekkora növekedést okoz az i típusúak intenzitásában, amit úgy is értelmezhetünk, hogy egy adott időszak alatt a j típusú esemény mekkora valószínűséggel okoz egy i típusút. Azaz minden korábbi dN_s^j ugrás növeli az ugrófolyamat λ_t^i intenzitását.

Tehát a Hawkes-folyamat fő ötlete, hogy az események egymást okozzák. Ezt úgy használhatjuk ki a modellezésben, hogy empirikus megfigyelések alapján a már meglévő adatainkra beállítunk paramétereket, és ezeket behelyettesítve a folyamatba, a modell szépen illeszkedik a valóságra. A Φ általában csökkenő függvény, hiszen az ok és okozat között eltelt időt kicsinek gondoljuk. Ez később a klaszterezettségi tulajdonság miatt lesz érdekes. A megfigyelések szerint a pénzügyi folyamatokban bizonyos események (többek közt a hirtelen árcsökkenés) gyakran gyors egymásutánban fordulnak elő, aztán sokáig nem jelennek meg. Ezt hívjuk klaszterezettségnek.

A D dimenzió azt jelöli, hogy hányféle eseményt különböztetünk meg. Például részvények esetén érdemes külön eseménynek tekinteni, hogy a loghozama nőtt, illetve a loghozama csökkent. Azt feltételezzük, hogy a növekedés okozhat csökkenést és további növekedést is, illetve a csökkenés is okozhat további csökkenést és növekedést is. Erre a négyféle okozati viszonyra határozzuk meg Φ értékeit, amik a modell paraméterei lesznek.

A rendszerkockázat modellezéséhez csak egyféle eseményt tekintünk, olyan veszteségeket, amelyeknek a sorozata csődhöz vezethet. Tehát $D = 1$, így a definíció képlete is jelentősen egyszerűsödik.

$$\lambda_t = \mu_t + \int_0^t \Phi(t-s) dN_s \,,$$

ahol $N(t)$ a veszteségek számláló folyamata, μ_t pedig egy determinisztikus függvény:

$$\mu_t = c + e^{-\kappa t} \cdot (\lambda_0 - c) \,.$$

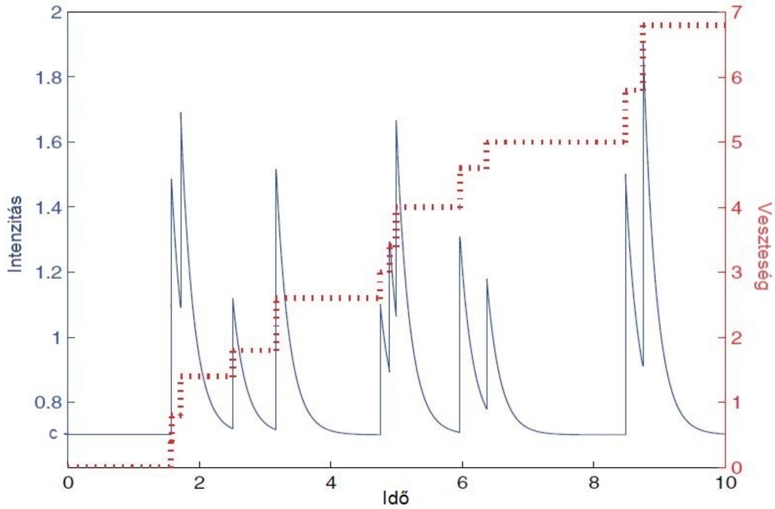
Itt $\lambda_0 > 0$ az intenzitás kezdeti értéke, $c > 0$ pedig egy visszatérési szint, ahová visszatér a folyamat egy ugrás után, egyben egy minimum szint is, amely alá nem csökken. A modellben legyen

$$\Phi(v) = \delta e^{-\kappa v} \,, \text{ ha } v \geq 0 \,,$$

ahol $\delta \geq 0$ egy érzékenységi paraméter, $\kappa \geq 0$ pedig egy adott esemény után bekövetkező exponenciális hanyatlás paramétere. Tehát megállapíthatjuk, hogy az empirikus vizsgálat során az alábbi paramétereket kell megbecsülnünk: c, λ_0, κ és δ, hogy megkapjuk a Hawkes-ugrófolyamatot. A 3.1 ábrán látható, hogy hogyan képzeljünk el egy ilyen folyamatot. Összeírható egy képletbe az ugrófolyamat intenzitása:

$$\lambda_t = c + e^{-\kappa t}(\lambda_0 - c) + \int_0^t \delta e^{-\kappa(t-s)} dN_s$$

Φ-t hívhatjuk a Hawkes-folyamat magjának. Ha ilyen alakban definiáljuk, *exponenciális magfüggvényű Hawkes-folyamat*nak nevezhetjük. A folyamat stabilitásához szükséges, hogy a spektrálsugár 1-nél kisebb legyen. Ilyen felírásnál ezt könnyen számolhatjuk, ugyanis $\rho(\Phi) = \int_0^\infty \Phi(t) dt = \frac{\delta}{\kappa} < 1$ a szükséges feltétel.



3.1. ábra. [8]

3.1.3. Tétel (Markov-tulajdonság). *Vegyünk egy exponenciális magfüggvényű Hawkes-folyamatot. Ekkor az* (N_t, λ_t) *pár* Markov-folyamat *lesz. Tehát* λ*-t felírhatjuk Markov-formulával is:*

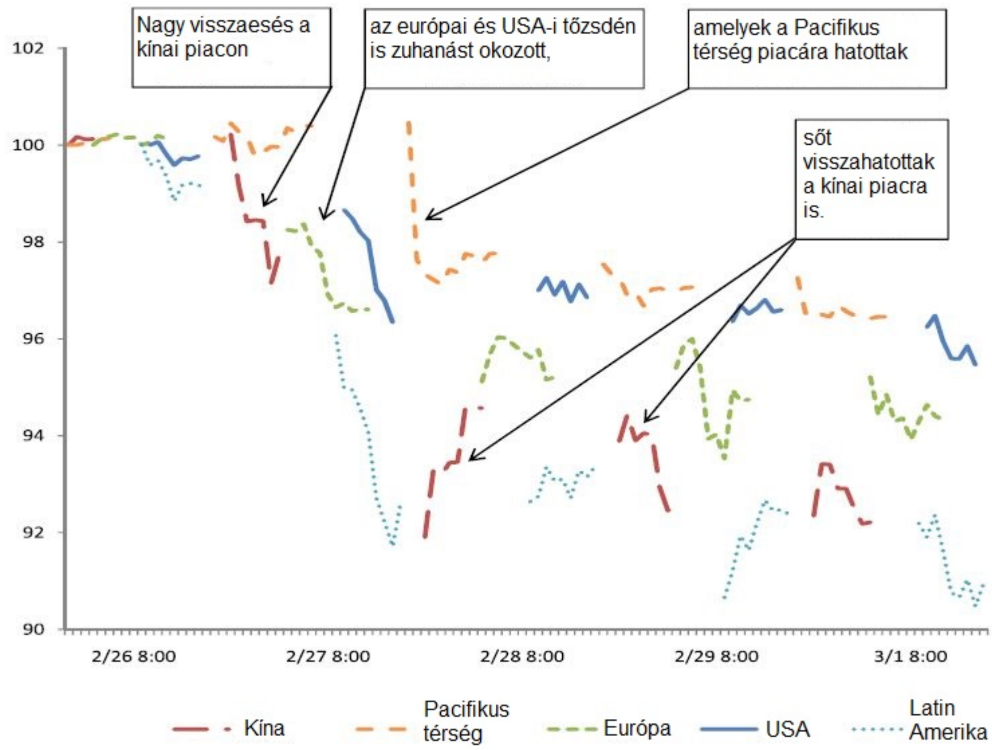
$$d\lambda_t = -\kappa\lambda_t dt + \delta dN_t\,.$$

Vegyük észre, hogy ha a Markov-formulával felírt egyenletnek nem lenne sztochasztikus tagja, a differenciálegyenlet megoldása épp μ_t lenne. Ehhez veszünk hozzá egy öngerjesztő ugrófolyamatot. A Markov-tulajdonság azért is hasznos, mert a számítógépes szimuláció futási idejét jelentősen csökkenti. Mivel a markovitás miatt elég megjegyezni a folyamat aktuális időpontbeli értékét, nem kell a korábbi időpontok eseményeit eltárolni.

3.1.4. Definíció (Öngerjesztés). *Egy* N_t *folyamat* öngerjesztő*, ha*

$$cov(N_t - N_s, N_u - N_t) > 0, \text{ ahol } s < t < u.$$

Azaz öngerjesztő egy folyamat, ha egy esemény előfordulása a közeli múltban pozitív hatással van a közeli jövőben előforduló eseményekre. Ez a valóságban úgy látszik, hogy az események klaszterekben fordulnak elő, azaz bizonyos időpontokban megjelennek sűrűbben, más időszakokban meg teljesen úgy tűnik, mintha eltűntek volna.



3.2. ábra. [1]

Úgy is szokták mondani, hogy a folyamat klaszterezett érkezést indukál. A forrásaink mind olyan exponenciális magfüggvényű Hawkes-folyamattal modelleznek, amelyeknek öngerjesztők.

3.2. A modellek

Az előbb látott Hawkes-ugrófolyamatot hozzáadhatjuk egy diffúziós folyamathoz, ekkor egy *öngerjesztő ugró-diffúzív* folyamatot kapunk:

$$dX_t^i = \underbrace{\mu_t^i dt}_{\text{determinisztikus tag}} + \underbrace{\sigma_t^i dW_t^i}_{\text{sztochasztikus tag}} + \underbrace{Z_t^i dN_t^i}_{\text{ugró tag}},$$

ahol $i \in \{1, \dots, D\}$.

A [1] cikkben kifejezetten a piacon keresztül kifejtett rendszerkockázatot figyelhetjük meg, vagyis a piacokat vizsgálja, mint rendszert, nem a pénzügyi intézmények rendszerét. Ezek a hatások főként az indirekt fertőzést tudják jól bemutatni. Aït-Sahalia et al. vették öt piacnak a részvényindexeit, ezeknek a mozgását vizsgálták, és illesztették rá a fentebb leírt öngerjesztő ugró-diffúziót. A 3.2 ábrán látható egy megfigyelésük 2007. február 26-tól március 1-ig tartó időszakban történt változásokról. Ennek alapján határozták meg a paramétereiket először. Megállapították, hogy az USA piacának van a legerőteljesebb hatása a többi piacra, így az egész világ pénzügyi rendszerének a fertőzésére.

Dassios et al. [6] azt állapították meg, hogy a függőségi struktúra jól modellezhető Hawkes-folyamattal. Ők definiáltak "rossz eseményeket", melyek valamekkora valószínűséggel csődöt okoznak. A feltételes túlélési valószínűséget zárt képlettel meg tudták adni. Ez inkább a hitelkockázat méréséhez hasznos, de láthatjuk, hogy a rendszerkockázathoz is szorosan kötődik, pont a függőségi struktúrája miatt.

Errais et al. [8] az exponenciális magfüggvényű Hawkes-folyamatnak veszi egy affin transzformációját, és ezzel modellezi a csődeseményeket. Ezt nevezte affin pontfolyamatnak, mely tehát a Hawkes-folyamat kiterjesztése. Szintén jól látható a piaci adatokon keresztül az, hogy hatással vannak egymásra ezek az események. Explicit képletet adtak az ugró folyamatra és az affin transzformációval meghatározott úgynevezett *jelölt pontfolyamat*ra is. Az adataikat 2008 szeptember eleje óta gyűjtötték, így a Lehman Brothers csődjét is bele tudták a modelljükbe építeni, tehát hasonló méretű kilengéseket a modell fel tud ismerni és előre tud jelezni.

4. fejezet

Összehasonlítás

Az előző fejezetekben láttuk két teljesen más megközelítését a rendszerkockázati modellezésnek. Most szeretnénk azt megvizsgálni, hogy melyiknek mi az előnye és a hátránya, mikor melyiket érdemes használni.

A legszembetűnőbb különbség, hogy az első esetben van egy fix hálózat. Ismerjük a bankokat és a bankok közötti kapcsolatot. Ennek alapján teljesen világosan látszik, miért is hatnak egymásra a rendszerben. Ezzel ellentétben az ugró-folyamatos modellezésben nem ismerjük magát a hálózatot. Nem látjuk benne a bankokat és egyéb szereplőket. Viszont a paraméterekkel nagyon jól becsülhetjük az események közötti ok-okozati összefüggés erősségét. Ez a kapcsolat nem vetíthető vissza direkten a rendszerre, de arányokat láthatunk rajta, és a modell illeszkedése is elég pontosnak mondható. Az is könnyen látszik, hogy míg a hálózati modell a direkt kapcsolatot, a dominó hatást veszi elő, a Hawkes-folyamat modellje inkább az indirekt, piacon keresztül fellépő hatásokat veszi inkább figyelembe.

A két modell között annyiban fedezünk fel hasonlóságot, hogy mindkettő az események egymásutánisága révén vizsgálja a rendszert. A pontfolyamatos modellezés ok-okozati kapcsolatait párhuzamba állíthatjuk a hálózat éleivel és azoknak súlyozásával. Ahol nagyobb az élsúlyozás, ott feltehetően a magfüggvény értéke is nagyobb, vagyis az egyik típusnak a másik intenzitására való hatása is nagyobb lesz. Ez inkább rész-gráfok közötti kapcsolat lehet.

A hálózati modellnek lehet egy hibája, hogy ha egyszer beérkezett egy x sokk, amíg a fertőzés végig nem terjed, nem tud újabb beérkező sokkot kezelni a modell. Ennek ellenére előnyös oldala, hogy a bankok közti rendszert jól meg tudjuk figyelni, helyes hálózati struktúrát alkalmazva világos eredményeket kapunk a rendszert illetően. Tisztán látszik, hogy melyik az az intézmény, amely veszélyt jelenthet, és melyik, amelyik rendszerkockázati szempontból fontos lehet.

A Hawkes-folyamat modellje nehezen tudja megfogni a helyes struktúrát, viszont a forrásban szereplő cikkek mindegyike kiemeli, hogy a valós csődesemények előfordulásának vizsgálatánál a sztenderd kopula modelleknél sokkal jobban illeszkednek a Hawkes-féle ugrófolyamatok. Szubjektív véleményem, hogy nagyon jó, hogy a tisztán látható és értelmezhető hálózati struktúrától elrugaszkodva állapítanak meg a rendszer egészéről fontos állításokat. Mivel a pénzügyi modellezés folyamán gyakran fordul elő olyan, hogy nem a legtriviálisabb, valóságban kézzel fogható út az, ami a legjobb modellt adja.

Természetesen nem csak ez a kétféle gondolkodásmód létezik, sőt, minél több oldalról meg tudjuk fogni ezt a nem triviális rendszerkockázati fogalmat, annál közelebb kerülhetünk ahhoz, hogy olyan pontosan meghatározzuk, mint a régebb óta ismert kockázatokat, mint például a hitelkockázatot.

A rendszerkockázatot megfoghatjuk úgy is, ha az egyes ügyletekben felmerülő partnerkockázatot figyeljük meg, és ezt összeadva megkapjuk a rendszer kockázatosságát. Többek között a [10] és [5] cikkek visszafelé haladó sztochasztikus differenciálegyenlettel szeretnék megfogni a partnerkockázatot. Ők két partnert vesznek, egy bankot és egy ügyfelet. A közöttük lévő kapcsolat egy ügylet, melynek tárgya egy termék. Ennek a terméknek az árazását egy replikáló portfólióval határozhatjuk meg, ami adott feltételrendszer mellett egy olyan sztochasztikus differenciálegyenletet szül, melynek megoldása az ár. A termékbe bele van árazva a másik partnerkockázata is, ezért ha a kockázatsemleges árat is meghatározzuk, a kettőt összetéve a kockázat árára írhatunk fel egy sztochasztikus differenciálegyenletet. Jegyezzük meg, hogy ezek a differenciálegyenletek visszafelé haladóak, mivel adott időpontban csak a korábbi és éppen akkori értékeit ismerjük a folyamatnak, a jövőbelit nem. Így a deriválásnál a t-edik és $(t - dt)$-edik időpontokat tudjuk figyelembe venni, amivel a baloldali deriváltat kapjuk meg, így végig azzal számolunk. Ez a megközelítés viszonylag nehézkes, mivel sok a feltétel és sok a paraméter. Illetve inkább a mikroprudenciális "bottom-up" elv érvényesülését figyelhetjük meg. Olyan feltételrendszerre van szükség, melyben igaz lesz, hogy az elemekben megfigyelt kockázatok összege egyenlő az egész rendszernek a kockázatával. Ilyen feltételek mellett a modell kevésbé fog tudni illeszkedni a valósághoz, az eddig ismertetett modelljeinkhez képest.

Végezetül megállapíthatjuk, hogy a rendszerkockázattal a 2008-2009-es válság után kezdett el újra komolyabban foglalkozni az irodalom, így viszonylag új fogalom. A modellekre mindenképpen szükségünk van, hogy jobban beleláthassunk a rendszerkockázat mibenlétébe, így a veszélyeit is jobban fel tudjuk mérni. Erre nem határozhatunk meg egyféle, legjobb modellt, hanem többféle irányból megközelített, különböző feltételrendszerű modellek vannak a kezünkben, nem mondhatjuk egyik modellt sem jobbnak a másiknál.

Függelék

Ebben a függelékben a 2.3.1 alfejezetben bemutatott példának a kiszámolásához használt, R programban írt programkódot mutatom be.

```
L <- matrix(c(0, 150, 0,0,0,0, 50,50, 0, 100,0,50, 150,0,0,0), nrow=4, ncol = 4,
byrow = TRUE)
ce <- c(170,80,170,160)
x <- c(0,60,0,80)
pe <- c(300,300,200,250)
pii <- L/pe

p=pe
for (k in 1:15){
  be <- p%*%pii
  for (i in 1:4){
  p[i] = min(pe[i],ce[i]-x[i]+be[i])
   }
  k= k+1
}
p
```

Irodalomjegyzék

[1] Aït-Sahalia, Yacine, Julio Cacho-Diaz, and Roger JA Laeven. "Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes." Journal of Financial Economics 117.3 (2015): 585-606.

[2] Bacry, Emmanuel, Iacopo Mastromatteo, and Jean-François Muzy. "Hawkes processes in finance." Market Microstructure and Liquidity 1.01 (2015): 1550005.

[3] Boss, Michael, et al. "Network topology of the interbank market." Quantitative Finance 4.6 (2004): 677-684.

[4] Craig, Ben, and Goetz Von Peter. "Interbank tiering and money center banks." Journal of Financial Intermediation 23.3 (2014): 322-347.

[5] Crépey, Stéphane, and Shiqi Song. "BSDEs of counterparty risk." Stochastic Processes and their Applications 125.8 (2015): 3023-3052.

[6] Dassios, Angelos, and Hongbiao Zhao. "A dynamic contagion process." Advances in applied probability 43.03 (2011): 814-846.

[7] Eisenberg, Larry, and Thomas H. Noe. "Systemic risk in financial systems." Management Science 47.2 (2001): 236-249.

[8] Errais, Eymen, Kay Giesecke, and Lisa R. Goldberg. "Affine point processes and portfolio credit risk." SIAM Journal on Financial Mathematics 1.1 (2010): 642-665.

[9] Glasserman, Paul, and H. Peyton Young. "Contagion in financial networks." Journal of Economic Literature 54.3 (2016): 779-831.

[10] Lesniewski, Andrew, and Anja Richter. "Managing counterparty credit risk via BSDEs." (2016).

[11] Lublóy, Ágnes. A magyar bankközi piac rendszerkockázati vonatkozásai. Diss. Budapesti Corvinus Egyetem, 2005.

[12] Lublóy, Ágnes. "Rendszerkockázat a bankszektorban." Hitelintézeti Szemle, II. évf. 4. sz. (2003): 70-90.

[13] http://mathworld.wolfram.com/

[14] Mázsár, Noémi. "Hálózatelméleti modellek a banki rendszerkockázatra." ELTE - Corvinus Biztosítási és pénzügyi matematika Msc szakdolgozat (2015).

[15] Perkowski, Nicolas. "Backward Stochastic Differential Equations: an Introduction." Tanári jegyzet

[16] Tanári jegyzet
http://users.itk.ppke.hu/~hakta/segedanyagok/1-szemeszter/DM1/wikire_feltoltott/TARSKI.pdf

[17] Tanári jegyzet
http://math.uni-pannon.hu/~hartung/okt/ma6116a/jegyzet7.pdf