Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Nyitrai Károly

Együttbiztosítás játékelméleti modellezése

Msc Szakdolgozat

Témavezető:

Jankó Zsuzsanna

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
Budapesti Corvinus Egyetem

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Szakdolgozatomban a címéből adódóan, együttbiztosítási szituációt kívánok elemezni matematikai, azon belül is játékelméleti módszerekkel. Szeretnék egy olyan, biztosítók közötti együttműködést modellezni, mely igazságos díj- és kockázatfelosztást tesz lehetővé.

Felvetődhet a kérdés, hogy a problémafelvetés, azaz az együttbiztosítás modellezése mennyire reális dolog, miért is lehet fontos. Ezzel kapcsolatban tekintsük át nagy vonalakban, mi is az a biztosítás.

A biztosítás során a biztosító bizonyos díj fejében kötelezettséget vállal, hogy egy bizonyos káresemény bekövetkezte esetén szolgáltat az ügyfélnek. A biztosító a ügyfelekből kockázatközösséget épít, így akkor is szolvens maradhat a biztosító, akkor is tud fizetni, ha a kárkifizetés az ügyfél befizetéséhez képest sokkal jelentősebb.

A biztosító tehát kockázat átvállalásával az ügyfélnek anyagi, pénzügyi biztonságot nyújt.

Azonban előfordulhat, hogy a kár olyan méreteket ölt, olyan nagyságú kár keletkezik, hogy még szolvens biztosítók sem tudnák önmaguk megoldani a kártalanítást. Elég csak például olyan tevékenységekre gondolni, melyek hibák esetén komoly veszély állhat fent akár emberi életeket tekintve, akár a természetet nézve. Ilyen lehet például egy olajszállító katasztrófája, de messzire se kell mennünk, gondoljuk csak a vörösiszap-katasztrófára, Paksra, vagy az árvizek okozta károkra.

Tehát látható a problémafelvetés jogossága, nem légből kapott gondolat a biztosítók bizonyos együttműködése, számos helyen szükséges a kooperációjuk, hisz egy biztosító nem tudná állni a fentebb is említett kárnagyságokat.

Az ilyen károk porlasztására két módszer ismert és használt: a viszontbiztosítás és az együttbiztosítás.

A viszontbiztosítás esetében a biztosító, amely eredetileg felvállalta a számára túl nagy kockázatot, vagyis az úgynevezett direkt biztosító, a kockázatnak a saját kapacitását meghaladó részét, valamint a díj arányos részét átadja egy másik biztosítónak, amit viszontbiztosítónak hívunk. Viszont fontos megjegyezni, hogy a direkt biztosító a felelős a teljes átvállalt kockázatért. A nemzetközi gyakorlatban általában csak erre a célra szakosodott viszontbiztosítók végzik a viszontbiztosítást, de előfordulhat olyan eset is, hogy egy biztosító egy üzletben direkt biztosító legyen, míg egy másikban pedig viszontbiztosító. A viszontbiztosító is dönthet úgy, hogy a kockázat egy részét továbbadja, s egy másik viszontbiztosítónál viszontbiztosíthatja a neki átadott kockázat egy részét, és így tovább. Ezt hívjuk retrocessziónak.

A másik lehetőség az együttbiztosítás. Az együttbiztosítás esetében a biztosítók úgy porlasztják a számukra túl nagy kockázatot, hogy azt együttesen vállalják el. Egymás között felosztják a vállalt kockázatot, és az ügyfélnek a díjat is ilyen arányban kell a különböző biztosítókhoz befizetnie, s ha bekövetkezik a kár, ilyen arányban kapja meg a teljes kárfizetést a biztosítóktól. Az együttbiztosítás kvázi intézményesített formáját poolnak nevezik. Poolnak rendszerint kiemelkedő és/vagy speciális kockázatokra hoznak létre. Ilyen például a Magyar Atompool (MA) , amely a magyar atomerőműbiztosításért felel és amelynek tagjai az Allianz Hungária, a Generali és Groupama Biztosító, valamint külföldi partnerek és viszontbiztosítók, amelyek az MA-val kötött szerződések alapján vesznek részt az ügyletben.

De persze poolt kialakíthatnak állományegyesítés céljából is. Ebben az esetben a kockázat nem kiemelkedő, azonban az egyes biztosítók szerződésállományai külön-külön annyira kicsik, hogy nem érvényesülhetnek a nagy számok törvényei. E megoldással a biztosítók az állományegyesítésbe feladott portfóliójuk arányában osztoznak a díjon és a kárfizetésen.

Vagyis láthatjuk, hogy a problémafelvetés jogos, a való életben is használt eszköz mind a viszontbiztosítás, mind az együttbiztosítás. Tehát szeretnék választ keresni arra, hogy a biztosítók mekkora biztosítási díjat számítsanak fel, hogyan osszák fel egymás közt a díjat, a kockázatot. Ahhoz, hogy ezt modellezni tudjam, először a kooperatív játékelmélet alapjaiba tekintek be, áttekintem a megoldási módszereket. Ezek után díjkalkulációs elvek következnek, majd bevezetem az úgynevezett 1-konvex játékokat és megnézem, hogy változnak a kooperatív játékelméleti eszközeink. Majd következik a co-insurance játék, ahol már együttbiztosítási szempontból vizsgáljuk a játékelméleti eszköztárunkat. Végül egy példán keresztül mutatom be a vizsgált módszereket és következtetéseket vonok le belőle.

2. fejezet

Kooperatív játékelmélet

2.1. Alapok

Játékelméleten a racionális szereplők vagy csoportjaik interakcióinak elemzését értjük. A játékban a döntéshozókat játékosoknak hívjuk, és egynél több szerepel bennük. Interakciónak azt nevezzük, ha legalább egy játékos döntései közvetlenül befolyásolják egy másik játékos magatartását.

Másképpen megfogalmazva, a játékelmélet a matematika egyik, interdiszciplináris jellegű, vagyis tudományágak közé egyértelműen nehezen besorolható ága, amely olyan szituációkat vizsgál, amelyben a játékosoknak döntési alternatívák közül kell választani, és eredményességük többi játékos választásától van függővé téve.

Fontos, hogy minden játékos a saját céljainak megfelelően igyekszik a hasznosságfüggvényét, a "profitját" maximalizálni, viszont a nehézséget az okozza, ami előbb is említve lett már, hogy ez nem csupán az ő döntéseitől függ, hanem bizony függhet más játékosok cselekedetétől is. A játék típusát tekintve lehet kooperatív illetve nem kooperatív.

Egy játékot kooperatívnak mondunk, ha a játékosok között kialakul egy bizonyos együttműködés. Sok esetben célszerű, ha a játékosok/ játékosok egy csoportja összefog és együttesen maximalizálják a profitjukat, hisz így számukra kedvezőbb lehet az eredmény, mint ha egyébként nem fognának össze. Ezzel ellentétben, nem kooperatív játék esetében a nevéből adódóan nincs kooperáció, együttműködés, hanem a játékosok versengenek egymással. Jelentős eltérés, hogy míg a kooperatív játék esetén meg vannak engedve ígéretek, kötelező jellegű megállapodások, addig a nem kooperatív játék esetében ezek nincsenek megengedve.

Ebből is látható, hogy a kooperatív ága fog minket érdekelni a játékelméletnek, hisz pont arra van szükségük együttbiztosítás esetén, hogy valahogyan együttműködjenek a játékosok, vagyis jelen esetben a biztosítók, és így maximalizálják a profitjukat. Tehát a továbbiakban a kooperatív játékokkal foglalkozunk.

Először is tekintsük át, hogy milyen fogalmakra van szükség ahhoz, hogy egy tetszőleges kooperatív játékot meghatározzunk:

Legyen $N = \{1, \ldots, n\}$ a játékosok halmaza. Ennek a halmaznak egy tetszőleges S részhalmazát nevezzük koalíciónak, formálisan: $S \subset N$. Magát az N halmazt teljes koalíciónak nevezzük.

Ahhoz, hogy a modellt megadhassuk, fontos, lényegi rész, hogy meghatározzuk a játékosok minden lehetséges koalíciójára az általuk elérhető kimenetek halmazát. Ez nyilván függ az adott S koalíció tagjaitól, hogy mennyire hatékony az ő együttműködésük, de persze függhet a koalíción kívüli $N \setminus S$-beli játékosok döntéseitől is, hogy ők miként viselkednek, mit lépnek a koalícióra, hiszen a játék kimenetelére ők is hatással lehetnek.

Még egy fontos fogalom:

2.1.1. Definíció. *Egy $v : 2^N \to \mathbb{R}$ függvényt a kooperatív játék karakterisztikus függvényének nevezünk, ha minden S részhalmazon megadja koalíció értékét. Jelölés: $v(S)$. Az üres halmazon nulla az értéke: $v(\emptyset) = 0$.*

Vagyis a koalíciós függvény a játékosok tetszőleges $S \subseteq N$ koalíciójára megadja annak $v(S)$ értékét, amit az S koalíció a helyzet adta lehetőségeken belül elérhet, az $N \setminus S$-beli játékosok cselekedeteitől függetlenül. A $v(S)$ értéket a koalíció képes tagjai között felosztani.

Tehát egy kooperatív játék jele (N, v). Számunkra azok az (N, v) kooperatív játékok lesznek fontosak, amik nem negatívak, amelyekben
$\forall S \subseteq N$ koalícióra a $v(S)$ nem negatív, vagyis $v(S) \geq 0$.

Az ilyen típusú játékok elemzésekor felmerülhetnek bizonyos kérdések, mint például, melyek azok a koalíciók, amik egyáltalán létrejöhetnek, a koalíción belül hogyan osztják föl a koalíció által elért eredményt, a felosztás mikor tekinthető egyáltalán jogosnak, méltányosnak. Ezekre szeretnénk a továbbiakban választ kapni.

Most vezessünk be néhány definíciót, amik segítenek majd nekünk az elemzésben:

2.1.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* (N, v) *játék*

- *additív, ha* $v(S) = \sum_{i \in S} v(i)$ *minden* $S \subseteq N$ *-re.*
- *szuperadditív, ha* $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ *áll fenn tetszőleges olyan* $S, T \subseteq N$ *-re, amelyre* $S \cap T = \emptyset$.
- *szubadditív, ha* $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$ *áll fenn tetszőleges olyan* $S, T \subseteq N$ *-re, amelyre* $S \cap T = \emptyset$.

Gondoljuk át, mit is mond ez a két fenti fogalom:

Additív játék esetén azt láthatjuk, hogy a játékosok semmilyen koalíciójából sem származik előny, vagyis a koalíciós függvényt egyértelműen meghatározza az egyszemélyes koalíciók értéke, azaz a $(v(1), \ldots, v(n)) \in \mathbb{R}^N$ vektor. Tekinthetjük fordítva is a dolgot, vagyis tetszőleges $x \in R^N$ vektor generál egy additív játékot, vagyis az $S \subseteq N$ koalíció értéke $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, és persze $x(\emptyset) = 0$.

Az additív játékokkal szemben a szuperadditív játékok esetén bármely két, közös játékost nem tartalmazó koalíció egyesüléséből csak előny származhat. Fennállhatnak olyan döntési helyzetek, ahol a játékosok két (nem feltétlenül különálló) S és T csoportjának érdemesebb a mindegyiküket tartalmazó $S \cup T$ és a közös tagokat tartalmazó $S \cap T$ koalíciókba rendeződniük, mert így többlet-eredményt érhetnek el.

2.1.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* (N, v) *játék konvex, ha* $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ *teljesül minden* $S, T \subseteq N$ *-re.*

Látható, hogy a szuperadditivitás a konvexitásnál gyengébb fogalom, azaz minden konvex játék szuperadditív is[16].

A szuperadditív tulajdonság fontos az elemzések során, hisz így a szereplők motiválva vannak arra, hogy koalíciókba szerveződjenek. Így többleteredménnyel járhat az együttműködés és így megvan a késztetés arra, hogy egyre nagyobb koalíciók jöjjenek létre, s végső soron megvalósuljon az összes játékost magában foglaló nagykoalíció.

Vagyis a szuperadditív játékok során a nagykoalíció maximalizálja az elérhető többleteredményt, ezért a későbbiekben feltesszük, hogy a nagykoalíció létrejön.

Vagyis a továbbiakban a kérdés a $v(N)$-nek minden játékos számára elfogadható elosztása lesz.

2.2. Mag

Ha egy szuperadditív karakterisztikus függvénnyel rendelkező kooperatív játékot tekintünk, akkor bármely nagykoalíciótól eltérő csoportosuláshoz képest előnyösebbnek mondható a nagykoalíció összhaszon szempontjából. Így tehát tekintsük az összhaszon elosztását.

2.2.1. Definíció. *Jelölje x_i $i \in N$ az i játékos részesedését, amit nevezzük egyszerűen az i játékos kifizetésének. Ekkor a v koalíciós függvény által leírt játék egy lehetséges kimenetelét a játékosok kifizetéseit tartalmazó $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektorral jellemezzük.*

Már volt említve, hogy minden játékos a saját profitját szeretné növelni, azaz az összhaszonból nagyobb részesedést szerezni, viszont ez csak a többi játékos kárára történhet. Viszont a többi játékos együttműködése nélkül nincs nagykoalíció, és így nincs plusz haszon, ami a nagykoalícióval járna.

Így tehát elsődlegesen megvalósítható kifizetéscsoportokat kell találni és a kifizetés maximalizálása csak másodlagos szempont.

2.2.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (N, v) játékban az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ kifizetés-vektor elfogadható az S koalíció számára, ha $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$;*

2.2.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (N, v) játékban az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ kifizetésvektor*

- *elosztás, ha $\sum_{i \in N} x_i = v(n)$ és $x_i \geq v(i)$ $\forall i \in N$-re, vagyis egy olyan felosztása a kifizetéseknek, ami minden játékos számára elfogadható. (egyénileg racionális) Jelöljük a játékban az elosztások halmazát I(N,v) -vel.*

- *mag-elosztás, ha $\sum_{i \in N} x_i = v(n)$ és $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ $\forall S$ koalícióra, vagyis olyan felosztás, amelyik minden koalíció számára elfogadható. (koalíciósan racionális) A mag-elosztások halmazát, amit úgy hívunk, hogy* ***mag*** *jelöljük $C(N, v)$-vel.*

Ha valamelyik koalícióra nem állna fent a koalíciós racionalitás, azaz így koalícióban többet tudnak elérni, mint a nagykoalíció esetén, akkor nekik nem érné meg a nagykoalíció, tehát az a felosztás nem lenne stabil. Vagyis a mag a korlátozásaival a stabil, minden lehetséges koalíció számára elfogadható kimeneteket tartalmazza.

2.2.4. Definíció. *Egy v játékot kiegyensúlyozottnak nevezzük, ha $C(v) \neq \emptyset$.*

2.2.5. Megjegyzés. A szuperadditív játékok esetében a mag nem üres, tehát biztos lesz egy vagy több kimenet, mely a nagykoalícióra nézve stabil[16] .

Vagyis a mag nem üres szuperadditív játékok esetén, de az a probléma fennáll, hogy ritkán kapunk egyértelmű megoldást. Ennek a problémának a megoldására fog megoldást jelenteni a Shapley-érték, valamint a nukleolusz és variációi.

3. fejezet

Shapley érték

A Shapley érték előnyösségét a maggal szemben az mutatja, hogy míg a mag esetén a létezés és egyértelműség is problémás, addig a Shapley érték mindig létezik és egyértelmű. Shapley[14] arra keresett és talált választ, hogy milyen számmal, tehát egy konkrét és egyértelmű valós számmal lehetne mérni egy játékos szerepének értékét egy játékban.

A Shapley-érték a karakterisztikus függvényeket képezi le az elosztások terébe, jele $\varphi(v)$.

Néhány axióma segítségével már egyértelműen meg tudjuk határozni a keresett értéket:

3.0.6. Axióma. *Szimmetria*
$\varphi_{\pi * i}(\pi * v) = \varphi_i(v)\ \forall i \in N$-re, valamint $\pi : N- > N$ bijekcióra. A v játék $\pi * v$ permutáltját a következőképp értelmezzük:

$$(\pi * v)(\pi * S) := v(S) \forall S \subset N \tag{3.1}$$

3.0.7. Axióma. *Dummy avagy látszatjátékos*
Ha egy játékos egy koalíció értékét a csatlakozásával csak $v(i)$-vel növeli, vagyis $v(S) = v(S \setminus \{i\}) + v(i)$, akkor legyen $\varphi_i(v) = v(i)$.

3.0.8. Axióma. *Additivitás*
Legyen u és v két játék a játékok halmazából, ekkor a két játék összértéke egyenlő a játékok értékeinek összegével, vagyis $\varphi_i(u + v) = \varphi_i(u) + \varphi_i(v)$.

Ennek a 3 axiómának egyetlen egy felosztás fog eleget tenni, ez lesz a keresett Shapley-értékünk.

3.0.9. Tétel. [14]

Legyen N a rögzített játékoshalmaz, v pedig legyen egy játék ezen rögzített N játékoshalmaz mellett, n legyen az N játékoshalmaz elemszáma, vagyis a játékosok száma egyszerűen, $|S|$-el pedig jelöljük az S koalíció elemszámát. Ekkor azt mondjuk, hogy az i játékos Shapley értéke a következő:

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} [v(S \cup i) - v(S)]$$

Példaként nézzük meg egy kétszemélyes játék esetén hogy is alakul a Shapley-érték:

$$\varphi_1(v) = v(1) + \frac{v(12) - v(1) - v(2)}{2}$$

$$\varphi_2(v) = v(2) + \frac{v(12) - v(2) - v(1)}{2}.$$

Láthatjuk, hogy ez esetben mindkét játékos esetében az történik, hogy megkapja egyrészt a saját maga által elérhető kifizetést, valamint a többletkifizetés felét, tehát a többletet egyenlő mértékben osztja szét ebben az esetben.

3.0.10. Megjegyzés. Tetszőleges játékra a Shapley-érték nem feltétlenül van benne a magban,viszont konvex játékok esetében mindig benne lesz a magban. (Shapley[15])

4. fejezet

Nukleolusz

4.1. A nukleousz koncepció

A nukleolusz Schmeidler[13] nevéhez fűződik.

4.1.1. Definíció. *Definiáljuk az x kifizetés esetén az S koalíció többletét a következőképp:*

$$e(x, S) = v(S) - x(S), \text{, ahol } X(S) = \sum_{i \in S} X_i \tag{4.1}$$

Ez a többlet egyfajta mérőszámként fog funkcionálni. Így ezzel átfogalmazva a mag definícióját úgy is felírhatjuk a magot, hogy

$$C(v) = \{x \in I(v) : max_S \ e(S, x) \leq 0\}.$$

Legyen $E(x)$ az a vektor, amely N összes részhalmazának többletét tartalmazza, nem-növekvő sorrendben. Ekkor a nukleolusz nem lesz más, mint az az x^* elosztás, melyre az $E(x)$ lexikografikusan minimális. Vagyis a nukleolusz azon koalíciók többletét csökkenti, akik a legnagyobb többlettel rendelkeznek.

4.1.2. Megjegyzés. Schmeidler[13] azt is megmutatta, hogy egy elosztással rendelkező játék esetében a nukleolusz egyetlen elosztásból áll.

A következő lineáris programozási feladatot kapjuk így:

$$min\ E$$

$$x(N) = v(N)$$

$$x(S) \geq v(S) - E,\ \forall S \subseteq N$$

Ha egyértelmű a megoldás, úgy megkaptuk a nukleoluszt. Ha nem, úgy a lexikografikus minimalizálással eljutunk az egyértelmű megoldáshoz, és az lesz a nukleolusz.

4.2. Arányos nukleolusz

Érdemes lehet azonban a másképp megközelíteni magát a többletet, így nézzük a Young[17] által megismertetett módszert.

Legyen a többlet most a következőképp definiálva:

$$e(x, S) = \frac{v(S) - x(S)}{v(S)}$$

Vagyis a koalíciók többletét a $v(S)$-el arányosan adjuk meg.

Ezzel a következő lineáris programozási feladathoz jutunk:

$$min\ E$$

$$x(N) = v(N)$$

$$x(S) \geq (1 - E) * v(S),\ \forall S \subset N$$

Ha nem kapunk egyértelmű megoldást, úgy most is keressük azt az $E(x)$ vektort, mely tartalmazza az $e(x, S)$ arányos többleteket és lexikografikusan minimális.

4.3. Bomlasztó nukleolusz

Attól, hogy egy szétosztás a magban van, még nem biztos, hogy minden játékos számára kölcsönösen elfogadható lesz, ezzel kapcsolatban vizsgáljuk meg az úgynevezett bomlasztó nukleoluszt, Littlechild és Vaidya[11] munkája alapján.

Minden koalícióra kiszámolunk egy bomlasztási hajlandóságot, vagyis egy mérőszámot arra, hogy mit veszítene az S és $N \setminus S$ koalíció a szétosztás elvetésével.

4.3.1. Definíció. *Legyen (N, v) egy kooperatív játék, $x \in R^N$ kifizetésvektor, $S \subset N$ koalíció. Ekkor az S koalíció bomlasztási hajlandósága a következő:*

$$d(x, S) = \frac{x(N \setminus S) - v(N \setminus S)}{x(S) - v(S)}$$

4.3.2. Megjegyzés. Látható, hogy $d(x, S) = \frac{1}{d(x, N/S)}$.

Vagyis a bomlasztási hajlandóság egy arány azok között, hogy mennyit veszítene az $N \setminus S$ koalíció és hogy az S koalíció mennyit veszítene.

Nézzünk meg néhány nevezetesebb bomlasztási arányszámot, hogy ezek mit is jelenthetnek:

- $d(x, S) = 1$: Az S koalíció vesztesége megegyezik $N \setminus S$ veszteségével, így a felosztás elvetésével kapcsolatban közömbös lehet.
- $d(x, S) = \infty$: Az S koalíció ezzel a szétosztással nem jut többlethez, így nem érdekelt az együttműködésben.
- $d(x, S) = 0$: Így az $N \setminus S$ koalíció többlete 0, vagyis ebben az esetben ők bontanák fel az együttműködést.

Itt is a korábbiakban már használt lexikografikus minimalizálás eszközéhez nyúlunk, vagyis olyan felosztást keresünk, melyre a bomlasztási hajlandóságokat tartalmazó vektor lexikografikusan minimális lesz, ha a következő lineáris programozási feladat megoldása nem egyértelmű:

$$min\ E$$

$$x(N) = v(N)$$

$$x(S) \geq v(S) - E[v(N) - v(S) - v(N \setminus S)]; \forall S \subset N$$

4.4. A nukleolusz koncepciók általánosítása

Nézzük meg, hogy az előzőekben meghatározott nukleolusz koncepciót miként tudnánk általánosítani, hogy ne csak a többleteredménytől vagy bomlasztási hajlandóságtól függjön.

Ehhez legyen $y : Z_+ \rightarrow R_+$ függvény, illetve tegyük fel, hogy $y(0) = 0$. Vagyis ez az y függvény a különböző s koalíciós nagysághoz rendeljen hozzá egy nemnegatív számot.

Ennek segítségével felírva a lineáris programozási feladatot:

$$min\ E$$

$$x(N) = v(N)$$

$$x(S) \geq v(S) - E * y(S),\ \forall S \subseteq N$$

Láthatjuk, hogy az $y(S) = 1$ helyettesítéssel a sima nukleoluszt kapjuk vissza, míg az $y(S) = v(S)$ épp az arányos nukleoluszt adja, valamint az $y(S) = v(N) - v(S) - v(N \setminus S)$ pedig a bomlasztó nukleoluszhoz vezet. Természetesen ezek alapján sok egyéb másfajta nukleolusz is képezhető lehet, szituációnak megfelelően.

Ha a fenti lineáris programozási feladat nem ad egyértelmű felosztást, úgy a korábbiak alapján vesszük az $e_y(x, S) = \frac{v(S)-x(S)}{y(S)}$ többletet a megfelelő $y(S)$ helyettesítéssel és lexikografikus minimalizálással eljuthatunk az egyértelmű megoldásig.

5. fejezet

Tulajdonságok

Az előzőekben megismerhettünk több modellt is az egyértelmű megoldás megtalálásához, joggal merülhet fel a kérdés, hogy melyiket is lenne célszerű választanunk. Hogy erről valamiképp is dönthessünk, nézzünk meg pár tulajdonságot, amik megléte jogosnak tűnhet.

Kollektív racionalitás

5.0.1. Definíció. *Legyen (N, v) egy kooperatív játék és feltesszük, hogy a magja nem üres. Ekkor egy megoldási módszer esetében teljesül a kollektív racionalitás feltétel, ha az így kapott szétosztás magbeli.*

Vagyis ez azt jelenti, hogy a módszer által adott megoldásnak magbelinek kell lennie, feltéve, hogy a mag nem üres. Ez a kritérium a nukleoluszok esetében nyilvánvalóan teljesül, hisz maga a nukleolusz koncepió a magbeli megoldások egyértelműsítésére lett megalkotva. A Shapley érték eshet kívül a magon, de mivel szubadditív játékokat tekintünk, ezek esetén a magbeliség mindig fennáll, amint azt a (3.0.10) megjegyzésben láttuk.

Tehát ezt a tulajdonságot mindegyik módszer teljesíti.

Költségbeli monotonitás

Ez a tulajdonság azt állítja, hogy az eredmény növekedése esetén egyik játékos sem kaphat kevesebbet, mint amennyit eredetileg a növekedés előtt kapott volna. Ez fontos, hisz az elérhető profit nagyságáról a bizonytalanul bekövetkezhető károk nyomán még nem lehet biztosan tudni, viszont maga az együttműködés meg kell, hogy köttessen előre. Ha ezt a tulajdonságot nem tennénk fel, megeshetne olyan, hogy a profit növekedése esetén valakinek kevesebb jutna, mint a növekedés előtt. Ezt az a játékos nyilvánvalóan nem tartaná elfogadhatónak.

A Shapley érték monoton. Ehhez tegyük fel, hogy a nagykoalíciós profitunk, $v(N)$ nő egy h értékkel. Ekkor a Shapley érték definíciójára nézve látható, hogy csak egyszer fordul elő a $V(N)$, így az egy játékosra jutó kifizetés h/n-el fog nőni, vagyis mindenki az azonos, a játékosok számával arányos növekedést kap. Itt észrevehető, hogy a Shapley érték esetében problémára adhat okot, ez az ugyanakkora szétosztása a plusz profitnak, hisz közel sem biztos, hogy ugyanannyival járult hozzá eddig mindenki.

Az arányos nukleolusz esetében is fennáll a monotonitás, és itt a növekedés a profitok arányában oszlik el, ami sokkal igazságosabbnak tűnik, mint a Shapley-érték esetében.

A nukleolusz és a bomlasztó nukleolusz viszont nem lesz monoton. Előbbire ellenpéldát Meggido[12] adott, a bomlasztó nukleolusz esetében Lemaire[9] munkájában találhatunk egy ellenpéldát.

Bomlasztási hajlandóság:

Jogos lehet vizsgálni a bomlasztó nukleolusznál említett bomlasztási hajlandóságot, vagyis a bomlasztási arányszámokat is, hisz a fenti két tulajdonság teljesülése nem biztosítja, hogy egy játékos egy adott kifizetés esetén inkább kilépne a nagykoalícióból.

Ezt a tulajdonságot csak a bomlasztó nukleolusz teljesíti, a többi módszer esetében a bomlasztási hajlandóság fennállhat.

6. fejezet

1-konvex játékok

Eddig áttekintettük a kooperatív játékelmélet alapjait, megismerkedtünk a mag fogalmával, illetve áttekintettünk néhány megoldási módszert, a Shapley értéket, a nukleoluszt illetve 2 variánsát, azon céllal, hogy megállapíthassuk, hogy milyen felosztással rendelkezzenek a játékosok.

Most viszont egy olyan játékosztályt szeretnénk, amelyik kifejezetten alkalmas lehet az együttbiztosítási szituáció kezelésére. Ehhez viszont még szükségünk van néhány fogalomra, tekintsük át ezeket, Fragnelli et al.[3] munkája alapján.

6.0.2. Definíció. *Egy v játékra azt mondjuk, hogy monoton, ha $v(S) \leq v(T)$ $\forall S \subseteq T \subseteq N$.*

6.0.3. Megjegyzés. A konvexitásra már volt egy definíciónk (2.1.3) , de említsünk meg még egy azzal ekvivalens alakot, mégpedig hogy $\forall i \in N$ és $\forall S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ esetén

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Szintén volt említve, hogy konvex játék esetén a mag nem üres.

6.0.4. Definíció. *Legyen v játék az N játékoshalmaz mellett, jelöljük $m^v \in R^N$-el az úgynevezett marginális hozzájárulásokból képzett marginális érték vektor (marginal worth vector), amelyben az $i \in N$ játékos marginális hozzájárulását a következőképp értelmezzük:*

$$m_i^v = v(N) - v(N \setminus \{i\})$$

6.0.5. Definíció. *Legyen g^v-vel jelölve az úgynevezett rés vektor (gap vector), $g^v \in \mathbb{R}^{2^N}$, amit a következőképp definiálunk:*

$$g^v = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i \in S} m_i^v - v(S) & ha \{S \subseteq N, S \neq \emptyset\} \\ 0 & ha \{S = \emptyset\} \end{array} \right\}$$

Vagyis ez a g^v vektor $\forall S \subseteq N$-re megadja a marginális hozzájárulásokkal elérhető nagykoalíciós többletet a $v(S)$ értékhez képest. Említésképp, $g^v(S) = -e^v(S, m^v)$, ahol $e^v(S, m^v)$ az S koalíció többlete a v játék és $x = m^v$ kifizetésvektor esetén.

Könnyen látható, hogy bármely, N játékoshalmazhoz tartozó v játék esetén az m^v összekapcsolódik a maggal, mégpedig felső korlátot ad meg a magbeli kifizetéseknek, vagyis $x_i \leq m_i^v$ bármely x magbeli kifizetés és $i \in N$ játékos mellett:

$$x_i = x(N) - x(N \setminus i) = v(N) - x(N \setminus i) \leq v(N) - v(N \setminus i) = m_i^v$$

Ezért ha nézzük $g^v(S)$-t, akkor tekinthetjük úgy is ezt, mint a koalíció $v(S)$ értéke és az elérhető maximális kifizetés közti egyfajta távolság. A előzőekből következően, a $v(N) \leq \sum_{i \in N} m_i^v$ feltétel szükséges, de nem elégséges feltétele a mag nemürességének, valamint ha $g^v(N) < 0$, abból következik, hogy $C(v) = \emptyset$, vagyis következik a mag üressége.

6.0.6. Állítás. [3] *Minden (N, v) konvex játék esetében fennállnak a következők:*

- $g^v(N) \geq 0$,
- $g^v(N) \geq g^v(S) \quad \forall S \subseteq N$

Bizonyítás.

A $g^v(N)$ nemnegatívsága közvetlen adódik abból, hogy konvex játékok esetében a mag nem üres.

Vegyük észre, hogy bármely $S \subseteq N$-re

$$g^v(N) - g^v(S) = \sum_{i \in N \setminus S} [v(N) - v(N \setminus \{i\})] - [v(N) - v(S)] \,.$$

Jelöljük az $N \setminus S$-beli játékosokat $i_1, i_2, \ldots, i_{n-s}$-el. Ekkor a következőképp írhatjuk fel $v(N) - v(S)$-t:

$$v(N) - v(S) =$$

$$[v(N) - v(N \setminus \{i_1\}] + [v(N \setminus \{i_1\}) - v(N \setminus \{i_1, i_2\})] + \ldots + [v(S \cup \{i_{n-s}\}) - v(S)]$$

Ekkor az (6.0.3)-beli egyenlőtlenséget $n-s$-szer alkalmazva megkapjuk minden $S \subseteq N$-re, hogy $g^v(N) - g^v(S) \geq 0$. □

6.0.7. Definíció. *Az mondjuk, hogy egy (N, v) játék $1-konvex$, ha*

$$0 \leq g^v(N) \leq g^v(S), \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$

Az 1 konvexitás definíciójából (6.0.7) , valamint (6.0.6) -ből könnyen kapjuk a következő állítást.

6.0.8. Állítás. [3] *Egy konvex (N, v) játék $1-konvex$ akkor és csak akkor, ha*

$$g^v(N) = g^v(S), \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$

Most gondoljuk át, miért is lesz alkalmas az 1-konvex játékosztály az együttbiztosítási szituációk kezelésére. Láttuk, hogy $0 \leq g^v(N) \leq g^v(S)$, vagyis a nagykoalíció segítségével jutunk legközelebb az ideális kifizetésekhez. A biztosítók célja egy kockázat diverzifikálása egy közös kooperáció segítségével. Így tudják a kockázatot porlasztani, amivel lehetőség nyílik a kockázat biztosítására. Vagyis a játékosok, jelen esetben biztosítók célja a nagykoalíció kialakítása, hisz így juthatnak el a maximális profithoz amellett, hogy a kockázatot is a lehető legjobban porlasztják.

Driessen és Tijs [5] megmutatták, hogy minden 1-konvex játék magja nemüres. Ezen kívül észrevehetjük, hogy a $0 \leq g^v(N) \leq g^v(S)$ tulajdonságot átalakítva azt kaphatjuk, hogy $v(S) \leq \sum_{i \in N\ S} x(N \setminus i) - (n-s-1)x(N) = x(S)$, ahol x magbeli kifizetés, vagyis a mag felírható lesz a következő formában:

$$C(v) = \left[x \in R^N | x(N) = v(N), x(n \setminus i) \geq v(N\ i) \forall i \in N\right]$$

Tehát 1-konvex esetben a mag felírásához elég $n+1$ feltétel. Ez azért lesz jó nekünk, mert így a nukleoluszok számítása is könnyebbé válik, mégpedig lineárisan számolhatóvá válnak. A nukleolusz esetében a következő formula adódik:

$$x_i(v) = m_i^v - \frac{g^v(N)}{n}$$

Az arányos nukleolusz a következő képlettel lesz megadható,

$$x_i(v) = m_i^v - \frac{g^v(N)v(N\ i)}{\sum_{e \in N} v(N \setminus e)}$$

míg a bomlasztási nukleolusz esetében a következő kifizetéseket kapjuk:

$$x_i(v) = m_i^v - \frac{g^v(N)[v(N) - v(N\ i) - v(i)]}{\sum_{e \in N}[v(N) - v(N \setminus e) - v(e)]}$$

Még érdemes azt megvizsgálni, hogy 1-konvex játékok esetében a nukleoluszok tulajdonságai változnak-e.

A magbeliség nem változik, továbbra is teljesül mindegyik módszernél.

Nézzük a monotonitási kritériumot a nukleolusz esetére. Azt szeretnénk belátni, hogy két, v és w, N játékoshalmaz melletti játékoknál, ahol $v(N \setminus j) \geq w(N \setminus j)$, valamint $v(S) = w(S) \quad \forall s \neq N \setminus j \subseteq N$, hogy $x_i(v) \geq x_i(w)$ $i \neq j$ esetén. A

$$g^v(N) = \sum_{i \in N} m_i^v = (n-1)v(N) - \sum_{i \in N} v(N \setminus i)$$

összefüggést felhasználva a következőképp alakítjuk az $x_i(v)$ kifizetést:

$$x_i = m_i^v - \frac{g^v(N)}{n} =$$

$$m_i^v - v(N)\frac{n-1}{n} + \frac{\sum_{j \in N} v(N \setminus j)}{n} =$$

$$v(N) - v(N \setminus i) - v(N)\frac{n-1}{n} + \frac{\sum_{j \in N} v(N \setminus j)}{n} =$$

$$v(N)\left[1 - \frac{n-1}{n}\right] - v(N \setminus i) + \frac{\sum_{j \in N} v(N \setminus j)}{n}$$

A w kifizetés esetében ugyanígy történik az átalakítás és láthatjuk, hogy $\frac{\sum_{j \in N} v(N \setminus j)}{n} \geq \frac{\sum_{j \in N} w(N \setminus j)}{n}$, vagyis teljesül, amit akartunk, így teljesül a monotonitás. Arányos nukleolusz esetében hasonlóan szintén belátható, hogy teljesül a monotonitási kritérium.

Viszont a bomlasztási nukleolusz nem fogja itt se teljesíteni a monotonitási kritériumot, viszont mivel csak ennél a nukleolusz variációnál jelenik meg a bomlasztási kritérium, így mindenféleképpen érdemes erre a módszerre is megnézni, hogy milyen kifizetést kapunk.

7. fejezet

Co-insurance játék

Megismertük az 1-konvexitás fogalmát és láthattuk, hogy miért is lehet hasznos az együtt-biztosítási szituáció modellezéséhez. Még mielőtt rátérhetnénk a co-insurance játékokra, nézzünk egy picit bele a díjkalkulációs elvek témakörébe.

7.1. Díjkalkulációs elvek

Tehát rátérünk a díjkalkulációs elvek témakörre, megismerünk néhány díjkalkulációs elvet, meghatározunk néhány számunkra fontos tulajdonságot és megnézzük, mely elvek teljesítik ezeket, Arató[1] könyve alapján.

A díjkalkulációs elvekkel a kockázatokhoz határozunk meg díjakat. Feltesszük, hogy a kockázat eloszlása ismert.

7.1.1. Definíció. *Legyen H a nemnegatív félegyenesre koncentrált eloszlások halmaza. Ekkor azt mondjuk, hogy π díjkalkulációs elv, ha*

$$\pi : H_\pi \subseteq H \to R_0^+ \cup \{\infty\}$$

Az eloszlás díja az eloszláshoz rendelt érték lesz.

7.1.2. Megjegyzés. A díjkalkulációs elveket valószínűségi változókon és eloszlásfüggvényeken is értelmezhetjük. Ekkor azt mondjuk, hogy a π díjelv a φ valószínűségi változóra és F nemnegatív félegyenesre koncentrált eloszlásfüggvényre a következő értékeket adja:

$$\pi_v(\varphi) := \pi(Q_\varphi)$$

$$\pi_F(F) := \pi(Q_F),$$

ahol Q_φ a φ valószínűségi változó eloszlása.

Nézzünk meg néhány klasszikus díjkalkulációs elvet. Feltesszük, hogy φ nemnegatív valószínűségi változó:

-várható érték elv:

A π egy $\lambda \leq 0$ paraméterű várható érték elv, ha

$$\pi(\varphi) = (1 + \lambda)E(\varphi)$$

-szórás elv:

A várható érték elv mellett talán a leggyakrabban alkalmazott díjelv. A π egy $\alpha \leq 0$ paraméterű szórás elv, ha

$$\pi(\varphi) = E(\varphi) + \alpha D(\varphi).$$

-szórásnégyzet elv:

Egy π díjelv $\beta \leq 0$ paraméterű szórásnégyzet elv, ha

$$\pi(\varphi) = E(\varphi) + \beta D^2(\varphi)$$

Legyen $u(.)$ a biztosító hasznosságfüggvénye, és jelöljük z-vel a biztosító vagyonát még a kockázat átvállalása előtt. Ezek után a $P = \pi(\varphi)$ prémiumot a következőképp tudjuk megkapni:

$$E[u(z + P - \varphi)] = u(z)$$

Exponenciális hasznosság esetén ($a > 0$ paraméterrel) a fenti (7.1) egyenletnek explicit megoldása van, ekkor beszélünk a következő díjelvről:

-exponenciális díjelv:

$$\pi(\varphi) = \frac{1}{a} lnE(e^{aX})$$

Ahhoz, hogy megállapíthassuk, mely díjkalkulációs elvek mennyire használhatók biztosítói szemszögből, meg kell néznünk, hogy mely díjelvek mely elvárható szempontoknak tesznek eleget.

1. $\pi(c) = c\ \forall c \in R$ konstans esetén, vagyis konstans kockázat, azaz biztos kifizetés esetén a díj is legyen ez a konstans. Várható érték elv esetén csak akkor teljesülne ez a kritérium, ha a λ paraméter 0 lenne, vagyis nettó várható érték elvről beszélnék. A többi díjelv esetén, így a szórás elv, szórásnégyzet elv és exponenciális elv esetén is könnyen látható, hogy teljesítik ezt a feltételt.

2. $\pi(X + c) = \pi(X) + c\ \forall c \in R$ konstansra, vagyis más néven eltolás-invariancia. Hasonló a helyzet az előbbihez, mindegyik általunk vizsgált díjelv teljesíti ezt, kivéve a várható érték elv, amelyik csak az előbb is említett speciális esetben teljesítené.

3. **7.1.3. Definíció.** *Egy π díjkalkulációs elv konvex, ha teljesül az előbbi 2 tulajdonság, valamint minden $p > 0, q > 0, p + q = 1$ és X, Y biztosítható kockázatra*

   $$\pi(pX + qY) \leq p\pi(X) + q\pi(Y).$$

   Továbbá, ha a fenti egyenlőtlenségben szigorú az egyenlőtlenség, úgy szigorú konvexitásról beszélünk.

   Itt szintén ugyanaz a helyzet teljesülés szempontjából, mint az előző 2 tulajdonságnál volt.

4. **7.1.4. Definíció.** *A π várható értéket túllépő díjelv, ha $\pi(\varphi) \geq E(\varphi)$*

   Vagyis a díj értéke legalább akkora, mint a kár várható értéke.

   Könnyen belátható, hogy mindegyik általunk vizsgált díjelv teljesíti ezt a kritériumot.

5. **7.1.5. Definíció.** *A π díjelv teljesíti a no-ripoff feltételt, ha*

   $$\pi(\varphi) \leq sup\{x : P(\varphi > x)\}$$

   Ez is természetes tulajdonságnak tűnik, hisz azt mondja ki, hogy a díj nem lesz nagyobb, mint a lehetséges legnagyobb kár.

   Ezt a feltételt csupán az exponenciális elv teljesíti.

6. **7.1.6. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy a π díjelv szubadditív, ha $\forall$ φ_1 és φ_2 független kockázatra*

$$\pi(\varphi_1 + \varphi_2) \leq \pi(\varphi_1) + \pi(\varphi_2)$$

   Belátható, hogy mindegyik díjelvünk teljesíti ezt a tulajdonságot, kivéve az exponenciális elv.

Foglaljuk össze végül egy táblázatban, hogy a díjelveink mely tulajdonságokat teljesítik és melyeket nem:

	Várható érték elv	Szórás elv	Szórásnégyzet elv	Exponenciális elv
1:konstans kockázat	X	$\surd$	$\surd$	$\surd$
2:eltolásinvariancia	X	$\surd$	$\surd$	$\surd$
3:konvexitás	X	$\surd$	$\surd$	$\surd$
4:várható értéket túllépő	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
5:no ripoff	X	X	X	$\surd$
6:szubadditivitás	$\surd$	$\surd$	$\surd$	X

Összességében ezek alapján azt láthatjuk, hogy egyik díjelvünk sem teljesíti az összes vizsgált tulajdonságot, így érdemes lesz a körülményeknek legmegfelelőbbet kiválasztani.

7.2. Gâteaux-derivált és a konvexitás

Most térjünk rá a díjelvek után arra a kérdésre, hogy meghatározzuk a biztosítók optimális kooperációját, vagyis a prémium optimális felosztását a biztosítók közt, amiért azok átvállalják a biztosítandó kockázatot Deprez-Gerber[2] munkája segítségével.

7.2.1. Állítás. [2] *A π díjelv, mely kielégíti a korábbi* 1. *és* 2.*, vagyis a konstans kockázat, illetve eltolásinvariancia tulajdonságokat, konvex (szigorúan konvex) akkor és csak akkor, ha a $g(t : X, Y) = \pi(X + tV)$ $0 \leq t \leq 1$ minden X és Y esetén konvex, ahol X és Y biztosítható kockázatok és $V = X - Y$ (szigorúan konvex, ha V nem konstans).*

Bizonyítás. Ha π konvex, akkor abból következik, hogy

$$g(pt_1+qt_2) = \pi[p(X+t_1V)+q(X+t_2V)] \leq$$

$$p\pi(X+t_1V)+q\pi(X+t_2V) = pg(t_1)+qg(t_2),$$

vagyis a $g(t) = g(t; X, Y)$ függvény konvex.

Visszafele, ha feltesszük, hogy $g(t)$ konvex minden X és Y-ra, akkor

$$\pi(pX+qY) = \pi(X+qV) = g(q) \leq pg(0)+qg(1) = p\pi(X)+q\pi(Y),$$

így H konvexitását beláttuk. A szigorú konvexitás hasonló módon belátható. □

Nézzük a $g(t)$ függvény $t=0$ helyen vett deriváltját, ami számunkra fontos lesz. Gyakorta a következő alakban írható fel:

$$g'(0) = E[\pi'(X)V],$$

ahol $\pi'(X)$ független V-től. Ekkor, ha ez az alak áll fent, akkor azt mondjuk, hogy a π X-ben Gâteaux-deriválható. Ennek segítségével egy hasznos módszert kapunk a konvexitás vizsgálatára, mégpedig $g''(0)$ kiszámításával.

7.2.2. Állítás. [2]

Tegyük fel, hogy a π díjelv kielégíti a 1 és 2 tulajdonságokat és $g''(0; X, Y) \leq 0$ minden X és Y biztosítható kockázatra ($g''(0; X, Y) > 0$, ha $Y - X$ nem konstans). Ekkor a π díjelv konvex (szigorúan konvex).

Bizonyítás.

A (7.2.1) állítás miatt elég azt belátni, hogy ha $g''(0; X, Y) \leq 0$ minden X, Y esetén, akkor abból következik az, hogy $g''(t; X, Y) \leq 0$ minden $0 < t < 1$-re és minden X és Y-ra. Adott t esetén

$$g(s; X+tV, Y) = \pi(X+tV+s(1-t)V) = g(t+s(1-t); X, Y),$$

ahol $0 \geq s \geq 1$. Így

$$g''(0; X+tV, Y) = (1-t)^2 g''(t; X, Y).$$

Valamint, ha a $g''(0; X+tV, Y)$ szigorúan pozitív, akkor $g''(t; X, Y)$ is szigorúan pozitív lesz. □

Nézzük meg, hogy az általunk vizsgált díjelvek teljesítik-e a szigorú konvexitást. Tekintsük először a szórásnégyzet elvet. Azt kapjuk ebben az esetben, hogy

$$g'(0) = E(V) + 2\alpha Cov(X, V),$$
$$g''(0) = 2\alpha Var(V)$$
$$\pi'(X) = 1 + 2\alpha \left[X - E(X)\right].$$

Láthatjuk tehát, hogy a szórásnégyzet elv szigorúan konvex és Gâteaux-deriválható.

Nézzük most a szórás elvet. Itt az jön ki, hogy

$$g'(0) = E(V) + \beta \frac{Cov(X, V)}{\sqrt{Var(X)}},$$
$$g''(0) = \beta(1 - \rho^2)\frac{Var(V)}{\sqrt{Var(X)}},$$
$$H'(X) = 1 + \beta \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$$

A ρ az X és V közti korrelációs együttható. Azt vehetjük észre, hogy a szórás elv szigorúan konvex, ha a ρ korrelációs együttható nem 1, valamint Gâteaux-deriválható, ha az X nem konstans.

Az exponenciális díjelv a következőket kapjuk:

$$g'(0) = \frac{E(Ve^{aX})}{E(e^{aX})},$$
$$g''(0) = \frac{E(V^2 e^{aX})}{E(e^{aX}} - \left[\frac{E(Ve^{aX})}{E(e^{aX})}\right]^2$$

Itt is azt láthatjuk a szórásnégyzet elvhez hasonlóan, hogy szigorúan konvex és Gâteaux-deriválható.

A várható érték elv nem konvex, így nem is szigorúan konvex, ezért ezzel a díjelvvel a továbbiakban nem foglalkozunk.

7.2.3. Állítás. [2]

Ha π konvex és Gâteaux-deriválható díjelv, akkor

$$E\left[\pi'(X)(Y - X)\right] \geq \pi(Y) - \pi(X) \geq E\left[\pi'(Y)(Y - X)\right]$$

minden X és Y kockázatra. Ha π szigorúan konvex díjelv, akkor az egyenlőtlenségek szigorúak, ha $Y - X$ nem konstans.

Bizonyítás.

Az (7.2.2)-ből következik, hogy $g'(0) \geq g(1) - g(0) \geq g'(1)$, ami ekvivalens az állítással.

□

7.3. Optimális együttműködés

Az előző részben megismert fogalmak segítségével lehetőségünk nyílik arra, hogy megadhassuk a biztosítók által átvállalt kockázatok egy optimális felosztását. Legyen X a biztosítandó kockázat, melyet n biztosító között szeretnénk szétosztani. X-nek azt az $X_1, \ldots, X_n$ felosztását keressük, ahol X_i az i biztosító által biztosított része X-nek, mely a díjat minimalizálja. Feltesszük, hogy az i biztosító π_i konvex és Gâteaux-deriválható díjkalkulációs elvet használ a díj számításához. Legyen $P^*(X) = min\{\pi_1(X_1), \ldots, \pi_n(X_n)\}$, vagyis ahol a minimum felvétetik az X kockázat lehetséges felbontásai közül. Az $X_1^*, \ldots, X_n^*$ felbontást akkor mondjuk optimálisnak, ha

$$\pi_1(X_1^*) + \ldots + \pi_n(X_n^*) = P^*(X).$$

7.3.1. Tétel. [2]

Az $X_1^*, \ldots, X_n^*$ felbontás optimális felbontása az X kockázatnak akkor és csak akkor, ha $\pi_i^{'}(S_i^*)$ független i-től $(i = 1, \ldots, n)$.

Bizonyítás.

Először tegyük fel, hogy az $X_1^*, \ldots, X_n^*$ felbontás optimális, és legyen $X_1, \ldots, X_n$ egy másik felbontás oly módon, hogy

$$X_i = X_i^* + tV, X_k = X_k^* - tV,$$

a többi tagot pedig változatlanul hagyjuk S^*-hoz képest. Ekkor az

$$f(t) = \pi_1(X_1) + \ldots + \pi_n(X_n)$$

kifejezésnek $t = 0$-ban minimuma kell legyen. Vagyis

$$0 = f'(0) = E\left[\pi_i^{'}(X_i^*)V\right] - E\left[\pi_k^{'}(X_k^*)V\right].$$

Mivel V tetszőleges, ezért következik, hogy $\pi'(X_i^*) = \pi_k^{'}(X_k^*)$, vagyis $\pi_i^{'}(X_i^*)$ független i-től.

Most nézzük a másik irányba, vagyis tegyük fel, hogy $\pi_i^{'}(X_i^*) = G$ független i-től. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ egy $X_1^*, \ldots, X_n^*$-tól eltérő felbontás. A (7.2.3) állítást felhasználva, és $Y = X_i^*, X = X_i$-t választva azt kapjuk, hogy

$$\pi_i(X_i^*) \geq \pi_i(X_i) + E\left[G(X_i^* - X_i)\right].$$

Az i-ket összegezve kapjuk, hogy

$$\pi_1(X_1^*) + ... + \pi_n(X_n^*) \geq \pi_1(X_1) + ... + \pi_n(X_n).$$

□

Vagyis a tétel azt mondja, hogy egy adott együttbiztosítási szituációban, adott kockázatkiértékelő függvények mellett megadható az elérhető minimális díj.

Nézzük, mi a helyzet, ha a π díjkalkulációs elv a szórásnégyzet elv, α_i paraméterekkel. A (7.3.1) tétel azt mondja ki, hogy $1 + 2\alpha_i(X_i^* - E(X_i^*))$ független i-től. Ekkor $X_i^* = \frac{\alpha}{\alpha_i}X$, ahol $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}$. Továbbá $P^*(X) = E(X) + \alpha Var(X)$.

Ha exponenciális díjelv van a_i paraméterekkel, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{e^{a_i X_i^*}}{E(e^{a_i X_i^*})}$ független i-től, amiből $X_i^* = \frac{a}{a_i}X$, ahol $\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}$. Továbbá, P^* exponenciális díjelv lesz a paraméterrel.

Ha a biztosítók szórás díjelvet használnak, úgy a (7.3.1) mellett szükség van a következő állításra, mely bizonyítása megtalálható [2]-ban.

7.3.2. Állítás. [2]

Tegyük fel, hogy a π_i-k szórás elvű kockázatkiértékelő függvények, valamint $\pi_1(X) \geq \pi_i(X)$ $i = 2, \ldots, n$-re. Ekkor az X kockázat optimális felbontása: $X_1^* = X$ és $X_i^* = 0$ minden $i \neq 1$-re.

Az eddigiekben láthattuk, hogy az X kockázat dekompozíciója a következő formában írhatjuk fel: $X_i^* = q_i X$, ahol a q_i kvóták függetlenek X-től. Most ennek a szituációnak egy általános leírását adjuk meg.

7.3.3. Tétel. [2]

Tegyük fel, hogy π szigorúan konvex és Gâteaux-differenciálható, valamint legyenek a $q_1, \ldots, q_n$ számok úgy, hogy $q_i > 0$ és $q_1 + \ldots + q_n = 1$. Legyen még $\pi_i(X) = q_i\pi(\frac{X}{q_i})$, $i = 1, \ldots, n$. Ekkor

$$X_i^* = q_i X, P^*(X) = \pi(X), \pi_i(X_i^*) = q_i P^*(X).$$

Bizonyítás.

A $\pi_i(X)$ definiálásából következik, hogy $\pi_i^{'}(X) = \pi^{'}(\frac{X}{q_i})$. Így $\pi_i^{'}(q_i X) = \pi^{'}(X)$ független i-től, valamint (7.3.1)-ből következik, hogy $X_i^* = q_i X$. Továbbá,

$$P^*(X) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(q_i X) = \sum_{i=1}^{n} q_i \pi(X) = \pi(X),$$

valamint

$$\pi_i(q_i X) = q_i \pi X = q_i P^*(X).$$

□

7.3.4. Megjegyzés. Ennek az állításnak van megfordítása. Tegyük fel, hogy $\pi_1, \ldots \pi_n$ szigorúan konvex és Gâteaux-differenciálható, valamint $X_i^* = q_i X$, ahol a q_i kvóták függetlenek X-től. Ekkor $\pi_i(q_i X) = q_i P^*(X)$ és $q_i > 0$ $i = 1, \ldots, n$.

7.4. Co-insurance játékok

Ebben a fejezetben eddigi ismereteink felhasználásával bevezetjük az együttbiztosítási szituációt modellező co-insurance játékokat Fragnelli et al[3] munkája alapján.

Adott a kiindulási szituáció, hogy vagy egy X kockázat, ami egy biztosító számára túl nagy, hogy egyedül elvállalja, viszont tekintve biztosítók véges elemszámú N halmazát már biztosítható a kockázat, köztük felosztva a kockázatot és a Π prémiumot.

Tegyük fel, hogy a i biztosító a kockázatot π_i nemnegatív, valós értékű kockázatkiértékelő függvénnyel értékeli ki úgy hogy $\pi_i(0) = 0$.

Biztosítók nem üres, $S \subseteq N$ részhalmaza esetén legyen

$$A(S) = \left\{ X \in \mathbb{R}^S | \sum_{i \in S} X_i = X \right\}$$

az X kockázat lehetséges felbontásainak halmaza.

Tegyük fel, hogy minden $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$ esetén létezik az X kockázat optimális felbontása, így

$$P(S) := min_{X \in A(S)} \sum_{i \in S} \pi_i(X_i)$$

jól definiált.

Tegyük fel, hogy $\forall i$ biztosítóra

$$\pi_i = q_i H \left(\frac{X}{q_i} \right),$$

ahol H egy a priori konvex függvény, q_i adott a priori hányadok úgy, hogy $q_i > 0$, $\sum_{i \in N} q_i = 1$, valamint $\sum_{i \in S} q_i := q(S)$. Ha a H függvény szigorúan konvex és Gâteaux-deriválható, akkor teljesülnek a (7.3.3) tétel feltételei, így P, aminek a számítása általános esetben nem egyszerű feladat is tud lenni, ebben az esetben könnyen kiszámíthatóvá válik:

$$P(S) = \sum_{i \in S} \pi_i \left(\frac{q_i}{q(S)} X \right) = q(S) H \left(\frac{X}{q(S)} \right).$$

Ezen kívül fontos még megjegyezni, hogy a P kiértékelő függvény nemnegatív és monoton csökkenő, azaz $\forall\ \emptyset \neq S \subseteq T \subseteq N$ esetén $0 \leq P(T) \leq P(S)$.

Ennek segítségével definiáljuk, hogy mit is nevezünk co-insurance játéknak.

7.4.1. Definíció. *Legyen $P : 2^N \to \mathbb{R}$ kiértékelő függvény és adott Π prémium. Ekkor azt mondjuk, hogy a $(N, v_{\Pi,P})$ játék co-insurance játék* , ha

$$v_{\Pi,P}(S) = \begin{cases} max\,\{0, \Pi - P(S)\} & \text{ha } S \subseteq N, S \neq \emptyset \\ 0 & \text{ha } S = \emptyset \end{cases}$$

A definícióból adódóan $v_{\Pi,P}$ nemnegatív, valamint mivel P monoton csökkenő, ebből adódóan v monoton növő lesz, vagyis $\forall\ S \subseteq T \subseteq N$ esetén

$$0 \leq v_{\Pi,P}(S) \leq v_{\Pi,P}(T).$$

Ahhoz, hogy a co-insurance játékok esetében is bevezethessük az 1-konvex tulajdonságot, fogalmazzunk meg néhány állítást, melyek bizonyítása megtalálható Fragnelli-Marina[8]-ben.

- Ha $\Pi > \overline{\alpha}_P = \sum_{i \in N} [P(N \setminus \{i\}) - P(N)] + P(N)$, akkor $C(v_{\Pi,P}) = \emptyset$, vagyis a játék magja üres.

- Ha $\Pi \leq \overline{\alpha}_P$, és P teljesíti a csökkentett konkavitás tulajdonságot, vagyis

  $$P(S) - P(S \cup \{i\}) \neq P(N \setminus \{i\}) - P(N)$$

  minden $S \subsetneqq N$-re és minden $i \in N \setminus S$-re, akkor $C(v_{\Pi,P}) \neq \emptyset$.

- Tegyük fel, hogy $\underline{\alpha}_P = max_{i \in N} P(\{i\})$, valamint $\Pi > \overline{\alpha}_P$. Ekkor $v_{\Pi,P}(S) > 0$ minden $S \subset N$, $S \neq \emptyset$-re.

Minden $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$ esetén

$$g^{v_{\Pi,P}}(S) = \sum_{i \in S} m_i^{v_{\Pi,P}} - v_{\Pi,P}(S) = \sum_{i \in S} [P(N \setminus \{i\}) - P(N)] + P(S) - \Pi. \tag{7.1}$$

ahol $m_i^{v_{\Pi,P}}$ a következő minden $i \in N$-re:

$$m_i^{v_{\Pi,P}} = v_{\Pi,P}(N) - v_{\Pi,P}(N \setminus \{i\}) = P(N \setminus \{i\}) - P(N).$$

Tekintsük az $\overline{\alpha}_P$ és $\underline{\alpha}_P$ számokat. Két eset különböztethető meg: $\overline{\alpha}_P \geq \underline{\alpha}_P$ vagy $\overline{\alpha}_P < \underline{\alpha}_P$. Számunkra, mint azt a következőkben láthatjuk majd, a $\overline{\alpha}_P \geq \underline{\alpha}_P$ eset lesz majd fontos.

7.4.2. Állítás. [3]

Legyen $\overline{\alpha}_P \geq \underline{\alpha}_P$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) a $v_{\overline{\alpha}_P,P}$ co-insurance játék kiegyensúlyozott;

(ii) a mag, $C(v_{\overline{\alpha}_P,P})$ egy elemből áll és pont egybeesik $m^{v_{\overline{\alpha}_P,P}}$-el;

(iii) a P kiértékelő függvény 1-konkáv, vagyis

$$P(S) - P(N) \geq \sum_{i \in N \setminus S} \left[P(N \setminus \{i\}) - P(N)\right], \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset; \tag{7.2}$$

(iv) a $v_{\overline{\alpha}_P,P}$ co-insurance játék 1-konvex.

Bizonyítás.

(7.1)-ból következik, hogy minden $\Pi \geq \underline{\alpha}_P$-re

$$\overline{\alpha}_P, P = \sum_{i \in N} \left[P(N \setminus \{i\}) - P(N)\right] + P(N) = g^{v_{\Pi,P}} + \Pi.$$

A $\overline{\alpha}_P \geq \underline{\alpha}_P$ feltételből, $\Pi = \overline{\alpha}_P$-t alkalmazva az egyenlet végére azt kapjuk, hogy

$$g^{v_{\overline{\alpha}_P,P}}(N) = 0 \tag{7.3}$$

Bármely n személyes v játék esetén az m^v marginális érték vektor egy felső korlátot ad a magra. $g^v(N) = 0$ esetén legfeljebb csak egy mag-elosztás eshet egybe m^v-vel, ami a $v_{\overline{\alpha}_P,P}$ co-insurance játéknál $m^{v_{\overline{\alpha}_P,P}}$.

Ezek után begyük észre, hogy az 1-konkavitás ekvivalens azzal, hogy

$$\sum_{i \in S} \left[P(N \setminus \{i\}) - P(N)\right] \geq \sum_{i \in N} \left[P(N \setminus \{i\}) - P(N)\right] + P(N) - P(S), \tag{7.4}$$

$\forall \subseteq N, S \neq \emptyset$ esetén, ami pont ugyanaz, mint az $m^{v_{\overline{\alpha}_P,P}}$, ami teljesíti a magbeliség feltételeit

$$\sum_{i \in S} m_i^{v_{\overline{\alpha}_P,P}} \geq \overline{\alpha}_P - P(S) = v_{\overline{\alpha}_P}(S)$$

Ebből következik hogy az $m^{v_{\overline{\alpha}_P,P}} \in C(v_{\overline{\alpha}_P,P})$ akkor és csak akkor, ha a P kiértékelő függvény teljesíti az 1-konkavitás tulajdonságot.

(7.1) miatt a (7.4) egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$g^{v_{\overline{\alpha}_P,P}}(N) \leq g^{v_{\overline{\alpha}_P,P}}(S), \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$

Ez együtt (7.3)-el ekvivalens a $v_{\overline{\alpha}_P,P}$ co-insurance játék 1-konvexitásával. $\square$

Az előző állítás segítségével könnyen belátható a következő tétel:

7.4.3. Tétel. [3]

Legyen $\overline{\alpha}_P \geq \underline{\alpha}_P$. Ha a P kiértékelő függvény 1-konkáv, akkor bármely $\overline{\alpha}_P \geq \Pi \geq \underline{\alpha}_P$ prémiumra

(i) a $v_{\Pi,P}$ co-insurance játék 1-konvex;

(ii) a mag nemüres, azaz $C(v_{\Pi,P}) \neq \emptyset$;

(iii) a nukleolusz minden $i \in N$-re a következő lineáris függvénnyel adható meg:

$$x_i(v_{\Pi,P}) = P(N \setminus \{i\}) - P(N) + \frac{\Pi - \overline{\alpha}_P}{n}. \tag{7.5}$$

Láttuk, hogy 3 díjelvünk volt, mely rendelkezett a Gâteaux-deriválhatóság és a konvexitással, melyek szükségesek az optimális kooperáció megadásához. Most nézzük meg, a megmaradt 3 díjelv közül teljesíti-e valamelyik az 1-konkavitás tulajdonságot.

Tekintsük először a szórásnégyzet elvet. Legyen az i biztosító kiértékelési függvénye α_i paraméterű szórásnégyzet elv. Legyen $\frac{1}{\mathbb{A}_S} = \sum_{i \in S} \frac{1}{\alpha_i}$. Ez alapján amit be kell látnunk az 1-konkavitáshoz nem más, mint $\mathbb{A}_S - \mathbb{A}_N \geq \sum_{i \in N \setminus S}(\mathbb{A}_{N \setminus i} - \mathbb{A}_N)$. Ezt szorozzuk be $\frac{1}{\mathbb{A}_N} > 1$-el, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{1}{\alpha_{s+1}} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}}{\frac{1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_s}} \geq \sum_{i \in N \setminus S} \frac{\frac{1}{\alpha_{n-i}}}{\frac{1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{n-i-1}} + \frac{1}{\alpha_{n-i+1}} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}}.$$

A számlálók megegyeznek, viszont az egyenlőtlenség jobb oldalán a nevező nagyobb, így látható az egyenlőtlenség, amit akartunk.

Mivel már a szórásnégyzet elv teljesíti az 1-konkavitás tulajdonságát, így ezt fogjuk használni a példánkhoz is, de természetesen előfordulhat más díjelv is, mely teljesítheti az 1-konkavitást.

8. fejezet

Gyakorlati példa

A példánk kialakításakor a következőket tételezzük fel. Káreloszlásnak egy λ=5 paraméterű exponenciális eloszlást választottunk, így $E(X) = 5$, valamint $D^2(X) = Var(X) = 25$. Egy 5 fős biztosítói csoportot tekintünk. A kiértékelő függvények variancia elvűek mindegyik biztosítónál, i biztosító esetén adott α_i-vel.

Az α_i-k úgy lettek választva, hogy az ezekből kapott q_i kvóták megfeleljenek a magyar biztosítói piaci részesedés szerinti legnagyobb 5 biztosító arányának[1]:

Allianz	Generali	Groupama	AEGON	NN
$14,18\%$	$13,69\%$	$10,37\%$	$10,35\%$	$8,53\%$

Az ebből kapott q vektor az egymáshoz képesti aránnyal a következő, vagyis a kockázatfelosztási kvóták az alábbiak:

1	2	3	4	5
$24,82\%$	$23,97\%$	$18,15\%$	$18,12\%$	$14,93\%$

A $v(N)$ érték,a profit, vagyis $\Pi - P(N)$ adott. Természetesen lehetne az is, hogy a Π értékének egy maximumot adunk, és abból indulunk ki, mi most az előbbi feltételezéssel élünk a példához. Ebben a esetben gondolhatunk egy olyan szituációra, amiben több biztosítói csoport verseng egymással egy fix profit mellett az ügyfelekért.

[1] http://www.mabisz.hu/images/stories/docs/publikaciok/negyedeves/2016-i-iv-negyed.pdf

Az ezek alapján számolt értékeket a következő táblázatokban foglaljuk össze:

	α_i	q_i	$\alpha_{N\setminus i}$	$P(\{i\})$	$P(N \setminus i)$
1	0,04028	0,2482493	0,01330	6,007052	5,332557
2	0,04172	0,2396709	0,01315	6,043097	5,328805
3	0,05508	0,1815476	0,01222	6,377049	5,305455
4	0,05519	0,1811975	0,01221	6,379710	5,305324
5	0,06696	0,1493347	0,01176	6,674091	5,293888

α_N	$v(N)$	$\overline{\alpha}_P$	$\underline{\alpha}_P$	$P(N)$	Π
0,01000	0,03	5,56603	6,67409	5,25000	5,55000

A játék v(S), $S \subseteq N$ értékei, vagyis a lehetséges koalíciók értékei:

v(1)	0,0000000	v(12)	0,0376211	v(123)	0,1765690	v(1234)	0,2561124
v(2)	0,0000000	v(13)	0,0000000	v(124)	0,1763736	v(1235)	0,2446761
v(3)	0,0000000	v(14)	0,0000000	v(125)	0,1576923	v(1245)	0,2445455
v(4)	0,0000000	v(15)	0,0000000	v(134)	0,1408309	v(1345)	0,2211950
v(5)	0,0000000	v(23)	0,0000000	v(135)	0,1183192	v(2345)	0,2174429
		v(24)	0,0000000	v(145)	0,1180581	v(N)	0,3000000
		v(25)	0,0000000	v(234)	0,1350044		
		v(34)	0,0000000	v(235)	0,1118288		
		v(35)	0,0000000	v(245)	0,1115597		
		v(45)	0,0000000	v(345)	0,0617949		

A játék $g^v(S)$ értékei:

$g^v(1)$	0,0825571	$g^v(12)$	0,1237409	$g^v(123)$	0,0402475	$g^v(1234)$	0,0160281
$g^v(2)$	0,0788050	$g^v(13)$	0,1380116	$g^v(124)$	0,0403123	$g^v(1235)$	0,0160281
$g^v(3)$	0,0554545	$g^v(14)$	0,1378810	$g^v(125)$	0,0475574	$g^v(1245)$	0,0160281
$g^v(4)$	0,0553239	$g^v(15)$	0,1264447	$g^v(134)$	0,0525046	$g^v(1345)$	0,0160281
$g^v(5)$	0,0438876	$g^v(23)$	0,1342595	$g^v(135)$	0,0635800	$g^v(2345)$	0,0160281
		$g^v(24)$	0,1341289	$g^v(145)$	0,0637105	$g^v(N)$	0,0160281
		$g^v(25)$	0,1226926	$g^v(234)$	0,0545791		
		$g^v(34)$	0,1107785	$g^v(235)$	0,0663184		
		$g^v(35)$	0,0993422	$g^v(245)$	0,0664568		
		$g^v(45)$	0,0992116	$g^v(345)$	0,0928712		

Ahhoz, hogy az 1-konvexitás, illetve így a nukleoluszok linearitása teljesüljön, $\overline{\alpha}_P \geq \underline{\alpha}_P$ kellene fennálljon, viszont itt ez nem teljesül, tehát az 1-konvexitás nincs garantálva. Viszont mivel $0 \leq g^v(N) \leq g^v(S)$ fennáll minden $S \subseteq N$-re, így a játékunk mégiscsak 1-konvex lesz, és így a nukleoluszok lineárisan számolhatók.

Az így kapott Shapley érték és nukleolusz megoldások, vagyis a különböző megoldási módszerek alapján a következőképp osztanák fel a biztosítók a profitot:

	Shapley érték	**Nukleolusz**	**Arányos nukleolusz**	**Bomlasztási nukleolusz**
1	0,0753043(25,1%)	0,0793514(26,5%)	0,0796134(26,5%)	0,0783700(26,1%)
2	0,0727983(24,3%)	0,0755993(25,2%)	0,0758105(25,3%)	0,0748082(24,9%)
3	0,0534356(17,8%)	0,0522489(17,4%)	0,0521440(17,4%)	0,0526420(17,5%)
4	0,0533425(17,8%)	0,0521183(17,4%)	0,0520116(17,3%)	0,0525180(17,5%)
5	0,0451193(15,0%)	0,0406820(13,6%)	0,0404205(13,5%)	0,0416618(13,9%)

Láthatjuk, hogy a nukleoluszok nagyon hasonló megoldásokat adnak, főleg a sima és az arányos változata, a Shapley érték viszont a nukleoluszokhoz képest eltérést mutat, viszont a biztosítók arányához igen közeli profitfelosztást ad. A nukleolusz koncepciók láthatóan inkább jutalmazzák a nagyobb biztosítókat ebben a szituációban, a bomlasztási nukleolusz kevésbé, mint a nukleolusz és az arányos nukleolusz, míg ezáltal a kisebbeket kissé büntetik.

A modellek közti választást sok tényező befolyásolhatja, de nem célunk konkrétan a legjobb megoldást megadni, hisz a megkövetelt tulajdonságoktól és az adott problémától függően más és más modellek lehetnek a legjobbak.

9. fejezet

Összefoglalás

A szakdolgozatban célja egy együttbiztosítási szituáció játékelméleti eszközökkel való modellezése volt, melyben biztosítók egy csoportja közösen átvállal egy nagy kockázatot, melyet 1 biztosító önmagában nem tudna biztosítani. A biztosítók a kockázatot egy valamilyen szempontrendszer alapján felosztják egymás közt.

Először áttekintettük a kooperatív játékelmélet alapjait, hogy mi is az, megismertük a mag fogalmát, áttekintettünk néhány megoldási koncepciót, a Shapley értéket, a nukleoluszt valamint néhány variánsát, illetve ezek tulajdonságait is megvizsgáltuk.

Ezt követően megismertünk egy speciális játékosztályt,az 1-konvex játékok osztályát, és láthattuk, hogy az általunk vizsgált szituáció modellezésére alkalmas lehet. Ezek után megismerkedtünk a biztosítási díjkalkulációval, áttekintettünk néhány díjkalkulációs elvet és ezek tulajdonságait.

Ezek után meghatároztuk adott díjkalkulációs díjelv mellett a kockázat optimális felosztását, majd az eddigi tudást felhasználva megismertük a co-insurance játékokat, amivel a szituáció modellezhetővé vált.

Végül bemutattuk az elméletet felhasználva egy fiktív gyakorlati példát, 5 biztosító részvételével, melynek során megkaptuk a biztosítók által átvállalt kockázat mértékét, biztosítási díjat, stb.

Természetesen mivel egy speciális szituációt vizsgáltunk a modellünkkel, és ahhoz, hogy a gyakorlatban is alkalmazható legyen, sok-sok változáson kellene átesnie. Csak néhány díjkalkulációs elv felelt meg, amivel használható a modellünk, így felmerülhet az, hogy további díjelvek keresése szükséges lehet, melyek a feltételeinknek megfelelnének.

A pontosabb modell megalkotásához szükséges lenne ismerni pontos kárleloszlásokat, megfelelő adatokat szerezni.

Ezen kívül azt is tovább lehetne vizsgálni, hogy a biztosítók nem egyfajta díjkalkulációs elvet használnak, mint jelen esetben a szórásnégyzet elvet, hanem többféle elv lenne jelen és hogy mely szituációk modellezhetők ezek kapcsán.

Más megoldási koncepció keresése is felmerülhet, ami több elvárt tulajdonságot teljesíthetne.

Összességében tehát a szakirodalmat felhasználva bemutattuk egy együttbiztosítási koncepció játékelméleti modellezését, de látható, hogy még bőven akadhat tennivaló.

Irodalomjegyzék

[1] Baton, B. - Lemaire, J. [1981]: *The core of a reinsurance market*, ASTIN Bulletin, Vol. 12, pp. 57-71

[2] Deprez, O. - Gerber, H. U. [1985]: *On convex principles of premium calculation, Insurance: Mathematics and Economics Vol. 4*, pp. 179-189

[3] Driessen, T. S. H. - Fragnelli, V. - Katsev, I. V. - Khmelnitskaya, A. B. [2010]: *A Game Theoretic Approach to Co-Insurance Situations*, Contributions to Game theory and Management, Vol. 3, pp. 49-66

[4] Driessen, T. S. H. - Khmelnitskaya, A. B. - Sales, J. [2005]: *1-concave basis for TU games*, University of Twente, Memorandum No 1777

[5] Driessen, T. S. H. - Tijs, S.H. [1983]: *The t-value, the nucleolus and the core for a subclass of games*, Methods of Operations Research, Vol. 46, pp. 395-406

[6] Forgó, F. - Pintér, M. - Simonovitits, A. - Solymosi, T. [2006]: *Kooperatív játékelmélet* (elektronikus jegyzet: http://193.6.240.222/download-hunteka/0002_solymosi_jatekelmelet.pdf)

[7] Fragnelli, V. - Marina, M. E. [2003]: *A fair procedure in insurance*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 33, pp. 75-85

[8] Fragnelli, V. - Marina, M. E. [2004]: *Co-Insurance Games and Enviromental Pollution Risk*, Game Practice and the Enviroment, pp. 145-163

[9] Lemaire, J. [1984]: *An Application of Gam Theory: Cost Allocation*, ASTIN Bulletin, Vol. 14, pp 60-81

[10] Lemaire, J. [1991]: *Cooperative Game Theory and its Insurance Applications*, ASTIN Bulletin, Vol. 21, pp 17-40

[11] Littlechild, S., Vaidya, K. [1976]: *The Propensity to Disrupt and the Disruption Nucleolus of a Characteristic Function Game*, International Journal of Game Theory, Vol. 5, Issue 2, pp 151-161

[12] Megiddo, N. [1974]: *On the Non-Monotonicity of the Bargaining Set, the Kernel and the Nucleolus of a Game*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol 27., pp. 355-358

[13] Schmeidler, D. [1969]: *The nucleolus of a characteristic function game*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 17, pp. 1163-1170

[14] Shapley, L.S. [1953]: *A Value for n-Person Games*, Contributions to the Theory of Games, pp. 307-317

[15] Shapley, L.S. [1971]: *Cores of Convex Games*, International Journal of Game Theory, Vol.1, pp. 11-26

[16] Simonovits, A. [2007]: *Bevezetés a játékelméletbe: Vázlat*

[17] Young, H. - Okada, N. - Hashimoto, T. [1980]: *Cost Allocation in Water Resources Development: A Case Study of Sweden.*, IIASA Working paper