Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

Takács Balázs
Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc.

Malliavin-kalkulus és alkalmazása a pénzügyekben

Szakdolgozat

Témavezető: Michaletzky György, egyetemi tanár
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2017.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. A dolgozatról

A Malliavin-kalkulus kiépítése elméleti matematikai okokból történt: segítségével bizonyos típusú (az úgynevezett Hörmander-feltételt teljesítő) sztochasztikus differenciálegyenletek megoldhatóságát sikerült bizonyítani tisztán sztochasztikus módszerekkel 1978-ban (egy korábbi, a parciális differenciálegyenletek elméletét használó bizonyítás már ismert volt ekkor). A pénzügyi matematikában a '90-es évek elejétől kezdve alkalmazzák, és a mai napig aktív területnek számít.

A dolgozat első fejezetében a jelölések tisztázása után egy rövid funkcionálanalízis bevezető következik, amiben – nem feltétlenül folytonos – lineáris operátorok adjungáltját és lezárhatóságát tárgyaljuk. A második fejezet a Wiener – Itô káoszfelbontást tárgyalja általános körülmények között, tetszőleges Hilbert-téren értelmezett izonormális Gauss-folyamatok esetén. A harmadik fejezetben bevezetjük a Malliavin-derivált operátort az úgynevezett sima valószínűségi változók terén, majd lezárás segítségével kiterjesztjük egy bővebb halmazra. A fejezet két legfontosabb eredménye az úgynevezett parciális integrálás formulája (3.2.6. Állítás) és a Malliavin-deriváltra vonatkozó láncszabály (3.2.10. Tétel). A negyedik fejezetben bevezetjük a Malliavin-derivált operátor adjungáltját, a Szkorohod-integrál operátort, és bebizonyítjuk a témakör egyik legfontosabb eredményét, a Clark – Ocone-formulát. Az ötödik fejezetben bemutatunk egy viszonylag friss (2012-es) alkalmazást.

Az első fejezet a [7] könyv szerint íródott, a második fejezet lényegében a [10] könyv tematikáját követi, a harmadik és negyedik fejezetekben szereplő bizonyítások nagyrésze pedig megtalálható a [14] jegyzetben, illetve a [10] és [13] könyvekben. Az ötödik fejezethez a [11] cikk eredményeit használtuk.

Az elemi analízis és funkcionálanalízis eredményeire az [5], [6], [7], [8], [9] könyvsorozatból fogunk hivatkozni.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Michaletzky György Tanár Úrnak, aki a félév során készséggel állt rendelkezésemre, széleskörű tudásának köszönhetően bármilyen matematikai jellegű problémával fordulhattam hozzá. Köszönet illeti továbbá Kristóf János Tanár Urat, akinek elemi- és funkcionálanalízis előadásai, valamint jegyzetei a mai napig meghatározzák a matematikához való hozzáállásomat.

1.2. Definíciók, jelölések, felhasznált tételek

Ha E halmaz, akkor $\mathscr{P}(E)$ jelöli a hatványhalmazát, $\mathscr{P}_0(E)$ a véges részhalmazainak halmazát, $Card(E)$ pedig az E számosságát.

Legyenek E és F halmazok. Ekkor az $f : E \to F$ (illetve $f : E \rightarrowtail F$) jelölés az

”f olyan függvény, amelyre $Dom(f) = E$ (illetve $Dom(f) \subseteq E$) és $Im(f) \subseteq F$ ”

kijelentés rövidítése. Az $E \to F$ függvények halmazát $\mathscr{F}(E;F)$, illetve F^E jelöli. Ha $f : E \rightarrowtail F$ függvény $E' \subseteq E$ és $F' \subseteq F$, akkor

$$f\langle E'\rangle := \{f(x) \,|\, x \in (E' \cap Dom(f))\} \quad \text{és} \quad \overset{-1}{f}\langle F'\rangle := \{x \in Dom(f) \,|\, f(x) \in F'\}\,,$$

továbbá $E' \subseteq Dom(f)$ esetén $f|_{E'}$ jelöli az f függvény E'-re vett megszorítását. Ha $f, g : E \to F$ függvények és $a \in E$, akkor

$$[f = a] := \{x \in E \,|\, f(x) = a\}\,.$$

Hasonlóan definiálható $[f \neq a]$, $[f = g]$ és $F = \mathbb{R}$ esetén $[f \leq a]$, $[f < a]$, $[f \leq g]$, $[f < g]$.

$\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^+$, $\overline{\mathbb{R}}$ és $\mathbb{K}$ jelöli rendre a nemnegatív valós számok halmazát, a pozitív valós számok halmazát, a kibővített valós számegyenest, valamint a valós vagy a komplex számok halmazát.

Halmazok szorzatát és véges sok valós szám szorzatát is a $\prod$ szimbólummal jelöljük, és ez nem vezet félreértésre, ugyanis valós számok halmazszorzatára nem lesz szükségünk.

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\mathbf{S}_n$ jelöli a $\{j \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq j \leq n\} \to \{j \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq j \leq n\}$ bijekciók halmazát.

Legyen $n, k \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény és $\sigma : \{j \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq j \leq k\} \to \{j \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq j \leq n\}$. Ekkor

$$\partial_\sigma f := \partial_{\sigma(1)}\partial_{\sigma(2)}...\partial_{\sigma(k)} f\,.$$

Megjegyezzük, hogy a $\partial_{\sigma(1)}\partial_{\sigma(2)}...\partial_{\sigma(k)} f$ jelölés ugyan kifejező, de kevésbé precíz. A fenti iterált parciális deriváltak értelmezhetőek a "..." szimbólum használata nélkül is, azonban a tárgyalása túlmutat ezen dolgozat keretein (megtalálható a [6] 6.6 alfejezetének 2. gyakorlatában).
Ha $n, m \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$, akkor f m-edik deriváltfüggvényét $D^m(f)$ jelöli, továbbá

$$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,|\, \text{minden } k \in \mathbb{N} \text{ esetén a } g \text{ függvény } k\text{-szor differenciálható}\}\,.$$

Mérhető tér alatt egy $(T, \mathscr{B})$ párt értünk, ahol T halmaz, $\mathscr{B}$ pedig σ-algebra T felett, *mértéktér* alatt pedig egy $(T, \mathscr{B}, \mu)$ hármast, ahol T halmaz, $\mathscr{B}$ σ-algebra T felett és μ mérték ($\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$-be érkező, σ-additív halmazfüggvény) $\mathscr{B}$-n. A $(T, \mathscr{B}, \mu)$ mértékteret *teljesnek* nevezzük, ha

$$(\forall B \in \mathscr{B}) : (\mu(B) = 0) \Rightarrow ((\forall A \in \mathscr{P}(T)) : (A \subseteq B) \Rightarrow (A \in \mathscr{B}))\,.$$

Azt mondjuk, hogy a $(T, \mathscr{B}, \mu)$ mértéktér *atomos*, ha

$$(\exists A \in \mathscr{B}) : ((\mu(B) > 0) \wedge ((\forall B \in \mathscr{B}) : (B \subseteq A) \wedge (\mu(B) < \mu(A)) \Rightarrow \mu(B) = 0))\,.$$

Ellenkező esetben az *atommentes* elnevezést használjuk. Az $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ mértékteret *valószínűségi mezőnek* nevezzük, ha $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Ha T halmaz és $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{P}(T)$, akkor $\sigma(\mathscr{Y})$ jelöli az $\mathscr{Y}$ által generált σ-algebrát (azaz az $\mathscr{Y}$-t tartalmazó σ-algebrák metszetét). Ha T topologikus tér, akkor

$$\mathscr{B}_T := \sigma\left(\{G \subseteq T \,|\, G \text{ nyílt halmaz } T\text{-ben}\}\right)\,.$$

Legyenek $(T_1, \mathscr{B}_1)$ és $(T_2, \mathscr{B}_2)$ mérhető terek, ekkor

$$\mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2 := \sigma\left(\{B_1 \times B_2 \subseteq T_1 \times T_2 \,|\, B_1 \in \mathscr{B}_1,\, B_2 \in \mathscr{B}_2\}\right) ,$$

továbbá az $f : T_1 \to T_2$ függvényt *mérhetőnek* nevezzük, ha

$$\Big(\forall B_2 \in \mathscr{B}_2\Big) : \Big(\overset{-1}{f} \langle B_2 \rangle \in \mathscr{B}_1 \Big) .$$

Ha T_2 topologikus tér, akkor egy T_2-be érkező mérhető függvény alatt $\mathscr{B}_{T_2}$-re nézve mérhető függvényt értünk.

Ha $(T, \mathscr{B}, \mu)$ teljes mértéktér, $(X, \mathscr{A})$ mérhető tér és $(f_i)_{i\in I}$ pedig $T \to X$ mérhető függvények tetszőleges, nemüres rendszere, akkor

$$\sigma((f_i)_{i\in I}) := \sigma\Big(\Big\{ \overset{-1}{f_i} \langle A \rangle \,|\, A \in \mathscr{A},\, i \in I \Big\} \cup \Big\{ B \in \mathscr{B} \,|\, \mu(B) = 0 \Big\}\Big) .$$

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén λ_n jelöli az n-dimenziós Lebesgue-mértéket. Az $n = 1$ esetben az alsó indexet elhagyjuk.

Vektortér alatt mindig $\mathbb{K}$ feletti vektorteret értünk. Legyen E vektortér és $F \subseteq E$. Ekkor $span_E(F)$ jelöli az F által generált lineáris alteret E-ben. Amennyiben nem vezet félreértésre, az alaptér jelölését elhagyjuk. Ha E vektortér és p félnorma E felett, akkor legyen

$$\dot{p} : E/ker(p) \to \mathbb{R}^+; \quad x + ker(p) \mapsto p(x) .$$

Igazolható, hogy $\dot{p}$ norma az $E/ker(p)$ faktortér felett, és $\dot{p}$-t az $E/ker(p)$ feletti *faktornormának* nevezzük. Ha $(E, ||\cdot||)$ normált tér, akkor

$$E^* := \{u \,|\, u : E \to \mathbb{K} \text{ lineáris funkcionál}\}$$

$$E' := \{u \in E^* \,|\, u \text{ folytonos } ||\cdot|| \text{ és } |\cdot| \text{ szerint}\} .$$

Ha $\mathscr{H}$ prehilbert-tér, akkor a skalárszorzását a $(\cdot|\cdot)_{\mathscr{H}}$-val, az ebből származó félnormát pedig $||\cdot||_{\mathscr{H}}$-val jelöljük.

Ha E topologikus vektortér, akkor $\sigma(E, E')$ jelöli a $(\mathbb{K}, u)_{u\in E'}$ rendszer által generált projektíven előállított topológiát, tehát azt a (lineáris) topológiát, amelyben – ha $\mathfrak{B}$ jelöli a 0 egy környezetbázisát az E topológiája szerint – a 0 környezetbázisa a

$$\left\{ \bigcap_{j\in J} V_j \;\middle|\; J \in \mathscr{P}_0(E'),\, (u_j)_{j\in J}\, E'\text{-beli},\, (V_j)_{j\in J}\, \mathfrak{B}\text{-beli rendszer} \right\}$$

halmaz, E *gyengített* vagy *gyenge topológiájának* nevezzük. A gyenge topológiáról belátható, hogy Hausdorff, amennyiben E eredeti topológiája is az ([8] 1.1.6. Tétel), és ha E Hilbert-tér, akkor $x \in E$ és egy E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat esetén

$$x_n \to x\,(n \to \infty)\ E \text{ gyenge topológiája szerint } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in E) : \Big(((x_n, y)_E)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergens } \mathbb{K}\text{-ban és } \lim_{n\to\infty} (x_n, y)_E = (x, y)_E \Big) .$$

Legyen $(T, \mathscr{B}, \mu)$ teljes mértéktér és $(X, \mathscr{A})$ mérhető tér és $f : T \to X$ mérhető függvény. Ekkor

$$f^\bullet := \{g : T \to X \mid g \text{ mérhető és } \mu\text{-majdnem minden } t \in T \text{ esetén } f(t) = g(t)\}\,.$$

Tetszőleges $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ esetén

$$\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) := \left\{ g : T \to \mathbb{R} \,\middle|\, g \text{ mérhető és } \int\limits_T |g|^p \mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

$$L^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) := \{g^\bullet \mid g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu)\}\,.$$

továbbá az ehhez tartozó faktornormával ellátva $L^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu)$ Banach-tér, $p = 2$ esetén pedig Hilbert-tér. Legyen

$$\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) := \left\{ g : T \to \mathbb{R} \,\middle|\, (\exists M \in \mathbb{R}) : (\mu\text{-majdnem minden } t \in T \text{ esetén } |g(t)| \leq M) \right\}$$

$$L^\infty_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) := \left\{ g^\bullet \,\middle|\, \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) \right\}$$

Ekkor az

$$\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) \to \mathbb{R}_+; \quad g \mapsto \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \mu\text{-majdnem minden } t \in T \text{ esetén } |g(t)| \leq M\}$$

leképezés félnorma $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu)$ felett, továbbá az ehhez tartozó faktornormával ellátva $L^\infty_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu)$ Banach-tér.

Megjegyezzük, hogy $p \in \overline{\mathbb{R}}$, $p \geq 1$, $f \in L^p_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu)$ és $t \in T$ esetén az $f(t)$ kifejezés (általános esetben) értelmetlen, azonban a f μ szerinti integrálját definiálhatjuk a következőképpen:

$$\int\limits_T f \mathrm{d}\mu := \int\limits_T \varphi \mathrm{d}\mu$$

ahol $\varphi \in f$ tetszőleges.

Ha T halmaz és $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ teljes valószínűségi mező, akkor a $G : T \to L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ leképezést *Gauss-folyamatnak* nevezzük, ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ és T-beli $(t_j)_{j=1}^n$ rendszer esetén $(G(t_j))_{j=1}^n$ együttes eloszlása normális.

Használni fogjuk továbbá a mértékelmélet alapvető fogalmait, nevezetes tételeit, illetve a Wiener-folyamat és a szerinte vett integrál alaptulajdonságait. Ezek részletes tárgyalása megtalálható a [6] és a [4], [12] könyvekben.

A következő lemma általában nem képezi részét a szokásos sztochasztikus analízis tananyagnak, ezért külön kihangsúlyozzuk.

1.2.1. Lemma. *(π-λ-lemma) Legyen Ω nemüres halmaz és $\mathscr{C}, \mathscr{D} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. Tegyük fel, hogy $\mathscr{C}$ egy π-rendszer (azaz zárt a véges metszetképzésre) és $\mathscr{D}$-re teljesülnek a következők:*
(i) $\Omega \in \mathscr{D}$
(ii) $A, B \in \mathscr{D}, B \subseteq A$ esetén $A \setminus B \in \mathscr{D}$

(iii) Ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathscr{D}$-ben haladó, tartalmazás szerint monoton növő sorozat, akkor $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}$ is teljesül,
(azaz $\mathscr{D}$ λ-rendszer). Ekkor $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$.

Bizonyítás. [1] 37. oldal, Theorem 3.2. ■

1.3. Lineáris operátorok adjungáltja, lezártja

Megállapodunk abban, hogy ha E, F normált terek, akkor az $E \times F$ szorzatteret a továbbiakban mindig az

$$(E \times F) \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto \sqrt{||x||^2 + ||y||^2}$$

normával látjuk el. Ha E és F Hilbert-terek, akkor ezt a normát az

$$(E \times F) \times (E \times F); \quad ((x, y), (x', y')) \mapsto (x \,|\, x')_E + (y \,|\, y')_F$$

skalárszorzat generálja.

1.3.1. Definíció. *Legyenek E, F normált terek. Az $u : E \rightarrowtail F$ lineáris operátort* ***zártnak*** *nevezzük, ha a*

$$gr(u) := \{(x, u(x)) \,|\, x \in Dom(u)\}$$

halmaz zárt $E \times F$-ben.

Az imént definiált $gr(u)$ halmaz valójában megegyezik az u halmazzal, de emiatt nem térünk el a szakirodalomban megszokott jelöléstől. A $\overline{gr(u)}$ halmaz zárt az $E \times F$ normált térben azonban nem feltétlenül lesz egy lineáris operátor gráfja, erre az esetre külön elnevezést vezetünk be.

1.3.2. Definíció. *Legyenek E, F normált terek. Az $u : E \rightarrowtail F$ lineáris operátort* ***lezárhatónak*** *nevezzük, ha létezik olyan $\overline{u} : E \rightarrowtail F$ lineáris operátor, hogy $gr(\overline{u}) = \overline{gr(u)}$ teljesül. Ekkor – az egyértelmű – $\overline{u}$-t az u operátor* ***lezártjának*** *nevezzük.*

1.3.3. Állítás. *Legyenek E, F normált terek. Az $u : E \rightarrowtail F$ lineáris operátor pontosan akkor lezárható, ha tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E-ben haladó zérussorozat esetén, ha $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = 0$.*

Bizonyítás. A szükségesség valóban teljesül, hiszen ha $\overline{u}$ jelöli az u operátor lezártját, akkor $\overline{u}(0) = 0$.
Ahhoz, hogy $gr(u)$ egy operátor gráfja legyen, elég belátni, hogy ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-ben haladó konvergens sorozatok, amelyekre teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n$ és $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, valamint $(u(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u(x'_n)$. Ez pedig a feltétel és u linearitása miatt teljesül. Azt kell még belátnunk, hogy $\overline{u}$ lineáris operátor, ehhez legyen $x, x' \in Dom(\overline{u})$. Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $Dom(u)$-ban

haladó sorozatok, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ és $\lim_{n\to\infty} x'_n = x'$ teljesül, továbbá $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, valamint $(u(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is konvergens. Ekkor tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ esetén $\lambda.x + \mu.x' \in Dom(\overline{u})$ és

$$\overline{u}(\lambda.x + \mu.x') = \lim_{n\to\infty} u(\lambda.x_n + \mu.x'_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} u(x_n) + \mu \lim_{n\to\infty} u(x'_n) = \lambda\overline{u}(x) + \mu\overline{u}(x'),$$

tehát $\overline{u}$ lineáris. ■

1.3.4. Megjegyzés. *Legyenek E, F normált terek és $u : E \rightarrowtail F$ lezárható operátor, jelölje $\overline{u}$ a lezártját. Ekkor*

$$Dom(\overline{u}) = \{x \in E \,|\, (\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (Dom(u))^{\mathbb{N}} : x_n \to x \, (n \to \infty) \text{ és } (u(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergens } F\text{-ben}\}$$

1.3.5. Állítás. *Legyenek $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ Hilbert-terek és $u : \mathscr{H}_1 \rightarrowtail \mathscr{H}_2$ olyan lineáris operátor, amelyre teljesül, hogy $Dom(u)$ sűrű lineáris altere $\mathscr{H}_1$-nek (ilyenkor azt mondjuk, hogy u* ***sűrűn értelmezett****). Ekkor létezik egyetlen olyan $u^* : \mathscr{H}_2 \rightarrowtail \mathscr{H}_1$ operátor, amelyre*

$$Dom(u) := \{y \in \mathscr{H}_2 \,|\, (u(\cdot) \,|\, y)_{\mathscr{H}_2} \in \mathscr{H}_1'\},$$

és minden $x \in Dom(u)$ és $y \in Dom(u^*)$ esetén

$$(u(x) \,|\, y)_{\mathscr{H}_2} = (x \,|\, u^*(y))_{\mathscr{H}_1}$$

teljesül. Továbbá, az u^* operátor lineáris.

Bizonyítás. A skalárszorzás tulajdonságai és a lineáris operátorok folytonosságának jellemzése alapján $Dom(u^*)$ lineáris altere $\mathscr{H}_2$-nek. Legyen $y \in Dom(u^*)$, ekkor az $(u(\cdot) \,|\, y)_{\mathscr{H}_2} : Dom(u) \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál folytonos, és mivel $Dom(u)$ sűrű, egyértelműen létezik olyan $f \in \mathscr{H}_1'$, ami az $(u(\cdot) \,|\, y)_{\mathscr{H}_2}$-nek kiterjesztése. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint egyértelműen létezik olyan $z \in \mathscr{H}_1$, hogy $f = (\cdot \,|\, z)_{\mathscr{H}_1}$. Ezzel megmutattuk, hogy

$$(\forall y \in Dom(u^*))(\exists z \in \mathscr{H}_1)(\forall x \in Dom(u)) : \big((u(x) \,|\, y)_{\mathscr{H}_2} = (x \,|\, z)_{\mathscr{H}_1}\big).$$

Ha $y \in Dom(u^*)$ és z_1, $z_2 \in \mathscr{H}_1$ olyanok, hogy minden $x \in Dom(u)$ esetén $(x \,|\, z_1)_{\mathscr{H}_1} = (u(x) \,|\, y)_{\mathscr{H}_2} = (x \,|\, z_2)_{\mathscr{H}_1}$, akkor a $(\cdot \,|\, z_1)_{\mathscr{H}_1}$ és $(\cdot \,|\, z_1)_{\mathscr{H}_1}$ folytonos lineáris funkcionálok megegyeznek a $Dom(u)$ sűrű halmazon, következésképpen $(\cdot \,|\, z_1)_{\mathscr{H}_1} = (\cdot \,|\, z_1)_{\mathscr{H}_1}$, így $z_1 = z_2$ is teljesül. Ezért jól értelmezett az az $u^* : Dom(u^*) \to \mathscr{H}_2$ függvény, amelyre minden $y \in Dom(u^*)$ és $x \in Dom(u)$ esetén $(u(x) \,|\, y)_{\mathscr{H}_2} = (x \,|\, u^*(y))_{\mathscr{H}_1}$ teljesül.
Belátjuk, hogy az u^* operátor additív. Ehhez legyen $y_1, y_2 \in Dom(u^*)$ és $x \in Dom(u)$, ekkor

$$\begin{aligned}(x \,|\, u^*(y_1 + y_2))_{\mathscr{H}_1} &= (u(x) \,|\, y_1 + y_2)_{\mathscr{H}_2} = (u(x) \,|\, y_1)_{\mathscr{H}_2} + (u(x) \,|\, y_2)_{\mathscr{H}_2} = \\ &= (x \,|\, u^*(y_1)_{\mathscr{H}_1} + (x \,|\, u^*(y_2)_{\mathscr{H}_1} = (x \,|\, u^*(y_1) + u^*(y_2))_{\mathscr{H}_1},\end{aligned}$$

tehát $u^*(y_1 + y_2) - u^*(y_1) + u^*(y_2) \in Dom(u)^\perp = \{0\}$, azaz $u^*(y_1 + y_2) = u^*(y_1) + u^*(y_2)$.
Hasonlóan, az u^* operátor $\mathbb{K}$-homogén, ugyanis ha $\alpha \in \mathbb{K}$, $y \in Dom(u^*)$ és $x \in Dom(u)$, akkor

$$(x \,|\, u^*(\alpha.y))_{\mathscr{H}_1} = (u(x) \,|\, \alpha.y)_{\mathscr{H}_2} = \overline{\alpha}(u(x) \,|\, y)_{\mathscr{H}_2} = \overline{\alpha}(x \,|\, u^*(y))_{\mathscr{H}_1} = (x \,|\, \alpha.u^*(y))_{\mathscr{H}_1},$$

tehát $u^*(\alpha.y) - \alpha.u^*(y) \in Dom(u)^\perp = \{0\}$, vagyis $u^*(\alpha.y) = \alpha.u^*(y)$. ■

1.3.6. Definíció. *Legyenek $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ Hilbert-terek és $u : \mathscr{H}_1 \rightarrowtail \mathscr{H}_2$ egy sűrűn értelmezett lineáris operátor. Az u operátor adjungáltjának nevezzük és u^*-gal jelöljük azt a $\mathscr{H}_2 \rightarrowtail \mathscr{H}_1$ lineáris operátort, amelyre*

$$Dom(u) := \{y \in \mathscr{H}_2 \,|\, (u(\cdot) \,|\, y)_{\mathscr{H}_2} \in \mathscr{H}_1'\} \,,$$

és minden $x \in Dom(u)$ és $y \in Dom(u^*)$ esetén

$$(u(x) \,|\, y)_{\mathscr{H}_2} = (x \,|\, u^*(y))_{\mathscr{H}_1}$$

teljesül.

Megjegyzés. 1.) Ha az előző definícióban értelmezett u operátor folytonos és $Dom(u) = \mathscr{H}_1$, akkor u^* megegyezik a folytonos lineáris operátorok esetében értelmezett adjungáltoperátorral.
2.) Ha az előző definícióban u nem sűrűn értelmezett, akkora $Dom(u^*)$ lineáris altér hasonlóan értelmezhető azonban létezik olyan $y \in Dom(u^*)$ és $\mathscr{H}_1$-beli z_1, z_2 vektorok, hogy $z_1 \neq z_2$, továbbá $(x \,|\, z_1)_{\mathscr{H}_1} = (u(x) \,|\, y)_{\mathscr{H}_2} = (x \,|\, z_2)_{\mathscr{H}_1}$, tehát az $u^*(y)$ vektor nem értelmezhető egyértelműen.

1.3.7. Lemma. *Legyenek $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ Hilbert-terek. Ekkor az*

$$U_{\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2} : \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2 \times \mathscr{H}_1; \quad (x,y) \mapsto (y,-x)$$

leképezés unitér operátor, és tetszőleges $u : \mathscr{H}_1 \rightarrowtail \mathscr{H}_2$ sűrűn értelmezett lineáris operátorra

$$U_{\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2}\langle (gr(u))^{\perp}\rangle = gr(u^*)\,.$$

Bizonyítás. $U_{\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2}$ szürjektív lineáris izometria, tehát unitér operátor.
Legyen $u : \mathscr{H}_1 \rightarrowtail \mathscr{H}_2$ sűrűn értelmezett lineáris operátor. Ekkor

$$(y,x) \in U_{\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2}\langle (gr(u))^{\perp}\rangle \Leftrightarrow (-x,y) \in (gr(u))^{\perp} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x' \in Dom(u)) : ((-x,y) \,|\, (x', u(x')))_{\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x' \in Dom(u)) : (x,x')_{\mathscr{H}_1} = (y, u(x'))_{\mathscr{H}_2} \Leftrightarrow (y \in Dom(u^*)) \wedge (u^*(y) = x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y,x) \in gr(u^*)\,. \quad \blacksquare$$

1.3.8. Állítás. *Legyenek $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ Hilbert-terek, $u : \mathscr{H}_1 \rightarrowtail \mathscr{H}_2$ sűrűn értelmezett lineáris operátor. Ekkor u^* zárt operátor.*

Bizonyítás. Az előző lemma alapján $gr(u^*) = U_{\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2}\langle (gr(u))^{\perp}\rangle$. A $(gr(u))^{\perp}$ halmaz zárt $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$-ben, $U_{\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2}$ unitér operátor, tehát $U_{\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2}\langle (gr(u))^{\perp}\rangle$ zárt $\mathscr{H}_2 \times \mathscr{H}_1$-ben. $\blacksquare$

2. Wiener – Itô káoszfelbontás

A továbbiakban legyen $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ teljes valószínűségi mező rögzített, továbbá tetszőleges $p \geq 1$ és $t \in \mathbb{R}^+$ esetén a következő jelöléseket vezetjük be:

$$\mathscr{L}^p(\Omega) := \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$$

$$L^p(\Omega) := L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$$

$$\mathscr{L}^p(\Omega \times [0,t]) := \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega \times [0,t], \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}_{[0,t]}, \mathbb{P} \times \lambda|_{[0,t]})$$

$$L^p(\Omega \times [0,t]) := L^p_{\mathbb{R}}(\Omega \times [0,t], \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}_{[0,t]}, \mathbb{P} \times \lambda|_{[0,t]})\,,$$

illetve tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\mathscr{L}^p([0,t]^n) := \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}([0,t]^n, \mathscr{B}_{[0,t]^n}, \lambda^n|_{[0,t]^n})$$

$$L^p([0,t]^n) := L^p_{\mathbb{R}}([0,t]^n, \mathscr{B}_{[0,t]^n}, \lambda^n|_{[0,t]^n})$$

továbbá, ha a $\mathscr{B}$ halmaz σ-algebra Ω felett, $\mathscr{C}$ pedig $\Omega \times [0,t]$ felett, akkor

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{B}) := \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$$

$$L^p(\Omega, \mathscr{B}) := L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})\,.$$

$$\mathscr{L}^p(\Omega \times [0,t], \mathscr{C}) := \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega \times [0,t], \mathscr{C}, \mathbb{P} \times \lambda|_{[0,t]})$$

$$L^p(\Omega \times [0,t], \mathscr{C}) := L^p_{\mathbb{R}}(\Omega \times [0,t], \mathscr{C}, \mathbb{P} \times \lambda|_{[0,t]})\,.$$

Az $\int\limits_\Omega (\cdot)\mathrm{d}\mathbb{P}$ jelölés helyett a várható érték szokásos $\mathbb{E}_\mathbb{P}$, illetve – amennyiben nem vezet félreértésre – $\mathbb{E}$ jelölését is használjuk. Ekvivalenciaosztályok esetében is használni fogjuk az utóbbi jelölést , azaz $X \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ esetén $\mathbb{E}(X^\bullet) := \mathbb{E}(X)$, valamint tetszőleges $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}$ σ-algebra esetén $\mathbb{E}(\cdot|\mathscr{F})$ jelöli az $\mathscr{F}$-re vonatkozó *feltételes várható érték* operátorát.
Egy mérhető térbe érkező $\mathscr{A}$-ra nézve mérhető, függvényeket *valószínűségi változóknak* nevezzük. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ és $\mathbb{R}^n$-be érkező valószínűségi változó esetén ez alatt – ha külön nem hangsúlyozzuk – az $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n})$ mérhető teret értjük.
Tetszőleges X, Y valós értékű valószínűségi változó esetén

$$cov(X,Y) := \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\,.$$

2.1. Többdimenziós sztochasztikus integrál

2.1.1. Jelölés. *Legyen $(T, \mathscr{B}, \mu)$ mértéktér. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén*

$$\mathscr{B}_0 := \{B \in \mathscr{B} \,|\, \mu(B) < +\infty\}$$

$$\mathcal{E}(T^n) := span\{\chi_{\prod\limits_{j=1}^n A_j} \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) \,|\, (A_j)_{j=1}^n \in \mathscr{B}^n \text{ diszjunkt halmazok rendszere}\}$$

$$E(T^n) := \{f^\bullet \,|\, f \in \mathcal{E}_n(T)\}$$

2.1.2. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{B}, \mu)$ atommentes, σ-véges mértéktér és $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor $\mathcal{E}(T^n)$ sűrű $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n)$-ben.*

Bizonyítás. Legyen

$$\mathscr{C} := \{\prod_{j=1}^{n} A_j \,|\, (A_j)_{j=1}^n \in \mathscr{B}_0^n\} \quad \text{és} \quad \mathscr{D} := \{A \in \mathscr{B}^{\otimes n} \,|\, \chi_A \in \overline{\mathcal{E}(T^n)}\}$$

Elég belátni, hogy $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$ teljesül, ugyanis a σ-végesség miatt $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}^{\otimes n}$, és a $\mathscr{B}^{\otimes n}$-beli halmazok karakterisztikus függvényeinek lineáris burka sűrű $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n)$-ben. A $\mathscr{C}$ halmaz π-rendszer (zárt a véges metszetképzésre), a $\mathscr{D}$ halmaz pedig zárt a különbségképzésre, továbbá, ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathscr{D}$ halmazainak tartalmazás tekintetében monoton növő rendszere, akkor a $(\chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál a korlátos $\chi_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ függvényhez, tehát a Lebesgue-tétel alapján az $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n)$ tér félnormája szerint is teljesül a konvergencia, azaz $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}$.

Bebizonyítjuk, hogy teljesül a $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ tartalmazás, ebből ugyanis következik, hogy $T^n \in \mathscr{D}$, tehát a $\mathscr{D}$ halmaz λ-rendszer, így az 1.2.1. Lemma alapján $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$. Legyen $(A_j)_{j=1}^n \in \mathscr{B}_0^n$ és $A := \prod\limits_{j=1}^{n} A_j$. Belátjuk, hogy $\chi_A \in \overline{\mathcal{E}(T^n)}$. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, $C := \mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j\right)$, és $m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $C^n\left(1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^n\right) < \varepsilon$ és $m \geq n$. Mivel $(T, \mathscr{B}, \mu)$ atommentes, ezért létezik olyan $(B_i)_{i=1}^m$ diszjunkt $\mathscr{B}$-beli halmazok rendszere, amelyre teljesül, hogy

$$\bigcup_{i=1}^{m} B_i = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad \text{és} \quad \mu(B_i) = \frac{C}{m} \text{ minden } 1 \leq i \leq n \text{ esetén.}$$

(Az utóbbi következtetés egyáltalán nem triviális, lásd [2] 264. oldal, Corollary 5.) Minden $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $i, j \in \mathbb{N}$ esetén legyen $B_{i,j} := B_i \cap A_j$, és jelölje $\mathfrak{F}$ a $\{j \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq j \leq n\} \to \{j \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq j \leq m\}$ függvények halmazát. Ekkor

$$\chi_A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{F}} \chi_{\prod\limits_{j=1}^{n} B_{\sigma(j),j}}.$$

Legyen

$$\widetilde{\mathfrak{F}} := \{\sigma \in \mathfrak{F} \,|\, \sigma \text{ injektív}\} \quad \text{és} \quad f_m := \sum_{\sigma\in\widetilde{\mathfrak{F}}} \chi_{\prod\limits_{j=1}^{n} B_{\sigma(j),j}}.$$

Ekkor $f_m \in \mathcal{E}(T^n)$, továbbá

$$||\chi_A - f_m||_{\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{F}\setminus\widetilde{\mathfrak{F}}} \prod_{j=1}^{n} \mu(B_{\sigma(j),j}) \leq \left(\frac{C}{m}\right)^n \left(m^n - \prod_{j=0}^{n-1}(m-j)\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{C}{m}\right)^n (m^n - (m-n)^n) = C^n \left(1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^n\right) < \varepsilon\,,$$

tehát $\chi_A \in \overline{\mathcal{E}(T^n)}$. ■

Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban Hilbert-tér alatt mindig nem nulla dimenziós Hilbert-teret értünk.

2.1.3. Definíció. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér. A $\mathbf{W} : \mathscr{H} \to L_2(\Omega)$ lineáris leképezést **izonormális Gauss-folyamatnak** nevezzük, ha izometria és Gauss-folyamat, továbbá minden $h \in \mathscr{H}$ esetén $\mathbb{E}(\mathbf{W}(h)) = 0$ teljesül.*

Példa. Ha W egy $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ feletti Wiener-folyamat, $t \in \mathbb{R}_+$ és tetszőleges

$$f \in \mathscr{L}^2([0,t]) \quad \text{esetén} \quad \mathbf{W}^t(f^\bullet) := \int_0^t f(s)\mathrm{d}W(s) \in L^2(\Omega)\,,$$

akkor $\mathbf{W}^t$ izonormális Gauss-folyamat $\mathscr{H} = L^2_{\mathbb{R}}([0,t], \mathscr{B}_{[0,t]}, \lambda|_{[0,t]})$ választással. $\mathbf{W}^t$-t ekkor a **Wiener-folyamat által meghatározott izonormális Gauss-folyamatnak** nevezzük $[0,t]$-n.

2.1.4. Definíció. *Legyen $(T, \mathscr{B}, \mu)$ mértéktér, $n, m \in \mathbb{N}^+$, $(a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^m$, továbbá minden $1 \leq k \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $k, j \in \mathbb{N}$ esetén $A_{k,j} \in \mathscr{B}_0$ és $f := \sum\limits_{k=1}^m a_k \cdot \chi_{\prod\limits_{j=1}^n A_{k,j}} \in \mathcal{E}(T^n)$. Jelöljön $\mathbf{W} : L^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) \to L^2(\Omega)$ egy izonormális Gauss-folyamatot.*

$$I_n^{\mathbf{W}}(f) := \sum_{k=1}^m a_k \prod_{j=1}^n \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_{k,j}}) \in L^2(\Omega)\,.$$

2.1.5. Megjegyzés. *Az előbbi definíció jelöléseivel az $I_n^{\mathbf{W}} : \mathcal{E}(T^n) \to L_2(\Omega)$ leképezés jól definiált és lineáris, továbbá, ha $f, g \in \mathcal{E}(T^n)$ és $f = g$ a T^n halmazon μ^n-majdnem-mindenütt, akkor $I_n^{\mathbf{W}}(f) = I_n^{\mathbf{W}}(g)$, tehát az*

$$\widetilde{I_n^{\mathbf{W}}} : E(T^n) \to L_2(\Omega)\,; \quad f^\bullet \mapsto I_n(f)$$

leképezés is jól definiált és lineáris.

2.1.6. Definíció. *Legyen T halmaz F vektortér $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f \in \mathscr{F}(T^n, F)$. Az f függvényt **szimmetrikusnak** nevezzük, ha minden $\sigma \in \mathbf{S}_n$ és $(t_i)_{i=1}^n \in T^n$ esetén*

$$f((t_i)_{i=1}^n) = f((t_{\sigma(i)})_{i=1}^n)\,.$$

Az $\tilde{f} : T^n \to F$ függvényt f szimmetrizáltjának nevezzük, ha minden $(t_i)_{i=1}^n \in T^n$ esetén

$$\tilde{f}((t_i)_{i=1}^n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} f((t_{\sigma(i)})_{i=1}^n)$$

Az előző definícióból következik, hogy egy szorzathalmazon értelmezett, vektortérbe érkező függvény pontosan akkor szimmetrikus, ha megegyezik a szimmetrizáltjával.

2.1.7. Állítás. *Legyen* $(T, \mathscr{B}, \mu)$ *mértéktér,* $n, m \in \mathbb{N}^+$ *és* $\mathbf{W} : L^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat. Ekkor*
(i) minden $f \in \mathcal{E}(T^n)$ *esetén* $I^{\mathbf{W}}_n(f) = I^{\mathbf{W}}_n(\tilde{f})$
(ii) minden $f \in \mathcal{E}(T^n)$ *és* $g \in \mathcal{E}(T^m)$ *esetén*

$$(I^{\mathbf{W}}_n(f)|I^{\mathbf{W}}_m(g))_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} 0 & \text{; ha } n \neq m \\ n!(\tilde{f}^\bullet|\tilde{g}^\bullet)_{L^2(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n)} & \text{; ha } n = m \end{cases}$$

Bizonyítás. *(i)* Az $I^{\mathbf{W}}_n$ és $\tilde{}\ : \mathscr{F}(T^n, \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(T^n, \mathbb{R})$ operátorok linearitása miatt elég belátni abban az esetben, ha $f = \chi_A$, ahol $A = \prod_{j=1}^{n} A_j$ és $(A_j)_{j=1}^n \in \mathscr{B}_0^n$, ekkor viszont $I^{\mathbf{W}}_n$ definíciójából következik az állítás.
(ii) Az előző pont alapján elég abban az esetben belátni az állítást, ha f és g szimmetrikusak. Feltehető továbbá (a 2.1.2. Állítás bizonyításában található gondolatmenet szerint), hogy létezik $p \in \mathbb{N}^+$ és $\mathscr{B}_0$-beli halmazok olyan $(A_k)_{k=1}^p$ diszjunkt rendszere, amelyre teljesül, hogy

$$f = \sum_{\sigma \in \mathfrak{F}_n} a_\sigma \chi_{\prod_{j=1}^{n} A_{\sigma(j)}} \quad \text{és} \quad g = \sum_{\sigma \in \mathfrak{F}_m} b_\sigma \chi_{\prod_{j=1}^{m} A_{\sigma(j)}},$$

ahol $i \in \{n, m\}$ esetén $\mathfrak{F}_i$ jelöli a $\{j \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq j \leq i\} \to \{j \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq j \leq p\}$ függvények halmazát, valamint $(a_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{F}_n}$ és $(b_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{F}_m}$ $\mathbb{R}$-beli rendszerek. Az $m \neq n$ esetben

$$(I_n(f)|I_m(g))_{L^2(\Omega)} = \mathbb{E}\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{F}_n} \sum_{\tau \in \mathfrak{F}_m} a_\sigma b_\tau \prod_{j=1}^{n} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_{\sigma(j)}}) \prod_{i=1}^{m} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_{\tau(i)}})\right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{F}_n} \sum_{\tau \in \mathfrak{F}_m} a_\sigma b_\tau \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_{\sigma(j)}}) \prod_{i=1}^{m} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_{\tau(i)}})\right) = 0\,,$$

hiszen a fenti összeg minden tagja 0, mert a várható értékben szereplő tényezőket összevonva lesz olyan $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq p$, hogy $\mathbf{W}(A_i^\bullet)$ az első hatványon szerepel.
Az $m = n$ esetben f és g szimmetriája miatt

$$(I_n(f)|I_n(g))_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{F}_n \\ \sigma \text{ szig. mon. növő}}} n! \cdot a_\sigma \prod_{j=1}^{n} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_{\sigma(j)}})\right)\left(\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{F}_n \\ \sigma \text{ szig. mon. növő}}} n! \cdot b_\sigma \prod_{j=1}^{n} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_{\sigma(j)}})\right)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{F}_n \\ \sigma \text{ szig. mon. növő}}} (n!)^2 \cdot a_\sigma b_\sigma \prod_{j=1}^{n} \mu(A_{\sigma(j)}) = n! \int_{T^n} fg \,\mathrm{d}\mu^n = n!(\tilde{f}^\bullet|\tilde{g}^\bullet)_{L^2(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n)}\,. \blacksquare$$

Az előző állításból kiderül – feltéve, hogy $(T, \mathscr{B}, \mu)$ atommentes és σ-véges –, hogy $I_n^{\mathbf{W}} : \mathscr{L}^2(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n) \rightarrowtail L^2(\Omega)$ egy sűrű halmazon értelmezett folytonos lineáris operátor, hiszen $f \in \mathcal{E}(T^n)$ esetén

$$\mathbb{E}((I_n^{\mathbf{W}}(f))^2) = n! \int_{T^n} (\tilde{f})^2 \mathrm{d}\mu^n \leq n! \int_{T^n} f^2 \mathrm{d}\mu^n \,,$$

tehát egyértelműen terjeszthető ki folytonos lineáris operátorként az $\mathscr{L}^2(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n)$ térre.

2.1.8. Definíció. *Legyen $(T, \mathscr{B}, \mu)$ mértéktér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $\mathbf{W} : \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat. Ekkor az $I_n^{\mathbf{W}}$ operátor folytonos lineáris kiterjesztését szintén $I_n^{\mathbf{W}}$-vel jelöljük és $f \in \mathscr{L}^2(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n)$ esetén $I_n^{\mathbf{W}}(f)$-et az f függvény* **W *szerinti (n-dimenziós) sztochasztikus integráljának*** *nevezzük.*

2.1.9. Definíció. *Legyen $(T, \mathscr{B}, \mu)$ mértéktér, $p, q \in \mathbb{N}^+$, továbbá $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^p, \mathscr{B}^{\otimes p}, \mu^p)$ és $g \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^q, \mathscr{B}^{\otimes q}, \mu^q)$. Tetszőleges $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq \min(p, q)$ esetén jelölje $f \otimes_r g$ a*

$$T^{p+q-2r} \to \mathbb{R}; \quad T^{p-r} \times T^{q-r} \ni (t, t') \mapsto \int_{T^r} f(t, s) g(t', s) d\mu^r(s)$$

függvényt, továbbá $f \otimes_0 g := f \otimes g$, ahol

$$f \otimes g : T^{p+q} \to \mathbb{R}; \quad (t, t') \mapsto f(t) g(t') \,.$$

Az imént definiált $f \otimes_r g$ függvény $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^{p+q-2r}, \mathscr{B}^{\otimes p+q-2r}, \mu^{p+q-2r})$-beli, ugyanis

$$\int_{T^{p+q-2r}} \left(\int_{T^r} f(t, s) g(t', s) \mathrm{d}\mu^r(s) \right)^2 \mathrm{d}\mu^{p+q-2r}(t, t') =$$

$$= \int_{T^{p-r}} \int_{T^{q-r}} \left(\int_{T^r} f(t, s) g(t', s) \mathrm{d}\mu^r(s) \right)^2 \mathrm{d}\mu^{q-r}(t') \mathrm{d}\mu^{p-r}(t) \leq$$

$$\int_{T^{p-r}} \int_{T^{q-r}} \left(\int_{T^r} f(t, s)^2 \mathrm{d}\mu^r(s) \right) \left(\int_{T^r} g(t', s)^2 \mathrm{d}\mu^r(s) \right) \mathrm{d}\mu^{q-r}(t') \mathrm{d}\mu^{p-r}(t) =$$

$$= ||f||^2_{\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^p, \mathscr{B}^{\otimes p}, \mu^p)} ||g||^2_{\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^q, \mathscr{B}^{\otimes q}, \mu^q)} \,.$$

Egyúttal azt is beláttuk, hogy a

$$\otimes_r : \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^p, \mathscr{B}^{\otimes p}, \mu^p) \times \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^q, \mathscr{B}^{\otimes q}, \mu^q) \to \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^{p+q-2r}, \mathscr{B}^{\otimes p+q-2r}, \mu^{p+q-2r})$$

$$(f, g) \mapsto f \otimes_r g$$

bilineáris leképezés folytonos (lásd [6] 3.3.1 Állítás). Az $r = 0$ eset teljesen hasonlóan bizonyítható.

2.1.10. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{B}, \mu)$ atommentes, σ-véges mértéktér, $\mathbf{W} : L^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat, $p \in \mathbb{N}^+$, továbbá $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^p, \mathscr{B}^{\otimes p}, \mu^p)$ szimmetrikus függvény és $g \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu)$. Ekkor*

$$I_p^{\mathbf{W}}(f) I_1^{\mathbf{W}}(g) = I_{p+1}^{\mathbf{W}}(f \otimes g) + p I_{p-1}^{\mathbf{W}}(f \otimes_1 g) \,.$$

Bizonyítás. Kihasználva, hogy $\otimes$, $\otimes_1$, minden $m \in \mathbb{N}$ esetén I_n^W, továbbá az

$$\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^p, \mathscr{B}^{\otimes p}, \mu^p) \to \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^p, \mathscr{B}^{\otimes p}, \mu^p); \quad h \mapsto \tilde{h}$$

leképezések folytonosak (sőt az utóbbi norma nem-növelő), a 2.1.2. Állítás miatt elég belátni abban az esetben, amikor $f \in \mathcal{E}(T^p)$ és $g \in \mathcal{E}(T)$. Az előbb felsorolt leképezések linearitása miatt elég karakterisztikus függvényekre ellenőrizni az állítást, sőt (a 2.1.2. Állítás bizonyításában szereplő gondolatmenet alapján) feltehető, hogy létezik $\mathscr{B}_0$-beli diszjunkt halmazok $(A_j)_{j=1}^p$ rendszere, hogy $f = \tilde{\chi}_{\prod\limits_{j=1}^{p} A_j}$ és $A_0 \in \mathscr{B}_0$, hogy $g = \chi_{A_0}$, továbbá A_0 diszjunkt az $(A_j)_{j=1}^p$ rendszertől vagy $A_0 = A_1$. Az első esetben $f \otimes_1 g = 0$, így az egyenlőség a többdimenziós sztochasztikus integrál definíciója miatt teljesül. Tegyük fel, hogy $A_0 = A_1$, azaz $g = \chi_{A_1}$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Az atommentesség miatt létezik olyan $(B_j)_{j=1}^n$ $\mathscr{B}$-beli rendszer, amelyre teljesül, hogy

$$A_1 = \bigcup_{j=1}^{n} B_j \quad \text{és} \quad \mu(B_j) < \varepsilon \ (1 \le j \le n, j \in \mathbb{N})$$

továbbá legyen

$$C(i,j)_0 := B_i \quad (1 \le i, j \le n, \ i, j \in \mathbb{N})$$

$$C(i,j)_1 := B_j \quad (1 \le i, j \le n, \ i, j \in \mathbb{N})$$

$$C(i,j)_k := A_j \quad (1 \le i, j \le n, \ i, j \in \mathbb{N}, \ 2 \le k \le p, \ k \in \mathbb{N})$$

$$h_\varepsilon := \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{n} \chi_{\prod\limits_{k=1}^{p} C(i,j)_k}$$

Ekkor

$$I_p^{\mathbf{W}}(f) I_1^{\mathbf{W}}(g) = \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_1})^2 \prod_{j=2}^{p} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_j}) =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{n} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{B_i}) \mathbf{W}(\chi^\bullet_{B_j}) \prod_{k=2}^{p} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_k}) + \sum_{j=1}^{n} \Big(\mathbf{W}(\chi^\bullet_{B_j})^2 - \mu(B_j) \Big) \prod_{k=2}^{p} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_k}) + \mu(A_1) \prod_{k=2}^{p} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_k}) =$$

$$= I_{p+1}^{\mathbf{W}}(h_\varepsilon) + \sum_{j=1}^{n} \Big(\mathbf{W}(\chi^\bullet_{B_j})^2 - \mu(B_j) \Big) \prod_{k=2}^{p} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_k}) + p I_{p-1}(f \otimes_1 g) \,,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk, hogy

$$f \otimes_1 g = \frac{1}{p}\mu(A_1)\tilde{\chi}_{\prod\limits_{k=2}^{p} A_k}$$

teljesül. Mivel

$$\left\|\widetilde{f \otimes g} - \tilde{h}_\varepsilon\right\|_{\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^{p+1}, \mathscr{B}^{\otimes p+1}, \mu^{p+1})} = \left\|\tilde{\chi}_{\prod\limits_{j=0}^{p} A_j} - \tilde{h}_\varepsilon\right\|_{\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^{p+1}, \mathscr{B}^{\otimes p+1}, \mu^{p+1})} \leq$$

$$\leq \left\|\chi_{\prod\limits_{j=0}^{p} A_j} - h_\varepsilon\right\|_{\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^{p+1}, \mathscr{B}^{\otimes p+1}, \mu^{p+1})} = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)^2 \prod_{k=2}^{p} \mu(A_k) < \varepsilon \prod_{k=1}^{p} \mu(A_k)\,,$$

továbbá

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}\Big(\mathbf{W}(\chi^\bullet_{B_j})^2 - \mu(B_j)\Big)\prod_{k=2}^{p}\mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_k})\right)^2\right) \leq 2\sum_{j=1}^{n}\mu(B_j)^2\prod_{k=2}^{p}\mu(A_k) \leq 2\varepsilon\prod_{k=1}^{p}\mu(A_k)\,.$$

Mivel $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges volt, kihasználva a többdimenziós sztochasztikus integrál folytonosságát, a bizonyítandó állításhoz jutunk. ■

2.1.11. Következmény. *Legyen $(T, \mathscr{B}, \mu)$ atommentes, σ-véges mértéktér, $\mathbf{W} : L^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat, $p \in \mathbb{N}^+$, továbbá $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T^p, \mathscr{B}^{\otimes p}, \mu^p)$ és $g \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu)$. Ekkor*

$$I^{\mathbf{W}}_p(f) I^{\mathbf{W}}_1(g) = I^{\mathbf{W}}_{p+1}(f \otimes g) + p I^{\mathbf{W}}_{p-1}(\tilde{f} \otimes_1 g)\,.$$

Bizonyítás. Az $I^{\mathbf{W}}_p(f) = I^{\mathbf{W}}_p(\tilde{f})$ és az $I^{\mathbf{W}}_{p+1}(\tilde{f} \otimes g) = I^{\mathbf{W}}_{p+1}(f \otimes g)$ egyenlőségből következik. ■

2.2. Ortogonális polinomfüggvények

A továbbiakban szükségünk lesz egy fontos technikai eszközre, ennek tárgyalása következik.

2.2.1. Definíció. *Legyen*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$$

és tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén jelölje H_n az alábbi polinomfüggvényt:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} (D^n(F))(x)\,,$$

továbbá $H_0 := \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$.

Az imént definiált H_n-et szokás az n-edik Hermite-polinomnak nevezni, néhol azonban ennek konstansszorosát érti alatta a szakirodalom, emiatt külön elnevezést nem vezetünk be rá.

2.2.2. Lemma. *Legyen*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,t) \mapsto e^{tx-\frac{t^2}{2}} .$$

Ekkor $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ *esetén*

$$F(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^n H_k(x) ,$$

továbbá minden $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$(DH_n)(x) = xH_{n-1}(x)$$

$$(n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_{n-1}(x)$$

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

Bizonyítás. Legyen

$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,t) \mapsto e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}$$

Ekkor $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$F(x,t) = e^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(x-t)^2} = e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\partial_2^k G)(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k H_k(x) ,$$

továbbá

$$(\partial_1 F)(x,t) = tF(x,t) ,$$

$$(\partial_2 F)(x,t) = (x-t)F(x,t) ,$$

$$F(-x,t) = F(x,-t) ,$$

amelyekből pedig az utolsó három állítás következik. ■

2.2.3. Állítás. *Legyen* $\binom{X}{Y} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *normális eloszlású vektorváltozó, és tegyük fel, hogy* $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathbb{E}(X^2) = 1$, $\mathbb{E}(Y^2) = 1$ *teljesül. Ekkor tetszőleges* $n, m \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$\mathbb{E}(H_n(X)H_m(Y)) = \begin{cases} 0 & , \textit{ha } n \neq m \\ \frac{1}{n!}(\mathbb{E}(XY))^n & , \textit{ha } n = m \end{cases}$$

Bizonyítás. Az előző lemma alapján tetszőleges $(x,t) \in \mathbb{R}^2$-re

$$e^{tx-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^n H_k(x) .$$

Tetszőleges $s, t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{E}(e^{sX+tY}) = \exp\left(\frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2} + cov(X,Y)\right) ,$$

tehát

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(sX-\frac{s^2}{2}\right)\exp\left(tY-\frac{t^2}{2}\right)\right)=\exp(st\mathbb{E}(XY))\,.$$

Az előbbi egyenlőségeket alkalmazva a

$$\phi:\mathbb{R}^2\to R;\quad (s,t)\mapsto\exp(st\mathbb{E}(XY))$$

függvényre, kapjuk, hogy tetszőleges $m,n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{E}(n!H_n(X)m!H_m(Y))=(\partial_1^n\partial_2^m\phi)(0,0)=\begin{cases}0 & \text{, ha } n\neq m\\ n!(\mathbb{E}(XY))^n & \text{, ha } n=m\end{cases},$$

ahol az első egyenlőségben az integrálás és a differenciálás felcserélése a paraméteres integrálok differenciálhatósági tétele alapján történt ([6] 31.3.1 Állítás). ■

2.3. A káoszfelbontás és tulajdonságai

2.3.1. Definíció. *Legyen $(T,\mathscr{B},\mu)$ mértéktér és $\mathbf{W}:L^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{B},\mu)\to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat. Tetszőleges $n\in\mathbb{N}^+$ esetén*

$$\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}}:=\{I_n^W(f)\,|\,f\in\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{B},\mu)\}\,,$$

$$\mathcal{H}_0^{\mathbf{W}}:=\{X^\bullet\,|\,X\text{ konstans}\}\,.$$

$\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}}$-t a **W** ***szerinti n-edik Itô-káosznak*** *nevezzük ($n\in\mathbb{N}$).*

2.3.2. Lemma. *Legyen μ egy véges Borel-mérték $\mathbb{R}$ felett, amely abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve, és létezik olyan $c\in\mathbb{R}^+$, hogy*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{c|x|}d\mu(x)<+\infty\,.$$

Ekkor az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ polinomfüggvények altere sűrű $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}},\mu)$-ben.

Bizonyítás. Legyen $f\in\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}},\mu)$ olyan, hogy minden $n\in\mathbb{N}$-re

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\mathrm{d}\mu(x)=0$$

teljesül. Belátjuk, hogy $f=0$ μ-majdnem mindenütt. Legyen

$$g:\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,\Re(z)<\frac{c}{2}\right\}\to\mathbb{C};\quad z\mapsto\int_{\mathbb{R}} e^{zx}f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

A paraméteres integrálok differenciálhatósági tétele alapján ([6] 31.3.1 Állítás) g holomorf függvény, továbbá $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \frac{c}{2}$ esetén

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zx)^n}{n!} f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0\,,$$

ahol az utolsó előtti egyenlőség a Lebesgue-tétel miatt teljesül, következésképpen (felhasználva [7] 5.10.1 Állítását) $g = 0$, azaz tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0\,.$$

Jelölje $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ a μ mérték Radon–Nikodym-deriváltját λ-ra nézve. Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}(x) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0\,.$$

Mivel μ véges mérték, ezért $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \mu) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$, azaz $f \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{R}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, tehát a Fourier-féle inverziós tétel alapján ([7] 14.4.7 Tétel) $f \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = 0$, azaz $f = 0$ μ-majdnem mindenütt. ■

2.3.3. Lemma. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $\mathbf{W} : \mathscr{H} \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat, és $\mathscr{G} := \sigma((\mathbf{W}(h)_{h \in \mathscr{H}}))$. Ekkor $\{e^{\mathbf{W}(h)} \,|\, h \in \mathscr{H}\}$ sűrű $L^2(\Omega, \mathscr{G})$-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $X \in L^2(\Omega, \mathscr{G})$ és $\int_{\Omega} X e^{\mathbf{W}(h)} \mathrm{d}\mathbb{P} = 0$ minden $h \in \mathscr{H}$ esetén. Belátjuk, hogy $X = 0$. $\mathbf{W}$ linearitása miatt tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$, valamint $(h_j)_{j=1}^n \in \mathscr{H}^n$ és $(t_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\int_{\Omega} X \exp\left(\sum_{j=1}^{n} t_j \mathbf{W}(h_j) \right) \mathrm{d}\mathbb{P} = 0\,, \ \blacksquare$$

tehát a

$$\nu^+ : \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}_+; \quad B \to \int_{\Omega} X^+ \chi_B(\mathbf{W}(h_j)_{j=1}^n)\, \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \text{és}$$

$$\nu^- : \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}_+; \quad B \to \int_{\Omega} X^- \chi_B(\mathbf{W}(h_j)_{j=1}^n)\, \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \text{és}$$

mértékek Laplace-transzformáltja megegyezik, tehát a Lerch-tétel alapján a két mérték egyenlő. Legyen

$$\mathscr{C} := \left\{ \{\omega \in \Omega \,|\, f(\omega) \in B,\, f = (f_j)_{j=1}^n,\, f_j \in \mathbf{W}(h_j)\, (1 \le j \le n)\} \,\middle|\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, (h_j)_{j=1}^n \in \mathscr{H}^n \right\}$$

Mivel $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{G}$, és $\mathscr{C}$ félgyűrű, a mértékkiterjesztési tétel alapján tetszőleges $G \in \mathscr{G}$-re $\int_G X \mathrm{d}\mathbb{P} = 0$, azaz $X = 0$. ■

2.3.4. Lemma. *Legyen* $\mathscr{H}$ *Hilbert-tér,* $\mathbf{W} : \mathscr{H} \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat,* $\mathscr{G} := \sigma((\mathbf{W}(h))_{h\in\mathscr{H}})$*, és minden* $n \in \mathbb{N}$*-re*

$$E_n^{\mathbf{W}} := span\left\{H_n(\mathbf{W}(h)) \mid ||h|| = 1\right\} .$$

Ekkor tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$*,* $m \neq n$ *esetén* H_n *ortogonális* H_m*-re nézve a* $(\cdot|\cdot)_{L_2(\Omega)}$ *skalárszorzás szerint, továbbá* $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n^{\mathbf{W}}$ *sűrű* $L_2(\Omega, \mathscr{G})$*-ben.*

Bizonyítás. A lemma első része a 2.2.3. Állításból következik.
A második rész bizonyításához tegyük fel, hogy $X \in L_2(\Omega, \mathscr{G})$ olyan, hogy $\mathbb{E}(XH_n(\mathbf{W}(h))) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ és $h \in \mathscr{H}$, $||h|| = 1$ esetén. Mivel – teljes indukcióval belátható, hogy – tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re

$$id_{\mathbb{R}} \in span\{H_k \,|\, 0 \leq k \leq n,\, k \in \mathbb{N}\}\,,$$

ezért $\mathbb{E}(X\mathbf{W}(h)^n) = 0$ is teljesül. A $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathbf{W}(h))^n$ sor konvergens $L^2(\Omega, \mathscr{G})$-ben minden $h \in \mathscr{H}$, ||h||=1 esetén, következésképpen a skalárszorzás folytonossága és $\mathbf{W}$ linearitása miatt minden $t \in \mathbb{R}$ és $h \in \mathscr{H}$, $||h|| = 1$ esetén $\mathbb{E}(X \exp(t\mathbf{W}(h))) = 0$, azaz X ortogonális az

$$\{e^{\mathbf{W}(h)} \,|\, h \in \mathscr{H}\}$$

altérre, tehát a 2.3.3. Lemma miatt $X = 0$. ■

2.3.5. Állítás. *Legyen* $(T, \mathscr{B}, \mu)$ *mértéktér,* $\mathbf{W} : L^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat és*

$$\mathscr{F} := \sigma((\mathbf{W}(f))_{f\in L^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{B},\mu)})$$

Ekkor
(i) minden $n, m \in \mathbb{N}$*,* $n \neq m$ *esetén* $\mathcal{H}_n$ *és* $\mathcal{H}_m$ *alterek ortogonálisak az* $L^2(\Omega)$ *tér skalárszorzatára nézve.*
(ii) minden $n \in \mathbb{N}$*-re* $\mathcal{H}_n$ *zárt* $L^2(\Omega)$*-ban (sőt* $L^2(\Omega, \mathscr{F})$*-ben is).*
(iii) $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ *sűrű* $L^2(\Omega, \mathscr{F})$*-ben.*

Bizonyítás. (i) Következik a 2.1.7. Állítás második részéből, illetve abból a tényből, hogy a skalárszorzás mindkét változójában folytonos függvény.
(ii) Az $n = 0$ esetben konstansfüggvények ekvivalenciaosztályainak halmaza zárt az $L^2(\Omega)$ térben, továbbá $\in \mathbb{N}^+$ és $f \in \mathcal{E}(T^n)$ esetén (ugyancsak a 2.1.7. Állításból adódóan)

$$||I_n^{\mathbf{W}}(f)||^2_{L^2(\Omega)} = n!||\tilde{f}^{\bullet}||^2_{L^2(T^n,\mathscr{B}^{\otimes n},\mu^n)}$$

teljesül. Az

$$I_n^{\mathbf{W}}$$

$$\mathscr{L}^2(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n) \to \mathscr{L}^2(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n); \quad f \mapsto \tilde{f}$$

$$\mathscr{L}^2(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n) \to L^2(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n); \quad f \mapsto f^{\bullet}$$

leképezések folytonossága miatt az előbb egyenlőség tetszőleges $f \in L^2(T^n, \mathscr{B}^{\otimes n}, \mu^n)$ esetén is igaz. Ebből viszont a zárt halmazok sorozatokkal való jellemzése miatt következik az állítás.
(iii) A 2.3.4. Lemma alapján elég belátni, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$E_n^{\mathbf{W}} := span\left\{ H_n(\mathbf{W}(f^\bullet)) \;\middle|\; ||f||_{\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{B},\mu)} = 1 \right\} \subseteq \mathcal{H}_n^W .$$

Legyen $f \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}, \mu)$ olyan, hogy $||f||_{\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T,\mathscr{B},\mu)} = 1$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $f^{\otimes n}$ a következő függvényt:

$$T^n \to \mathbb{R}; \quad (t_j)_{j=1}^n \mapsto \prod_{j=1}^n f(t_j)$$

Teljes indukcióval belátjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$n! H_n(\mathbf{W}(f^\bullet)) = I_n^{\mathbf{W}}(f^{\otimes n}) .$$

(I_0^W-t definiáljuk azonosan 1-nek.) Az $n = 1$ eset $\mathbf{W}$ linearitásából, folytonosságából, valamint I_1^W definíciójából és folytonosságából következik. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy minden $k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül az állítás. A 2.1.11. Következmény alapján

$$I_{n+1}^{\mathbf{W}}(f^{\otimes(n+1)}) = I_n^{\mathbf{W}}(f^{\otimes n}) I_1^{\mathbf{W}}(f) - n I_{n-1}^{\mathbf{W}}\left(f^{\otimes(n-1)} \int_T f^2(t) \mathrm{d}\mu(t) \right) =$$

$$= n! H_n(\mathbf{W}(f^\bullet))\mathbf{W}(f^\bullet) - n(n-1!)H_{n-1}(W(f^\bullet)) = (m+1)! H_{m+1}(\mathbf{W}(f^\bullet)) ,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél 2.2.2. Lemma harmadik állítását használtuk. ■

Megjegyzés. Az előző állítás bizonyításából az is kiderül – az ott bevezetett jelöléseket használva –, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $E_n^{\mathbf{W}} = \mathcal{H}_n^{\mathbf{W}}$.
Legyen ugyanis $\mathscr{H}$ Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen H_n lineáris altere $\mathscr{H}$-nak, $E_n \subseteq H_n$ pedig zárt lineáris altere $\mathscr{H}$-nak, minden $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$-re legyen H_n ortogonális H_m-re, és tegyük fel, hogy $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ sűrű $\mathscr{H}$-ban. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $x \in H_n \setminus E_n$. Ekkor tetszőleges $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n$ és $(\lambda_j)_{j=1}^N \in \mathbb{K}^N$, valamint $(h_j)_{j=1}^N \in \prod_{j=1}^N H_j$ esetén a Pitagorasz-tétel alapján

$$\left|\left| x - \sum_{j=1}^N \lambda_j . h_j \right|\right|_{\mathscr{H}}^2 = ||x - \lambda_n . h_n||_{\mathscr{H}}^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^N |\lambda_j|^2 ||h_j||_{\mathscr{H}}^2 \geq (dist(\{x\}, H_n))^2 .$$

Mivel az egyenlőtlenség jobb oldalán álló szám pozitív, ezért azt kaptuk, hogy $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ nem lehet sűrű $\mathscr{H}$-ban, következésképpen $E_n = H_n$.

3. Malliavin-derivált

Ebben a fejezetben letérünk az eddig járt útról: a Malliavin-derivált fogalmát már nem a lehető legáltalánosabban vezetjük be, az előző résszel ellentétben nem absztrakt Hilbert-terek feletti izonormális Gauss-folyamatokat tekintünk (néhány definíciótól eltekintve), hanem ennek egy speciális esetét: L^2-terek felettit. Ezt két okból tesszük: az ekvivalenciaosztályok és függvények közötti különbségtétel igencsak elbonyolítja a jelöléseket ebben az esetben, továbbá felhasználnánk a Banach-térbe érkező függvények integrálásának elméletét, az integrálelmélet ilyen általánosságban vett tárgyalása pedig általában nem képezi részét a szokásos tananyagnak.

A Malliavin-derivált fogalmának általános tárgyalása megtalálható a [10] könyv 1.2 fejezetében, Banach-térbe érkező függvények integrálelméletéről pedig a [6] könyv III. és IV. fejezete ad részletes leírást.

3.1. A Malliavin-derivált értelmezése

A továbbiakban legyen $T \in \mathbb{R}^+$ rögzített.

3.1.1. Jelölés. *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $\mathscr{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ azon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ végtelenszer differenciálható függvények halmazát, amelyeknek minden iterált parciális deriváltja polinomiálisan korlátos, azaz a*

$$\Big\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \,\Big|\, (\forall N \in \mathbb{N})(\forall \sigma : \{j \in \mathbb{N} \,|\, 1 \le j \le N\} \to \{j \in \mathbb{N} \,|\, 1 \le j \le n\} \textit{ függvényre})$$

$$(\exists K, C \in \mathbb{R}^+)(\exists (k_j)_{j=1}^n \in \mathbb{N}^n) :$$

$$\Big(((x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n) \wedge (\|(x_j)_{j=1}^n\| \le K \Big) \Rightarrow |\partial_\sigma f((x_j)_{j=1}^n)| \le C \prod_{j=1}^n |x_j|^{k_j}) \Big\}$$

halmazt.

Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^n$-be érkező X valószínűségi változó esetén $f \circ X^\bullet := (f \circ X)^\bullet$. Ez valóban jól definiált, ugyanis ha X' olyan $\mathbb{R}^n$-be érkező valószínűségi változó, hogy $X'^\bullet = X^\bullet$, akkor $[f \circ X \neq f \circ X'] \subseteq [X \neq X']$, az utóbbi halmaz pedig $\mathbb{P}$-szerint 0-mértékű.

3.1.2. Definíció. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert tér, $\mathbf{W} : \mathscr{H} \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat.*

$$\mathbb{S}^{\mathbf{W}} := \left\{ f((\mathbf{W}(h_j))_{j=1}^n) \,|\, n \in \mathbb{N},\, f \in \mathscr{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),\, (h_j)_{j=1}^n \in \mathscr{H}^n \right\}.$$

3.1.3. Megjegyzés. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert tér, $\mathbf{W} : \mathscr{H} \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat. Ekkor $\mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ sűrű $L^2(\Omega)$-ban.*

Bizonyítás. Legyen $X \in L^2(\Omega)$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. A 2.3.3. Lemma szerint létezik olyan $h \in \mathscr{H}$, hogy $||X - e^{\mathbf{W}(h)}||_{L^2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$. A Lebesgue-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre

$$\left|\left|e^{\mathbf{W}(h)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbf{W}(h)^k}{k!}\right|\right|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Mivel $F := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\mathbf{W}(h)^k}{k!} \in \mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ és $||F - X||_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$, adódik az állítás. ■

3.1.4. Definíció. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat,* $F \in \mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ *és* $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}_p^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $(\varphi_j)_{j=1}^n \in (L^2([0,T]))^n$ *olyanok, hogy* $F = f((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^n)$. *Ekkor*

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) := \sum_{j=1}^{n} \partial_j f((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^n) \otimes \varphi_j \,.$$

$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)$*-t az* F *(*$\mathbf{W}$ *szerinti)* ***Malliavin-deriváltjának*** *nevezzük.*

Megjegyzés. Az előbbi jelöléseket használva $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)$ jóldefiniált, ugyanis ha $m \in \mathbb{N}^+$, $m > n$ és $g \in \mathscr{C}_p^{\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, valamint $(\varphi_j)_{j=1}^m \in (L^2([0,T]))^m$ olyanok, hogy $f((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^n) = g((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^m)$, akkor $\partial_j g = 0$ minden $n \le j \le m$, $j \in \mathbb{N}$ esetén.

3.1.5. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat* $F \in \mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ *és* $\varphi \in L^2([0,T])$. *Ekkor*

$$\mathbb{E}((\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,|\, \varphi)_{L^2([0,T])}) = \mathbb{E}(F\mathbf{W}(\varphi)) \,.$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $F = f((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^n)$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$, $f \in \mathscr{C}_p^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\varphi_1 = \varphi$, és $(\varphi_j)_{j=1}^n$ ortonormált rendszer $L^2([0,T])$-ben. (Az előző megjegyzés alapján, illetve az eredeti $(\varphi_j)_{j=1}^n$ rendszer alkalmas lineáris transzformáltját véve, f-et pedig komponálva ezen lineáris transzformáció inverzével.) Jelölje ϕ_n az n-dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényét, azaz az

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad (x_j)_{j=1}^n \mapsto (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)$$

függvényt, $\phi_n^{\bullet}$ pedig az ekvivalenciaosztályát. Ekkor

$$\mathbb{E}((\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,|\, \varphi)_{L^2([0,T])}) = \mathbb{E}\bigg(\int\limits_{[0,T]} \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^n)\varphi_j\varphi_1 \mathrm{d}\lambda \bigg) = \mathbb{E}\Big((\partial_1 f)((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^n)\Big) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_1 f)\phi_n^{\bullet} \mathrm{d}\lambda_n = \mathbb{E}\left(f((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^n)\mathbf{W}(\varphi_1)\right) = \mathbb{E}(F\mathbf{W}(\varphi)) \,,$$

ahol kihasználtuk azt a tényt, hogy ha $\eta \in \mathscr{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, akkor a parciális integrálás formulája alapján, bevezetve a $\mathbf{x} := (x_j)_{j=1}^n$ jelölést:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_1 \eta)\phi_n \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\partial_1 \phi_n)\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x})x_1 \mathrm{d}\lambda_n(\mathbf{x}) \,. \blacksquare$$

Az előző állítás jelöléseit használva a Malliavin-derivált definíciója alapján kapjuk, hogy tetszőleges $F, G \in \mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ esetén $FG \in \mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ (tehát $\mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ algebra) és

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(FG) = \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)G + F\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G) \,.$$

Itt a jobb oldalon álló jelölés magyarázatra szorul. A korábbiak alapján feltehető, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, továbbá egy $L^2([0,T])$-beli $(\varphi_j)_{j=1}^n$ és $f, g \in \mathscr{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, hogy $F = f((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^n)$, valamint $G = g((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^n)$. Ekkor

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)G := \sum_{j=1}^n (\partial_j f)((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^n) g((\mathbf{W}(\varphi_j))_{j=1}^n) \otimes \varphi_j \in L^2(\Omega \times [0,T]) \,.$$

Tehát az előző állítást alkalmazva FG-re:

3.1.6. Következmény. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat,* $F, G \in \mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ *és* $\varphi \in L^2([0,T])$. *Ekkor*

$$\mathbb{E}(G(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,|\, \varphi)_{L^2([0,T])}) = \mathbb{E}(FG\mathbf{W}(\varphi)) - \mathbb{E}(F(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G) \,|\, \varphi)_{L^2([0,T])}) \,.$$

3.1.7. Lemma. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat és* $\mathscr{F} := \sigma((\mathbf{W}(f))_{f \in L^2([0,T])})$. *Ekkor*

$$\mathbb{S}^{\mathbf{W}} \otimes L^2([0,T]) := span\{G \otimes \varphi \in L^2(\Omega \times [0,T]) \,|\, G \in \mathbb{S}^{\mathbf{W}},\ \varphi \in L^2([0,T])\}$$

sűrű $L^2(\Omega \times [0,T], \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}_{[0,T]})$*-ben.*

Bizonyítás. A 3.1.3. Megjegyzés miatt $\mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ sűrű $L^2(\Omega, \mathscr{F})$-ben, tehát a szorzatmérték végessége (σ-végessége) miatt elég belátni, hogy minden $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}_{[0,T]}$-beli halmaz karakterisztikus függvénye tetszőlegesen közelíthető ($||\cdot||_{\mathscr{L}^2(\Omega\times[0,T])}$ szerint) $\chi_A \otimes \chi_B \in \mathscr{L}^2(\Omega \times [0,T])$ alakú függvények lineáris kombinációjával, ahol $A \in \mathscr{F}$, $B \in \mathscr{B}_{[0,T]}$. A szorzatmérték definíciója alapján tetszőleges $C \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}_{[0,T]}$ esetén

$$(\mathbb{P}\times\lambda|_{[0,T]})(C) = \inf\left\{\sum_{k=0}^\infty (\mathbb{P}(A_k)\lambda(B_k)) \,|\, A_k \in \mathscr{F} \text{ és } B_k \in \mathscr{B}_{[0,T]}\ (\forall k \in \mathbb{N})\,, C \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k \times B_k)\right\} ,$$

tehát – ismét kihasználva a szorzatmérték végességét – tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, és $(A_k)_{k=0}^n$ $\mathscr{F}$-beli, $(B_k)_{k=0}^n$ $\mathscr{B}_{[0,T]}$-beli halmazok rendszere, hogy

$$||\chi_C - \sum_{k=0}^n (\chi_{A_k} \otimes \chi_{B_k})||_{\mathscr{L}^2(\Omega\times[0,T])} < \varepsilon \,. \blacksquare$$

3.1.8. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat és* $\mathscr{F} := \sigma((\mathbf{W}(f))_{f\in L^2([0,T])})$. *Ekkor a* $\mathbf{D}^{\mathbf{W}} : L^2(\Omega,\mathscr{F}) \rightarrowtail L^2(\Omega\times[0,T])$ *operátor lezárható.*

Bizonyítás. Legyen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathbb{S}^{\mathbf{W}}$-ben haladó zérussorozat, amelyre teljesül, hogy $(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens $L^2(\Omega\times[0,T])$-ben, jelölje a határértékét ψ. Legyen $G\in\mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ és $\varphi\in L^2([0,T])$ tetszőleges. Ekkor a 3.1.5. Állítás bizonyításában szereplő gondolatmenet alapján $(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G)|\varphi)_{L^2([0,T])}\in L^2(\Omega,\mathscr{F})$, továbbá $\mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ definíciójából adódóan $G\mathbf{W}(\varphi)\in L^2(\Omega,\mathscr{F})$, következésképpen

$$\mathbb{E}((\psi\,|\,G\otimes\varphi)_{L^2([0,T])}) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}((F_n\,|\,G\otimes\varphi)_{L^2([0,T])}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\big(\mathbb{E}(F_nG\mathbf{W}(\varphi)) - \mathbb{E}(F_n(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])})\big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(F_nG\mathbf{W}(\varphi)) - \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(F_n(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])}) = 0\,,$$

tehát az előző lemma alapján $\psi = 0$. ■

3.1.9. Jelölés. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat. A továbbiakban* $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}$ *alatt az*

$$\mathbb{S}^{\mathbf{W}} \to L^2(\Omega\times[0,T]);\quad F\mapsto \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)$$

operátor lezártját értjük, és $\mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}} := Dom(\mathbf{D}^{\mathbf{W}})$.

Az 1.3.4. Megjegyzés alapján – a fenti jelöléseket használva –, $L^2(\Omega\times[0,T])$ teljességéből adódóan

$$\mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}} = \Big\{X\in L^2(\Omega)\,|\,(\exists (X_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{S}^{\mathbf{W}})^{\mathbb{N}}) : ||X_n - X||_{L^2(\Omega)}\to 0\,(n\to\infty)$$

$$\text{és } (\mathbf{D}^{W}(F_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy } L^2(\Omega\times[0,T])\text{-ben}\Big\}$$

3.1.10. Definíció. *Legyen* $u\in L^2(\Omega\times[0,T])$. *Tetszőleges* $\xi\in u$ *esetén az*

$$[0,T]\to L^2(\Omega);\quad t\mapsto(\xi(\cdot,t))^{\bullet}$$

leképezést (sztochasztikus folyamatot) az u egy ***reprezentánsának*** *nevezzük.*

Példa. Legyen $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat, $F\in\mathbb{S}^{\mathbf{W}}$, továbbá $n\in\mathbb{N}$, $f\in\mathscr{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $(\psi_j)_{j=1}^n\in(\mathscr{L}^2([0,T]))^n$ olyanok, hogy $F = f((\mathbf{W}(\psi_j^\bullet))_{j=1}^n)$. Ekkor a

$$t\mapsto\sum_{j=1}^n\partial_j f((\mathbf{W}(\psi_j^\bullet))_{j=1}^n)\otimes\psi_j(t)$$

sztochasztikus folyamat $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)$ egy reprezentánsa.

3.1.11. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat* $F\in\mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ *és* $\varphi\in L^2([0,T])$. *Ekkor*

$$\mathbb{E}((\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])}) = \mathbb{E}(F\mathbf{W}(\varphi))\,.$$

Bizonyítás. Legyen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{S}^{\mathbf{W}}$-ben haladó sorozat, amelyre

$$||F_n - F||_{L^2(\Omega)} \to 0\,(n\to\infty) \quad \text{és} \quad ||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n) - \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)||_{L^2(\Omega\times[0,T])} \to 0\,(n\to\infty)$$

Ekkor

$$\mathbb{E}((\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}((\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(F_n\mathbf{W}(\varphi)) = \mathbb{E}(F\mathbf{W}(\varphi))\,. \blacksquare$$

3.1.12. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat,* $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$*,* $G \in \mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ *és* $\varphi \in L^2([0,T])$*. Ekkor*

$$\mathbb{E}(G(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])}) = \mathbb{E}(FG\mathbf{W}(\varphi)) - \mathbb{E}(F(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])})\,.$$

Bizonyítás. A 3.1.5. Következmény és az operátor lezártjának definíciója segítségével, az előző állításhoz hasonlóan bizonyítható. ■

3.2. A Malliavin-derivált tulajdonságai

3.2.1. Jelölés. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat, valamint* $\mathscr{F} := \sigma((\mathbf{W}(f))_{f\in L^2([0,T])})$*. Tetszőleges* $H \subseteq L^2(\Omega,\mathscr{F})$ *és* $G \subseteq L^2([0,T])$ *esetén legyen:*

$$H \otimes G := span\{h\otimes g \in L^2(\Omega\times[0,T])\,|\,h\in H,\, g\in G\}$$

$$H \mathbin{\widehat{\otimes}} G := \overline{span}\{h\otimes g \in L^2(\Omega\times[0,T])\,|\,h\in H,\, g\in G\}$$

$$\widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} := cl\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}}\right).$$

Legyen $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat, $\mathscr{F} := \sigma((\mathbf{W}(f))_{f\in L^2([0,T])})$. A Fubini-tétel segítségével belátható, hogy $L^2(\Omega\times[0,T],\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}_{[0,T]}) = L^2(\Omega,\mathscr{F}) \mathbin{\widehat{\otimes}} L^2([0,T])$. Teljesülnek továbbá a

$$\widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\left(\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \otimes L^2([0,T])\right) \subseteq \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\left(\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \mathbin{\widehat{\otimes}} L^2([0,T])\right) \subseteq L^2(\Omega\times[0,T],\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}_{[0,T]})$$

$$\left(\widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}}\right) \otimes L^2([0,T]) \subseteq \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\left(\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \otimes L^2([0,T])\right)$$

tartalmazások, és az utolsó halmaz zártsága miatt

$$L^2(\Omega,\mathscr{F}) \mathbin{\widehat{\otimes}} L^2([0,T]) = \left(\widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}}\right) \mathbin{\widehat{\otimes}} L^2([0,T]) \subseteq \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\left(\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \otimes L^2([0,T])\right)$$

is teljesül, következésképpen

$$L^2(\Omega\times[0,T],\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}_{[0,T]}) = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}}\left(\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \mathbin{\widehat{\otimes}} L^2([0,T])\right).$$

3.2.2. Jelölés. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat, illetve* $\mathscr{F} := \sigma((\mathbf{W}(f))_{f\in L^2([0,T])})$. *Tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *esetén jelölje* J_n, *illetve* $\mathcal{J}_n$ *az* $L^2(\Omega) \to \mathcal{H}_n^{\mathbf{W}}$, *illetve* $L^2 \to \mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \widehat{\otimes} L^2([0,T])$ *ortogonális projekciókat.*

3.2.3. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat, és jelölje* $\mathscr{F}$ *a* $\sigma((\mathbf{W}(f))_{f\in L^2([0,T])})$ σ*-algebrát. Ekkor a következők teljesülnek:*
(i) Minden $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \subseteq \mathbb{D}^{1,2}$, *továbbá tetszőleges* $n \in \mathbb{N}^+$ *és* $f \in \mathscr{L}^2([0,T]^n)$*-re*

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(I_n(f)) \in \mathcal{H}_{n-1}^{\mathbf{W}} \widehat{\otimes} L^2([0,T]) .$$

(ii) $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ *esetén minden* $n \in \mathbb{N}$*-re*

$$\mathcal{J}_n(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)) = \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(J_{n+1}(F)) .$$

(iii) $F \in L^2(\Omega)$ *esetén* $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ *pontosan akkor teljesül ha a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n||J_n(F)||^2_{L^2(\Omega)}$ *sorösszeg véges, és ekkor*

$$||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)||^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \sum_{n=0}^{\infty} n||J_n(F)||^2_{L^2(\Omega)} .$$

Bizonyítás. (*i*) A $\mathcal{H}_0^{\mathbf{W}} \subseteq \mathbb{S}^W \subseteq \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ tartalmazás az előbbi halmazok definíciója alapján teljesül. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $(A_j)_{j=1}^n \in (\mathscr{B}_{[0,T]})^n$, továbbá $f := \chi_{\prod\limits_{j=1}^{n} A_j}$. Ekkor

$$I_n^{\mathbf{W}}(f) = \prod_{j=1}^{n} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_j}) ,$$

következésképpen, ha $n \geq 2$, akkor

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(I_n^{\mathbf{W}}(f)) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \mathbf{W}(\chi^\bullet_{A_k}) \Big) \otimes \chi^\bullet_{A_j} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} I_{n-1}\Big(\chi_{\prod\limits_{j=1}^{n-1} A_{\sigma j}}\Big) \otimes \chi_{A_{\sigma(j)}} ,$$

valamint $n = 1$ esetén

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(I_1^{\mathbf{W}}(f)) = \chi^\bullet_\Omega \otimes \chi^\bullet_{A_1} .$$

Az $I_n^{\mathbf{W}}$ és $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}$ leképezések linearitása miatt tetszőleges $g \in \mathcal{E}([0,T]^n)$ esetén, a Fubini-tétel és a 2.1.7. Állítás alapján

$$||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(I_n^{\mathbf{W}}(g))||^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \int\limits_{[0,T]} ||nI_{n-1}^{\mathbf{W}}(\tilde{g}(.,t))||^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}\lambda(t) =$$

$$= \int\limits_{[0,T]} n^2(n-1)!||\tilde{g}(.,t))||^2_{L^2([0,T]^{n-1})} \mathrm{d}\lambda(t) = n \cdot n!||\tilde{g}||^2_{L^2([0,T]^n)} = n||I_n^{\mathbf{W}}(g)||^2_{L^2(\Omega)} . \quad (3.1)$$

Az $I_n^{\mathbf{W}}$ leképezés folytonossága, $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}$ operátor zártsága és a 2.1.2. Állítás miatt $\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \subseteq \mathbb{D}_{\mathbf{W}}^{1,2}$, továbbá a $\mathcal{H}_{n-1}^{\mathbf{W}} \widehat{\otimes} L^2([0,T])$ altér zártsága miatt az állítás második fele is következik.

(*ii*) Legyen $F \in \mathbb{D}_{\mathbf{W}}^{1,2}$, $n \in \mathbb{N}$ és $G \in I_n^{\mathbf{W}}\langle \mathcal{E}([0,T]^n)\rangle \subseteq \mathbb{S}^{\mathbf{W}}$, továbbá $\varphi \in L^2([0,T])$. Ekkor a 3.1.12. Állítás alapján, kihasználva, hogy $G\mathbf{W}(\varphi) \in \bigoplus_{j=0}^{n+1} \mathcal{H}_j$ (lásd 2.1.11. Következmény) és $n \geq 1$ esetén $\mathbb{D}^{\mathbf{W}}(G) \in \mathcal{H}_{n-1}^{\mathbf{W}}$, továbbá bevezetve az $F_{n+1} := \sum_{k=0}^{n+1} J_k(F)$ jelölést

$$(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,|\, G \otimes \varphi)_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \mathbb{E}(FG\mathbf{W}(\varphi)) - \mathbb{E}(F(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G) \,|\, \varphi)_{L^2(\Omega)}) =$$
$$= \mathbb{E}(F_{n+1}G\mathbf{W}(\varphi)) - \mathbb{E}(F_{n+1}(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G) \,|\, \varphi)_{L^2(\Omega)}) = (\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_{n+1}) \,|\, G \otimes \varphi)_{L^2(\Omega\times[0,T])} \,.$$

Mivel $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(J_k(F))$ és (*i*) alapján minden $k \in \mathbb{N}^+$ és $k \leq n+1$ esetén $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(J_k(F)) \in \mathcal{H}_{k-1}^{\mathbf{W}} \widehat{\otimes} L^2([0,T])$, ezért

$$(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,|\, G \otimes \varphi)_{L^2(\Omega\times[0,T])} = (\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(J_{n+1}(F)) \,|\, G \otimes \varphi)_{L^2(\Omega\times[0,T])} \,,$$

tehát – hivatkozva arra, hogy $I_n^{\mathbf{W}}\langle \mathcal{E}([0,T]^n)\rangle \otimes L^2([0,T])$ sűrű $\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \widehat{\otimes} L^2([0,T])$-ben – kapjuk, hogy $\mathcal{J}_n(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)) = \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(J_{n+1}(F))$.

(*iii*) Legyen $F \in \mathbb{D}_{\mathbf{W}}^{1,2}$. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az $I_n^{\mathbf{W}}$ leképezés folytonossága, valamint a $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}$ operátor zártsága miatt a 3.1. egyenlőség minden $g \in \mathscr{L}^2([0,T])$ esetén teljesül. Ez alapján

$$||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)||^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \sum_{n=0}^{\infty} ||\mathcal{J}_n(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F))||^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \sum_{n=0}^{\infty} ||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(J_n(F))||^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} n||J_n(F)||^2_{L^2(\Omega)} \,.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy $F \in L^2(\Omega)$, és a $\sum_{n=0}^{\infty} n||J_n(F)||^2_{L^2(\Omega)}$ sorösszeg véges. Ekkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} J_n(F)$ sor $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ szerint konvergál F-hez, továbbá a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(J_n(F))$ sor Cauchy $L^2(\Omega \times [0,T])$-ben, tehát $F \in \mathbb{D}_{\mathbf{W}}^{1,2}$. ■

Megjegyzés. Legyen $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f \in \mathcal{E}([0,T]^n)$. Az előző állítás (*i*) részének bizonyításából (illetve $I_n^{\mathbf{W}}$ és $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}$ linearitásából) következik, hogy ha $D_\cdot^{\mathbf{W}}(I_n^{\mathbf{W}}(f))$ a $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(I_n^{\mathbf{W}}(f))$ egy reprezentánsa, akkor λ-majdnem minden $t \in [0,T]$ esetén

$$D_t^{\mathbf{W}}(I_n^{\mathbf{W}}(f)) = nI_{n-1}^{\mathbf{W}}\Big(\widetilde{f}(\cdot,t)\Big) \,. \tag{3.2}$$

Mivel a 3.1. egyenlőség tetszőleges $g \in \mathscr{L}^2([0,T])$ esetén is teljesül, a $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}$ leképezés folytonos a $\mathcal{H}_n$ altéren, ezért – az $I_{n-1}^{\mathbf{W}}$ leképezés folytonosságát kihasználva – a 3.2. egyenlőség tetszőleges $f \in \mathscr{L}^2([0,T]^n)$ esetén is teljesül. $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}$ zártságából adódóan kapjuk a következőt:

3.2.4. Következmény. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat és* $F \in L^2(\Omega)$, *továbbá minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $f_n \in \mathscr{L}^2([0,T]^n)$ *olyan, hogy* $F = \sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n^{\mathbf{W}}(f_n)$, *ahol a határérték a* $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ *norma szerint értendő.* $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ *pontosan akkor teljesül ha a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n||I_n(f_n)||_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} n||\widetilde{f}_n||_{\mathscr{L}^2([0,T]^n)}$$

sörösszeg véges. Továbbá, ha $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ *és* $D^{\mathbf{W}}_{\cdot}(F)$ *jelöli a* $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)$ *egy reprezentánsát, akkor* λ*-majdnem minden* $t \in [0,T]$ *esetén*

$$D_t^{\mathbf{W}}(F) = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}^{\mathbf{W}}\left(\widetilde{f}_n(\cdot, t)\right),$$

ahol a határérték a $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ *norma szerint értendő.*

3.2.5. Lemma. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat,* $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ *és* $\varphi \in \mathscr{L}^2([0,T])$. *Ekkor* $F\mathbf{W}(\varphi^\bullet) \in L^2(\Omega)$.

Bizonyítás. A feltétel és a 3.2.3. Állítás alapján a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n||J_n(F)||^2_{L^2(\Omega)}$ sörösszeg véges. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathscr{L}^2([0,T]^n)$ olyan, hogy $J_n(F) = I_n^{\mathbf{W}}(f_n)$. Ekkor a 2.1.11. Következmény miatt tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$J_n(F)\mathbf{W}(\varphi^\bullet) = I_{n+1}^{\mathbf{W}}(f_n \otimes \varphi) + nI_{n-1}^{\mathbf{W}}(\tilde{f}_n \otimes_1 \varphi).$$

A 2.1.7. Állítás és a $\tilde{}$ leképezés norma nem-növelő tulajdonsága alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||I_{n+1}^{\mathbf{W}}(f_n \otimes \varphi)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)!||f_n \otimes \varphi||^2_{\mathscr{L}^2([0,T]^{n+1})} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)!||f_n||^2_{\mathscr{L}^2([0,T]^n)}||\varphi||^2_{\mathscr{L}^2([0,T])} =$$

$$= ||\varphi||^2_{\mathscr{L}^2([0,T])} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)||I_n^{\mathbf{W}}(f_n)||^2_{L^2(\Omega)} \leq 2||\varphi||^2_{\mathscr{L}^2([0,T])} \sum_{n=1}^{\infty} n||J_n(F)||^2_{L^2(\Omega)} =$$

$$= 2||\varphi||^2_{\mathscr{L}^2([0,T])}||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)||^2_{L^2(\Omega \times [0,T])},$$

és hasonlóan

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||nI_{n-1}^{\mathbf{W}}(\tilde{f}_n \otimes_1 \varphi)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2(n-1)!||\tilde{f}_n \otimes_1 \varphi||^2_{L^2([0,T]^{n-1})} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n!||\tilde{f}_n||^2_{L^2([0,T]^n)}||\varphi||^2_{L^2([0,T])} = ||\varphi||^2_{L^2([0,T])} \sum_{n=1}^{\infty} n||I_n^{\mathbf{W}}(f_n)||^2_{L^2(\Omega)} =$$

$$= ||\varphi||^2_{L^2([0,T])}||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)||^2_{L^2(\Omega \times [0,T])}.$$

Tehát a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} I^{\mathbf{W}}_{n+1}(\tilde{f}_n \otimes \varphi)$ és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} nI^{\mathbf{W}}_{n-1}(\tilde{f}_n \otimes_1 \varphi)$ vektorsorok konvergensek $L^2(\Omega)$-ban, következésképpen a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n(F)\mathbf{W}(\varphi^\bullet)$ sor is konvergens $L^2(\Omega)$-ban, elég belátnunk, hogy az összege $F\mathbf{W}(\varphi^\bullet)$. Valóban, a Cauchy – Schwarz-egyenlőtlenség miatt

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\Big|\sum_{k=0}^{n} J_n(F)\mathbf{W}(\varphi^\bullet) - F\mathbf{W}(\varphi^\bullet)\Big|\right) \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}\left(\Big|\sum_{k=0}^{n} J_n(F) - F\Big|^2\right)\mathbb{E}\left(\mathbf{W}(\varphi^\bullet)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 0\,,$$

tehát a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n(F)\mathbf{W}(\varphi^\bullet)$ sor a $||\cdot||_{L^1(\Omega)}$ norma szerint konvergál $F\mathbf{W}(\varphi^\bullet)$-hez, így a $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ norma szerint is $F\mathbf{W}(\varphi^\bullet)$-hez konvergál (ez a következtetés szintén a Cauchy – Schwarz-egyenlőtlenség, valamint a $\mathbb{P}(\Omega) < \infty$ felhasználásával látható be), tehát $F\mathbf{W}(\varphi^\bullet) \in L^2(\Omega)$. ■

3.2.6. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat,* $F, G \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ *és* $\varphi \in L^2([0,T])$. *Ekkor*

$$\mathbb{E}(G(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])}) = \mathbb{E}(FG\mathbf{W}(\varphi)) - \mathbb{E}(F(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])})\,.$$

Bizonyítás. Legyen $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{S}^{\mathbf{W}}$-ben haladó sorozat, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} ||G_n - G||_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} ||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G_n) - \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G)||_{L^2(\Omega\times[0,T])} = 0$$

teljesül. Az előző lemma alapján $F\mathbf{W}(\varphi) \in L^2(\Omega)$, így

$$\mathbb{E}(G(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(G_n(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(FG_n\mathbf{W}(\varphi)) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(F(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G_n)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])}) =$$

$$= \mathbb{E}(FG\mathbf{W}(\varphi)) - \mathbb{E}(F(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G)\,|\,\varphi)_{L^2([0,T])})\,. \blacksquare$$

3.2.7. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat, jelölje* $\mathscr{F}$ *a* $\sigma((\mathbf{W}(f))_{f\in L^2([0,T])})$ σ*-algebrát, továbbá legyen* $A \in \mathscr{B}_{[0,T]}$, $\mathscr{F}_A := \sigma((\mathbf{W}(\chi^\bullet_B))_{B\subseteq A, B\in\mathscr{B}_{[0,T]}})$, $\chi^{\otimes n}_A := \chi_{\prod\limits_{j=1}^{n} A}$ *és* $F \in L^2(\Omega, \mathscr{F})$, *és minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $f_n \in \mathscr{L}^2([0,T]^n)$ *olyan, hogy* $F = \sum\limits_{n=0}^{\infty} I^{\mathbf{W}}_n(f_n)$, *ahol a határérték a* $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ *norma szerint értendő. Ekkor*

$$\mathbb{E}(F\,|\,\mathscr{F}_A) = \sum_{n=0}^{\infty} I^{\mathbf{W}}_n\Big(f_n \cdot \chi^{\otimes n}_A\Big)\,,$$

ahol a határérték szintén a $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ *norma szerint értendő. Továbbá, ha* $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, *akkor* $\mathbb{E}(F|\mathscr{F}_A) \in \mathbb{D}^{1,2}$ *és ha* $D^{\mathbf{W}}_{\cdot}$ *jelöli a megfelelő Malliavin-deriváltak egy reprezentánsát, akkor* λ*-majdnem minden* $t \in [0,T]$ *esetén*

$$D^{\mathbf{W}}_t(\mathbb{E}(F\,|\,\mathscr{F}_A)) = \mathbb{E}(D^{\mathbf{W}}_t(F)\,|\,\mathscr{F}_A)\chi_A(t)\,.$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $(A_j)_{j=1}^n$ olyan $\mathscr{B}_{[0,T]}$-beli halmazrendszer, amelynek minden tagjára teljesül, hogy diszjunkt A-tól vagy része A-nak. Ekkor a feltételes várható érték tulajdonságai alapján

$$\mathbb{E}\Big(I_n^{\mathbf{W}}(\chi_{\prod_{j=1}^n A_j})\,\Big|\,\mathscr{F}_A\Big) =$$

$$= \mathbb{E}\Big(\prod_{j=1}^n \mathbf{W}(\chi_{A_j}^{\bullet}))\,\Big|\,\mathscr{F}_A\Big) = \begin{cases} \prod_{j=1}^n \mathbf{W}(\chi_{A_j}^{\bullet}) & \text{, ha minden } j \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le n \text{ esetén } A_j \subseteq A \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Mivel tetszőleges $f \in \mathcal{E}([0,T]^n)$ felírható úgy, hogy az összeadandóiban szereplő karakterisztikus függvények a fenti tulajdonsággal rendelkezzenek, ezért $I_n^{\mathbf{W}}$ linearitása miatt

$$\mathbb{E}(I_n^{\mathbf{W}}(f)\,|\,\mathscr{F}_A) = I_n^{\mathbf{W}}(f \cdot \chi_A^{\otimes n})\,.$$

Mivel $\mathcal{E}([0,T]^n)$ sűrű $\mathscr{L}^2([0,T]^n)$-ben, az I_n, továbbá a feltételes várható érték, és a $\chi_A^{\otimes n}$-nel való szorzás operátor folytonossága miatt az előző egyenlőség teljesül tetszőleges $f \in \mathscr{L}^2([0,T]^n)$ esetén is. Ismét kihasználva a feltételes várható érték folytonosságát

$$\mathbb{E}(F\,|\,\mathscr{F}_A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(I_n^{\mathbf{W}}(f)\,|\,\mathscr{F}_A) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^{\mathbf{W}}\Big(f_n \cdot \chi_A^{\otimes n}\Big)\,.$$

Az állítás második felének bizonyításához jelölje $D_\cdot^{\mathbf{W}}$ a megfelelő Malliavin-deriváltak egy reprezentánsát, és tegyük fel, hogy $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Az imént bizonyítottak miatt $\mathbb{E}(F\,|\,\mathscr{F}_A) \in \mathbb{D}^{1,2}$, továbbá felhasználva a 3.2.4. Következményt, λ-majdnem minden $t \in [0,T]$ esetén

$$D_t^{\mathbf{W}}(\mathbb{E}(F\,|\,\mathscr{F}_A)) = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}^{\mathbf{W}}(\tilde{f}_n \cdot \chi_A^{\otimes n}) = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}^{\mathbf{W}}(\tilde{f}_n \cdot \chi_A^{\otimes(n-1)})\chi_A(t) = \mathbb{E}(D_t^{\mathbf{W}}\,|\,\mathscr{F}_A)\chi_A(t)\,,$$

ahol a második egyenlőségnél kihasználtuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén I_n folytonos. ■

3.2.8. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat,* $n \in \mathbb{N}^+$, *illetve* $\varphi \in \mathscr{C}_p^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *olyan, hogy minden* $N \in \mathbb{N}^+$ *és*

$$\sigma : \{j \in \mathbb{N}\,|\,1 \le j \le N\} \to \{j \in \mathbb{N}\,|\,1 \le j \le n\}$$

esetén $\partial_\sigma \varphi$ *korlátos, továbbá* $(F_j)_{j=1}^n$ *egy* $\mathbb{D}_{\mathbf{W}}^{1,2}$*-beli rendszer. Ekkor* $\varphi((F_j)_{j=1}^n) \in \mathbb{D}_{\mathbf{W}}^{1,2}$ *és*

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(\varphi((F_j)_{j=1}^n)) = \sum_{j=1}^n \partial_j \varphi((F_k)_{k=1}^n)\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)\,.$$

Bizonyítás. (*I*) Tegyük fel, hogy $(F_j)_{j=1}^n$ egy $\mathbb{S}^{\mathbf{W}}$-beli rendszer. Belátjuk, hogy ebben a speciális esetben teljesül az állítás. Feltehető, hogy létezik olyan $q \in \mathbb{N}$, valamint $\mathscr{C}_p^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$-beli $(f_j)_{j=1}^n$ és $L^2([0,T])$-beli $(h_i)_{i=1}^q$ rendszerek, hogy tetszőleges $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le n$ esetén $F_j = f_j((\mathbf{W}(h_i))_{i=1}^q)$. Ekkor $\varphi((F_j)_{j=1}^n) \in \mathbb{S}^{\mathbf{W}}$ és

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(\varphi((F_k)_{k=1}^n)) = \sum_{i=1}^q \partial_i(\varphi \circ (f_k)_{k=1}^n)((\mathbf{W}(h_l))_{l=1}^q) \otimes h_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi((f_k((\mathbf{W}(h_l))_{l=1}^q))_{k=1}^n) \partial_i f_j((\mathbf{W}(h_l))_{l=1}^q) \otimes h_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi((f_k((\mathbf{W}(h_l))_{l=1}^q))_{k=1}^n) \sum_{i=1}^{q} \partial_i f_j((\mathbf{W}(h_l))_{l=1}^q) \otimes h_i = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi((F_k)_{k=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)$$

(II) Most feloldjuk az előző részben tett megkötést. Tetszőleges $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le n$ esetén legyen $(F_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{S}^{\mathbf{W}}$-ben haladó sorozat, hogy

$$\lim_{k \to \infty} ||F_{j,k} - F_j||_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{k \to \infty} ||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_{j,k}) - \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)||_{L^2(\Omega \times [0,T])} = 0\,.$$

Ekkor tetszőleges $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le n$ esetén

$$\limsup_{k \to \infty} ||\partial_j \varphi((F_{i,k})_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_{j,k}) - \partial_j \varphi((F_i)_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)||_{L^2(\Omega \times [0,T])} \le$$

$$\le \limsup_{k \to \infty} ||\partial_j \varphi((F_{i,k})_{i=1}^n)||_{L^\infty(\Omega)} ||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_{j,k}) - \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)||_{L^2(\Omega \times [0,T])} +$$

$$+ \limsup_{k \to \infty} ||(\partial_j \varphi((F_{i,k})_{i=1}^n) - \partial_j \varphi((F_i)_{i=1}^n)) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)||_{L^2(\Omega \times [0,T])} =$$

$$= \limsup_{k \to \infty} ||(\partial_j \varphi((F_{i,k})_{i=1}^n) - \partial_j \varphi((F_i)_{i=1}^n)) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)||_{L^2(\Omega \times [0,T])} = 0\,,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél a Lebesgue-tételt használtuk. Azt kaptuk, hogy

$$\limsup_{k \to \infty} || \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi((F_{i,k})_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_{j,k}) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi((F_i)_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)||_{L^2(\Omega \times [0,T])} = 0\,,$$

tehát az operátor lezártjának definíciója, és a bizonyítás első része alapján $\varphi((F_j)_{j=1}^n) \in \mathbb{D}_{\mathbf{W}}^{1,2}$ és

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(\varphi((F_j)_{j=1}^n)) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi((F_i)_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)\,. \blacksquare$$

3.2.9. Lemma. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat, jelölje* $\mathscr{F}$ *a* $\sigma((\mathbf{W}(f))_{f \in L^2([0,T])})$ σ*-algebrát, továbbá legyen* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *egy* $\mathbb{D}_{\mathbf{W}}^{1,2}$*-ben haladó sorozat,* $F \in L^2(\Omega)$*, és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{n \to \infty} ||F_n - F||_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \textit{és} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} ||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n)||_{L^2(\Omega \times [0,T])} < \infty$$

Ekkor $F \in \mathbb{D}_{\mathbf{W}}^{1,2}$ *és* $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n) \to \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)\,(n \to \infty)$ *az* $L^2(\Omega \times [0,T], \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}_{[0,T]})$ *tér gyenge topológiája szerint.*

Bizonyítás. A Fatou-lemma és a J_n operátor folytonossága alapján

$$\sum_{k=0}^{\infty} k||J_k(F)||_{L^2(\Omega)}^2 \le \liminf_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} k||J_k(F_n)||_{L^2(\Omega)}^2 = \liminf_{n \to \infty} ||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n)||_{L^2(\Omega \times [0,T])} < \infty\,,$$

tehát a 3.2.3. Állítás alapján $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$.
Legyen $u \in L^2(\Omega \times [0,T], \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}_{[0,T]})$, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, valamint $N \in \mathbb{N}^+$ olyan, hogy

$$\left|\left|\sum_{k=N}^{\infty} \mathcal{J}_k(u)\right|\right|_{L^2(\Omega)} \cdot \Big(||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)||_{L^2(\Omega\times[0,T])} + \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n)||_{L^2(\Omega\times[0,T])}\Big) \leq \varepsilon$$

Ekkor, kihasználva a $\mathcal{J}_k$ operátor és a skalárszorzás folytonosságát

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\Big(u \,\Big|\, \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) - \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n)\Big)_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right| \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\Big(\mathcal{J}_k(u) \,\Big|\, \mathcal{J}_k(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) - \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n))\Big)_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right| \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \left|\Big(u \,\Big|\, \mathcal{J}_k(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) - \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n))\Big)_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right| +$$

$$+ \limsup_{n\to\infty} \left|\sum_{k=N}^{\infty} \Big(\mathcal{J}_k(u) \,\Big|\, \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) - \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n)\Big)_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right| =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left|\Big(\sum_{k=N}^{\infty} \mathcal{J}_k(u) \,\Big|\, \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) - \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n)\Big)_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right| \leq$$

$$\leq \left|\left|\sum_{k=N}^{\infty} \mathcal{J}_k(u)\right|\right|_{L^2(\Omega)} \cdot \Big(||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)||_{L^2(\Omega\times[0,T])} + \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_n)||_{L^2(\Omega\times[0,T])}\Big) \leq \varepsilon\,,$$

amiből már adódik az állítás. ■

A következő tétel kimondása előtt megjegyezzük, hogy a Rademacher-tétel értelmében tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén egy $\mathbb{R}^n$-en értelmezett, $\mathbb{R}$-de érkező Lipschitz-függvény λ-majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$-re differenciálható x-ben.

3.2.10. Tétel. ***(Malliavin-deriváltra vonatkozó láncszabály)***
Legyen $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat, jelölje* $\mathscr{F}$ *a* $\sigma((\mathbf{W}(f))_{f\in L^2([0,T])})$ *σ-algebrát, továbbá legyen* $n \in \mathbb{N}^+$*, illetve* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-függvény, és* $K \in \mathbb{R}^+$ *olyan, hogy minden* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *esetén*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|$$

teljesül, továbbá $(F_i)_{i=1}^n$ *egy* $\mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$*-beli rendszer, amelynek eloszlása abszolút folytonos az* n*-dimenziós Lebesgue-mértékre nézve. Ekkor* $\varphi((F_i)_{i=1}^n) \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ *és*

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(\varphi((F_i)_{i=1}^n)) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \varphi((F_i)_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)\,.$$

Bizonyítás. Legyen Z egy n-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változó, továbbá tetszőleges $k \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\varphi_k(x) := \mathbb{E}\left(\varphi\left(x - \frac{1}{n}Z\right)\right) = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{n^2(y-x)^2}{2}} \mathrm{d}\lambda(y)\,.$$

Ekkor minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén φ_k végtelenszer differenciálható, minden iterált parciális deriváltja korlátos, és az elsőrendű parciális deriváltak abszolút értéke K-val becsülhető felülről. A 3.2.8. Állítás alapján minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén $\varphi_k((F_i)_{i=1}^n) \in \mathbb{D}_{\mathbf{W}}^{1,2}$ és

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(\varphi_k((F_i)_{i=1}^n)) = \sum_{j=1}^n \partial_j \varphi_k((F_i)_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)\,,$$

következésképpen

$$\left|\left|\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(\varphi_k((F_i)_{i=1}^n))\right|\right|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \leq K \sum_{j=1}^n \left|\left|\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)\right|\right|_{L^2(\Omega\times[0,T])}\,.$$

Mivel

$$\lim_{k\to\infty} ||\varphi_k((F_i)_{i=1}^n) - \varphi((F_i)_{i=1}^n)||_{L^2(\Omega)} \quad \text{és} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\left|\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(\varphi_k((F_i)_{i=1}^n))\right|\right|_{L^2(\Omega\times[0,T])} < \infty$$

az előző lemma alapján $\varphi((F_i)_{i=1}^n) \in \mathbb{D}_{\mathbf{W}}^{1,2}$ és

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(\varphi_k((F_i)_{i=1}^n)) \to \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(\varphi((F_i)_{i=1}^n))\ (k \to \infty)$$

az $L^2(\Omega \times [0,T], \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}_{[0,T]})$ tér gyenge topológiája szerint. Tetszőleges $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$ és Lebesgue-majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\lim\limits_{k\to\infty} \partial_j \varphi_k(x) = \partial_j \varphi(x)$, így – kihasználva, hogy $(F_i)_{i=1}^n$ eloszlása abszolút folytonos az n-dimenziós Lebesgue-mértékre nézve – a Lebesgue-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} ||\partial_j \varphi_k((F_i)_{i=1}^n) - \partial_j \varphi((F_i)_{i=1}^n)||_{L^2(\Omega)} = 0\,.$$

Ebből adódóan minden $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$ esetén

$$\lim_{k\to\infty} ||\partial_j \varphi_k((F_i)_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j) - \partial_j \varphi((F_i)_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)||_{L^1(\Omega\times[0,T])} = 0\,,$$

és az iménti sorozat $||\cdot||_{L^2(\Omega\times[0,T])}$ normában való korlátossága folytán

$$\partial_j \varphi_k((F_i)_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j) \to \partial_j \varphi((F_i)_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)\ (k \to \infty)$$

az $L^2(\Omega \times [0,T], \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}_{[0,T]})$ tér gyenge topológiája szerint, így

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(\varphi((F_i)_{i=1}^n)) = \sum_{j=1}^n \partial_j \varphi((F_i)_{i=1}^n) \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F_j)\,. \ \blacksquare$$

4. Szkorohod-integrál

Ebben a fejezetben a Malliavin-derivált operátor adjungáltjáról lesz szó. Néhány alapvető tulajdonságának bizonyítása után belátjuk a témakör – pénzügyi alkalmazások szempontjából – legfontosabb tételét, a Clark – Ocone-formulát.

4.1. A Szkorohod-integrál értelmezése és tulajdonságai

Ha $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat és $\mathscr{F} := \sigma((\mathbf{W}(f))_{f \in L^2([0,T])})$, akkor a 3.1.3. Megjegyzés szerint a $D^{\mathbf{W}} : L^2(\Omega, \mathscr{F}) \rightarrowtail L^2(\Omega \times [0,T], \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}_{[0,T]})$ lineáris operátor sűrűn értelmezett, így az 1.3.5. Állítás alapján értelmezhető az adjungáltja.

4.1.1. Definíció. *Legyen $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat és jelölje $\mathscr{F}$ a $\sigma((\mathbf{W}(f))_{f \in L^2([0,T])})$ σ-algebrát. Ekkor a $\delta^{\mathbf{W}} := (D^{\mathbf{W}})^*$ lineáris operátort ($\mathbf{W}$ szerinti)* ***divergenciának*** *vagy* ***Szkorohod-integrál operátornak*** *nevezzük.*

4.1.2. Állítás. *Legyen $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ izonormális Gauss-folyamat és jelölje $\mathscr{F}$ a $\sigma((\mathbf{W}(f))_{f \in L^2([0,T])})$ σ-algebrát. Ekkor a következők teljesülnek:*
(i) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \widehat{\otimes} L^2([0,T]) \subseteq Dom(\delta^{\mathbf{W}})$ és

$$\delta^{\mathbf{W}} \langle \mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \widehat{\otimes} L^2([0,T]) \rangle \subseteq \mathcal{H}_{n+1}^{\mathbf{W}} .$$

(ii) Tetszőleges $u \in Dom(\delta^{\mathbf{W}})$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$J_{n+1}(\delta^{\mathbf{W}}(u)) = \delta^{\mathbf{W}}(\mathcal{J}_n(u)) .$$

(iii) $u \in L^2(\Omega \times [0,T], \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}_{[0,T]})$ esetén $u \in Dom(\delta^{\mathbf{W}})$ pontosan akkor teljesül ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||\delta^{\mathbf{W}}(\mathcal{J}_n(u))||^2_{L^2(\Omega)}$ sorösszeg véges.

Bizonyítás. (i) Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $u \in \mathcal{H}_n^{\mathbf{W}} \widehat{\otimes} L^2([0,T])$, valamint $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$. Ekkor – kihasználva $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}|_{\mathcal{H}_{n+1}^{\mathbf{W}}}$ folytonosságát –

$$(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,|\, u)_{L^2(\Omega \times [0,T])} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{D}^{\mathbf{W}}(J_k(F)) \,\Big|\, u \Big)_{L^2(\Omega \times [0,T])} = (\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(J_{n+1}(F)) \,|\, u)_{L^2(\Omega \times [0,T])} =$$

$$= \Big(J_{n+1}(F) \,\Big|\, (\mathbf{D}^{\mathbf{W}}|_{\mathcal{H}_{n+1}^{\mathbf{W}}})^*(u) \Big)_{L^2(\Omega)} = \Big(F \,\Big|\, (\mathbf{D}^{\mathbf{W}}|_{\mathcal{H}_{n+1}^{\mathbf{W}}})^*(u) \Big)_{L^2(\Omega)} ,$$

tehát az adjungált operátor definíciója alapján $u \in Dom(\delta^{\mathbf{W}})$ és

$$\delta^{\mathbf{W}}(u) = (\mathbf{D}^{\mathbf{W}}|_{\mathcal{H}_{n+1}^{\mathbf{W}}})^*(u) \in \mathcal{H}_{n+1}^{\mathbf{W}} .$$

(ii) Legyen $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ és $u \in Dom(\delta^{\mathbf{W}})$. Ekkor

$$(F \,|\, J_{n+1}(\delta^{\mathbf{W}}(u)))_{L^2(\Omega)} = (J_{n+1}(F) \,|\, \delta^{\mathbf{W}}(u))_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(J_{n+1}(F)) \,|\, u)_{L^2(\Omega \times [0,T])} =$$

$$= (\mathcal{J}_n(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)) \,|\, u)_{L^2(\Omega\times[0,T])} = (\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,|\, \mathcal{J}_n(u))_{L^2(\Omega\times[0,T])} = (F \,|\, \delta^{\mathbf{W}}(\mathcal{J}_n(u)))_{L^2(\Omega)} ,$$

azaz – mivel $\mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ sűrű lineáris altér – $J_{n+1}(\delta^{\mathbf{W}}(u)) = \delta^{\mathbf{W}}(\mathcal{J}_n(u))$.
(iii) Legyen $u \in Dom(\delta^{\mathbf{W}})$, ekkor a Pitagorasz-tétel alapján, kihasználva, hogy $J_0(\delta^{\mathbf{W}}(u)) = 0$

$$||\delta^{\mathbf{W}}(u)||^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} ||J_n(\delta^{\mathbf{W}}(u))||^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} ||\delta^{\mathbf{W}}(\mathcal{J}_n(u))||^2_{L^2(\Omega)} ,$$

tehát a szükségességet beláttuk.
Az elégségességhez tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||\delta^{\mathbf{W}}(\mathcal{J}_n(u))||^2_{L^2(\Omega)}$ sorösszeg véges és legyen $G := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta^{\mathbf{W}}(\mathcal{J}_n(u))$, ekkor tetszőleges $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ esetén

$$\big(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,\big|\, u\big)_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,\big|\, J_n(u)\big)_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(F \,\big|\, \delta^{\mathbf{W}}(J_n(u))\big)_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \big(F \,\big|\, G\big)_{L^2(\Omega)} ,$$

tehát $u \in Dom(\delta^{\mathbf{W}})$ és $\delta^{\mathbf{W}}(u) = G$. ■

4.1.3. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat. Ekkor a következők teljesülnek:*
(i) Ha $G \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ *és* $\varphi \in L^2([0,T])$*, akkor* $G \otimes \varphi \in Dom(\delta^{\mathbf{W}})$ *és*

$$\delta^{\mathbf{W}}(F \otimes \varphi) = F\mathbf{W}(\varphi) - (\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,|\, \varphi)_{L^2([0,T])} .$$

(ii) Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$, $f \in L^2([0,T]^{n+1})$ *és* $u \in L^2(\Omega\times[0,T])$ *esetén, ha* $(I^{\mathbf{W}}_n(f(\cdot,t)))_{t\in[0,T]}$ *az* u *egy reprezentánsa, akkor* $u \in Dom(\delta^{\mathbf{W}})$ *és* $\delta^{\mathbf{W}}(u) = I^{\mathbf{W}}_{n+1}(f)$.

Bizonyítás. (i) Legyen $F, G \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}}$ és $\varphi \in L^2([0,T])$. A 3.2.6. Állítás alapján

$$(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,|\, G \otimes \varphi)_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \mathbb{E}(G(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F) \,|\, \varphi)_{L^2([0,T])}) =$$

$$= \mathbb{E}(FG\mathbf{W}(\varphi)) - \mathbb{E}(F(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(G) \,|\, \varphi)_{L^2([0,T])} ,$$

tehát az adjungált definíciója alapján teljesül az állítás.
(ii) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $g \in \mathscr{L}^2([0,T]^n)$ és $\varphi \in \mathscr{L}^2([0,T])$. A 3.2.4. Következmény (és az előtte lévő megjegyzés) alapján

$$(\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(I^{\mathbf{W}}_n(g)) \,|\, \varphi^\bullet)_{L^2([0,T])} = \int_{[0,T]} nI^{\mathbf{W}}_{n-1}(\tilde{g}(\cdot,t))\varphi(t)\mathrm{d}\lambda(t) = nI^{\mathbf{W}}_{n-1}(\tilde{g} \otimes_1 \varphi) ,$$

ahol az utolsó egyenlőség $I^{\mathbf{W}}_{n-1}$ folytonossága miatt teljesül. Az (i) állítás és a 2.1.11. Következmény alapján

$$\delta^{\mathbf{W}}(I^{\mathbf{W}}_n(g) \otimes \varphi^\bullet) = I^{\mathbf{W}}_n(g)\mathbf{W}(\varphi^\bullet) - (\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(I^{\mathbf{W}}_n(g)) \,|\, \varphi^\bullet)_{L^2([0,T])} =$$

$$= I^{\mathbf{W}}_{n+1}(g \otimes \varphi) + nI^{\mathbf{W}}_{n-1}(\tilde{g} \otimes_1 \varphi) - nI^{\mathbf{W}}_{n-1}(\tilde{g} \otimes_1 \varphi) = I^{\mathbf{W}}_{n+1}(g \otimes \varphi)\,,$$

következésképpen tetszőleges $f \in \mathcal{E}([0,T]^{n+1})$ esetén, ha $(I^{\mathbf{W}}_n(f(\cdot,t)))_{t\in[0,T]}$ egy reprezentánsa $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$-nek, akkor $\delta^{\mathbf{W}}(u) = I^{\mathbf{W}}_{n+1}(f)$. Mivel

$$span\Big\{ I^{\mathbf{W}}_n(\chi_{\prod_{j=1}^{n} A_j}) \otimes \chi^{\bullet}_{A_{n+1}} \,\Big|\, (A_j)_{j=1}^{n+1} \text{ diszjunkt } \mathscr{B}_{[0,T]}\text{-beli rendszer} \Big\}$$

sűrű $\mathcal{H}^{\mathbf{W}}_n \hat{\otimes} L^2([0,T])$-ben, ezért (ii) is teljesül. ■

4.1.4. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W} : L^2([0,T]) \to L^2(\Omega)$ *izonormális Gauss-folyamat,* $A, B \in \mathscr{B}_{[0,T]}$ *diszjunkt halmazok,* $\mathscr{F}_A := \sigma((\mathbf{W}(\chi^{\bullet}_C))_{C\subseteq A, C\in\mathscr{B}_{[0,T]}})$ *és* $\xi \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_A)$. *Ekkor*

$$\delta^{\mathbf{W}}(\xi \otimes \chi^{\bullet}_{B}) = \xi \mathbf{W}(\chi^{\bullet}_{B})\,.$$

Bizonyítás. A 3.2.7. Állítás alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathscr{L}^2([0,T]^n)$ olyan, hogy $F = \sum_{n=0}^{\infty} I^{\mathbf{W}}_n(f_n \cdot \chi^{\otimes n}_{A})$, ahol a határérték a $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ norma szerint értendő. Ekkor az előző állítás alapján tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\delta^{\mathbf{W}}(\mathcal{J}_n(\xi \otimes \chi_B)) = J_n(\xi)\mathbf{W}(\chi^{\bullet}_B) - (\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(J_n(\xi)) \,|\, \chi^{\bullet}_B)_{L^2([0,T])} = J_n(\xi)\mathbf{W}(\chi^{\bullet}_B)\,,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél ismét a 3.2.7. Állítást használtuk. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén – I^W_n folytonossága és $\mathbf{W}$ tulajdonságai miatt –

$$||J_n(\xi)\mathbf{W}(\chi^{\bullet}_{B})||^2_{L^2(\Omega)} = ||J_n(\xi)||^2_{L^2(\Omega)}\lambda(B)\,,$$

így a 4.1.2. Állítás szerint $\xi \otimes \chi^{\bullet}_B \in Dom(\delta^{\mathbf{W}})$, és $\delta^{\mathbf{W}}$ zárt operátor (lásd 1.3.8. Állítás), amiből már adódik a bizonyítandó állítás. ■

4.1.5. Következmény. *Legyen* $\mathbf{W}^T$ *a Wiener-folyamat által meghatározott izonormális Gauss-folyamat* $[0,T]$*-n,* $s,t \in \mathbb{R}_+$*,* $0 \le s \le t \le T$*,* $\mathscr{F}_s := \sigma((W(u))_{u\in[0,s]})$ *és* $\xi \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_s)$*. Ekkor*

$$\delta^{\mathbf{W}^T}(\xi \otimes \chi^{\bullet}_{[s,t]}) = \xi(W(t) - W(s))\,.$$

4.2. A Clark – Ocone-formula

Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban $\mathbf{W}^T$ jelöli Wiener-folyamat által meghatározott izonormális Gauss-folyamatot $[0,T]$-n, és tetszőleges $t \in [0,T]$ esetén $\mathscr{F}_t := \sigma((W(u))_{u\in[0,t]})$.

4.2.1. Definíció. *Az* $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$*-t* ***egyszerűnek*** *nevezzük, ha létezik olyan* $N \in \mathbb{N}^+$*, valamint* $(t_j)_{j=1}^N$ $[0,T]$*-beli monoton növő rendszer és* $(\xi_j)_{j=0}^{N-1} \in \prod_{j=1}^{N-1} L^\infty(\Omega, \mathscr{F}_{t_j})$*, hogy*

$$u = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \otimes \chi^{\bullet}_{[t_j,t_{j+1}]}\,.$$

4.2.2. Állítás. *Legyen $u \in L^2(\Omega\times[0,T],\mathscr{F}_T\otimes\mathscr{B}_{[0,T]})$, és tegyük fel, hogy létezik $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-hez adaptált reprezentánsa (azaz olyan $\hat{u}$ reprezentánsa, amelyre teljesül, hogy minden $t \in [0,T]$ esetén $\hat{u}(t)$ $\mathscr{F}_t$ mérhető). Ekkor*

$$\delta^{\mathbf{W}^T}(u) = \int\limits_0^T u dW \, .$$

Bizonyítás. A feltétel szerint létezik olyan $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L^2(\Omega\times[0,T],\mathscr{F}_T\otimes\mathscr{B}_{[0,T]})$-ben haladó sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén u_n egyszerű és $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n - u||_{L^2(\Omega)} = 0$ (lásd [4] 132. oldal 2.4 Lemma). A 4.1.5. Következmény, valamint a Wiener-folyamat szerinti integrál és a $\delta^{\mathbf{W}^T}$ linearitása miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $u_n \in Dom(\delta^{\mathbf{W}^T})$

$$\delta^{\mathbf{W}^T}(u_n) = \int\limits_0^T u_n \mathrm{d}W$$

teljesül. A $\left(\int\limits_0^T u_n \mathrm{d}W\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $L^2(\Omega)$-ban, tehát $\delta^{\mathbf{W}^T}$ zártásga miatt $u \in Dom(\delta^{W^T})$, továbbá a Wiener-folyamat szerinti integrál definíciója alapján

$$\delta^{\mathbf{W}^T}(u) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T u_n \mathrm{d}W = \int\limits_0^T u \mathrm{d}W \, ,$$

ahol a határérték a $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ norma szerint értendő. ■

4.2.3. Tétel. ***(Clark – Ocone-formula)*** *Legyen $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}^T}$, továbbá $(D_t(F))_{t\in[0,T]}$ jelölje $\mathbf{D}^{\mathbf{W}}(F)$ egy reprezentánsát, és tegyük fel, hogy az $u \in L^2(\Omega\times[0,T])$ egy reprezentánsa $(\mathbb{E}((D_t(F)\,|\,\mathscr{F}_t))_{t\in[0,T]}$. Ekkor*

$$F = \mathbb{E}(F) + \int\limits_0^T u dW \, .$$

Bizonyítás. (I) Legyen $p \in \mathbb{N}^+$, belátjuk, hogy tetszőleges $f \in \mathscr{L}^2([0,T]^p)$ esetén, ha $(D_t(I_p^{\mathbf{W}^T}(f)))_{t\in[0,T]}$ jelöli a $\mathbf{D}^{\mathbf{W}^T}(I_p^{\mathbf{W}^T}(f))$ egy reprezentánsát és $u \in L^2(\Omega\times[0,T])$ egy reprezentánsa $(\mathbb{E}(D_t(I_p^{\mathbf{W}^T}(f))\,|\,\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$, akkor

$$\delta^{\mathbf{W}^T}(u) = I_p^{\mathbf{W}^T}(f) \, .$$

Ehhez megjegyezzük, hogy ha

$$\mathscr{I} := \{\prod_{j=1}^p I_j \,|\, (I_j)_{j=1}^p \ [0,T]\text{-beli intervallumok rendszere}\} \, ,$$

akkor $\sigma(\mathscr{I}) = \mathscr{B}_{[0,T]^p}$, tehát a 2.3.4. Állításhoz hasonlóan bizonyítható, hogy az

$$\mathscr{E}(\mathscr{I}) := span\{\chi_{\prod\limits_{j=1}^{p} A_j} \,|\, (A_j)_{j=1}^{p} \text{ } [0,T]\text{-beli diszjunkt intervallumok rendszere}\}$$

altér sűrű $\mathscr{L}^2([0,T]^p)$-ben. Legyen $t \in [0,T]$ és tegyük fel, hogy $(A_j)_{j=1}^{p}$ olyan diszjunkt intervallumok rendszere, hogy minden $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le N-1$ esetén $\sup A_j \le \inf A_{j+1}$ és $1 \le j \le N$ esetén $A_j \subseteq [0,t]$ vagy $A_j \cap [0,t] = \emptyset$, továbbá

$$D_t\Big(I_p^{\mathbf{W}^T}\Big(\chi_{\prod\limits_{j=1}^{p} A_j}\Big)\Big) := \sum_{j=1}^{p} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p} \mathbf{W}(\chi_{A_k}^{\bullet})\chi_{A_j}(t)\,.$$

Ekkor $\Big(D_t\Big(I_p^{\mathbf{W}^T}\Big(\chi_{\prod\limits_{j=1}^{p} A_j}\Big)\Big)\Big)_{t\in[0,T]}$ a $\mathbf{D}^{\mathbf{W}^T}\Big(I_p^{\mathbf{W}^T}\Big(\chi_{\prod\limits_{j=1}^{p} A_j}\Big)\Big)$ egy reprezentánsa, továbbá a feltételes várható érték és a Wiener-folyamat tulajdonságai miatt – az üres indexhalmazon vett szorzatot 1-nek értelmezve –

$$\mathbb{E}\Big(D_t\Big(I_p^{\mathbf{W}^T}\Big(\chi_{\prod\limits_{j=1}^{p} A_j}\Big)\Big)\,\Big|\,\mathscr{F}_t\Big) = \sum_{j=1}^{p} \chi_{A_j}(t) \prod_{\substack{k=1\\k<j}}^{p} \mathbf{W}(\chi_{A_k}^{\bullet})\mathbb{E}(\prod_{\substack{k=1\\k>j}}^{p} \mathbf{W}(\chi_{A_k}^{\bullet}) \,|\, \mathscr{F}_t) =$$

$$= I_{p-1}^{\mathbf{W}^T}(\chi_{\prod\limits_{j=1}^{p} A_j})\chi_{A_p}(t)\,.$$

A $\mathbf{D}^{\mathbf{W}^T}$ és $I_p^{\mathbf{W}^T}$ operátorok linearitása miatt tetszőleges $g \in \mathscr{E}(\mathscr{I})$ esetén teljesül a bizonyítandó állítás. Legyen most $f \in \mathscr{L}^2([0,T]^p)$, $(D_t(I_p^{\mathbf{W}^T}(f)))_{t\in[0,T]}$ jelölje a $\mathbf{D}^{\mathbf{W}^T}(I_p^{\mathbf{W}^T}(f))$ egy reprezentánsát, és tegyük fel, hogy $(\mathbb{E}(D_t(I_p^{\mathbf{W}^T}(f)) \,|\, \mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ az $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$ egy reprezentánsa. Az előzőek alapján vehetünk olyan $\mathscr{E}(\mathscr{I})$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f||_{\mathscr{L}^2([0,T]^p)} = 0$. Ekkor $I_p^{\mathbf{W}^T}$ folytonossága miatt $I_p^{\mathbf{W}^T}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} I_p^{\mathbf{W}^T}(f_n)$, ahol a határérték a $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ norma szerint értendő. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $(D_t(I_p^{\mathbf{W}^T}(f_n)))_{t\in[0,T]}$ a $\mathbf{D}^{\mathbf{W}^T}(I_p^{\mathbf{W}^T}(f_n))$ egy reprezentánsát és legyen $u_n \in L^2(\Omega \times [0,T])$ olyan, hogy $(\mathbb{E}(D_t(I_p^{\mathbf{W}^T}(f_n)) \,|\, \mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ egy reprezentánsa. Ekkor a feltételes várható értékre vonatkozó Jensen-egyenlőtlenség, a Fubini-tétel, és a feltételes várható érték linearitása és a $||\cdot||_{L^1(\Omega)}$ norma szerinti izometrikussága miatt

$$\limsup_{n\to\infty} ||u_n - u||^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\int_0^T \Big|\mathbb{E}(D_t(I_p^{\mathbf{W}^T}(f_n)) \,|\, \mathscr{F}_t) - \mathbb{E}(D_t(I_p^{\mathbf{W}^T}(f)) \,|\, \mathscr{F}_t)\Big|^2 \mathrm{d}\lambda(t)\Big) \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \int_0^T \mathbb{E}\Big(\Big|D_t(I_p^{\mathbf{W}^T}(f_n)) - D_t(I_p^{\mathbf{W}^T}(f))\Big|^2\Big)\mathrm{d}\lambda(t) =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} ||\mathbf{D}^{\mathbf{W}^T}(I_p^{\mathbf{W}^T}(f_n)) - \mathbf{D}^{\mathbf{W}^T}(I_p^{\mathbf{W}^T}(f))||_{L^2(\Omega\times[0,T])} = 0\,,$$

ahol az utolsó egyenlőségénél kihasználtuk, hogy $\mathbf{D}^{\mathbf{W}^T}$ folytonos a $\mathcal{H}_p^{\mathbf{W}^T}$ altéren.
(II) Legyen $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}^T}$. Ekkor az előző állítás alapján – D.-vel jelölve a megfelelő Malliavin-deriváltak egy reprezentánsát –

$$F = \sum_{p=0}^{\infty} J_p(F) = \mathbb{E}(F) + \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^T \mathbb{E}(D_t(J_p(F)) \,|\, \mathscr{F}_t) \mathrm{d}W(t)\,,$$

ahol a határérték a $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ szerint értendő. Belátjuk, hogy határérték és a sztochasztikus integrál cseréje elvégezhető. Ehhez legyen minden $p \in \mathbb{N}^+$ esetén $u_p \in L^2(\Omega \times [0,T])$ olyan, hogy egy reprezentánsa $\mathbb{E}(D_t(J_p(F))_{t\in[0,T]}$. Ekkor minden $p \in \mathbb{N}^+$ esetén, a feltételes várható érték tulajdonságaiból adódóan

$$||u_p||^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \mathbb{E}\Big(\int_0^T |\mathbb{E}(D_t(J_p(F)) \,|\, \mathscr{F}(t))|^2 \mathrm{d}\lambda(t)\Big) \leq \mathbb{E}\Big(\int_0^T \mathbb{E}(|D_t(J_p(F))|^2 \,|\, \mathscr{F}(t)) \mathrm{d}\lambda(t)\Big) =$$

$$= ||\mathbf{D}^{\mathbf{W}^T}(J_p(F))||^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\,,$$

tehát a négyzetgyökvonás után – kihasználva $F \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}^T}$-t – kapjuk, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ vektorsor abszolút konvergens, tehát – mivel normált tér pontosan akkor teljes, ha minden benne haladó abszolút konvergens sor konvergens – konvergens is $L^2(\Omega \times [0,T])$-ben így a Wiener-folyamat szerinti integrál definíciója miatt a csere elvégezhető. Folytatva az egyenlőséget:

$$F = \int_0^T \sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{E}(D_t(J_p(F)) \,|\, \mathscr{F}_t) \mathrm{d}W(t) = \mathbb{E}(F) + \int_0^T \sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{E}(J_{p-1}(D_t(F)) \,|\, \mathscr{F}_t) \mathrm{d}W(t) =$$

$$= \mathbb{E}(F) + \int_0^T \mathbb{E}(D_t(F) \,|\, \mathscr{F}_t) \mathrm{d}W(t)\,. \;\blacksquare$$

5. Alkalmazás

Ebben a fejezetben a pénzügyi modell tárgyalása után megvizsgáljuk a részben replikáló portfóliók problémáját, nevezetesen azt, hogy mit mondhatunk abban az esetben, amikor a befektető kisebb kezdődőkével rendelkezik, mint ami egy adott kifizetésfüggvényhez tartozó replikáló portfólió létrehozásához szükséges. Kiderül, hogy a Malliavin-kalkulus segítségével vanilla call, illetve visszatekintő put opció esetén tetszőleges kezdőtőkéhez felírható az a részben replikáló portfólió, amely egy adott hasznosságfüggvény mellett minimalizálja a befektető veszteségének várható értékét.

5.1. A Black – Scholes-modell

A továbbiakban jelöljön $(W(t))_{t\in[0,T]}$ egy $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ feletti Wiener-folyamatot, és minden $t \in [0,T]$ esetén $\mathscr{F}_t := \sigma(W(u)_{u\in[0,t]})$ és ha $(X(t))_{t\in[0,T]}$, $(a(t))_{t\in[0,T]}$ és $(b(t))_{t\in[0,T]}$ sztochasztikus folyamatok, akkor $t \in [0,T]$ esetén

$$\mathrm{d}X(t) = a(t)\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}W(t)$$

jelölés az

$$X(t) - X(0) = \int_0^t a(s)\mathrm{d}\lambda(s) + \int_0^t b(s)\mathrm{d}W(s)$$

kifejezés rövidítése (feltéve, hogy az utóbbi értelmes), illetve hasonlóan abban az esetben is, ha W helyén tetszőleges Itô-folyamat áll.

Legyen $\mu \in \mathbb{R}$, $r, s \in \mathbb{R}_+$ és $\sigma \in \mathbb{R}^+$, továbbá $(B(t))_{t\in[0,T]}$ és $(S(t))_{t\in[0,T]}$ olyanok, hogy minden $t \in [0,T]$-re

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B(t) &= rB(t)\mathrm{d}t\,, & B(0) &= 1 \\ \mathrm{d}S(t) &= \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t)\,, & S(0) &= s \end{aligned}$$

B-re *bankbetétként*, S-re pedig *részvényként* vagy *részvényár-folyamatként* fogunk hivatkozni. Az egyenletek megoldása után azt kapjuk, hogy minden $t \in [0,T]$-re

$$B(t) = e^{rt} \quad \text{és} \quad S(t) = s \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}\,.$$

Egy $\pi = ((\alpha(t))_{t\in[0,T]}, (\beta(t))_{t\in[0,T]})$ párt *stratégiának* vagy *portfóliónak* nevezünk, ha minden $t \in [0,T]$ esetén $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ is $\mathscr{F}_t$-mérhető, továbbá α és β, mint $\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ függvények $\mathscr{F}_T \otimes \mathscr{B}_{[0,T]}$ mérhetőek és

$$\int_0^T |\beta(t)|^2 \mathrm{d}\lambda(t) < \infty, \qquad \int_0^T |\alpha(t)|\mathrm{d}\lambda(t) < \infty$$

teljesül $\mathbb{P}$-majdnem mindenütt. Legyen $\pi = ((\alpha(t))_{t\in[0,T]}, (\beta(t))_{t\in[0,T]})$ egy stratégia, és minden $t \in [0,T]$ esetén

$$V^\pi(t) := \alpha(t)B(t) + \beta(t)S(t)\,.$$

Ekkor a V^π-t a stratégia *értékfolyamatának* nevezzük. A π stratégia *önfinanszírozó*, ha tetszőleges $t \in [0,T]$ esetén

$$\mathrm{d}V^\pi(t) = \alpha(t)\mathrm{d}B(t) + \beta(t)\mathrm{d}S(t)\,.$$

Legyen $\theta := \frac{\mu - r}{\sigma}$ és tetszőleges $t \in [0,T]$ esetén legyen

$$W_0(t) := W(t) + \theta t$$

$$Z_0(t) := \exp\left(-\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right) = \exp\left(\theta W_0(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)\,.$$

Ekkor a Girszanov-tétel szerint a

$$\mathbb{P}_0 : \mathscr{A} \to \mathbb{R}_+; \quad A \mapsto \int_A Z_0(T)\mathrm{d}\mathbb{P}$$

leképezés egy olyan $\mathbb{P}$-vel ekvivalens mérték (azaz a 0-mértékű halmazok megegyeznek a két mérték szerint), amely szerint $(W_0(t))_{t\in[0,T]}$ Wiener-folyamat, továbbá az eszközárazás alaptétele segítségével belátható, hogy $\left(\frac{S(t)}{B(t)}, \mathscr{F}_t\right)_{t\in[0,T]}$ martingál a $\mathbb{P}_0$ mértékre nézve. A $\mathbb{P}_0$ szerinti várható értéket $\mathbb{E}_0$ jelöli, és $\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right)_{t\in[0,T]}$-re *diszkontált részvényár-folyamatként* fogunk hivatkozni.

Az integrálreprezentációs tétel segítségével belátható, hogy tetszőleges $C \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}_T)$ esetén létezik olyan π önfinanszírozó stratégia, amelyre teljesül, hogy $V^\pi(T) = C$, és ekkor $V^\pi(0) = \mathbb{E}_0\left(\frac{C}{B(T)}\right)$. Ebben az esetben π-t *replikáló stratégiának* vagy *replikáló portfóliónak* nevezzük. Szemléletesen: $V^\pi(0)$ az az összeg, amit a 0 időpontban befektetve és π stratégiát követve a befektető T időpontban C értékű portfólióval rendelkezik.

Az említett integrálreprezentációs tétel bizonyítása nem konstruktív, így az előző fejezetben bizonyított Clark–Ocone-formula (4.2.3. Tétel) többek között azért fontos, mert segítségével meg tudunk adni (az itt felvázoltnál általánosabb körülmények között is) egy konkrét replikáló portfóliót. (Fellépnek azonban bizonyos technikai nehézségek, ugyanis a Clark–Ocone-formulát a W_0 ($\mathbb{P}_0$ szerinti) Wiener-folyamatra szeretnénk alkalmazni és előfordulhat, hogy az általa generált filtráció – jelöljük $(\mathscr{F}_t^0)_{t\in[0,T]}$-vel – szűkebb, mint a W által generált, és emiatt C nem feltétlenül lesz $\mathscr{F}_T^0$-mérhető, ezért ennek tárgyalására nem térünk ki.)

5.2. Részleges replikálás

A továbbiakban azt a problémát szeretnénk modellezni, amikor a 0 időpontban a befektető $\mathbb{E}_0\left(\frac{C}{B(T)}\right)$-nál kisebb kezdőtőkével indítja a porfólióját (legyen ez $x < \mathbb{E}_0\left(\frac{C}{B(T)}\right)$), és azt vizsgáljuk, hogy a T időpontban C-hez képest mennyi a veszteség értéke, azaz $(C - V^\pi(T))^+$, ahol

$$\pi \in \mathcal{A}(x) := \{\pi' \text{ önfinanszírozó stratégia} \,|\, V^{\pi'}(0) = x\}\,.$$

Természetes feltevés, hogy a befektető veszteséggel szembeni toleranciája nem lineáris, ezért ennek mérésére egy $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ szigorúan konvex, folytonosan differenciálható függvényt, amelyre teljesül, hogy $g(0) = 0$ és a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\mathbb{E}(g(C)) < \infty$, $g'(0) = 0$ technikai feltételek.
Ekkor a probléma két részre bontható: az

$$\inf_{\pi\in\mathcal{A}(x)} \mathbb{E}(g((C - V^\pi(T))^+))$$

értékhez tartozó optimális $V^\pi(T)$ meghatározása, illetve a V^π-t előállító, azaz C-hez és x-hez tartozó *részleges replikáló portfólió* megadása. Az első rész megoldása a Malliavin-kalkulus használata nélkül történik, így ez a mi szempontunkból érdektelen, csak az ide vonatkozó állítást közöljük.

5.2.1. Állítás. *Legyen g a fenti tulajdonságokkal rendelkező függvény, $C \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ és $C_0 := \mathbb{E}_0(\frac{C}{B(T)})$. Minden $t \in [0,T]$ esetén legyen*

$$H_0(t) := \frac{Z_0(t)}{B(t)}\,,$$

valamint jelölje G az

$$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R};\quad z \mapsto \mathbb{E}_0\left(e^{-rT}C\cdot \chi_{[zH_0(T)>g'(C)]} + (g')^{-1}(zH_0(T))\cdot \chi_{[g'(0)\le zH_0(T)\le g'(C)]}\right)$$

függvényt és

$$\zeta := \inf\{z \in \mathbb{R}^+ \mid G(z) = C_0 - x\}\,.$$

Létezik olyan $\hat\pi$ önfinanszírozó stratégia, amelyre teljesül, hogy

$$\inf_{\pi\in\mathcal{A}(x)} \mathbb{E}(g(C - V^\pi(T)) = \mathbb{E}(g(C - V^{\hat\pi}(T))\,,$$

és ekkor

$$V^{\hat\pi}(T) = \Big(C - (g')^{-1}(\zeta H_0(T))\Big)^+\,.$$

Bizonyítás. [11] 3. rész. ■

Rátérünk a második rész tárgyalására. Legyen

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+;\quad z \mapsto \frac{z^2}{2}\,.$$

Ekkor g-re teljesülnek a fenti tulajdonságok. A következő, önfinanszírozó portfóliókról szóló lemma bizonyítása után két speciális C választása esetén vizsgáljuk a részben replikáló portfólió problémáját.

5.2.2. Lemma. *Legyen $\mathbf{W}_0$ a W_0 Wiener-folyamat által generált izonormális Gauss-folyamat, $\pi = (\alpha,\beta)$ önfinanszírozó stratégia, és tegyük fel, hogy $(V^\pi(T))^\bullet \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}_0}$. Ha $\left(D_t^{\mathbf{W}_0}\left(\frac{V^\pi(T)}{B(T)}\right)\right)_{t\in[0,T]}$ jelöli $\mathbf{D}^{\mathbf{W}_0}\left(\left(\frac{V^\pi(T)}{B(T)}\right)^\bullet\right)$ egy reprezentánsát, akkor*

$$(\beta(t))^\bullet = \frac{B(t)}{\sigma(S(t))^\bullet}\mathbb{E}_0\left(D_t^{\mathbf{W}_0}\left(\frac{V^\pi(T)}{B(T)}\right)\,\middle|\, \mathscr{F}_t^0\right)$$

λ-majdnem minden $t \in [0,T]$ esetén.

Bizonyítás. Minden $t \in [0,T]$ esetén

$$\alpha(t) = \frac{V^\pi(t) - \beta(t)S(t)}{B(t)} \quad \text{és} \quad \mathrm{d}W(t) = -\frac{\mu - r}{\sigma}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_0(t)\,,$$

tehát – mivel π önfinanszírozó stratégia –

$$\mathrm{d}V^\pi(t) = \alpha(t)\mathrm{d}B(t) + \beta\mathrm{d}S(t) = \alpha(t)rB(t)\mathrm{d}t + \beta(t)\mu S(t)\mathrm{d}t + \beta(t)\sigma S(t)\mathrm{d}W(t) =$$

$$= \alpha(t)rB(t)\mathrm{d}t + \beta(t)\mu S(t)\mathrm{d}t - \beta(t)(\mu - r)S(t)\mathrm{d}t + \beta(t)\sigma S(t)\mathrm{d}W_0(t) =$$

$$= \alpha(t)rB(t)\mathrm{d}t + \beta(t)rS(t)\mathrm{d}t + \beta(t)\sigma S(t)\mathrm{d}W_0(t) = V^\pi(t)r\mathrm{d}t + \beta(t)\sigma S(t)\mathrm{d}W_0(t)\,.$$

Tetszőleges $t \in [0,T]$ esetén

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{B(t)}\right) = -r\frac{1}{B(t)}\mathrm{d}t\,,$$

így az Itô-formula szerint

$$\mathrm{d}\left(\frac{V^\pi(t)}{B(t)}\right) = V^\pi(t)\mathrm{d}\left(\frac{1}{B(t)}\right) + \frac{1}{B(t)}\mathrm{d}V^\pi(t) =$$

$$= -V^\pi(t)r\frac{1}{B(t)} + \frac{1}{B(t)}V^\pi(t)r\mathrm{d}t + \frac{\beta(t)}{B(t)}\sigma S(t)\mathrm{d}W_0(t) = \frac{\beta(t)}{B(t)}\sigma S(t)\mathrm{d}W_0(t)\,.$$

A Clark – Ocone-formula alapján (4.2.3. Tétel) λ-majdnem minden $t \in [0,T]$-re

$$\mathbb{E}_0\left(D_t^{\mathbf{W}_0}\left(\frac{V^\pi(T)}{B(T)}\right)\,\middle|\,\mathscr{F}_t^0\right) = \frac{(\beta(t))^\bullet}{B(t)}\sigma(S(t))^\bullet\,,$$

amiből átrendezéssel adódik a lemma állítása. ∎

Vanilla call opció

Legyen C egy $K > 0$ kötési árfolyamú európai call opció kifizetésfüggvénye, azaz $C := (S(T) - K)^+$. Az 5.2.1. Állítás alapján – mivel $(g')^{-1} = id_{\mathbb{R}_+}$ –, ha $\hat{\pi}$ jelöli a C-hez és x-hez tartozó részleges replikáló portfóliót, akkor (ζ-t az előbbihez hasonlóan definiálva)

$$V^{\hat{\pi}}(T) = \Big((S(T) - K)^+ - \zeta H_0(T)\Big)^+ = \Big(S(T) - K - \zeta H_0(T)\Big)^+\,.$$

5.2.3. Lemma. *Legyen* $\mathbf{W}_0$ *a* W_0 *Wiener-folyamat által generált izonormális Gauss-folyamat és* $a, b \in \mathbb{R}$. *Ekkor* $(\exp(aW_0(T) + b))^\bullet \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}_0}$ *és*

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}_0}\Big(\Big(\exp(aW_0(T) + b)\Big)^\bullet\Big) = a\Big(\exp(aW_0(T) + b)\Big)^\bullet \otimes \chi^\bullet_{[0,T]}$$

Bizonyítás. A függvények és ekvivalenciaosztályok kompozíciójáról szóló definíció alapján

$$\Big(\exp(aW_0(T)+b)\Big)^{\bullet} = \exp\Big(a\mathbf{W}_0(\chi^{\bullet}_{[0,T]})+b\Big)$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$F_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{\Big(a\mathbf{W}_0(\chi^{\bullet}_{[0,T]})+b\Big)^k}{k!} \,.$$

A Lebesgue-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left| \exp\Big(a\mathbf{W}_0(\chi^{\bullet}_{[0,T]})+b\Big) - F_n \right|\right|_{L_2(\Omega)} = 0\,.$$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \in \mathbb{S}^{\mathbf{W}_0}$, így

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}_0}(F_n) = a\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Big(a\mathbf{W}_0(\chi^{\bullet}_{[0,T]})+b\Big)^k}{k!} \otimes \chi^{\bullet}_{[0,T]}\,,$$

következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left| a\exp\Big(a\mathbf{W}_0(\chi^{\bullet}_{[0,T]})+b\Big) \otimes \chi^{\bullet}_{[0,T]} - \mathbf{D}^{\mathbf{W}_0}(F_n) \right|\right|_{L_2(\Omega\times[0,T])} = 0\,,$$

tehát az operátor lezártjának definíciója alapján $\exp\Big(a\mathbf{W}_0(\chi^{\bullet}_{[0,T]})+b\Big) \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}_0}$ és

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}}\bigg(\exp\Big(a\mathbf{W}_0(\chi^{\bullet}_{[0,T]})+b\Big)\bigg) = a\exp\Big(a\mathbf{W}_0(\chi^{\bullet}_{[0,T]})+b\Big) \otimes \chi^{\bullet}_{[0,T]}\,. \blacksquare$$

5.2.4. Lemma. *Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a, c > 0$, $b \geq 0$ és $b < 0$, valamint jelölje f az*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad z \mapsto ce^{az} - de^{bz}$$

függvényt. Ekkor tetszőleges $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, $\lambda(B) = 0$ esetén $\lambda\left(\overset{-1}{f}\langle B\rangle\right) = 0$ (és f folytonossága miatt $\overset{-1}{f}\langle B\rangle \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ is teljesül).

Bizonyítás. Mivel f differenciálható és tetszőleges $z \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(z) = ace^{az} - bde^{bz} > 0\,,$$

ezért f szigorúan monoton növő, tehát invertálható, és f^{-1} folytonos ([5] 7.7.3 Következmény), tehát az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tétel alapján f^{-1} folytonosan differenciálható, következésképpen – a Lagrange-középértéktétel alkalmazásával adódik, hogy – bármely kompakt intervallumra vett megszorítása Lipschitz-függvény, így tetszőleges Lebesgue 0-mértékű halmaz f^{-1} általi képe is Lebesgue 0-mértékű. $\blacksquare$

5.2.5. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W}_0$ *a* W_0 *Wiener-folyamat által generált izonormális Gauss-folyamat, és tegyük fel, hogy* $V^{\hat{\pi}}(T) \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}_T^0)$. *Ekkor* $(V^{\hat{\pi}}(T))^\bullet \in \mathbb{D}^{1,2}_{\mathbf{W}_0}$ *és*

$$\mathbf{D}^{\mathbf{W}_0}\left((V^{\hat{\pi}}(T))^\bullet\right) = (\sigma S(T) + \zeta\theta H_0(T))^\bullet \chi^\bullet_{[S(T)\geq K-\zeta H_0(T)]} \otimes \chi^\bullet_{[0,T]}\,.$$

Bizonyítás. Legyen

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad z \mapsto (z-K)^+\,,$$

és $F := S(T) - \zeta H_0(T)$. Belátjuk, hogy F eloszlása abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve. Ehhez legyen $B \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$ olyan, hogy $\lambda(B) = 0$, továbbá

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad z \mapsto e^{\sigma z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - \theta e^{-\theta z - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}$$

Az előző lemma miatt $\lambda\Big(\overset{-1}{f}\langle B\rangle\Big) = 0$, és mivel $W_0(T)$ eloszlása abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve

$$\mathbb{P}\Big(\overset{-1}{F}\langle B\rangle\Big) = \mathbb{P}\Big(\overset{-1}{W_0(T)}\Big\langle \overset{-1}{f}\langle B\rangle\Big\rangle\Big) = 0\,.$$

Mivel φ Lipschitz-függvény, és λ-majdnem minden $z \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi'(z) = \chi_{[K,\infty[}(z)$, a Malliavin-deriváltra vonatkozó láncszabályt (3.2.10. Tétel) alkalmazva $\varphi(F^\bullet)$-re, az 5.2.3. Lemma alapján teljesül az állítás. ■

5.2.6. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W}_0$ *a* W_0 *Wiener-folyamat által generált izonormális Gauss-folyamat,* $\hat{\pi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ *az 5.2.1. Állításban szereplő optimális stratégia, és tegyük fel, hogy* $V^{\hat{\pi}}(T) \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}_T^0)$. *Ha* $\left(D_t^{\mathbf{W}_0}\left(\frac{V^{\pi}(T)}{B(T)}\right)\right)_{t\in[0,T]}$ *jelöli* $\mathbf{D}^{\mathbf{W}_0}\left(\left(\frac{V^{\pi}(T)}{B(T)}\right)^\bullet\right)$ *egy reprezentánsát, akkor* λ*-majdnem minden* $t \in [0,T]$*-re*

$$(\hat{\beta}(t))^\bullet = \frac{B(t)}{\sigma(S(t))^\bullet}(\sigma S(T) + \zeta\theta H_0(T))^\bullet \chi^\bullet_{[(S(T)\geq K-\zeta H_0(T)]}$$

Bizonyítás. Következik az 5.2.5. Állításból és az 5.2.2. Lemmából. ■

Visszatekintő put opció

Legyen most C egy visszatekintő (lookback) put opció kifizetésfüggvénye, azaz

$$C := M_{0,T} - S(T)\,,$$

ahol tetszőleges $s, t \in [0,T]$, $s \leq t$ esetén $M_{s,t} := \sup\limits_{v\in[s,t]} S(v)$. Ha $\hat{\pi}$ jelöli a C-hez és x-hez tartozó részleges replikáló portfóliót, akkor az 5.2.1. Állítás alapján

$$V^{\hat{\pi}}(T) = \Big(M_{0,T} - S(T) - \zeta H_0(T)\Big)^+\,.$$

5.2.7. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W}_0$ *a* W_0 *Wiener-folyamat által generált izonormális Gauss-folyamat, és tegyük fel, hogy* $V^{\hat{\pi}}(T) \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}_T^0)$. *Ha* $\left(D_t^{\mathbf{W}_0}\left(V^{\hat{\pi}}(T)\right)\right)_{t\in[0,T]}$ *jelöli* $\mathbf{D}^{\mathbf{W}_0}\left(\left(V^{\hat{\pi}}(T)\right)^\bullet\right)$ *egy reprezentánsát, akkor*

$$D_t^{\mathbf{W}_0}\left(V^{\hat{\pi}}(T)\right) = (\sigma V^{\hat{\pi}}(T))^\bullet - \sigma M_{0,t}^\bullet \chi^\bullet_{[M_{0,t}\geq M_{t,T}]}\chi^\bullet_{[S(T)+\zeta H_0(T)<M_{0,t}]} + (\sigma+\theta)\zeta H_0(T)^\bullet \chi^\bullet_{[M_{0,T}\geq S(T)+\zeta H_0(T)]}$$

Bizonyítás. Mivel $(M_{0,T}, S(T) - \zeta H_0(T))$ eloszlása abszolút folytonos a kétdimenziós-, továbbá $M_{0,T}$ eloszlása abszolút folytonos az egydimenziós Lebesgue-mértékre nézve([10] 109. oldal, Proposition 2.1.11), a láncszabály (3.2.10. Tétel) a [10] könyv 109. oldalán található Proposition 2.1.10, valamint az 5.2.5. Állítás bizonyításában található gondolatmenet alkalmazásával adódik, hogy

$$D_t^{\mathbf{W}_0}\left(V^{\hat{\pi}}(T)\right) = \chi^\bullet_{[M_{0,T}\geq S(T)+\zeta H_0(T)]}\chi^\bullet_{[M_{t,T}\geq M_{0,t}]}\sigma M_{0,T}^\bullet - \chi^\bullet_{[M_{0,T}\geq S(T)+\zeta H_0(T)]}(\sigma S(T) + \theta\zeta H_0(T))^\bullet =$$

$$= (\sigma V^{\pi}(T))^\bullet - \sigma M_{0,t}^\bullet \chi^\bullet_{[M_{0,t}\geq M_{t,T}]}\chi^\bullet_{[S(T)+\zeta H_0(T)<M_{0,t}]} + (\sigma+\theta)\zeta H_0(T)^\bullet \chi^\bullet_{[M_{0,T}\geq S(T)+\zeta H_0(T)]}. \blacksquare$$

5.2.8. Állítás. *Legyen* $\mathbf{W}_0$ *a* W_0 *Wiener-folyamat által generált izonormális Gauss-folyamat, és tegyük fel, hogy* $V^{\hat{\pi}}(T) \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}_T^0)$, *valamint jelölje* $\left(D_t^{\mathbf{W}_0}\left(V^{\hat{\pi}}(T)\right)\right)_{t\in[0,T]}$ *a* $\mathbf{D}^{\mathbf{W}_0}\left(\left(V^{\hat{\pi}}(T)\right)^\bullet\right)$ *egy reprezentánsát Ekkor* λ*-majdnem minden* $t \in [0,T]$ *esetén*

$$(\hat{\beta}(t))^\bullet = \frac{B(T)(V^{\hat{\pi}}(t))^\bullet}{(S(t))^\bullet} - \frac{B(t)M_{0,t}^\bullet}{(S(t))^\bullet}\mathbb{P}_0\Big([M_{0,t}\geq M_{t,T}] \cap [S(T)+\zeta H_0(T) < M_{0,t}]\,\Big|\,\mathscr{F}_t^0\Big) +$$

$$+ \left(1+\frac{\theta}{\sigma}\right)\zeta\mathbb{E}_0\Big(H_0(T)^\bullet\chi^\bullet_{[M_{0,T}\geq S(T)+\zeta H_0(T)]}\,\Big|\,\mathscr{F}_t^0\Big).$$

Bizonyítás. Az 5.2.2. Lemma és az 5.2.7. Állítás alapján λ-majdnem minden $t \in [0,T]$ esetén

$$(\hat{\beta}(t))^\bullet = \frac{B(t)}{\sigma(S(t))^\bullet}\mathbb{E}_0\left(D_t^{\mathbf{W}_0}\left(\frac{V^{\hat{\pi}}(T)}{B(T)}\right)\,\middle|\,\mathscr{F}_t^0\right) =$$

$$= \frac{B(T)(V^{\hat{\pi}}(t))^\bullet}{(S(t))^\bullet} - \frac{B(t)M_{0,t}^\bullet}{(S(t))^\bullet}\mathbb{P}_0\Big([M_{0,t}\geq M_{t,T}] \cap [S(T)+\zeta H_0(T) < M_{0,t}]\,\Big|\,\mathscr{F}_t^0\Big) +$$

$$+ \left(1+\frac{\theta}{\sigma}\right)\zeta\mathbb{E}_0\Big(H_0(T)^\bullet\chi^\bullet_{[M_{0,T}\geq S(T)+\zeta H_0(T)]}\,\Big|\,\mathscr{F}_t^0\Big),$$

ahol kihasználtuk, hogy $\left(\frac{V^{\hat{\pi}}(t)}{B(t)}, \mathscr{F}_t^0\right)_{t\in[0,T]}$ martingál a $\mathbb{P}_0$ mérték szerint. $\blacksquare$

5.3. Összefoglalás, kitekintés

A dolgozat célja a Malliavin-kalkulus elméletének részletes bemutatása – kezdve a legáltalánosabb nézőponttal, egyre speciálisabb eseteket tekintve –, és egy aktuális pénzügyi alkalmazás tárgyalása volt. Az elmélet további felhasználásait mutatja be [10] 6. fejezete, illetve [13] 5. fejezete; ezek között megtalálható bizonyos opciók érzékenységvizsgálata, a bennfentes kereskedés modellezése, valamint az általánosított Clark – Ocone-formula bizonyítása, ennek segítségével pedig adott kifizetésfüggvényhez tartozó önfinanszírozó replikáló portfólió felírása.

Hivatkozások

[1] BILLINGSLEY, P., *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, 1986.

[2] DIESTEL, J. – UHL, J.J., *Vector Measures*, American Mathematical Society, 1977.

[3] FRYSZKOWSKI, ANDREJ, *Fixed Point Theory for Decomposable Sets*, Springer Science & Business Media, 2005.

[4] KARATZAS, I. – SHREVE, S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag 1991.

[5] KRISTÓF JÁNOS, *A matematikai analízis elemei I.*, elektronikus jegyzet, 2015.

[6] KRISTÓF JÁNOS, *A matematikai analízis elemei II.*, elektronikus jegyzet, 2015.

[7] KRISTÓF JÁNOS, *A matematikai analízis elemei III.*, elektronikus jegyzet, 2015.

[8] KRISTÓF JÁNOS, *A matematikai analízis elemei IV.*, elektronikus jegyzet, 2015.

[9] KRISTÓF JÁNOS, *A matematikai analízis elemei V.*, elektronikus jegyzet, 2015.

[10] NUALART, DAVID, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer-Verlag, 2006.

[11] NYGREN, L. M. – LAKNER, P. *Partial Hedging Using Malliavin Calculus,* Journal of Mathematical Finance, 2012/2, 203-213

[12] ØKSENDAL, B., *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, 2003.

[13] ØKSENDAL, B., *An Introduction to Malliavin Calculus with Applications to Economics*, elektronikus jegyzet, 1997.

[14] PROKAJ VILMOS, *Malliavin calculus*, elektronikus jegyzet, 2016.

[15] PROKAJ VILMOS, *Sztochasztikus analízis*, előadásjegyzet, 2015.