

CDO-k árazása különböző összefüggési struktúrák mellett

MSc szakdolgozat

Baranyi Eszter

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc

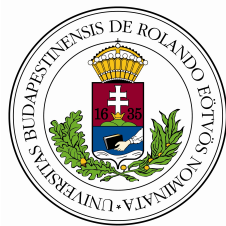
Kvantitatív pénzügyek szakirány

Témavezető:

Dr. Márkus László

egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar



Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

2018

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Márkus Lászlónak minden segítségét és hasznos tanácsát, melyek nélkül e dolgozat nem készülhetett volna el.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
1. Hitelderivatívák	5
1.1. A Credit Default Swap	5
1.2. CDS indexek	8
1.3. Értékpapírosítás és a CDO struktúra	10
2. A sztenderd modell	13
2.1. Alapelvek	13
2.2. A modell feltevései	16
2.3. A hazard rate modell	17
2.4. Árazás - egy rekurzív módszer	19
2.5. Gyakorlati megvalósítás	23
2.5.1. A használt adatok	23
2.5.2. Kalibrálás	24
2.5.3. Eredmények	25
3. Árazás sztochasztikus korreláció mellett	27
3.1. A modell	27
3.2. Árazás Monte Carlo szimulációval	29
3.3. Paraméterbecslés	32
3.3.1. Jacobi-folyamat	32
3.3.2. Ornstein-Uhlenbeck folyamat	32
3.3.3. Geometriai Brown mozgás	34
3.4. Gyakorlati megvalósítás	35
3.4.1. Kalibrálás	35
3.4.2. Eredmények	37
Összefoglalás	40
Irodalomjegyzék	41

A. Függelék: Az iTraxx Europe Series 28 index összetétele	42
B. Függelék: R programok	45
B.1. A sztenderd modell	45
B.2. Sztochasztikus korrelációjú modellek	49

Bevezetés

A 2007-08-as gazdasági válság kialakulásában a különböző strukturált termékeknek, többek között a CDO-knak is jelentős szerepük volt. Az extrém piaci körülmények rávilágítottak arra, hogy az ezen pénzügyi termékek árazására korábban felállított modellek nem megfelelőek, elsősorban a feltételezett összefüggési struktúrák szempontjából. A válság után azon kívül, hogy a strukturált termékek felügyelete jelentősen szigorodott, egyre többféle modell jelent meg a piacon, melyek célja a korrelációs struktúra pontosabb leírása volt.

Szakedolgozatom célja a szintetikus CDO-k bemutatása, a piaci sztenderd árazási módszer ismertetése és összehasonlítása alternatív, sztochasztikus korrelációjú modellekkel. Az első fejezetben ismertetem a szintetikus CDO-k, illetve az azokat felépítő egyszerűbb hitelderivatívák jellemzőit, elsősorban Craig Mounfield könyve [1] és a Markit kiadványa [2] alapján. Ezután a második fejezetben szintén Mounfield könyvét [1] követve bemutatom a piaci sztenderd modellt és annak keretein belül a CDO-k árazását, majd elemzem az ezek alapján önállóan írt R program eredményeit. A harmadik fejezetben bemutatok néhány sztochasztikus korrelációjú modellt és az azok keretein belüli árazást Cathrin van Emmerich cikke [4], Gouriéroux és Valéry cikke [5], Teng et al. cikke [6], Jun Ma cikke [7] és Mounfield könyve [1] alapján, végül elemzem egy szintén önállóan írt R program eredményeit, összevetve a korábbiakkal. A második és harmadik fejezetben ismertetem továbbá a gyakorlati megvalósításnak, illetve a modellek kalibrálásának menetét Gouriéroux és Valéry cikke [5] és Thijs van den Berg cikke [8] alapján.

1. Hitelderivatívák

A CDO-k árazásához elsősorban elengedhetetlen magának a terméknek, illetve az azt alkotó, egyszerűbb pénzügyi termékeknek a megértése. Ezek az úgynevezett hitelderivatívák, melyek olyan származtatott termékek, amelyben az egyik fél egy meghatározott eszköz hitelkockázatát áthárítja a másik félre. Ebben a fejezetben ismertetjük a releváns hitelderivatívákat: a CDS-eket és azok indexeit, majd a CDO struktúrát és a szintetikus CDO-kat, melyeket később árazni szeretnénk. A fejezet Craig Mounfield könyvének 1. fejezete [1], a Markit indexekről szóló kiadványa [2] és Király Júlia cikke [3] alapján készült.

1.1. A Credit Default Swap

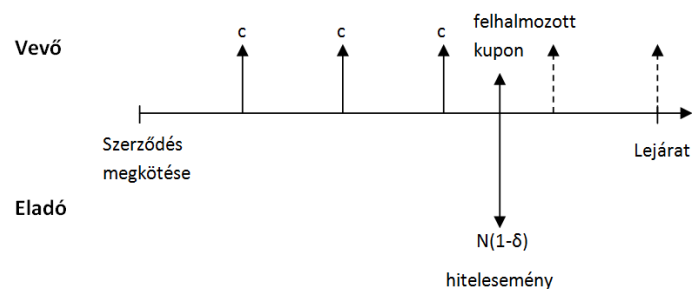
A CDS a legegyszerűbb hitelderivatíva, amely minden összetettebb termék alapköve. Ez egy tőzsdén kívüli (OTC), kétoldalú csereügylet, melyben a két szerződő fél egy harmadik fél, az úgynevezett referencia alany csődeseményéhez kötődő kifizetéseket cserél. A CDS-ek lehetővé teszik a hitelkockázat kiiktatását egy adott kitétségből, illetve a hitelkockázattal való spekulatív kereskedést is. Emellett a CDS piac egy másik előnye, hogy a vállalati kötvényekkel szemben bármennyi kontraktust ki lehet írni egy adott referencia alany értékpapírára, illetve kevésbé szegmentált is, mert jellemzően egy vállalatnak egy CDS terméke van. Mindezeknek köszönhetően a CDS piac egyre nagyobb és kiterjedtebb.

A CDS szerződés kiíróját a védelem eladójának (protection seller), a másik felet pedig a védelem vevőjének (protection buyer) szokás nevezni. Megkötéskor a szerződés legfontosabb eldöntendő paraméterei a lejárat, a fizetendő kupon vagy más néven a CDS-felár (credit spread), a hitelesemények definiálása, a referencia alany/termék, illetve az elszámolás módja hitelesemény bekövetkezésekor. Ez utóbbira két lehetőség van: a fizikai, illetve a pénzbeli elszámolás.

Fizikai elszámolásnál az esetleges hitelesemény bekövetkezésekor a vevő ténylegesen leszállítja a szerződésben szereplő értékpapírt vagy egy annak megfelelő értékű, szintén előre meghatározott feltételeknek megfelelő -az úgynevezett legolcsóbban szállítható (cheapest to deliver)- értékpapírt, melyért az eladó fizet. Pénzbeli elszámolásnál ezzel szemben nincs tényleges értékpapír-kereskedelem, hanem az eladó kifizeti az eredeti névérték és a követelésből visszanyerhető érték különbségét. Azt, hogy a névérték hány százaléka lesz visszanyerhető a hitelesemény után, az úgynevezett recovery rate adja meg, melyet az esemény bekövetkezése után az illetékes hivatalok külsőleg határoznak meg. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy az elszámolás pénzbeli, mivel a gyakorlatban ez sokkal elterjedtebb.

Egy CDS szerződés futamideje tetszőleges lehet, a piaci konvenció szerint a lejárat dátumnak egy úgynevezett IMM dátumra kell esnie, azaz az adott év március 20-án, június 20-án, szeptember 20-án vagy december 20-án kell lejárnia. A legelterjedtebbek az 5 éves CDS-ek, de a piac növekedésével egyre kereskedettebbeké váltak különböző futamidejű szerződések is, egészen a pár hónapostól a 10 évnél is hosszabb futamidejűekig. A továbbiakban minden esetben 5 éves CDS-ekkel fogunk dolgozni. A csereügylet alapterméke lehet bármely vállalat vagy állam által kibocsátott kötvény, melyet a szerződés megkötésekor a vevőnek nem szükséges birtokolnia, sőt, pénzbeli elszámolás esetén erre később sincsen szükség. A meghatározott hitelesemények általában a kötvény kibocsátójának csődje és a kötvény fizetési képtelensége, illetve esetenként az adósságátütemezés.

A CDS kuponját, ami gyakorlatilag ekvivalens a termék árával, a várható kifizetések alapján határozzák meg. A kifizetések sorozatai 2 lábra bonthatók: a vevő által fizetett rendszeres kupon-sorozatra és az eladó által fizetett összegre hitelesemény bekövetkezése esetén. Szemléletesen, egy lehetséges kifizetéssorozat látható az 1. ábrán. Az arbitrázsmentes érvelés alapján a kupon meghatározásának alapja az, hogy a két lábon a várható kifizetések jelenértéke megegyezzen. A vevő meghatározott gyakorisággal (általában ne-



1. ábra. Egy CDS szerződés lehetséges kifizetései c kupon, N névérték és δ recovery rate mellett.

gyedévente, az IMM dátumokon) fizeti a szerződésben szereplő kupont egy hitelesemény bekövetkezéséig vagy - ha ilyen nem történik - a megadott lejáratig. Ha a hitelesemény nem kuponfizetéskor következik be, akkor az addig időarányosan felhalmozott kupon is ki kell fizetnie a vevőnek. Az eladónak csak hitelesemény bekövetkezésekor keletkezhet fizetési kötelezettsége. Ekkor a külsőleg, a felszámolás során meghatározott recovery rate alapján kell kifizetnie a névérték egy bizonyos százalékát.

Egy CDS szerződés kifizetéssorozatai tehát erősen függenek attól, hogy lejáratig következik-e be hitelesemény, illetve ha igen, akkor mikor következik be. Ennek következtében a CDS-felár is függ ezektől, így érthető, hogyan lehetnek a CDS-ek alkalmasak egy meglévő kitettség fedezésére vagy a csődvalószínűségekre vonatkozó spekulációra.

1.2. CDS indexek

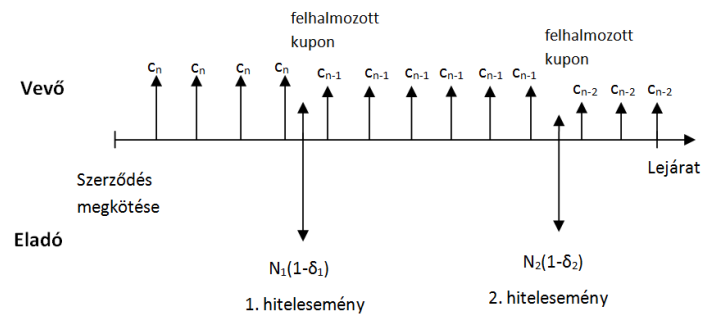
A CDS indexek bizonyos összetételű, CDS-ekből álló portfóliót takarnak. Ezek is tőzsdén kívül kereskedett (OTC) termékek, melyeknek kiemelt szerepük van, mivel sok szempontból sztenderdizáltak. Legfőbb előnyük az, ami bármely indexé: a CDS piac vagy annak egy szegmensének állapotáról ad egy átfogó képet. Az indexben szereplő egyes referencia alanyokat CDS névnek vagy csak névnek nevezzük. A két legtöbbet kereskedett index család a CDX és iTraxx indexek, ezek jellemzői az 1. táblázatban találhatóak. A CDS piacért, illetve ezen indexek összetételéért, árazásáért és felügyeletéért az IHS Markit felelős.

1. táblázat. A CDX és iTraxx családok fő indexeinek legfőbb jellemzői

	CDX IG	iTraxx Europe
Portfólió méret	125	125
Görgetési dátumok	03.20. - 09.20.	03.20. - 09.20.
Lejáratok (év)	1, 2, 3, 5, 7, 10	3, 5, 7, 10
Összetétel	Észak-amerikai vállalatok befektetési szintű kötvényei	Európai vállalatok befektetési szintű kötvényei

Mivel az indexek CDS szerződésekből épülnek fel, sok hasonlóságot találhatunk jellemzőikben és árazásukban. Ugyanúgy lehet az elszámolás fizikai vagy pénzügyi, az utóbbi ez esetben is a gyakoribb. A meghatározott hitelesemények is ugyanazok, mint az egyes CDS-eknél, illetve hasonlóak a lejáratok is, melyek ugyanúgy minden esetben IMM dátumra esnek. A pénzáramlások is hasonlóan történnek, azzal a kivétellel, hogy egy hitelesemény bekövetkezésekor nem szűnik meg a szerződés, hanem az adott CDS nevet eltávolítják

a portfólióból és az annak megfelelő arányban csökken az esemény utáni kuponfizetések mérete, illetve az index névértéke. Az index kiírója/eladója ugyanúgy, minden bekövetkező hiteleseménykor az érintett CDS-nek megfelelő összeget fizeti ki a vevőnek, az index árát ezen két pénzáramlás-sorozat alapján határozzák meg.



2. ábra. Egy CDS index lehetséges kifizetései, ahol c_i az i elemű portfólió fair kuponja, N_i és δ_i pedig az adott hiteleseményben érintett CDS névértéke és recovery rate-je.

A legnagyobb különbség az egyes CDS-ekhez képest az, hogy az indexeket félévente görgetik. Ez azt jelenti, hogy a pillanatnyi piaci állapotok alapján, meghatározott módon egy bizottság meghatározza a jelenlegi indexből kikerülő, illetve a helyükre bekerülő neveket, majd egy új széria kerül a piacra. Emellett a korábbi szériák ugyanúgy kereskedhetőek maradnak és tovább élnek lejáratukig.

1.3. Értékpapírosítás és a CDO struktúra

Utolsó lépésként bemutatjuk az értékpapírosítás folyamatát, a CDO struktúrát, majd végül a szintetikus CDO-kat. Az értékpapírosítás lényege, hogy egy adott pénzáramlást bizonyos szempontok szerint átcsoportosítanak. Eredetileg ezen folyamat célja az volt, hogy több illikvid eszközből egy likvid értékpapír jöjjön létre, idővel azonban ez átalakult és főleg a különböző kockázatú hitelek átcsoportosítására szolgált. Így keletkezett a CDO (collateralized debt obligation, fedezett adósságkötelezvény) is, melyben szerepelhetnek magas hozamú és befektetési szintű kötvények, kockázatos hitelek vagy akár már korábbi értékpapírosítás során létrejött papírok is.

Az ilyen strukturált értékpapírokat aztán különböző kockázatú ügyletrészsorozatokra, tranche-ekre bontják. Ezeknek a tranche-eknek három fő kategóriája van: senior, mezzanine és equity vagy tőkerész. Ezek a szeletek különböző, rendszeres kuponokat fizetnek, amelyek megfelelnek az értékpapírosított egyedi hitelek/követelések aggregált kuponfizetéseinek. A tranche-eknek van egy meghatározott sorrendje, ami megadja, hogy a befektetők a kuponfizetési követeléseiket jogilag milyen sorrendben érvényesíthetik, ez az úgynevezett vízeshatás (waterfall). Ezen sorrend, illetve kockázatoságuk alapján a tranche-ek különböző hitelbesorolásokkal is rendelkeznek. Legmagasabb besorolásúak a senior tranche-ek, majd őket követik a mezzanine és equity tranche-ek. Ezek alapján tehát ha az egyedi követelések valamelyike nem teljesül, az csak a legalacsonyabb besorolású szeletet érinti, annak csökkenti a névértékét. Ennek megfelelően, mivel a legalsó szelet a legkockázatosabb, annak lesz a legmagasabb kuponja is.

A CDO-k egy speciális csoportját alkotják a szintetikus CDO-k, melyek árazásával a későbbiekben foglalkozni fogunk. Ezek jellegzetessége, hogy az egyedi hitelek, követelések, értékpapírok helyett a struktúra alapját egy CDS index adja. Ebben az esetben minden tranche-et meghatároz egy csatlakozási pont (attachment point) és egy lekapcsolódási pont (detachment point),

melyek a névérték százalékában adottak. A két fő index családra vonatkozó struktúra a 2. táblázatban található. A csatlakozási pont azt mutatja, hogy a névérték hány százalékát tehetik ki a portfólió veszteségei, mielőtt az adott tranche érintett lenne, a lekapcsolódási pont pedig azt mutatja, hogy hány százaléknyi veszteség után merül ki teljesen az adott tranche-hez tartozó névérték-mennyiség, tehát efelett ez a szelet már nem lesz érintett.

2. táblázat. A CDX és iTraxx családok fő indexeinek kereskedhető tranche-ei

	CDX IG	iTraxx Europe
Senior	15%-100%	22%-100% 12%-22%
Mezzanine	7%-15% 3%-7%	9%-12% 6%-9% 3%-6%
Equity	0%-3%	0%-3%

A szintetikus CDO pénzáramlásai nagyon hasonlóak a CDS indexéihez. A védelem vevője egy meghatározott, rendszeres kupont fizet az eladónak, aki cserében hitelesemény bekövetkezésekor kárpótolja a vevő veszteségeit. Az az egyetlen különbség, hogy egy adott tranche-ben csak akkor kezdődnek meg az eladó kifizetései, ha a portfólió aggregált vesztesége eléri a csatlakozási pontot és a lekapcsolódási pontot elérve a szerződés érvényét veszti, tehát ez esetben mindkét irányú kifizetések megszűnnek.

Általában a fizetendő kupon jelenti egyben a tranche árát is, ekkor ez úgy van meghatározva, hogy a szerződés kötésekor egyik félnek sem kelljen fizetnie. Néhány esetben azonban ehelyett a kupon előre meghatározott. Ekkor az arbitrázsmentesség megtartása érdekében valamelyik félnek fizetnie kell a szerződés kötésekor egy úgynevezett upfront-ot, melyet az adott piaci körülmények határoznak meg. Ezt az upfront-ot a piacon a kereskedett névérték

százalékában, szokásosan bázispontokban jegyzik. Például az iTraxx Europe index esetén az alsó két tranche-en (0% – 3% és 3% – 6%) van egy rögzített 500 bázispontos kupon, és emellett van egy kötési upfront fizetés.

A továbbiakban a szintetikus CDO-kat ezen tulajdonságaik, illetve az arbitrázsmentes érvelés szem előtt tartásával szeretnénk különböző modellekben ábrázolni.

2. A sztenderd modell

Ebben a fejezetben ismertetjük a CDO tranche-ek árazásának alapelveit és egy lehetséges árazási módszert a piacon jelenleg legelterjedtebb, sztenderd modell keretein belül, mely egy lényeges kiindulási pont a bonyolultabb árazási modellek felépítéséhez. Ezután bemutatjuk ezen módszer gyakorlati megvalósítását és az ily módon kapott eredményeket. A modell és az árazás menetének leírása Craig Mounfield könyvének 2. és 6. fejezete [1] alapján készült, az ottani jelöléseket követve.

2.1. Alapelvek

Tegyük fel, hogy az adott CDO alapját adó portfólió n elemű. Minden $i = 1, \dots, n$ névhez tartozzon egy N_i névérték és egy δ_i recovery rate. Ekkor az egész portfólió névértékét jelölje $N_{pool} = \sum_{i=1}^n N_i$. Jelöljük továbbá az egyes nevek csődbemenési időpontjait τ_i -vel ($i = 1, \dots, n$), ekkor a t időpontbeli kumulatív veszteséget

$$L(t) = \sum_{i=1}^n N_i (1 - \delta_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i < t\}}$$

adja, ahol $\mathbb{1}_{\{\tau_i < t\}}$ jelöli az indikátor valószínűségi változót.

Most nézzünk egy γ tranche-et, melyet a (K_L^γ, K_U^γ) pontok jellemeznek, melyekről feltesszük, hogy a névérték pénznemében adottak és hogy $K_L^\gamma < K_U^\gamma$. Az ezt a tranche-et érintő veszteségek a t időpontban

$$L^\gamma(K_L^\gamma, K_U^\gamma, t) = \begin{cases} 0, & L(t) < K_L^\gamma \\ (K_U^\gamma - K_L^\gamma) - L(t), & K_L^\gamma \leq L(t) \leq K_U^\gamma \\ K_U^\gamma - K_L^\gamma, & K_U^\gamma < L(t) \end{cases} =$$

$$= \max[\min(L(t), K_U^\gamma) - K_L^\gamma, 0].$$

Jelölje T a lejárat időpontját és tegyük fel, hogy a csődök bármikor bekövetkezhetnek a $[0, T]$ időintervallumban. Ekkor a védelem eladójának várható kifizetéseit, azaz az egyik ág jelenértékének várható értékét

$$V_{cont}^\gamma(0) = \mathbb{E}_Q \left[\int_0^T Z(0, t) dL(K_L^\gamma, K_U^\gamma, t) \right]$$

módon írhatjuk fel, ahol $Z(0, t)$ a t időpontbeli diszkontfaktor, Q pedig a kockázatmentes vagy martingálmérték. Ha feltesszük, hogy az eladó ágán csak kuponfizetési időpontokban lehetnek kötelezettségek (csak ekkor lehet csőd), akkor ez a kifejezés tovább írható mint

$$V_{cont}^\gamma(0) = \mathbb{E}_Q \left[\sum_{j=1}^N Z(0, T_j) [L^\gamma(K_L^\gamma, K_U^\gamma, T_j) - L^\gamma(K_L^\gamma, K_U^\gamma, T_{j-1})] \right],$$

ahol T_0, T_1, \dots, T_N a kuponfizetési időpontok a $[0, T]$ intervallumon, $T_N = T$. A várható értéket és az összegzést felcserélve, illetve bevezetve az

$$\mathbb{E}_Q[L^\gamma(K_L^\gamma, K_U^\gamma, t)] = \bar{L}(K_L^\gamma, K_U^\gamma, t)$$

jelölést kapjuk, hogy

$$V_{cont}^\gamma(0) = \sum_{j=1}^N Z(0, T_j) [\bar{L}(K_L^\gamma, K_U^\gamma, T_j) - \bar{L}(K_L^\gamma, K_U^\gamma, T_{j-1})].$$

A másik, rendszeres kuponfizetéseket tartalmazó ágon hasonló módon kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} V_{fee}^\gamma(0) &= \mathbb{E}_Q \left[\sum_{j=1}^N Z(0, T_j) \Delta_j [(K_U^\gamma - K_L^\gamma) - L^\gamma(K_L^\gamma, K_U^\gamma, T_j)] \right] = \\ &= \sum_{j=1}^N Z(0, T_j) \Delta_j [(K_U^\gamma - K_L^\gamma) - \bar{L}(K_L^\gamma, K_U^\gamma, T_j)], \end{aligned}$$

mivel $(K_U^\gamma - K_L^\gamma) - L(K_L^\gamma, K_U^\gamma, T_j)$ jelenti a T_j kuponfizetési időpontban az adott tranche-en megmaradt névértéket. Itt $\Delta_j = T_j - T_{j-1}$, tehát az egymást követő kuponfizetési időpontok között eltelt idő, években.

Ekkor a fair kupon (par spread):

$$s_{par} = \frac{V_{cont}^\gamma}{V_{fee}^\gamma},$$

amely mellett a szerződés megkötésekor az érték 0 lesz. Ha esetleg a tranchehez tartozik egy upfront kifizetés is, akkor ezt a vevő szempontjából az

$$u^\gamma + s_{run} V_{fee}^\gamma = V_{cont}^\gamma$$

egyenlet alapján kaphatjuk meg, ahol s_{run} a szerződésben meghatározott, a futamidő alatt érvényes kupon. A bázispontban jegyzett upfront kiszámításához az így kapott értéket még le kell osztani a szerződés névértékével.

Ezen alapelvek teljesüléséhez csupán az a feltételezés szükséges, hogy csőd csak kuponfizetési időpontokban fordulhat elő, tehát ezek a megállapítások bármilyen modellben érvényesek maradnak. Azt is láthatjuk, hogy ezek ismeretében már csak az adott tranche várható veszteségeire van szükségünk az árazáshoz. A továbbiakban tehát célunk ennek meghatározása lesz a piaci sztenderd modell keretein belül.

2.2. A modell feltevései

A jelenleg a legszélesebb körben használt sztenderd modell egy egyfaktoros modell, ahol minden, az alapportfólióban szereplő CDS név vagyonának értékalakulását

$$X_i = \rho_i V + \sqrt{1 - \rho_i^2} \epsilon_i \quad i = 1, \dots, n$$

alakban modellezünk. Itt V egy sztenderd normális valószínűségi változó, az úgynevezett közös faktor, amit általában a "piac állapotának" tekintünk, ez nem közvetlenül megfigyelhető. Az ϵ_i -k szintén sztenderd normális eloszlású valószínűségi változók, melyek egymástól függetlenek és minden i -re függetlenek V -től is, ezek az úgynevezett egyedi/idioszinkratikus faktorok.

A bevezetett struktúra miatt az X_i értékek is sztenderd normális eloszlásúak lesznek, ugyanis egyrészt független normális valószínűségi változók lineáris kombinációja is normális, másrészt pedig:

$$\mathbb{E}[X_i] = \rho_i \mathbb{E}[V] + \sqrt{1 - \rho_i^2} \mathbb{E}[\epsilon_i] = 0,$$

illetve

$$\mathbb{D}^2[X_i] = \rho_i^2 \mathbb{D}^2[V] + (1 - \rho_i^2) \mathbb{D}^2[\epsilon_i] = \rho_i^2 + 1 - \rho_i^2 = 1,$$

ahol \mathbb{E} a várható értéket, \mathbb{D}^2 pedig a szórásnégyzetet jelöli.

A modellben szereplő ρ_i -k az egyes nevek vagyonának értéke és a V faktor együttmozgását, vagyis ezek korrelációját mutatják. Mivel az egyedi faktorok mind függetlenek egymástól és a közös faktortól is, az egyes nevek egymással vett korrelációit

$$\text{corr}(X_i, X_j) = \rho_{ij} = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\mathbb{D}[X_i] \mathbb{D}[X_j]} = \rho_i \rho_j \mathbb{D}^2[V] = \rho_i \rho_j$$

szerint kaphatjuk meg, felhasználva, hogy a szórás, $\mathbb{D}[X_i] = 1$ ($i = 1, \dots, n$), és hogy $\mathbb{D}^2[V] = 1$.

2.3. A hazard rate modell

A CDO-k - és általában a hitelderivatívák - pénzáramlásai, tehát ezen keresztül az áraik is erősen függenek a hitelesemények, csődök bekövetkezésétől és a csőd időbeliségétől, így fontos ezek modellezése is. A csődök modellezésére a jelenlegi piaci sztenderd modell az úgynevezett hazard rate modell, melynek alapfeltevése, hogy minden csőd olyan véletlen esemény, amely egy Poisson-folyamattal írható le.

Tekintsünk egy $N(t)$ számláló folyamatot, ami egy nemnegatív, növekvő, egészértékű folyamat. Ennek értéke mutatja, hogy az adott időintervallumon hány hitelesemény/csőd következett be. A folyamat intenzitását jelölje $h(t)$, melynek jelentése az egységnyi idő alatt bekövetkezett csődök várható száma. A használt modell egy egyszerűsítő feltevése, hogy ez konstans, azaz $h(t) = h \forall t \geq 0$ -ra.

Legyen most $t \geq 0$ rögzített, és tekintsük a $[t, t + \Delta t]$ intervallumot. Annak a valószínűsége, hogy ezen az intervallumon lesz egy csőd vagy sem

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1] = h\Delta t,$$

illetve

$$P[N(t + \Delta t) - N(t) = 0] = 1 - h\Delta t.$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy az ugrások egymástól diszjunkt intervallumokon függetlenek, azaz $N(t)$ Markov-folyamat. Most nézzük a $[t, T]$ időintervallumot ($t < T$), és osszuk fel ezt m részre, tehát

$$\Delta t = \frac{T - t}{m}.$$

Ebben az esetben annak a valószínűsége, hogy az egész intervallumon nincs csőd, azaz nincs ugrás a folyamatban

$$P[N(T) - N(t) = 0] = (1 - h\Delta t)^m \rightarrow e^{-h(T-t)},$$

ahol a $\Delta t \rightarrow 0$ határértéket vesszük. 1 darab ugrás valószínűsége ugyanezen intervallumon

$$P[N(T) - N(t) = 1] = n(h\Delta t)(1 - h\Delta t)^{n-1} \rightarrow (T - t)he^{-h(T-t)},$$

mivel az ugrás valamelyik $[t + k\Delta t, t + (k + 1)\Delta t]$ intervallumba kell, hogy essen, a másik $m - 1$ darab intervallumban pedig nincs ugrás. Ezt tovább folytatva összesen n darab ugrás valószínűsége a $[t, T]$ intervallumon

$$P[N(T) - N(t) = n] = \frac{1}{n!}[h(T - t)]^n e^{-h(T-t)}$$

lesz, ami tehát egy Poisson-folyamatot ad.

Az árazás szempontjából a lényeges mennyiségek a hazard rate modelltől kapott túlélési és csődbemenési valószínűségek. A túlélési valószínűség az $n = 0$ esettel ekvivalens, tehát

$$S(t, T) = e^{-h(T-t)}.$$

A csődbemenési valószínűség ennek a komplementere, azaz

$$Q(t, T) = 1 - S(t, T) = 1 - e^{-h(T-t)}.$$

2.4. Árazás - egy rekurzív módszer

Ahogy korábban már láttuk, a CDO tranche-ek árazásában kulcsfontosságú a CDS portfólió veszteségeloszlásának meghatározása. Ennek ismeretében maga az ár meghatározható a 2.1 szakaszban leírt alapelvek szerint.

A veszteségeloszlás meghatározására számos módszer létezik, melyek két fő kategóriába sorolhatók. Egyrészt használhatunk Monte Carlo szimulációt, amelynek előnye, hogy nagyon rugalmas feltételek mellett is használható, tehát nem sztenderd felépítésű CDO-kra is alkalmazható, viszont számításigényes, és a numerikus hibák sem elhanyagolhatók. Másrészt, a sztenderd szintetikus CDO struktúrák esetén használhatunk szemianalitikus módszereket is, melyek előnye, hogy numerikusan kevésbé számításigényesek, mivel nagyrészt elméleti alapokon nyugszanak. A továbbiakban Mounfield könyvének 6.2.5. szakaszát [1] követve egy ilyen szemianalitikus módszer bemutatása található, melynek lényege, hogy a veszteségeloszlást rekurzívan határozza meg.

Ez a rekurzív módszer három nagyobb lépésre bontható: az első lépésben kiszámítjuk az egyes nevek feltételes csődvalószínűségeit, majd a másodikban kiszámítjuk a teljes portfólió feltételes veszteségeloszlását rekurzív módon, végül pedig kiszámítjuk az adott tranche várható veszteségét. A feltételes csődvalószínűségek kiszámításához feltesszük, hogy csőd akkor következik be egy i névnél, ha vagyonának értéke egy adott B_i szint alá esik. A sztenderd modell keretein belül a vagyon értékét

$$X_i = \rho_i V + \sqrt{1 - \rho_i^2} \epsilon_i, \quad 0 \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

alakúnak feltételezzük, ahol X_i , V , ϵ_i sztenderd normális valószínűségi változók. Jelölje ezen változók eloszlásfüggvényeit rendre $F_i(x)$, $G(x)$ és $H_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$). Jelölje továbbá $q_i(t)$ az i -edik név kockázatmentes csőd-bemenési valószínűségét a t időpontig, melyet megkaphatunk a hazard rate modellből, ez alapján

$$q_i(t) = 1 - e^{-h_i t}.$$

A bevezetett jelölésekkel felírva tehát az i -edik név akkor megy csődbe, ha $X_i < B_i$. Ezt a határt az ismert csődbemenési valószínűségekből szeretnénk meghatározni, melyek azonban függenek az időtől. Ezért a határok esetén is bevezetünk időfüggést és

$$F_i(B_i(t)) = q_i(t),$$

alapján számolunk, melyből következik, hogy

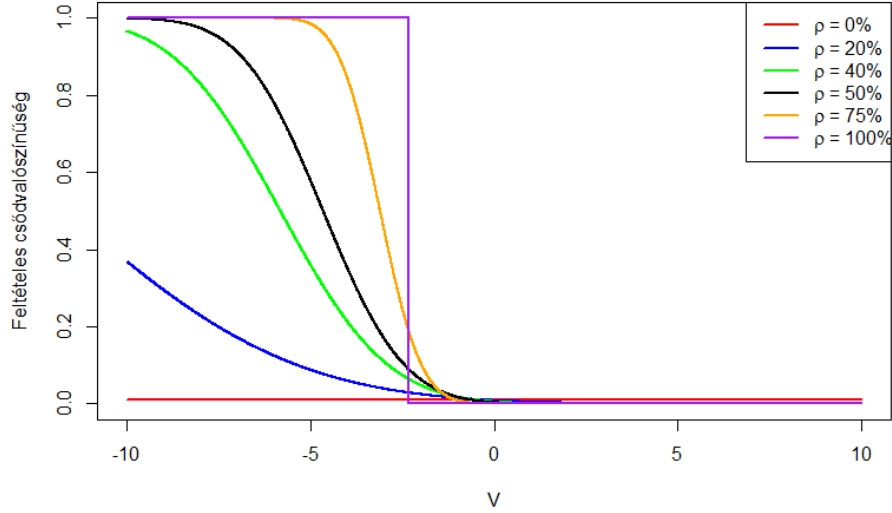
$$B_i(t) = F_i^{-1}(q_i(t)).$$

A V -re vett feltételes csődvalószínűség ezek alapján

$$q_i(t|V) = P(X_i < B_i|V) = P\left(\epsilon_i < \frac{B_i - \rho_i V}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \mid V\right) = H_i\left(\frac{B_i(t) - \rho_i V}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right),$$

ahol az időfüggőség ismét a feltétel nélküli csődvalószínűségek időfüggősége miatt jelenik meg. Néhány határesetet megvizsgálva azt látjuk, hogy $V \rightarrow \infty$ esetén, azaz amikor a piac és a gazdaság jó állapotban van, $q_i(t|V) \rightarrow 0$, tehát a csőd valószínűsége kicsi. $V \rightarrow -\infty$ esetén ezzel szemben $q_i(t|V) \rightarrow 1$, tehát amikor a piac rossz állapotban van, a csődbemenés valószínűsége magas. A konvergencia gyorsaságát a ρ_i paraméterek befolyásolják, $\rho_i = 0$ esetén $q_i(t|V) = q_i(t)$, mivel ekkor a csődvalószínűség független lesz a piac állapotától.

A következő lépés a portfólió feltételes veszteségeloszlásának meghatározása. Ehhez feltesszük, hogy már ismertek a $q_i(t|V)$ ($i = 1, \dots, n$) feltételes csődvalószínűségek. Feltesszük továbbá, hogy az adott indexben szereplő nevek mindegyikéhez ugyanaz a névérték és recovery rate tartozik, így minden csőd esetén ugyanannyi lesz a portfólió vesztesége. Az árazási módszer kiterjeszhető nevenként eltérő veszteségek esetére is, ezt azonban nem tárgyaljuk, mivel a korábban bemutatott indexek (iTraxx, CDX) esetén ez az egyszerűsítő feltétel teljesül. A veszteségeloszlást rekurzívan határozzuk meg, ennek egy lépéséhez tekintsünk egy k elemű portfóliót. Jelölje $p_k(l, t|V)$ ($l = 0, 1, \dots, k$) annak a feltételes valószínűségét, hogy a t időpontig l darab csőd következik



3. ábra. Feltételes csődvalószínűségek a V változó értékének függvényében különböző szintű korrelációkra, $h = 1\%$ és $t = 1$ paraméterek mellett.

be. Hozzávéve egy $k + 1$ -edik elemet a portfólióhoz, az új veszteségeloszlás

$$p_{k+1}(0, t|V) = p_k(0, t|V)(1 - q_{k+1}(t|V)),$$

$$p_{k+1}(l, t|V) = p_k(l, t|V)(1 - q_{k+1}(t|V)) + p_k(l - 1, t|V)q_{k+1}(t|V), \quad l = 1, \dots, k,$$

$$p_{k+1}(k + 1, t|V) = p_k(k, t|V)q_{k+1}(t|V)$$

lesz, kihasználva, hogy a V közös faktorra nézve az egyes nevek feltételesen függetlenek egymástól. A rekurziót $k = 0$ -ra, $p_0(0, t|V) = 1$ -ből indítjuk el, és ezek alapján n -ig bővítjük a portfóliót.

Végül a tranche várható veszteségét szeretnénk ezek alapján meghatározni. A feltétel nélküli veszteségeloszlást meghatározhatjuk a

$$p_n(l, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(l, t|V)P(V)dV$$

integrál alapján, ebből pedig a várható veszteség a T_j kuponfizetési időpontban

$$\bar{L}(T_j) = \sum_{l=0}^n p(l, T_j)L(l)$$

lesz, ahol

$$L(l) = \max[\min(lN(1 - \delta), K_U) - K_L, 0].$$

Itt N és δ a közös névérték és recovery rate, (K_U, K_L) pedig az adott tranche-et meghatározó pontok. Ez a várható veszteség tehát a feltételes csődvalószínűségeken keresztül erősen függ a poltfólióban található nevek korrelációs struktúrájától, ez adja a CDO tranche-ek legfontosabb jellegzetességét.

2.5. Gyakorlati megvalósítás

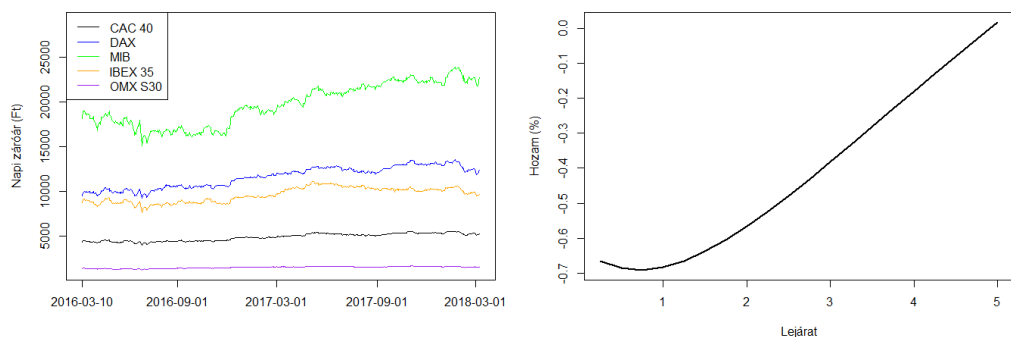
Ebben a szakaszban a sztenderd modell keretein belüli árazás gyakorlati megvalósítása olvasható, mely a Függelék B.1 szakaszában található R programmal történt. Célunk az iTraxx Europe Series 28 indexre szóló, 5 év lejáratú szintetikus CDO tranche-einek árazása 2018. március 8-ra. A továbbiakban bemutatjuk a használt adatokat, a modell kalibrálásának választott módszerét, illetve a kapott eredményeket, összehasonlítva a valós piaci árakkal.

2.5.1. A használt adatok

Az árazáshoz használt fő adatokat az iTraxx Europe Series 28 indexben szereplő nevek (ld. A Függelék) 5 éves CDS-felárainak 2016. március 10. és 2018. március 8. közötti idősorai teszik ki, melyek a Bloomberg Terminalon nyilvánosan hozzáférhetők. Ezen adatsorok nagy része hiányos volt, így első lépésben ezeket egy-egy illesztett autoregresszív modellből predikcióval kapott értékekkel pótoltuk ki. A valós piaci árakkal való összehasonlításhoz a CDO tranche-ek árai is a Bloomberg Terminal-ról származnak.

A kalibráláshoz ezen kívül szükségünk volt néhány európai ország tőzsdeindexének árára is, melyek a modellben szereplő V közös faktort reprezentálják. Annak érdekében, hogy minél átfogóbb képet kapjunk az európai piacról, a választás alapja az volt, hogy a jelentősebb országok és régiók képviselve legyenek. A kiválasztott országok és indexeik: Franciaország (CAC 40), Németország (DAX), Olaszország (MIB), Spanyolország (IBEX 35) és Svédország (OMX S30). Ezen adatok forrása az Investing.com [9], a használt idősorok ugyanarra az időszakra vonatkoznak, mint a CDS-feláraink adatai.

Végül a diszkontáláshoz szükségünk van a kockázatmentes kamatlábakra minden kuponfizetési időpontban. Ehhez a 2018. március 8-i, az AAA minősítésű európai kötvényekre vonatkozó hozamgörbét használtuk, mely az Európai Központi Bank honlapján [10] elérhető.



4. ábra. Az árazáshoz használt adatok: a választott tőzsdeindexek árai (balra) és a hozamgörbe (jobbra).

2.5.2. Kalibrálás

Azelőtt, hogy az árazást el tudnánk végezni, a modellt kalibrálni kell a pillanatnyi piaci körülmények, tehát az előbbiekben leírt adatok alapján. A 2.4 szakaszban leírt rekurzív árazási módszerben kétféle paramétert kell így meghatározunk: a ρ_i korrelációkat és a $q_i(t)$ csődvalószínűségeket minden $i = 1, \dots, n$ névre és $t \leq T$ kuponfizetési időpontra.

Ahogy korábban láttuk, ρ_i igazából az i . név és a V faktor korrelációját takarja. Ez utóbbi a "piacot" hivatott szimbolizálni, tehát ezen értékek kalibrálásához szükségünk van a piac valamilyen reprezentálására. Mivel célunk az iTraxx Europe indexre szóló szintetikus CDO árazása, ezért célszerűbb ezt leszűkíteni csupán az európaira. Mivel a piacon nem elérhető egy index, ami az egész európai piacot jellemezné, ezért ezt helyettesítjük a korábbiakban leírt tőzsdeindexekkel. Ezen adatokat azonban önmagukban nem tudjuk használni, mivel az árazáshoz csak egy faktorra van szükségünk. Ennek érdekében főkomponens-elemzéssel kiszámítjuk az első főkomponenst, ezt takarja az árazás során a V közös faktor. Ezután már a kialakult faktor és az egyes CDS-felárak idősorainak korrelációját egyszerűen becsülhetjük.

A $q_i(t)$ csődvalószínűségeket a 2.3 szakaszban bevezetett hazard rate modell alapján becsüljük, mely szerint

$$q_i(t) = 1 - e^{-h_i t}.$$

Ehhez tehát a h_i hazard rate-re van szükségünk minden névhez. Ezek becslésére Mounfield könyvének 3.3.6. szakasza [1] alapján az úgynevezett credit triangle-t használtuk, amely egy, a CDS árazásból származó összefüggés, miszerint

$$h = \frac{s}{1 - \delta},$$

ahol s a CDS-felárat, δ pedig a névhez tartozó recovery rate-et jelöli. Ez az összefüggés determinisztikus kamatláb és konstans recovery rate mellett fennáll, melyek ez esetben teljesülnek, ugyanis szokásosan a recovery rate-et 40%-nak tekintjük minden névre, a korábban leírt hozamgörbe pedig nyilván determinisztikus. Az aktuális CDS-felárak is rendelkezésre állnak, tehát a hazard rate-eket, így a csődvalószínűségeket is tudjuk becsülni.

2.5.3. Eredmények

A kalibrált paraméterek ismeretében már a 2.4 és 2.1 szakaszokban leírt módszerek alapján kiszámíthatjuk az egyes tranche-ek árait. Az adott dátumra (2018. márc. 8.) a CDO 0%-3%-os, 3%-6%-os, 6%-12%-os és 12%-100%-os tranche-eire állnak rendelkezésre piaci árak, tehát ezeket szeretnénk a felépített modellben is meghatározni. A valós és számított eredményeket a 3. táblázat tartalmazza.

Az első két tranche esetén az upfront értékek szerepelnek 500 bázispontos rögzített kupon mellett. Az árak a vevő szempontjából értelmezendők, tehát amikor a par spread a rögzítettnél nagyobb lenne, a vevőnek kell upfrontot fizetnie és ez pozitív lesz, ellenkező esetben pedig az eladónak, amikor is negatív értéket kapunk.

3. táblázat. A kereskedett tranche-ek valós és becsült árai

Tranche	Piaci ár (bp)	Számított ár (bp)	Eltérés (bp)
0%-3%	30,59	67,35	36,76
3%-6%	4,73	-27,17	-31,90
6%-12%	66,47	152,83	86,36
12%-100%	24,14	10,60	-13,54

A táblázat értékei alapján azt tapasztaljuk, hogy a 0%-3%-os és 6%-12%-os tranche-ek kuponjait a modell túlbecsüli, míg a másik kettőt alulbecsüli. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy a sztenderd modellben az egymástól független csődök valószínűsége nagyobb, mint a tényleges, illetve a sok együttes hitel-esemény valószínűsége kisebb. Azt látjuk tehát, hogy a modell nem megfelelően írja le a különböző nevek együttmozgását, mely elsősorban a szélsőséges esetekben jelent problémát, amikor is nagy számú csőd következik be. Ezen probléma orvoslására egy javasolt módszer a sztochasztikus korreláció bevezetése a modellbe, mellyel a következő fejezetben foglalkozunk.

3. Árazás sztochasztikus korreláció mellett

Ebben a fejezetben a CDO-k árazásának egy alternatív módszerével, a sztochasztikus korrelációjú modellekkel foglalkozunk. Ezen belül három konkrét modellt ismertetünk, melyek keretein belül Monte Carlo szimuláció segítségével az előző fejezetben is vizsgált CDO tranche-ek áaira vonatkozó eredményeket is bemutatjuk. A modelleket van Emmerich cikke [4], Teng et al. cikke [6] és Ma cikke [7] alapján építjük fel. Az árazás menete a Craig Mounfield könyvének 6. fejezetében [1] leírtakat követi, a bemutatott sztochasztikus folyamatok paraméterbecsléseinek ismertetése pedig Gouriéroux és Valéry cikke [5] és Thijs van den Berg cikke [8] alapján készült.

3.1. A modell

A javasolt modell lényege, hogy a szintetikus CDO alapját adó indexben szereplő nevek CDS-felárait geometriai Brown mozgásként modellezzük, melyeket korrelált Wiener-folyamatok hajtanak. Formálisan tehát

$$dX_i(t) = X_i(t)(\mu_i dt + \sigma_i dW_i(t)) \quad i = 1, \dots, n,$$

ahol μ_i a driftet, σ_i pedig a volatilitást jelöli. A W_i Wiener-folyamatokat olyan módon definiáljuk, hogy kvadratikus kovariációjukra

$$dW_i(t)dW_j(t) = d\rho_{ij}(t), \quad i, j = 1, \dots, n$$

teljesüljön. Amennyiben itt ρ_{ij} konstans, akkor ez egyúttal a két Wiener-folyamat korrelációja is. Esetünkben azonban $\rho_{ij}(t)$ egy adaptált sztochasztikus folyamat, melyet az i . és j . név korrelációs folyamatának hívunk. Ezt a korrelációt szeretnénk egy megfelelő sztochasztikus folyamattal leírni. Nyilvánvaló feltétel, hogy $\rho_{ij}(t)$ -nek minden i, j és $t \leq T$ esetén a $[-1, 1]$ intervallumba kell esnie, hogy korrelációként értelmezhesük.

Az egyik lehetőség a korreláció Jacobi-folyamatként történő leírása, van Emmerich cikke [4] alapján. Ekkor

$$d\rho_{ij}(t) = \kappa(\theta - \rho_{ij}(t))dt + \sigma\sqrt{(R_+ - \rho_{ij}(t))(\rho_{ij}(t) - R_-)}dW(t),$$

ahol κ az átlaghoz húzó paraméter, θ a hosszútávú átlag, σ a volatilitás, $W(t)$ pedig egy Wiener-folyamat, amely független $W_i(t)$ -től minden $i = 1, \dots, n$ -re. Ez egy átlaghoz húzó sztochasztikus folyamat, melynek értékei R_- és R_+ közé esnek. A későbbiekben az $R_- = 0$, $R_+ = 1$ esettel fogunk foglalkozni.

Egy másik lehetőség a korrelációs folyamat leírására egy transzformált Ornstein-Uhlenbeck folyamat, Teng cikke [6] alapján. Formálisan ekkor

$$\rho_{ij}(t) = f(Y(t)),$$

$$dY(t) = \kappa(\theta - Y(t))dt + \sigma dW(t),$$

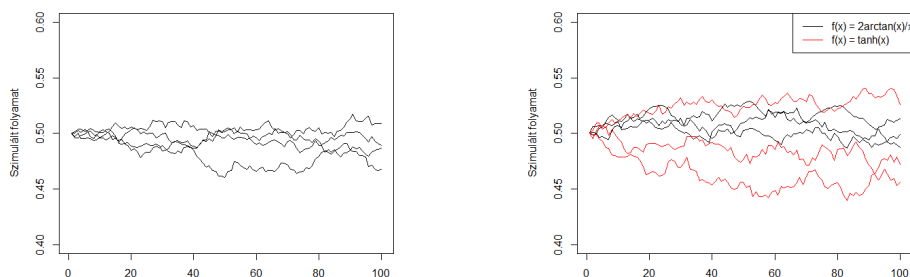
ahol $f: \mathbb{R} \mapsto [-1, 1]$ függvény, κ ismét az átlaghoz húzó paraméter, θ az átlag, σ a volatilitás, $W(t)$ pedig egy, a $W_i(t)$ -ktől független Wiener-folyamat. Transzformációként tekintjük az

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$$

és az

$$f(x) = \tanh(x)$$

függvényeket, melyek mindketten a $[-1, 1]$ intervallumba transzformálják a folyamatot. A továbbiakban ebben a három modellben szeretnénk vizsgálni a CDO árak alakulását.



5. ábra. Az azonos paraméterekkel rendelkező Jacobi-folyamat (balra) és transzformált Ornstein-Uhlenbeck folyamatok (jobbra) néhány tipikus trajektóriája.

3.2. Árazás Monte Carlo szimulációval

A sztochasztikus korreláció bevezetésével az árazás jelentősen bonyolultabbá válik, ezért célszerű analitikus módszerek helyett szimulációkkal végezni. Ezáltal sokkal rugalmasabb feltételek mellett tudunk árazni, habár numerikus hibák megjelenhetnek, illetve a számításigény is jelentősen megnő. A leírt árazási séma bármelyik korábban bemutatott korrelációs folyamatra alkalmazható és Mounfield könyvének 6.4. szakasza [1] alapján készült. Elsősorban most is a portfólió veszteségeit szeretnénk megkapni, mivel ennek ismeretében a 2.1 szakaszbeli alapelveket továbbra is használhatjuk az ár meghatározására.

Első lépésként szimuláljuk a korrelációs mátrixot a lejáratig, Δt időközönként. A mátrix i, j -edik eleme a t időpontban a ρ_{ij} folyamat t -ben felvett értéke lesz. Ha Jacobi-folyamattal modellezzük a korrelációt, melyben $R_- = 0$ és $R_+ = 1$, akkor a szimulációt

$$\rho_{ij}(t + \Delta t) = \begin{cases} 0,99, & 1 \leq \rho_{ij}^*(t + \Delta t) \\ \rho_{ij}^*(t + \Delta t), & 0 \leq \rho_{ij}^*(t + \Delta t) < 1 \\ 0,01, & \rho_{ij}^*(t + \Delta t) < 0 \end{cases}$$

alapján végezzük, ahol

$$\rho_{ij}^*(t + \Delta t) = \rho_{ij}(t) + \kappa(\theta - \rho_{ij}(t))\Delta t + \sigma\sqrt{\rho_{ij}(t)(1 - \rho_{ij}(t))}\sqrt{\Delta t}Z.$$

Itt κ , θ és σ a Jacobi-folyamat paraméterei, Z pedig sztenderd normális eloszlású valószínűségi változó. A 0-nál és 1-nél való levágásra azért van szükség, mert különben a diszkrét idejű közelítés miatt a szimuláció során a folyamat kiléphetne a $[0, 1]$ intervallumból. Abban az esetben, amikor transzformált Ornstein-Uhlenbeck folyamattal modellezzük a korrelációt, először szimuláljuk a folyamatot

$$Y(t + \Delta t) = Y(t)e^{-\kappa\Delta t} + \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}}Z$$

alapján, ahol κ , θ és σ az Ornstein-Uhlenbeck folyamat paraméterei és Z ismét sztenderd normális eloszlású változó. Az így kapott értékeket ezután megfelelően transzformáljuk, hogy megkapjuk a korrelációs mátrix elemeit.

A szimulált folyamatokból kapott mátrix pozitív definittségét biztosítani kell ahhoz, hogy ezt korrelációs mátrixként értelmezhesük. A gyakorlati megvalósítás során ezt az R programnyelv egy beépített függvényével biztosítottuk, mely a nempozitív sajátértékek megváltoztatásával a kapott mátrixot pozitív definitté transzformálja. A t időponthoz tartozó, már pozitív definit korrelációs mátrixot jelölje R_t , ennek tekintsük a Cholesky-felbontását. Ez alapján legyen A_t az az alsó háromszög mátrix, melyre $R_t = A_t A_t^T$. Generáljunk n darab független, sztenderd normális eloszlású véletlen számot, ezek vektorát jelölje ϵ_t . Ekkor a $\phi_t = A_t \epsilon_t$ szorzatból megfelelően korrelált normálisok vektorát kapjuk, melyre a CDS-felárak szimulációjához lesz szükség.

A következő lépés tehát az, hogy a CDS-felárak alakulását szimuláljuk a lejáratig, ugyanazon Δt lépésközönként. A 3.1 szakaszban leírt modell alapján ezek geometriai Brown mozgással írhatók le. Ennek szimulációja

$$X_i(t + \Delta t) = X_i(t) \exp \left\{ \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_i \sqrt{\Delta t} (\phi_t)_i \right\}$$

alapján történik, ahol μ_i és σ_i a folyamat paraméterei, $(\phi_t)_i$ pedig a korábban generált, korrelált normálisokból álló vektor i . eleme.

Ahhoz, hogy a ezen szimulációk alapján a portfólió veszteségeit meg tudjuk határozni, definiálnunk kell a hitelesemény vagy csőd bekövetkezésének jelét. Ezt a sztenderd modellhez hasonlóan egy bizonyos határ eléréseként definiáljuk. A korábbiakkal ellentétben viszont most a CDS-felárakat modellezzük, ami annál magasabb, minél nagyobb a csődvalószínűség, tehát alsó korlát helyett most egy felső korlátra van szükségünk. Amikor tehát a szimuláció során egy X_i folyamat eléri a megadott határt, $N_i(1 - \delta_i)$ veszteség keletkezik, ahol N_i az i . CDS névértéke, δ_i pedig a hozzá tartozó recovery rate.

Ugyanúgy, ahogyan a sztenderd modell esetében, most is feltesszük, hogy veszteségek csupán a negyedéves kuponfizetési időpontokban (T_1, T_2, \dots, T_N) keletkezhetnek. Ennek megfelelően minden bekövetkezett csőd időpontjához megkeressük azt a j -t, melyre a csőd beleesik a $(T_{j-1}, T_j]$ intervallumba és úgy tekintjük, hogy a T_j időpontban keletkezett a veszteség. Ilyen módon a keletkezett veszteségeket minden szimuláció során feljegyezzük, majd az egyes kuponfizetési időpontokra kumuláljuk.

Tekintsünk most egy $\gamma = (K_L^\gamma, K_U^\gamma)$ tranche-ot. Ezen a pénzáramlások azután kezdődnek meg, hogy a kumulált veszteségek elérik K_L^γ -t és megszűnnek, amint túllépi K_U^γ -t. Ez alapján a tranche veszteségeit minden kuponfizetési időpontban

$$L^\gamma(T_j) = \max[\min(L_c(T_j), K_U^\gamma) - K_L^\gamma, 0]$$

alapján számolhatjuk, ahol L_c jelöli a kumulált veszteséget. Végül ennek a várható értékére van szükségünk, melyet a különböző szimulációk során kapott értékek átlagaként számítunk.

Ezt az átlagot jelöltük a 2.1 szakaszban $\bar{L}(K_L^\gamma, K_U^\gamma, T_j)$ -vel. Az ott leírtak alapján ennek ismeretében már ugyanúgy ki tudjuk számítani a tranche-hez tartozó fair kupont vagy az esetleges upfront kifizetést.

3.3. Paraméterbecslés

Ahogy korábban láttuk, az árazás során szükségünk van a korrelációs folyamatoknak és a CDS-felárak alakulásának szimulációjára. Ehhez szükségünk van ezen folyamatok paramétereire, melyeket a 2.5.1 szakaszban leírt rendelkezésre álló adatokból tudunk megbecsülni. A korrelációs folyamatok becsléséhez a CDS-felárak korrelációit kiszámítjuk egy adott hosszúságú ablakban, melyet mindig egy-egy nappal eltolunk. Ezáltal egy folyamatot kapunk, amit az adott sztochasztikus korreláció egy realizációjának tekintünk.

3.3.1. Jacobi-folyamat

A Jacobi-folyamatnak azt a speciális esetét tekintjük, amikor $R_- = 0$ és $R_+ = 1$, tehát 0 és 1 közötti korrelációkat feltételezünk. Ekkor

$$d\rho(t) = \kappa(\theta - \rho(t))dt + \sigma\sqrt{\rho(t)(1 - \rho(t))}dW(t)$$

és a κ , θ , σ paramétereket szeretnénk becsülni. Kihasználjuk, hogy Gouriéroux és Valéry cikke [5] alapján ebben az esetben a folyamat határeloszlása $\beta(\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}, \frac{2\kappa(1-\theta)}{\sigma^2})$, ebből szeretnénk megkapni az eredeti paramétereket. Ennek érdekében a megfigyelt korrelációs folyamatra béta eloszlást illesztünk és a szórás maximum likelihood becslését az adatokból kiszámítjuk. Az illesztett eloszlás paramétereit $\hat{\alpha}$ -al és $\hat{\beta}$ -al, a becsült szórást pedig $\hat{\sigma}$ -al jelölve, a keresett paraméterek

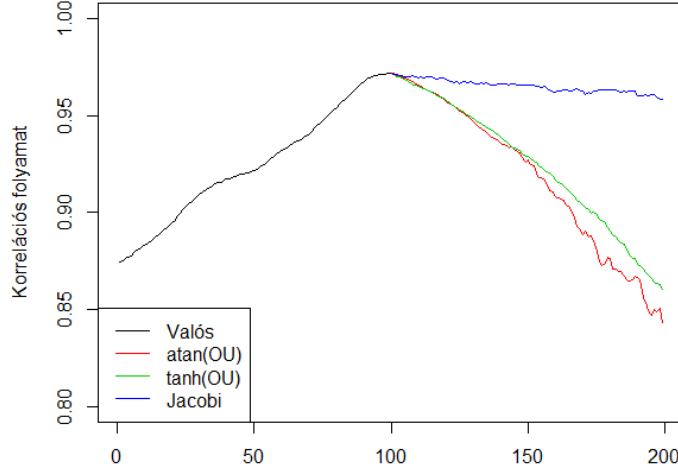
$$\kappa = (\hat{\alpha} + \hat{\beta})\frac{\hat{\sigma}^2}{2}, \quad \theta = \frac{\hat{\alpha}\hat{\sigma}^2}{2\kappa}, \quad \sigma = \hat{\sigma}$$

lesznek.

3.3.2. Ornstein-Uhlenbeck folyamat

Abban az esetben, amikor a sztochasztikus korrelációt egy transzformált Ornstein-Uhlenbeck folyamattal modellezzük, a paraméterbecsléshez először a megfigyelt korrelációs folyamatot megfelelően transzformálni kell. Formálisan ekkor

$$\rho(t) = f(Y(t)),$$



6. ábra. A paraméterbecsléshez használt valós korrelációs folyamat és a három sztochasztikus modell alapján szimulált egy-egy trajektória. Habár a folyamatok várható értéke megegyezik, az eltérő viselkedést a különböző átlaghoz húzási sebességek magyarázzák.

$$dY(t) = \kappa(\theta - Y(t))dt + \sigma dW(t).$$

Amikor $f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$, az adatokat $g(y) = \tan(\frac{\pi}{2}y)$ szerint transzformáljuk, míg $f(x) = \tanh(x)$ esetén $g(y) = \operatorname{atanh}(y)$ szerint.

A transzformálás után kapott adatokból a κ , θ , σ paramétereket a legkisebb négyzetek módszere alapján becsüljük, Thijs van den Berg cikke [8] alapján. Az itteni jelöléseket követve legyen S_i a megfigyelt folyamat i . eleme ($i = 0, 1, \dots, n$) és vezessük be az

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_{i-1}, \quad S_y = \sum_{i=1}^n S_i,$$

illetve

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n S_{i-1}^2, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n S_{i-1}S_i, \quad S_{yy} = \sum_{i=1}^n S_i^2$$

jelöléseket. Legyen továbbá

$$a = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2}, \quad b = \frac{S_y - aS_x}{n},$$

$$sd = \sqrt{\frac{nS_{yy} - S_y^2 - a(nS_{xy} - S_x S_y)}{n(n-2)}}.$$

Ezen jelölésekkel a keresett paraméterek

$$\kappa = -\frac{\ln(a)}{\Delta t}, \quad \theta = \frac{b}{1-a}, \quad \sigma = sd \sqrt{\frac{-2\ln(a)}{\Delta t(1-a^2)}}$$

lesznek, ahol Δt az egyes megfigyelések között eltelt idő években, esetünkben ez egy nap.

3.3.3. Geometriai Brown mozgás

A geometriai Brown mozgás paramétereit a CDS-felárak idősoraiból becsüljük. Kihaszználjuk, hogy a

$$dX(t) = X(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$$

folyamat megoldása lognormális eloszlású $((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t})$ paraméterekkel, tehát $\ln(\frac{X(t+\Delta t)}{X(t)})$ normális eloszlású ugyanezen paraméterekkel. Ezek alapján vegyük a napi loghozamokat és ennek becsüljük a várható értékét és szórását, melyeket jelöljünk rendre m -mel és v -vel. Ezekből a keresett paraméterek

$$\sigma = v\sqrt{\Delta t}, \quad \mu = \frac{m}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}.$$

Az ezen módszerekkel becsült paraméterek tehát erősen függenek a használt adatoktól és esetleges hiányosságuktól, illetve a korrelációs folyamatok esetén a választott ablaktól is, melyben a korrelációt számítjuk az egyes nevek CDS-felárai között.

3.4. Gyakorlati megvalósítás

Ebben a szakaszban a 3.1 részben leírt, sztochasztikus korrelációjú modellek keretein belüli árazás gyakorlati megvalósítása olvasható, melyet a Függelék B.2 szakaszában található R programmal végeztünk. Ebben az esetben is az iTraxx Europe Series 28 indexre szóló, 5 év lejáratú szintetikus CDO tranche-eit szeretnénk árazni 2018. március 8-ai dátumra, melyhez a 2.5.1 alszakaszban ismertetett adatokat használjuk. A következőkben a kalibrálás szükséges lépései, illetve a kapott eredmények olvashatók.

3.4.1. Kalibrálás

A sztochasztikus korrelációjú modellekben három fő típusú paramétert kell becsülnünk: a geometriai Brown mozgások és a korrelációs folyamatok paramétereit, illetve a megfigyelt korrelációs folyamat becsléséhez szükséges ablakhosszt. A sztochasztikus folyamatok paramétereit a 3.3 szakaszban bemutatott módszerekkel becsülhetjük, ezt az indexben szereplő összes névre és azok párjaira meg kell tennünk.

Az ablakhossz meghatározásánál két fő szempontot kell figyelembe vennünk: egyrészt ahhoz elég rövid ablakot szeretnénk, hogy a paraméterbecslés-kor minél hosszabb korrelációs folyamatot használhassunk, másrészt a piacon megfigyelt korrelációs struktúrát szeretnénk minél pontosabban visszaadni a generált sztochasztikus folyamatokkal.

A piaci korrelációs struktúrát a különböző nevek CDS-feláraiból visszazámított, korrelált Wiener-folyamat megváltozások reprezentálják. A geometriai Brown mozgás szimulációs képlete,

$$X_i(t + \Delta t) = X_i(t) \exp \left\{ \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_i \sqrt{\Delta t} Z \right\}$$

alapján ezeket a

$$Z = \frac{\ln \left(\frac{X_i(t + \Delta t)}{X_i(t)} \right) - \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \Delta t}{\sigma_i \sqrt{\Delta t}}$$

egyenletből kaphatjuk meg. A kapott megváltozásokra ezután egy t-kopulát illesztünk, melynek a becsült szabadsági fokát hasonlítjuk majd össze a szimulált megváltozásokra illesztett t-kopuláéval. A használt adatok esetén az így becsült szabadságfok **6,82**, ezt szeretnénk minél jobban közelíteni az ablakhossz megválasztásával.

Az összehasonlítható kopula illesztéséhez először választunk egy ablakhosszt. Ezt felhasználva a korábbiakban bemutatott módon megbecsüljük a sztochasztikus korrelációs folyamat paramétereit, majd ezekkel szimuláljuk a korrelációs mátrixok egy folyamatát. Ezután minden szimulált mátrix Cholesky-felbontása és egy, független sztenderd normálisokból álló vektor szorzatát véve korrelált normálisokat kapunk. Ezekre is t-kopulát illesztünk, ennek vizsgáljuk a szabadságfokát. A 4. táblázatban néhány, ilyen módon becsült átlagos szabadságfok található a három bevezetett sztochasztikus modellre.

4. táblázat. Becsült szabadságfokok különböző ablakhosszakra

Ablakhossz	Jacobi	atan(OU)	tanh(OU)
270	12,83	19,45	14,88
300	12,13	16,06	14,72
330	10,55	15,56	13,79
350	10,23	14,53	12,41
370	10,07	14,38	11,79
400	9,66	14,29	11,34

A becsléshez használt adatsorok 520 eleműek, tehát úgy kell ablakhosszt választanunk, hogy a korrelációs folyamatok még elég hosszúak legyenek a paraméterbecslés során. A táblázatban található eredmények alapján a 350-es ablakhossz tűnik a legmegfelelőbbnek, mert bár a szabadságfokok magasabbak, mint az elvárt 6,82, a hosszabb ablakok esetén már nem figyelhető

meg olyan mértékű javulás, mint a rövidebbeknél. Ezen eredmények alapján tehát a szimuláció során 350 napos ablakokat használunk becsléskor.

3.4.2. Eredmények

A becsült paraméterek és ablakhossz ismeretében a 3.2 szakaszban leírt árazási módszerrel szeretnénk meghatározni a CDO tranche árakat. Ehhez először definiálnunk kell azt a - lejáratig konstans - határt, melynek átlépését a szimulációk során hiteleseményként értelmezzük. Ezt a rendelkezésre álló adatok alapján nem tudjuk meghatározni, így az árakat több határ esetén is vizsgáljuk, nevezetesen 800 bp, 240 bp és 180 bp esetén. A kapott eredményeket a három bevezetett modellben a 6., 7. és 8. táblázatok foglalják össze. Összehasonlításképpen a piaci és a sztenderd modellből számított árakat az 5. táblázat tartalmazza.

5. táblázat. A vizsgált tranche-ek piaci és a sztenderd modellel számított árai

Tranche	Piaci ár (bp)	Sztenderd modell (bp)
0%-3%	30,59	67,35
3%-6%	4,73	-27,17
6%-12%	66,47	152,83

6. táblázat. A tranche-ek számított árai 800 bázispontos határ mellett

Tranche	Jacobi (bp)	atan(OU) (bp)	tanh(OU) (bp)
0%-3%	53,78	50,24	51,71
3%-6%	-79,28	-79,31	-79,31
6%-12%	0	0	0

Ezen eredményeket minden esetben 1000 szimuláció alapján kaptuk, a CDS-felár folyamatokat a lejáratig hetente szimulálva ($\Delta t = \frac{1}{52}$). A legfelső, 12%-100%-os tranche eredményei nem szerepelnek, ugyanis az alacsony valószínűség miatt a szimulációk során nem fordult elő elég hitelesemény ahhoz,

hogy az összes alsóbb tranche névértéke kimerüljön és ezáltal ez a tranche érintett legyen. A két alsó tranche (0%-3% és 3%-6%) esetén most is upfront értékek szerepelnek 500 bázispontos rögzített kupon mellett, a vevő szempontjából.

7. táblázat. A tranche-ek számított árai 240 bázispontos határ mellett

Tranche	Jacobi (bp)	atan(OU) (bp)	tanh(OU) (bp)
0%-3%	250,19	248,84	249,45
3%-6%	5,51	3,96	-0,14
6%-12%	0,15	1,22	0,15

8. táblázat. A tranche-ek számított árai 180 bázispontos határ mellett

Tranche	Jacobi (bp)	atan(OU) (bp)	tanh(OU) (bp)
0%-3%	236,06	234,08	234,46
3%-6%	120,14	140,87	142,12
6%-12%	22,82	36,33	47,00

Azt tapasztaljuk, hogy az árak erősen függenek a megadott határtól és annak csökkenésével az árak egyre nőnek. Ezen függés által a megfelelő választással egy adott tranche esetén jól tudjuk közelíteni a piaci árat, azonban a többi tranche-re ez a választás általában nem ad megfelelő értéket.

A különböző modellek összehasonlítására használhatjuk a piaci ártól vett eltérések négyzetösszegeit, melyeket minimalizálni szeretnénk. A sztenderd modell esetén ez kerekítve **9 827**, a sztochasztikus korrelációjú modellek ilyen módon számított eltéréseit pedig a 9. táblázat tartalmazza. Ezek alapján azt látjuk, hogy a számított CDO tranche árak minden esetben távolabb vannak a valósaktól, mint a sztenderd modellből kapott árak.

9. táblázat. A piaci áráktól vett eltérések négyzetösszegei sztochasztikus korrelációjú modellekben, kerekítve

Határ	Jacobi	atan(OU)	tanh(OU)
800	12 014	11 867	11 927
240	52 623	51 891	52 322
180	57 443	60 851	60 818

A három sztochasztikus korrelációjú modellt összevetve minden esetben nagyon hasonló értékeket kapunk az árakra, és így az eltérésekre is, tehát bármelyiket választhatjuk a korrelációs folyamat leírására. Azt látjuk azonban, hogy a teljes összefüggési struktúrát a vizsgált esetben nem tudtuk jól megfogni. Ennek egyik oka lehet, hogy a paraméterbecsléshez használt ablakhossz túl hosszú, ezáltal a megfigyelt korrelációs folyamatok túlságosan simák és a korrelációs folyamatok becsült paraméterei nem megfelelőek. A különböző hosszúságú ablakokon kívül vizsgálható lenne az időfüggőség bevezetése a csődeseményt definiáló határ esetén, ehhez azonban szükség van valamilyen kalibrálási eljárásra is.

Ilyen formában tehát a sztochasztikus korreláció bevezetésével nem jutottunk jobb eredményre, mint a sztenderd modell által. Azonban a sztochasztikus korrelációjú modellek rendkívül flexibilisek, így a javítás érdekében a kissé módosított modellek további vizsgálata javasolt.

Összefoglalás

Dolgozatom célja a szintetikus CDO-k árazására felállított két típusú modell összehasonlítása volt. A sztenderd modell esetében azt láttuk, hogy a feltételezett összefüggési struktúra nem írja le megfelelően a valósat, elsődlegesen a nagy számú együttes csődök bekövetkezésének valószínűségét alulbecsüli. Egy javasolt megoldás ezen problémára a sztochasztikus korreláció bevezetése az árazási modellbe. Ebben az esetben azt tapasztaltuk, hogy bizonyos feltételezések mellett ezáltal jelentősen javítani tudjuk számításainkat, a teljes struktúrára azonban nem láttunk javulást. Az árazási módszer javítása érdekében a sztochasztikus korrelációjú modellekbe javasolt néhány módosítás és kiterjesztés bevezetése, illetve a külsőleg választható paraméterek változtatása, melyek további kutatást igényelnek.

Természetesen ezeken kívül számos más lehetőség is van a szintetikus CDO-k korrelációs struktúrájának modellezésére, mint a sztenderd modell különböző kiterjesztései és általánosításai vagy egyéb kopulával történő modellezés. Az utóbbi években, főleg a 2007-08-as gazdasági válság után ezen a területen számos kutatást végeztek, a gyakorlatban azonban továbbra is a sztenderd módszer és annak kiterjesztései maradtak a legelterjedtebbek.

Irodalomjegyzék

- [1] Craig Mounfield: *Synthetic CDOs, Modelling, Valuation and Risk Management* (2009. Cambridge University Press) 1-44, 110-136
- [2] *Markit Credit Indices, A Primer* (2014. Markit Group Limited)
- [3] Király Júlia, Nagy Márton, Szabó E. Viktor: *Egy különleges esemény-sorozat elemzése - a másodrendű jelzáloghitel-piaci válság és (hazai) következményei* (2008. Közgazdasági Szemle)
- [4] Cathrin van Emmerich: *Modelling Correlation as a Stochastic Process* (2006. Bergische Universität Wuppertal)
- [5] Christian Gouriéroux, Pascale Valéry: *Estimation of a Jacobi process* (2002.)
- [6] Long Teng, Matthias Ehrhardt, Michael Günther: *Modelling stochastic correlation* (2016. Journal of Mathematics in Industry)
- [7] Jun Ma: *Pricing Foreign Equity Options with Stochastic Correlation and Volatility* (2009. Annals of Economics and Finance)
- [8] Thijs van den Berg: *Calibrating the Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek) model* (2011.)
- [9] Investing.com: *World and Sector Indices* (www.investing.com/indices/world-indices)
- [10] European Central Bank: *Euro area yield curves* (www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves)

Függelék

A. Függelék: Az iTraxx Europe Series 28 index összetétele

Referencia alany	Szektor	Súly (%)	Recovery rate (%)
Airbus SE	Autó & Ipari	0,80	40
Aktiebolaget Volvo	Autó & Ipari	0,80	40
Akzo Nobel N.V.	Autó & Ipari	0,80	40
Astrazeneca PLC	Autó & Ipari	0,80	40
Atlantia S.P.A.	Autó & Ipari	0,80	40
BAE Systems PLC	Autó & Ipari	0,80	40
BASF SE	Autó & Ipari	0,80	40
Bayer Aktiengesellschaft	Autó & Ipari	0,80	40
Bayerische Motoren Werke AG	Autó & Ipari	0,80	40
Bouygues	Autó & Ipari	0,80	40
Compagnie de Saint-Gobain	Autó & Ipari	0,80	40
Compagnie Financiere Michelin SCmA	Autó & Ipari	0,80	40
Continental Aktiengesellschaft	Autó & Ipari	0,80	40
Daimler AG	Autó & Ipari	0,80	40
Deutsche Lufthansa AG	Autó & Ipari	0,80	40
GKN Holdings PLC	Autó & Ipari	0,80	40
Glencore International AG	Autó & Ipari	0,80	40
HeidelbergCement AG	Autó & Ipari	0,80	40
Koninklijke DSM N.V.	Autó & Ipari	0,80	40
LafargeHolcim Ltd.	Autó & Ipari	0,80	40
Lanxess Aktiengesellschaft	Autó & Ipari	0,80	40
Renault	Autó & Ipari	0,80	40
Rolls-Royce PLC	Autó & Ipari	0,80	40
Sanofi	Autó & Ipari	0,80	40
Siemens Aktiengesellschaft	Autó & Ipari	0,80	40
Solvay	Autó & Ipari	0,80	40
Valeo	Autó & Ipari	0,80	40
Vinci	Autó & Ipari	0,80	40
Volkswagen Aktiengesellschaft	Autó & Ipari	0,80	40
Wendel	Autó & Ipari	0,80	40
Accor	Fogyasztói	0,80	40
Aktiebolaget Electrolux	Fogyasztói	0,80	40
Anheuser-Busch InBev	Fogyasztói	0,80	40
Auchan Holding	Fogyasztói	0,80	40
British American Tobacco p.l.c.	Fogyasztói	0,80	40
Carlsberg Breweries A/S	Fogyasztói	0,80	40

Carrefour	Fogyasztói	0,80	40
Danone	Fogyasztói	0,80	40
Diageo PLC	Fogyasztói	0,80	40
Experian Finance PLC	Fogyasztói	0,80	40
Heineken N.V.	Fogyasztói	0,80	40
Henkel AG & Co. KGaA	Fogyasztói	0,80	40
Imperial Brands PLC	Fogyasztói	0,80	40
Kering	Fogyasztói	0,80	40
Koninklijke Ahold Delhaize N.V.	Fogyasztói	0,80	40
Koninklijke Philips N.V.	Fogyasztói	0,80	40
LVMH Moët Hennessy Louis Vuitton	Fogyasztói	0,80	40
Marks and Spencer p.l.c.	Fogyasztói	0,80	40
Nestle S.A.	Fogyasztói	0,80	40
Next PLC	Fogyasztói	0,80	40
Pernod Ricard	Fogyasztói	0,80	40
Safeway Limited	Fogyasztói	0,80	40
Suedzucker AG	Fogyasztói	0,80	40
Tate & Lyle Public Limited Company	Fogyasztói	0,80	40
Unilever N.V.	Fogyasztói	0,80	40
BP P.L.C.	Energia	0,80	40
Centrica plc	Energia	0,80	40
E.ON SE	Energia	0,80	40
EDP Finance B.V.	Energia	0,80	40
Electricite de France	Energia	0,80	40
EnBW Energie Baden-Wuerttemberg AG	Energia	0,80	40
ENEL S.P.A.	Energia	0,80	40
Engie	Energia	0,80	40
ENI S.P.A.	Energia	0,80	40
Fortum Oyj	Energia	0,80	40
Gas Natural SDG, S.A.	Energia	0,80	40
Iberdrola S.A.	Energia	0,80	40
National Grid PLC	Energia	0,80	40
Repsol, S.A.	Energia	0,80	40
Royal Dutch Shell PLC	Energia	0,80	40
RWE Aktiengesellschaft	Energia	0,80	40
Statoil ASA	Energia	0,80	40
Total SA	Energia	0,80	40
United Utilities PLC	Energia	0,80	40
Veolia Environnement	Energia	0,80	40
Aegon N.V.	Pénzügyi	0,80	40
Allianz SE	Pénzügyi	0,80	40
Assicurazioni Generali - Societa Per Azioni	Pénzügyi	0,80	40
Aviva PLC	Pénzügyi	0,80	40
AXA	Pénzügyi	0,80	40
Banco Bilbao Vizcaya Argentaria, S.A.	Pénzügyi	0,80	40
Banco Santander, S.A.	Pénzügyi	0,80	40
Barclays PLC	Pénzügyi	0,80	40

BNP Paribas	Pénzügyi	0,80	40
Commerzbank Aktiengesellschaft	Pénzügyi	0,80	40
Coooperatieve Rabobank U.A.	Pénzügyi	0,80	40
Credit Agricole SA	Pénzügyi	0,80	40
Credit Suisse Group AG	Pénzügyi	0,80	40
Danske Bank A/S	Pénzügyi	0,80	40
Deutsche Bank Aktiengesellschaft	Pénzügyi	0,80	40
Hannover Rueck SE	Pénzügyi	0,80	40
HSBC Holdings Plc	Pénzügyi	0,80	40
ING Groep N.V.	Pénzügyi	0,80	40
Intesa Sanpaolo SPA	Pénzügyi	0,80	40
Lloyds Banking Group PLC	Pénzügyi	0,80	40
Mediobanca Banca di Credito Finanziario SPA	Pénzügyi	0,80	40
Muenchener Rueckversicherungs-Gesellschaft Aktiengesellschaft in Muenchen	Pénzügyi	0,80	40
Prudential Public Limited Company	Pénzügyi	0,80	40
Societe Generale	Pénzügyi	0,80	40
Standard Chartered PLC	Pénzügyi	0,80	40
Swiss Reinsurance Company Ltd	Pénzügyi	0,80	40
The Royal Bank of Scotland Group p.l.c.	Pénzügyi	0,80	40
UBS Group AG	Pénzügyi	0,80	40
Unicredit, Societa Per Azioni	Pénzügyi	0,80	40
Zurich Insurance Company Ltd	Pénzügyi	0,80	40
Bertelsmann SE & Co. KGaA	TMT	0,80	40
British Telecommunications p.l.c.	TMT	0,80	40
Capgemini	TMT	0,80	40
Deutsche Telekom AG	TMT	0,80	40
ITV PLC	TMT	0,80	40
Koninklijke KPN N.V.	TMT	0,80	40
Orange	TMT	0,80	40
Pearson plc	TMT	0,80	40
Publicis Groupe SA	TMT	0,80	40
RELX PLC	TMT	0,80	40
Sky PLC	TMT	0,80	40
TDC A/S	TMT	0,80	40
Telefonica, S.A.	TMT	0,80	40
Telekom Austria Aktiengesellschaft	TMT	0,80	40
Telenor ASA	TMT	0,80	40
Telia Company AB	TMT	0,80	40
Vivendi	TMT	0,80	40
Vodafone Group Public Limited Company	TMT	0,80	40
Wolters Kluwer N.V.	TMT	0,80	40
WPP 2005 Limited	TMT	0,80	40

Forrás: <http://www.markit.com/Documentation/Product/ITraxx>

B. Függelék: R programok

B.1. A sztenderd modell

```
ar_fill <- function(cds_data){
  cds_data_filled <- matrix(, nrow(cds_data), ncol(cds_data))

  for(k in 1:ncol(cds_data)){
    if(any(is.na(cds_data[,k]))){
      current <- cds_data[,k]
      first <- ar.burg(current, na.action = na.exclude, var.method = 2)
      if(first$order > 0){
        fit <- first
      }
      else{
        fit <- ar.burg(current, na.action = na.exclude, var.method = 2,
                      aic = FALSE, order.max = 1)
      }
      for(i in seq(nrow(cds_data)-fit$order, 1, by = -1)){
        if(is.na(current[i])){
          current[i] <- fit$x.mean + rnorm(1, sd = sqrt(fit$var.pred))
          for(j in 1:(fit$order)){
            current[i] <- current[i] + fit$ar[j] * (current[i+j] - fit$x.mean)
          }
        }
      }
      cds_data_filled[,k] <- current
    }
    else{
      cds_data_filled[,k] <- cds_data[,k]
    }
  }
  return(cds_data_filled)
}

# Calibration, input
cds_data <- read.csv("itraxx_portfolio_index_dates.csv", header = FALSE,
                    sep = ";", dec = ",")
```

```

N <- ncol(cds_data)
cds_data_filled <- ar_fill(cds_data)

mat <- 5
dt <- 0.25
notionals <- rep(10, N)
RR <- rep(0.4, N)

s <- as.matrix(cds_data[1,] * 0.0001)
h <- s/(1-RR)

index_data <- read.csv("index_prices.csv", sep = ";", dec = ",")
pca_res <- princomp(index_data[,2:6], cor = TRUE, scores = TRUE)
factor <- pca_res$scores[,1] / sqrt(var(pca_res$scores[,1]))

rho <- vector(, N)
for(i in 1:N){
  rho[i] <- cor(factor, cds_data_filled[,i], use = "pairwise.complete.obs")
}

r <- c(-0.667, -0.686, -0.691, -0.683, -0.665, -0.638, -0.605, -0.567, -0.525,
      -0.479, -0.431, -0.382, -0.332, -0.281, -0.230, -0.179, -0.129, -0.079,
      -0.030, 0.017)/100

Ku <- 0.06 * sum(notionals)
Kl <- 0.03 * sum(notionals)

risk_neut_prob <- function(i, j){
  hi <- h[i]
  t <- dt*j
  prob <- 1 - exp(-hi*t)
  return(prob)
}

q <- outer(seq(N), 1:(mat/dt), risk_neut_prob)

# Recursive method
# 1. Marginal conditional obligor default probabilities

```

```

B <- qnorm(q)

V <- seq(-10,10,0.1)
T <- seq(0,mat,dt)
Q <- array(rep(OL, N*(length(T)-1)*length(V)), dim=c(N, length(T)-1, length(V)))

for(i in 1:N){
  for(j in 1:(length(T)-1)){
    for(k in 1:length(V)){
      Q[i,j,k] <- pnorm((B[i,j]-rho[i]*V[k])/sqrt(1-rho[i]^2))
    }
  }
}

# 2. Portfolio conditional loss distribution
P <- array(rep(OL, (N+1)*(N+1)*(length(T)-1)*length(V)),
           dim=c(N+1, N+1, length(T)-1, length(V)))
P[1,1,,] <- 1

for(k in 1:N+1){
  q_act <- Q[k-1, , ]
  for(l in 1:k){
    if(l==1){
      P[k,l, , ] <- P[k-1,l, , ]*(1-q_act)
    }
    else if(l==k){
      P[k,l, , ] <- P[k-1, l-1, , ]*q_act
    }
    else{
      P[k,l, , ] <- P[k-1,l, , ]*(1-q_act) + P[k-1,l-1, , ]*q_act
    }
  }
}

# 3. Tranche expected loss
integrand <- function(v,l,t){
  P[N+1,l,t,(v+10)*10+1]*dnorm(v)
}

```



```

Pn <- matrix(,N+1,length(T)-1)

for(l in 1:(N+1)){
  for(t in 1:(length(T)-1)){
    Pn[l,t] <- integrate(integrand, -10, 10, l, t, subdivisions = length(V))$value
  }
}

vec <- 0:N
exp_loss_func <- function(x, notional, rec_rate, Ku, Kl){
  max(min(x*notional*(1-rec_rate),Ku)-Kl,0)
}

L <- sapply(vec, exp_loss_func, notionals[1], RR[1], Ku, Kl)

L_exp <- rep(0L, length(T)-1)
for(t in 1:(length(T)-1)){
  L_exp[t] <- sum(Pn[,t] * L)
}

# 4. Tranche fee and contingent payments
discount <- function(x, r, dt){
  return(exp(-r*x*dt))
}

Z <- discount(1:(length(T)-1), r, dt)

v_cont <- sum(Z * diff(c(0,L_exp)))
v_fee <- sum(Z * dt * ((Ku-Kl) - L_exp))

s_par <- v_cont / v_fee

u <- (v_cont - 0.05 * v_fee) / sum(notionals)

```

B.2. Sztochasztikus korrelációjú modellek

```
require(xts)
require(psych)
require(fitdistrplus)

ar_fill <- function(cds_data){
  cds_data[,1] <- as.Date(as.character(cds_data[,1]), format="%Y%m%d")

  cds_data_filled <- matrix(, nrow(cds_data), ncol(cds_data)-1)

  for(k in 2:ncol(cds_data)){
    if(any(is.na(cds_data[,k]))){
      current <- cds_data[,k]
      fit <- ar.burg(xts(current, cds_data[,1]), na.action = na.exclude,
                    var.method = 2)
      for(i in seq(nrow(cds_data)-fit$order, 1, by = -1)){
        if(is.na(current[i])){
          current[i] <- fit$x.mean + rnorm(1, sd = sqrt(fit$var.pred))
          for(j in 1:(fit$order)){
            current[i] <- current[i] + fit$ar[j] * (current[i+j] - fit$x.mean)
          }
        }
      }
      cds_data_filled[,k-1] <- current
    }
    else{
      cds_data_filled[,k-1] <- cds_data[,k]
    }
  }
  return(cds_data_filled)
}

# Parameter estimation
calculate_jacobi_parameters <- function(data1, data2, window_length, dt){
  estimations <- vector(, length(data1) - window_length)

  for(i in 1:(length(data1) - window_length)){
```

```

    estimations[i] <- cor(data1[i:(i+window_length)],
                          y = data2[i:(i+window_length)],
                          use = "pairwise.complete.obs")
}

estimations_pos <- estimations[!is.na(estimations)]
for(i in 1:length(estimations_pos)){
  if(estimations_pos[i] <= 0){
    estimations_pos[i] <- (estimations_pos[i] + 1.001) * 0.001
  }
  else if(estimations_pos[i] == 1){
    estimations_pos[i] <- 0.999
  }
}

distr <- fitdist(estimations_pos, "beta", start = list(shape1=0.1, shape2=0.1))

sigma <- sqrt(var(estimations_pos))
kappa <- (distr$estimate[["shape1"]] + distr$estimate[["shape2"]]) * sigma^2 / 2
theta <- distr$estimate[["shape1"]] * sigma^2 / (2 * kappa)
x0 <- estimations_pos[1]

return(c(x0, kappa, theta, sigma))
}

calculate_OU_parameters <- function(data1, data2, window_length, dt, hip = FALSE){
  estimations <- vector(), length(data1) - window_length

  for(i in 1:(length(data1) - window_length)){
    estimations[i] <- cor(data1[i:(i+window_length)],
                          y = data2[i:(i+window_length)],
                          use = "pairwise.complete.obs")
    if((estimations[i] == 1) && (!is.na(estimations[i]))){
      estimations[i] <- 0.99
    }
    else if((estimations[i] == -1) && (!is.na(estimations[i]))){
      estimations[i] <- -0.99
    }
  }
}

```

```

}

if(hip){
  S <- atanh(estimations)
}
else{
  S <- tan(estimations * pi / 2)
}

n <- length(S)

Sx <- sum(S[1:n-1], na.rm = TRUE)
Sy <- sum(S[2:n], na.rm = TRUE)
Sxx <- sum(S[1:n-1]*S[1:n-1], na.rm = TRUE)
Sxy <- sum(S[1:n-1]*S[2:n], na.rm = TRUE)
Syy <- sum(S[2:n]*S[2:n], na.rm = TRUE)

a <- max((n*Sxy - Sx * Sy ) / ( n * Sxx - Sx^2 ), 0.01)
b <- (Sy - a * Sx ) / n
sd <- sqrt((n * Syy - Sy^2 - a * (n * Sxy - Sx * Sy)) / (n * (n-2)))

kappa <- -log(a)/dt
theta <- b/(1-a)
sigma <- sd * sqrt( -2*log(a)/dt/(1-a^2))
x0 <- S[1]

return(c(x0, kappa, theta, sigma))
}

calculate_gbm_parameters <- function(data, dt){
  short_data <- data[!is.na(data)]
  log_data <- rep(0, length(short_data)-1)
  for(i in 1:(length(short_data)-1)){
    log_data[i] <- log(short_data[i]/short_data[i+1])
  }
  m <- mean(log_data)
  v <- var(log_data)

```

```

sigma <- sqrt(v/dt)
mu <- m/dt + 0.5*sigma^2

return(c(mu, sigma))
}

# Process simulation
simulate_jacobi <- function(parameters, length, dt){
  x0 <- parameters[1]
  kappa <- parameters[2]
  theta <- parameters[3]
  sigma <- parameters[4]

  process <- vector(, length)
  process[1] <- x0

  for(i in 2:length){
    value <- process[i-1] + kappa * (theta - process[i-1]) * dt +
      sigma * sqrt(process[i-1] * (1-process[i-1])) * sqrt(dt) * rnorm(1)
    if(value >= 1){
      process[i] <- 0.99
    }
    else if(value <= 0){
      process[i] <- 0.01
    }
    else{
      process[i] <- value
    }
  }

  return(process)
}

simulate_0U <- function(parameters, length, dt){
  x0 <- parameters[1]
  kappa <- parameters[2]
  theta <- parameters[3]
  sigma <- parameters[4]

```

```

process <- vector(, length)
process[1] <- x0

for(i in 2:length){
  process[i] <- process[i-1] * exp(-kappa * dt) + theta * (1-exp(-kappa * dt))
    + sigma * sqrt((1-exp(-2 * kappa * dt))/(2*kappa))*rnorm(1)
}

return(process)
}

# Price calculation
# Input and calibration
cds_data <- read.csv("itraxx_portfolio.csv", header = FALSE, sep = ";", dec = ",")
N <- ncol(cds_data)-1
mat <- 5
dt_est <- 1/360
dt_sim <- 1/52 #weekly
window_length <- 350

cds_data_filled <- ar_fill(cds_data)

params_j <- array(0, dim = c(N, N, 4))
for(i in 2:N){
  for(j in 1:(i-1)){
    params_j[i, j, ] <- params_j[j, i, ] <- calculate_jacobi_parameters(
      cds_data_filled[,i], cds_data_filled[,j], window_length, dt_est)
  }
}

params <- array(0, dim = c(N, N, 4))
for(i in 2:N){
  for(j in 1:(i-1)){
    params[i, j, ] <- params[j, i, ] <- calculate_OU_parameters(cds_data_filled[,i],
      cds_data_filled[,j], window_length, dt_est)
  }
}

```

```

params_h <- array(0, dim = c(N, N, 4))
for(i in 2:N){
  for(j in 1:(i-1)){
    params_h[i, j, ] <- params_h[j, i, ] <- calculate_OU_parameters(cds_data_filled[,i],
      cds_data_filled[,j], window_length, dt_est, TRUE)
  }
}

gbm_params <- matrix(0, N, 2)
for(i in 1:N){
  gbm_params[i, ] <- calculate_gbm_parameters(cds_data_filled[,i], dt_est)
}

notional <- 10
RR <- 0.4
Ku <- 0.03 * notional * N
Kl <- 0 * notional * N
r <- c(-0.667, -0.686, -0.691, -0.683, -0.665, -0.638, -0.605, -0.567, -0.525,
      -0.479, -0.431, -0.382, -0.332, -0.281, -0.230, -0.179, -0.129, -0.079,
      -0.030, 0.017)/100

n_sims <- 1000
boundary <- 300

method <- 1 #1: Jacobi, 2: atan(OU), 3: tanh(OU)

#Simulation
def <- matrix(0, mat/0.25 + 1, n_sims)

for(k in 1:n_sims){
  rho <- array(1, dim = c(N, N, mat/dt_sim+1))
  if(method == 1){
    for(i in 2:N){
      for(j in 1:(i-1)){
        rho[i, j, ] <- rho[j, i, ] <- simulate_jacobi(params_j[i, j, ],
          mat/dt_sim + 1, dt_sim)
      }
    }
  }
}

```

```

    }
  }
else if(method == 2){
  for(i in 2:N){
    for(j in 1:(i-1)){
      rho[i, j,] <- rho[j, i, ] <- 2 * atan(simulate_OU(params[i, j, ],
        mat/dt_sim + 1, dt_sim)) / pi
    }
  }
}
else{
  for(i in 2:N){
    for(j in 1:(i-1)){
      rho[i, j,] <- rho[j, i, ] <- tanh(simulate_OU(params_h[i, j, ],
        mat/dt_sim + 1, dt_sim))
    }
  }
}
X <- matrix(0, N, mat/dt_sim + 1)
X[,1] <- cds_data_filled[1,]
for(i in 2:(mat/dt_sim+1)){
  C_smooth <- cor.smooth(rho[, ,i])
  A <- t(chol(C_smooth))
  rand <- rnorm(N, 0, 1)
  corr_norm <- A %*% rand
  for(j in 1:N){
    X[j,i] <- X[j,i-1] * exp((gbm_params[j,1]-gbm_params[j,2]^2 * 0.5) * dt_sim
      + gbm_params[j,2] * sqrt(dt_sim) * rand[j])
  }
}
for(i in 1:N){
  j <- 1
  while((X[i,j] < boundary) && (j < (mat/dt_sim + 1))){
    j <- j + 1
  }
  if(j < (mat/dt_sim + 1)){
    def[j %/(1/dt_sim*0.25) + 1, k] <- def[j%/(1/dt_sim*0.25) + 1, k] + 1
  }
}

```



```

    }
}

# Pooling of losses
L_pool <- def * notional * (1-RR)
L_cum <- apply(L_pool, 2, cumsum)

# Tranching, averages
L_tr <- matrix(, mat/0.25 + 1, n_sims)

for(i in 1:(mat/0.25 + 1)){
  for(j in 1:n_sims){
    L_tr[i,j] <- max(min(L_cum[i,j], Ku) - Kl, 0)
  }
}

L_tr_avg <- apply(L_tr, 1, mean)

# Tranche fee and contingent payments
discount <- function(x, r, dt){
  return(exp(-r*x*dt))
}

Z <- discount(1:(mat/0.25), r, 0.25)

v_cont <- sum(Z * diff(L_tr_avg))
v_fee <- sum(c(1,Z) * 0.25 * ((Ku-Kl) - L_tr_avg))

s_par <- v_cont / v_fee

u <- (v_cont - 0.05 * v_fee) / (N * notional)

```