



BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

A VALUE AT RISK ÉS AZ EXPECTED SHORTFALL ÖSSZEHAISONLÍTÁSA ÉS UTÓTESZTELÉSI MÓDSZEREI

KOVÁCS EDINA

Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc
Kvantitatív Pénzügyek szakirány

Témavezetők:

DR. DÖMÖTÖR BARBARA MÁRIA
KOMÁRIK ANDRÁS
DR. MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR

BUDAPEST

2018

Tartalom

Ábrák jegyzéke	6
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	7
BEVEZETÉS	9
1. KOCKÁZATOK FORRÁSA ÉS MÉRÉSE	10
1.1. KOCKÁZATOK FAJTÁI	10
1.2. KOCKÁZATI MÉRTÉKEK	11
1.3. VALUE AT RISK - KOCKÁZTATOTT ÉRTÉK	12
1.4. EXPECTED SHORTFALL	16
2. A BÁZELI BANKFELÜGYELETI BIZOTTSÁG SZEREPE ÉS INTÉZKEDÉSEI	21
3. KOCKÁZATI MÉRTÉKEK UTÓTESZTELÉSE	24
3.1. A VALUE AT RISK UTÓTESZTELÉSE	24
3.2. AZ EXPECTED SHORTFALL UTÓTESZTELÉSE	25
4. AZ ADATOK STATISZTIKAI VIZSGÁLATA	30
4.1. NORMALITÁS VIZSGÁLATA	30
5. UTÓTESZTELÉS HISTORIKUS VAR ÉS ES ESETÉN	35
5.1. A KOCKÁZATI MÉRŐSZÁMOK ÉS A TESZTFÜGGVÉNYEK SZÁMÍTÁSA	35
6. EREDMÉNYEK	37
6.1. A VAR ÉRTÉKEK UTÓTESZTELÉSE	37
6.2. AZ ES UTÓTESZTELÉSE	39
7. KÖVETKEZTETÉSEK	42
függelék A. Ábrák és táblázatok	43
HIVATKOZÁSOK	52

ÁBRÁK JEGYZÉKE

1. A VaR számítása egy adott portfólió nyereség- és veszteség-eloszlásának ismeretében. (Forrás: Hull, J. [25], 257. oldal)	14
2. Egy portfólió nyereség- és veszteség-eloszlása adott T időhorizonton. (Forrás: Hull, J. [25], 259. oldal)	16
3. A VaR és az ES értéke $\alpha = 99\%$ -os konfidencia-szinten egy általam generált hozameloszlás esetén	17
4. A jelzőlámpa-rendszer $\alpha = 99\%$ és $T = 250$ nap esetén	22
5. A TheStreet által meghatározott részvénytminősítések	30
6. A két portfólióban lévő 6-6 részvény leíró statisztikái	31
7. Az 1. portfólióban lévő 6 részvény loghozamainak hisztogramja	32
8. A 2. portfólióban lévő 6 részvény loghozamainak hisztogramja	33
9. A nemparaméteres próbák eredménye	33
10. Az 1. portfólió esetén számolt hozamok és kockázati mértékek	37
11. A 2. portfólió esetén számolt hozamok és kockázati mértékek	38
12. A kétoldali tesztek eredménye $\alpha_1 = 97,5\%$, $\alpha_2 = 99\%$ és $T = 2267$ esetén	38
13. A Kupiec-teszt eredménye $\alpha_1 = 97,5\%$, $\alpha_2 = 99\%$ és $T = 2267$ esetén	38
14. Utótesztek eredményei az egész időintervallumra	39
15. Z_2 időbeli alakulása	40
16. Az $ES_{97,5\%}$ utótesztelésének eredménye	41
17. Elfogadási határok a VaR-lépések számára a részintervallumok számának függvényében	41
18. Az 1. portfólióban lévő 6 részvény loghozamainak kvantilis-kvantilis ábrája	43
19. A 2. portfólióban lévő 6 részvény loghozamainak kvantilis-kvantilis ábrája	44
20. Az 1. portfólió esetén számolt $VaR_{99\%}$ és $ES_{97,5\%}$	45
21. A 2. portfólió esetén számolt $VaR_{99\%}$ és $ES_{97,5\%}$	45
22. A VaR-átlépések számához tartozó valószínűségek és a Kupiec-teszt értéke	46
23. A VaR-átlépések eloszlása az 1. portfólió esetén	47
24. A VaR-átlépések eloszlása a 2. portfólió esetén	47
25. A VaR-átlépések számához tartozó valószínűségek és a Kupiec-teszt értéke, $T = 1133$	48
26. A VaR-átlépések számához tartozó valószínűségek és a Kupiec-teszt értéke, $T = 755$	49
27. A VaR-átlépések számához tartozó valószínűségek és a Kupiec-teszt értéke, $T = 566$	50
28. A VaR-átlépések számához tartozó valószínűségek és a Kupiec-teszt értéke, $T = 452$	51

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőimnek, Dr. Dömötör Barbarának, Komárik Andrásnak és Dr. Molnár-Sáska Gábornak, akik szakértelmükkel, magyarázataikkal, hasznos tanácsaikkal nagy segítséget nyújtottak diplomamunkám elkészítéséhez.

Hálával tartozom a családomnak és a páromnak türelmükért, valamint támogatásukért, mellyel elősegítették diplomamunkám elkészülését.

A legnagyobb hálával Édesanyámnak tartozom, akinek feltétel nélküli hite és támogatása nélkül e dolgozat nem született volna meg.

BEVEZETÉS

A 2008-as válság újra ráirányította a pénzügyi intézmények figyelmét a kockázat mérésének és a kellő pénzügyi tartalék tartásának fontosságára, az akkori szabályozói környezet hiányosságaira és gyenge pontjaira.

1996 óta a kockázat mérésére a kockázatotott értéket (Value at Risk, VaR) használták az intézmények, azonban a pénzügyi válság hatására 2012-ben a Bázeli Bizottság új szabályozói ajánlások és egy új kockázati mérték, az expected shortfall (ES) bevezetését javasolta, melyre várhatóan 2022-ben kerül sor. A VaR-ral ellentétben ugyanis az ES koherens kockázati mérték, amely támogatja a diverzifikációt és több információt ad a várható veszteségről, ezáltal alkalmasabb lehet a kockázat mérésére.

Gneiting 2011-ben megmutatta ([23]), hogy az ES a VaR-ral szemben nem elicítábilis, és ez azt az általános tévhitet keltette, hogy egyúttal nem is utótesztelhető. Carlo Acerbi és Székely Balázs azonban 2014-ben igazolták ennek ellenkezőjét, bemutattak három módszert az ES utótesztelésére ([2]), továbbá azt is bizonyították, hogy az elicitabilitás nem hozható összefüggésbe az utótesztelhetőséggel.

Diplomamunkám első részében a kockázati mértékek megfogalmazásához és alapvető tulajdonságaik bizonyításához szükséges alapfogalmakat és alapvető összefüggéseket mutatom be.

A második részben ismertetem a VaR és az ES historikus utótesztelésének módszereit Acerbi és Székely alapján, valamint átfogó képet adok a Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság szabályozói szerepéről és a szabályozás folyamatban levő módosításairól.

Ezt követően a harmadik részben két, általam összeállított részvényekből álló különböző portfólión végzek empirikus vizsgálatokat. Az alapvető statisztikák mellett a portfóliók kockázatosságát vizsgálom a VaR és ES kockázati mértékekkel $\alpha_1 = 99\%$, illetve $\alpha_2 = 97.5\%$ esetén, majd utótesztelem a kapott eredményeket a korábban ismertetett módszereket és a bázeli ajánlást alkalmazva.

Fő célom az $ES_{97,5\%}$ és a $VaR_{99\%}$ összehasonlítása, az utótesztelési módszerek implementálása, a kapott teszteredmények összehasonlítása mind a módszerek, mind pedig a portfóliók között.

1. KOCKÁZATOK FORRÁSA ÉS MÉRÉSE

1.1. KOCKÁZATOK FAJTÁI A vállalatoknak a sikeres működés és a profitszerzés érdekében kockázatot kell vállalniuk. A kockázatkezelő terület feladata annak megállapítása, hogy mekkora mértékű kockázat vállalása elfogadható a cég működésének veszélyeztetése nélkül. De mit is jelent pontosan a kockázat?

A hagyományos pénzügyi elmélet szerint a véletlen változók, tipikusan a szóban forgó eszközök vagy kötelezettségek értékének volatilitásaként definiálhatjuk a kockázatot. Ez a megfogalmazás magában foglalja a pozitív, illetve a negatív irányú értékváltozás lehetőségét is. Matematikai szempontból azonban az a célunk, hogy minél pontosabban tudjuk számszerűsíteni, mérni a kockázatot.

Szigorú értelemben véve három típusba soroljuk a kockázatokat Philippe Jorion szerint ([27]), amelyekkel a vállalatok a működésük során szembesülnek. Megkülönböztetjük a piaci, a hitelezési és a működési kockázatokat, melyekből általában a legnagyobb vesztesége származik egy pénzügyi intézménynek. Ezek mellett beszélünk még többek közt likviditási, reputációs és jogi kockázatról is.

A *piaci kockázatok* a pénzügyi eszközök és azok árának volatilitásából adódnak és a vagyon megváltozásával mérhetőek. A lineáris mérőszámok között megkülönböztetjük a lehetséges veszteségek értékét figyelembe vevő abszolút és a valamilyen indexhez, bechmarkhoz viszonyított relatív kockázatot.

Hitelkockázatról akkor beszélünk, ha a szerződést kötő feleknek nem áll módjukban vagy akaratukban teljesíteni a hitelszerződésben vállalt kötelezettségeiket. Ide soroljuk az ország-, illetve a partnerkockázatot is.

A *működési kockázatok* közé tartozik minden olyan veszteség, amely az adott vállalat, pénzügyi intézmény működéséből adódik, például az alkalmazott rendszerekkel, humán munkaerővel kapcsolatban felmerülő problémák, csalások és ezek miatti költségek. Ide sorolható továbbá a regulátori szabályozásból adódó bírság és a modellkockázat is.

1.2. KOCKÁZATI MÉRTÉKEK A pénzügyi eszközök és portfóliók összehasonlítására, jellemzésére számos eszköz fellelhető a pénzügyi irodalomban, amellyel jellemezhetjük kockázatosságukat. Kiváltképp az egyik legfontosabb szempont, hogy olyan egyszerű, könnyen értelmezhető pénzügyi mutatót használjunk, amely jól jellemzi a pénzügyi eszközök értékének változékonyságát.

Általánosan a pénzügyi eszközökhöz és portfóliókhoz rendelt, a kockázatot jellemző mutatószámokat összegfoglaló néven kockázati mértékeknek nevezzük.

1.2.1. Definíció. Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) egy valószínűségi mező, és legyen \mathcal{X} valószínűségi változók halmaza Ω -n. Ekkor kockázati mértéknek nevezünk minden $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt.

Az 1.2.1. Definíció is jelzi, hogy további megszorításokat, tulajdonságokat várunk el egy kockázati mérőszámtól, azonban nem feltétlenül ugyanazokat tartja mindenki fontosnak. A leggyakrabban megkövetelt tulajdonságok közismert pénzügyi motivációi az alábbiak.

- (1) Ha egy befektetés minden esetben többet ér, mint egy másik, akkor ne legyen kockázatosabb annál.
- (2) Két befektetés eredő kockázata ne legyen nagyobb, mint az egyedi kockázataik összege.
- (3) Ha nem változtatjuk meg a portfólióink összetételét, csak a nagyságát, akkor elvárható, hogy a kockázat a nagysággal arányosan változzon.
- (4) Ha kockázatmentes eszközzel bővítjük a portfóliónkat, akkor a portfólió kockázata ezen értékkel csökkenjen.

Amennyiben egy kockázati mérték teljesíti ezt a négy tulajdonságot, úgy koherens kockázati mértékről beszélünk. A következő definíció a fenti négy motivációnak megfelelő négy matematikai tulajdonságot foglalja össze (Gáll, Pap, [22]).

1.2.2. Definíció. Legyen \mathcal{X} valószínűségi változók halmaza a (Ω, \mathcal{F}, P) valószínűségi mezőn, amelynek elemei a pénzügyi eszközök profitjait reprezentálják, továbbá legyen $X, Y \in \mathcal{X}$ két tetszőleges, különböző portfólióból álló befektetés hozama. A $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ kockázati mérték *koherens*, ha

- (1) monoton, azaz ha

$$P(X \leq Y) = 1, \quad \text{akkor} \quad \varphi(X) \geq \varphi(Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}.$$

- (2) szubadditív, azaz

$$\varphi(X + Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y) \quad \forall X, Y, X + Y \in \mathcal{X}.$$

- (3) pozitív homogén, azaz

$$\varphi(\lambda X) = \lambda \varphi(X) \quad \forall X, \lambda X \in \mathcal{X}, \forall \lambda > 0.$$

- (4) eltolásinvariáns, azaz

$$\varphi(X + a) = \varphi(X) - a \quad \forall X, X + a \in \mathcal{X}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

1.2.3. Megjegyzés. A szubadditivitási tulajdonság a gyakorlatban azzal a jelentőséggel bír, hogy ha egyesítünk két portfóliót, akkor van kockázatdiverzifikációs hatás ([18]). Hiánya esetén a portfólió diverzifikációja a kockázat növekedéséhez vezethet és megakadályozza a különböző VaR-ok összeadhatóságát.

1.2.4. Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy ha φ pozitív homogén és eltolásinvariáns, akkor $\varphi(a) = -a$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy egy biztos veszteség kockázata pozitív és éppen -1 -szerese önmagának, míg egy biztos pozitív összegű pénzáramlás kockázata negatív, abszolút értéke pedig megegyezik a nyereség nagyságával.

Tehát ahhoz, hogy a kockázatot minél pontosabban és ésszerűbben mérni tudjunk, olyan kockázati mértékre van szükség, amely kielégíti ezt a négy alaptulajdonságot.

Az első és az egyik legrégebben használt kockázati mérték a szórás, illetve a variancia volt, amelyek bevezetése Markowitz nevéhez fűzhető ([30]). Markowitz a részvények kockázatát azok szórásával, illetve varianciájával azonosította, és a portfólió diverzifikációjával minimalizálta annak szórását.

1.2.5. Definíció. Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) egy valószínűségi mező, és legyen \mathcal{X} valószínűségi változók halmaza Ω -n, $X \in \mathcal{X}$. Ekkor az X valószínűségi változó

(1) *varianciája* (szórásnégyzete)

$$\sigma^2(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X))^2,$$

(2) *szórása*

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}.$$

Jelentős gyengesége ezen két mértéknek, hogy nem tesznek különbséget a pozitív, illetve a negatív irányú értékváltozások, azaz a nyereségek és a veszteségek között. Továbbá annak ellenére, hogy a varianciát már több, mint fél évszázada használják a kockázat mérésére nem koherens mérték (Joshi, [28]).

A szórás a varianciától eltérően kielégíti ugyan a szubadditivitási és a pozitív homogenitási tulajdonságokat, de a varianciához hasonlóan nem monoton és nem is eltolásinvariáns (Bugár, [17]).

1.3. VALUE AT RISK - KOCKÁZTATOTT ÉRTÉK A továbbiakban legyen (Ω, \mathcal{F}, P) egy valószínűségi mező, és legyen \mathcal{X} valószínűségi változók halmaza Ω -n, $X \in \mathcal{X}$. A VaR fogalmának bevezetéséhez szükség lesz egy valószínűségi változó kvantilisének fogalmára és annak néhány egyszerű tulajdonságára. A fejezet megírásánál javarészt Gáll József [22] könyvére támaszkodtam.

1.3.1. Definíció. Legyen X egy valószínűségi változó, $\alpha \in (0, 1)$ és jelölje F_X az X eloszlásfüggvényét, azaz $F_X(x) = P(X < x)$. Ekkor azt a q értéket, amire

$$P(X \leq q) \geq \alpha \quad \text{és} \quad P(X < q) \leq \alpha \tag{1.3.1}$$

teljesül, az eloszlás α -kvantilisének nevezzük.

Tehát egy adott mintarealizáció esetén az α -kvantilis az az érték, amelynél a mintaelemek α -ad része nem nagyobb és $(1 - \alpha)$ -ad része nem kisebb. Mivel előfordulhat, hogy a kvantilis nem egyértelmű, így bevezetem az alsó és felső kvantilis fogalmát is.

1.3.2. Definíció. Legyen X egy valószínűségi változó, $\alpha \in (0, 1)$ és jelölje F_X az X eloszlásfüggvényét. Ekkor az X alsó α -kvantilise a legkisebb α -kvantilis, azaz

$$q_\alpha(X) = \sup \{x \mid F_X(x) < \alpha\}, \quad (1.3.2)$$

valamint az X felső α -kvantilise a legnagyobb α -kvantilis, azaz

$$q^\alpha(X) = \inf \{x \mid F_X(x) > \alpha\}.$$

1.3.3. Megjegyzés. Könnyű látni, hogy a fenti két definíció ekvivalens azzal, hogy

$$q_\alpha(X) = \inf \{x \mid F_X(x) \geq \alpha\}, \quad (1.3.3)$$

illetve hogy

$$q^\alpha(X) = \sup \{x \mid F_X(x) \leq \alpha\}, \quad (1.3.4)$$

ahol q_α -t általánosított inverz eloszlásfüggvénynek, vagy kvantilis függvénynek is szokás nevezni. Továbbá fontos megjegyezni, hogy amennyiben az $F_X(x) = P(X < x)$ eloszlásfüggvény értelmezésénél az egyenlőséget is megengedjük, azaz $F_X(x) = P(X \leq x)$, úgy $q_\alpha(X)$ és $q^\alpha(X)$ nem változik.

1.3.4. Lemma. Legyen $X \in \mathcal{X}$ egy valószínűségi változó az (Ω, \mathcal{F}, P) valószínűségi mezőn és legyen $\alpha \in (0, 1)$. Ekkor

$$q^\alpha(X) = -q_{1-\alpha}(-X) \quad \text{és} \quad q_\alpha(X) = -q^{1-\alpha}(-X). \quad (1.3.5)$$

Bizonyítás. Legyen $X \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in (0, 1)$. A felső kvantilis és az eloszlásfüggvény definícióját felírva könnyen adódik, hogy

$$q^\alpha(X) = \inf \{x \mid F_X(x) > \alpha\} = \inf \{x \mid P(X < x) > \alpha\} = \inf \{x \mid P(-X > -x) > \alpha\} = (*)$$

Ezután felhasználjuk, hogy ha $P(-X > -x) > \alpha$ valamely $X \in \mathcal{X}$, $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor a $P(-X \leq -x)$ komplementereseményre $P(-X \leq -x) < 1 - \alpha$ teljesül. Így azt kapjuk, hogy

$$(*) = \inf \{x \mid P(-X \leq -x) < 1 - \alpha\} = \quad (1.3.6)$$

Ezután az (1.3.4) összefüggést és az alsó kvantilis definícióját alkalmazva az egyenlőség tovább írható

$$= -\sup \{-x \mid P(-X \leq -x) < 1 - \alpha\} = -q_{1-\alpha}(-X) \quad (1.3.7)$$

alakban, tehát

$$q^\alpha(X) = -q_{1-\alpha}(-X). \quad (1.3.8)$$

Hasonlóan belátható, hogy $q_\alpha(X) = -q^{1-\alpha}(-X)$. \square

1.3.5. Lemma. Legyen $X \in \mathcal{X}$ egy valószínűségi változó az (Ω, \mathcal{F}, P) valószínűségi mezőn és legyen $\alpha \in (0, 1)$. Ekkor $q_\alpha(X) \leq q^\alpha(X)$.

Bizonyítás. Legyen $X \in \mathcal{X}$ és $\alpha \in (0, 1)$. Vegyük észre, hogy

$$\{x \mid F_X(x) > \alpha\} \subset \{x \mid F_X(x) \geq \alpha\}, \quad (1.3.9)$$

így ezen halmazok infimumára teljesül, hogy

$$\inf\{x \mid F_X(x) > \alpha\} \geq \inf\{x \mid F_X(x) \geq \alpha\}. \quad (1.3.10)$$

Az 1.3.2. Definíciót és az (1.3.3) összefüggést alkalmazhatjuk az egyenlőtlenség két oldalára

$$q^\alpha(X) = \inf\{x \mid F_X(x) > \alpha\} \geq \inf\{x \mid F_X(x) \geq \alpha\} = q_\alpha(X), \quad (1.3.11)$$

így éppen a bizonyítandó állítást kaptuk. \square

Az 1.3.5. Lemmából láthatjuk, hogy az alsó és a felső kvantilisek nem feltétlenül egyeznek meg. Pontosabban, az eloszlásfüggvény monotonitását figyelembe véve $q_\alpha(X) = q^\alpha(X)$ akkor és csak akkor teljesül, ha az $\{x \mid F_X(x) = \alpha\}$ halmaz legfeljebb egyelemű.

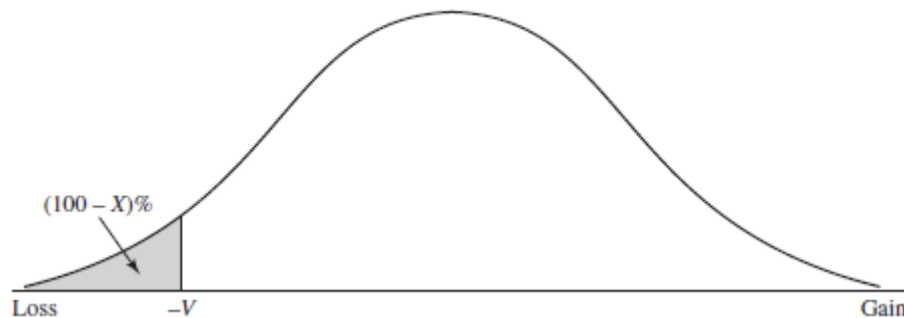
Folytonos eloszlású valószínűségi változó esetén az alsó és felső α -kvantilis megegyezik, azonban diszkrét eloszlásnál előfordulhat, hogy az eloszlásfüggvény egy szakaszon konstans és értéke éppen α , így ezek nem azonosak.

Amennyiben az alsó és felső α -kvantilis megegyezik, úgy egyszerűen csak α -kvantilisról beszélünk. Ebben az esetben a VaR érték egyértelműen számolható az alábbiak szerint.

1.3.6. Definíció. Az X valószínűségi változó α szinthez tartozó *kockázatotott értéke* vagy *VaR*-ja

$$\text{VaR}_\alpha(X) := q_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \geq \alpha\} \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

1.3.7. Megjegyzés. Szemléletesen a VaR értéke azt a maximális veszteségértéket adja meg, aminél $(1 - \alpha)$ valószínűséggel nem fogunk nagyobb veszteséget realizálni adott időtávon. Az 1. ábra jól szemlélteti ezt.



1. ábra. A VaR számítása egy adott portfólió nyereség- és veszteség-eloszlásának ismeretében. (Forrás: Hull, J. [25], 257. oldal)

Ahogy az 1. ábrán is látható, a veszteségeket negatív előjellel vett bevételekként értelmezzük és itt az X a konfidencia-szintet jelöli, a hozzá tartozó VaR érték pedig V .

Ha azonban $q_\alpha(X) \neq q^\alpha(X)$, akkor a kvantilisekhez hasonlóan megkülönböztethetjük az X valószínűségi változó *alsó és felső VaR* értékét és ezek alatt a

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -q_\alpha(X), \quad \text{valamint a} \quad \text{VaR}^\alpha(X) = -q^\alpha(X) \quad (1.3.12)$$

értékeket értjük.

Az α szint választása tetszőleges lehet, azonban a leggyakrabban előforduló értékei szabályozói döntés alapján 1%, 2.5%, és 5%, amennyiben hozameloszlást modellezünk. A veszteség modellezésénél ezek a szintek rendre 99%, 97.5% és 95%.

A VaR alapvető tulajdonságait foglalja össze a következő tétel, melynek bizonyítását [22] szerint mutatom be.

1.3.8. Tétel. *Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) egy valószínűségi mező, és legyen \mathcal{X} valószínűségi változók halmaza Ω -n, $\alpha \in (0, 1)$. Ekkor az alsó, valamint a felső VaR*

- (1) *monoton,*
- (2) *pozitív homogén*
- (3) *és eltolásinvariáns*

kockázati mértékek az \mathcal{X} halmazon.

Bizonyítás. Az állítást az alsó VaR esetén igazolom, a bizonyítás a felső VaR esetén analóg módon történik.

Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) egy valószínűségi mező és \mathcal{X} valószínűségi változók halmaza Ω -n. Továbbá legyenek $\alpha \in (0, 1)$ és $X, Y \in \mathcal{X}$ tetszőlegesek.

(1) Tegyük fel, hogy $P(X \leq Y) = 1$. Mivel

$$P(X \leq y) = F_X(y) \quad \text{és} \quad P(x \leq Y) = 1 - P(Y \leq x) = 1 - F_Y(x), \quad (1.3.13)$$

így $F_X(y) \geq F_Y(y)$ teljesül $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Ez azt jelenti, hogy

$$\{y \mid F_X(y) < \alpha\} \subset \{y \mid F_Y(y) < \alpha\} \quad (1.3.14)$$

és ezt, valamint a VaR definícióját felhasználva adódik, hogy

$$-\text{VaR}_\alpha(X) = q_\alpha(X) = \sup\{y \mid F_X(y) < \alpha\} \leq \sup\{y \mid F_Y(y) < \alpha\} = q_\alpha(Y) = -\text{VaR}_\alpha(Y), \quad (1.3.15)$$

azaz $\text{VaR}_\alpha(X) \geq \text{VaR}_\alpha(Y)$, ami éppen az alsó VaR monotonitását igazolja.

(2) Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Ekkor $F_{\lambda X}(y) = F_X(\frac{y}{\lambda}) \quad \forall y \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor az előzőekhez hasonlóan

$$\begin{aligned} -\text{VaR}_\alpha(\lambda X) &= q_\alpha(\lambda X) = \sup\{y \mid F_{\lambda X}(y) < \alpha\} = \lambda \sup\{z \mid F_X(z) < \alpha\} \\ &= \lambda q_\alpha(X) = -\lambda \text{VaR}_\alpha(X), \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

tehát a VaR valóban pozitív homogén.

(3) Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $\forall y \in \mathbb{R}$ esetén $F_{X+a}(y) = F_X(y - a)$ és ezt felhasználva

$$\begin{aligned} -\text{VaR}_\alpha(X + a) &= q_\alpha(X + a) = \sup\{y \mid F_{X+a}(y) < \alpha\} = \sup\{y \mid F_X(y - a) < \alpha\} = \\ &= a + \sup\{z \mid F_X(z) < \alpha\} = a + q_\alpha(X) = a - \text{VaR}_\alpha(X). \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Ezzel beláttuk az alsó VaR eltolásinvarianciáját és így a tétel bizonyítása teljes. \square

1.3.9. Megjegyzés. A 1.3.8. Tétel bizonyítása során tulajdonképpen a kvantilisok monotonitását, pozitív homogenitását és eltolásinvarianciáját láttuk be, és a VaR definícióját felhasználva adódtak ezen tulajdonságok az alsó és felső VaR esetében.

1.3.10. Megjegyzés. Az (1.3.1) összefüggés egyszerű következménye, hogy az α konfidencia-szinthez tartozó alsó és felső VaR érték előáll

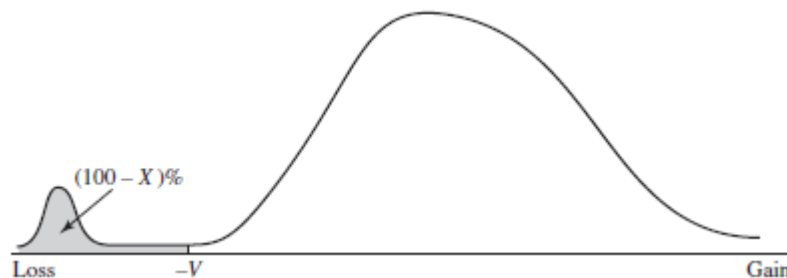
$$\text{VaR}_\alpha(X) = q^{1-\alpha}(-X) \quad (1.3.18)$$

és

$$\text{VaR}^\alpha(X) = q_{1-\alpha}(-X) \quad (1.3.19)$$

alakban.

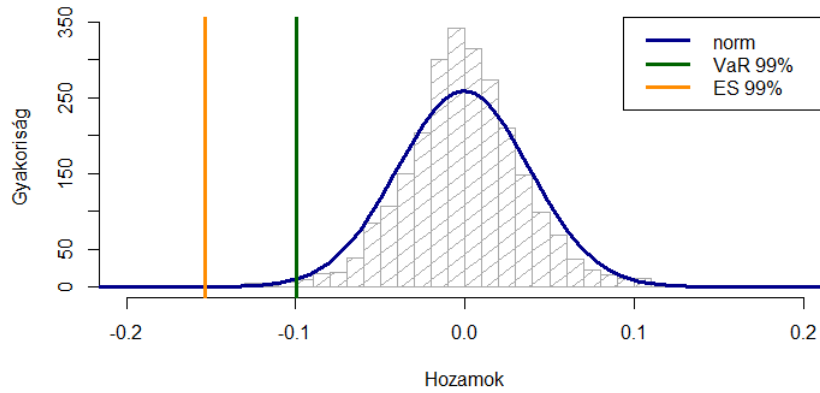
Tehát egyfelől a VaR nem teljesíti a szubadditivitási tulajdonságot, így nem támogatja a diverzifikációt és ezért nem tartozik a koherens mértékek közé. Továbbá, a VaR-on túli veszteségek nagysága között nem tesz különbséget, pedig számunkra fontosak az extrém, kiugró értékek. Ezt szemlélteti a 2. ábra.



2. ábra. Egy portfólió nyereség- és veszteség-eloszlása adott T időhorizonton. (Forrás: Hull, J. [25], 259. oldal)

Az 1. ábrához hasonlóan a 2. ábrán is V az X konfidencia-szinthez tartozó VaR értéke, azonban jelentősen valószínűbb egy nagyobb értékű veszteség bekövetkezése, melyet a VaR nem jelez előre. Ez természetesen akkor igaz, ha feltételezzük, hogy a farokvastagság mindkét esetben megegyezik az eloszlások ábrázolt szélein túl.

1.4. EXPECTED SHORTFALL A VaR arra a kérdésre ad választ, hogy mi az a lehetséges legnagyobb veszteség, ami az esetek legrosszabb α százalékában bekövetkezhet. Ezzel szemben az expected shortfall (ES) az esetek legrosszabb α százalékában a veszteség (profit) várható értékét mutatja meg. A VaR és az ES egymáshoz fűződő viszonyát szemlélteti a 3. ábra, amelyen késsel a hozamok átlagával és szórásával megegyező várható értékű és szórású normális eloszlást ábrázoltam, míg narancssárgával és zölddel rendre a 99%-os ES és VaR értékeket.



3. ábra. A VaR és az ES értéke $\alpha = 99\%$ -os konfidencia-szinten egy általánosan generált hozameloszlás esetén

1.4.1. Definíció. Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) egy valószínűségi mező, \mathcal{X} valószínűségi változók halmaza Ω -n, $X \in \mathcal{X}$, $\alpha \in (0, 1)$. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}((X)^-) < \infty$, ahol $(X)^-$ az X negatív része. Ekkor az X valószínűségi változó expected shortfall-ja

$$\text{ES}_\alpha(X) := -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q_u(X) \, du = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_u(X) \, du. \quad (1.4.1)$$

1.4.2. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az alsó és felső α -kvantilis csak egy nullmértékű halmazon különböznek egymástól, így

$$\int_0^\alpha q_u(X) \, du = \int_0^\alpha q^u(X) \, du. \quad (1.4.2)$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\text{ES}_\alpha(X) := -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q_u(X) \, du = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^u(X) \, du. \quad (1.4.3)$$

A gyakorlatban a hozamok egy adott mintarealizációja esetén az ES-t az ezek legrosszabb $\alpha\%$ -ában realizált hozamok átlagával közelíthetjük (Acerbi, [1]). Legyenek például r_1, r_2, \dots, r_n a realizált hozamok, amiket nagyság szerint sorba rendezünk: $r_1^* \leq r_2^* \leq \dots \leq r_n^*$. Ekkor az α -kvantilis r_k^* , ahol $k = \max\{i \mid i \leq n\alpha, i \in \mathbb{N}\}$. Ekkor tehát az expected shortfall ezen k darab elem átlagával közelíthetjük:

$$\widehat{\text{ES}}_\alpha(r_1, \dots, r_n) = -\frac{\sum_{i=1}^k r_i^*}{k} = (*). \quad (1.4.4)$$

Ezen közelítés átalakításával eljutunk az ES egy másik definíciójáig, amely a későbbiekben lesz hasznos számunkra ([29]).

Ugyanis (*)-ot tovább alakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 (*) &= -\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^n r_i^* \mathbb{1}_{\{i \leq k\}} \right) = -\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^n r_i^* \mathbb{1}_{\{r_i^* \leq r_k^*\}} - \sum_{i=1}^n r_i^* \mathbb{1}_{\{r_i^* \leq r_k^*\}} + \sum_{i=1}^n r_i^* \mathbb{1}_{\{i \leq k\}} \right) \\
 &= -\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^n r_i^* \mathbb{1}_{\{r_i^* \leq r_k^*\}} - \sum_{i=1}^n r_i^* (\mathbb{1}_{\{r_i^* \leq r_k^*\}} - \mathbb{1}_{\{i \leq k\}}) \right).
 \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Az $\{r_i^* \leq r_k^*\}$ és $\{i \leq k\}$ halmazok csak akkor különböznek, ha $i > k$ esetén létezik olyan elem, melyre $r_i^* = r_k^*$. Ekkor $\{r_i^* \leq r_k^*\} = 1$ és $\{i \leq k\} = 0$, tehát a különbségük 1. Így az (1.4.7) egyenlet tovább írható

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^n r_i \mathbb{1}_{\{r_i \leq r_k^*\}} - r_k^* \sum_{i=1}^n (\mathbb{1}_{\{r_i \leq r_k^*\}} - \mathbb{1}_{\{i \leq k\}}) \right) \\
 &= -\frac{n}{k} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \mathbb{1}_{\{r_i \leq r_k^*\}} - r_k^* \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{r_i \leq r_k^*\}} - \frac{k}{n} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

alakban. Figyelembe véve, hogy α -t $\frac{k}{n}$ -nel, a várható értékét az átlaggal közelíthetjük, valamint hogy egy esemény valószínűségét a $\frac{\text{kedvező események száma}}{\text{összes esemény száma}}$ képlettel számolhatjuk ki, így a következő definíciót adhatjuk az expected shortfallra:

1.4.3. Definíció. Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) egy valószínűségi mező, \mathcal{X} valószínűségi változók halmaza Ω -n, $X \in \mathcal{X}$, $\alpha \in (0, 1)$. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}((X)^-) < \infty$. Ekkor az X valószínűségi változó expected shortfall-ja α -szinten

$$\text{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \left(\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}) + q_\alpha(X) (\alpha - P(X \leq q_\alpha(X))) \right). \tag{1.4.7}$$

1.4.4. Megjegyzés. Legyen $X \in \mathcal{X}$, melyre $\mathbb{E}((X)^-) < \infty$ és legyen $\alpha \in (0, 1)$. A továbbiakban [4] és [22] alapján vezessük be az alábbi függvényt, amely $\forall x \in \mathbb{R}$ és $\forall \omega \in \Omega$ esetén a

$$\mathbb{1}_{\{X(\omega) \leq x\}}^{(\alpha)} := \begin{cases} \mathbb{1}_{\{X(\omega) \leq x\}} & \text{ha } P(X = x) = 0, \\ \mathbb{1}_{\{X(\omega) \leq x\}} + \frac{\alpha - P(X \leq x)}{P(X = x)} \mathbb{1}_{\{X(\omega) = x\}} & \text{ha } P(X = x) > 0 \end{cases} \tag{1.4.8}$$

képlettel áll elő.

(1) Vegyünk észre, hogy

$$\begin{aligned}
 &\text{ha } X(\omega) > x, \quad \text{akkor } \mathbb{1}_{\{X(\omega) \leq x\}}^{(\alpha)} = 0 \quad \text{és} \\
 &\text{ha } X(\omega) < y, \quad \text{akkor } \mathbb{1}_{\{X(\omega) \leq x\}}^{(\alpha)} = 1.
 \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

(2) Amennyiben $X(\omega) = q_\alpha(X)$ és $P(X = x) > 0$, akkor

$$0 \leq P(X \leq q_\alpha(X)) - \alpha < P(X = q_\alpha(X)) \tag{1.4.10}$$

(3) (1) és (2) miatt

$$\mathbb{1}_{\{X(\omega) \leq x\}}^{(\alpha)} \in [0, 1]. \tag{1.4.11}$$

(4) Az (1.4.8) definíció egyszerű következménye, hogy

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^{(\alpha)}) = \alpha \tag{1.4.12}$$

(5) és

$$\text{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^{(\alpha)}). \quad (1.4.13)$$

(6) Amennyiben X folytonos eloszlású valószínűségi változó, úgy

$$\mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^{(\alpha)} = \mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}} \quad \text{és} \quad \text{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}). \quad (1.4.14)$$

Az eddig vizsgált kockázati mértékekkel ellentétben az ES monoton, szubadditív, pozitív homogén és eltolásinvariáns, így az ES koherens kockázati mérték, amely valóban alkalmas a kockázat mérésére. Ezt mondja ki a következő tétel.

1.4.5. Tétel. Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) egy valószínűségi mező, továbbá legyen \mathcal{X} valószínűségi változók halmaza Ω -n, $\alpha \in (0, 1)$ és $\mathbb{E}((X)^-) < \infty$. Ekkor az expected shortfall koherens kockázati mérték az \mathcal{X} halmazon.

Bizonyítás. Az 1.3.8. Tétel bizonyításában láthattuk, hogy az alsó és felső kvantilisok pozitív homogén, monoton és eltolásinvariáns mutatók, és az 1.4.1. Definíciót felhasználva adódnak ezen tulajdonságok az expected shortfallra is. Így csak a szubadditivitást kell bizonyítanunk.

Legyenek $X, Y, Z \in \mathcal{X}$ olyanok, hogy $\mathbb{E}((X)^-) < \infty$, $\mathbb{E}((Y)^-) < \infty$ és $Z = X + Y$. Ekkor az ES szubadditív, ha tetszőleges $\alpha \in (0, 1)$ esetén

$$\text{ES}_\alpha(Z) \leq \text{ES}_\alpha(X) + \text{ES}_\alpha(Y) \quad (1.4.15)$$

teljesül.

Vegyük észre, hogy az (1.4.9) összefüggés alapján az (1.4.8) definíciót az $x = q_\alpha(X)$ választással felírva $X < q_\alpha(X)$ esetén $\mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^{(\alpha)} = 0$. Hasonlóan, $X > q_\alpha(X)$ esetén $\mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^{(\alpha)} = 1$.

Így

$$(X - q_\alpha(X)) \left(\mathbb{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^{(\alpha)} \right) \geq 0. \quad (1.4.16)$$

A bizonyítás során azt fogjuk megmutatni, hogy $\alpha[\text{ES}_\alpha(X) + \text{ES}_\alpha(Y) - \text{ES}_\alpha(Z)] \geq 0$, hiszen ebből következik (1.4.15).

Az (1.4.13) összefüggést $\text{ES}_\alpha(X)$, $\text{ES}_\alpha(Y)$ és $\text{ES}_\alpha(Z)$ esetén alkalmazva, majd kihasználva, hogy $Z = X + Y$ adódik, hogy

$$\begin{aligned} & \alpha[\text{ES}_\alpha(X) + \text{ES}_\alpha(Y) - \text{ES}_\alpha(Z)] = \\ & = \mathbb{E} \left(Z \mathbb{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^{(\alpha)} - X \mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^{(\alpha)} - Y \mathbb{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^{(\alpha)} \right) \\ & = \mathbb{E} \left(X \left[\mathbb{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^{(\alpha)} \right] + Y \left[\mathbb{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^{(\alpha)} \right] \right) \\ & = \mathbb{E} \left([X - q_\alpha(X)] \left[\mathbb{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^{(\alpha)} \right] + [Y - q_\alpha(Y)] \left[\mathbb{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^{(\alpha)} \right] \right) \\ & + \mathbb{E} \left(q_\alpha(X) \left[\mathbb{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^{(\alpha)} \right] + q_\alpha(Y) \left[\mathbb{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^{(\alpha)} \right] \right) = (*) \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Ezután (1.4.16) miatt (*)-ban az első várható érték biztosan nemnegatív, így elhagyva ezt a tagot alsó becslést kapunk (*)-ra. Továbbá, kiemelhetjük $q_\alpha(X)$ -et és $q_\alpha(Y)$ -t a várható érték képzés

alól és négyszer alkalmazva az (1.4.12) összefüggést azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 (*) &\geq q_\alpha(X) \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^{(\alpha)} \right) + q_\alpha(Y) \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^{(\alpha)} \right) \\
 &= q_\alpha(X)(\alpha - \alpha) + q_\alpha(Y)(\alpha - \alpha) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.4.18}$$

Tehát teljesül, hogy $\alpha[\text{ES}_\alpha(X) + \text{ES}_\alpha(Y) - \text{ES}_\alpha(Z)] \geq 0$, azaz az expected shortfall szubadditív, így valóban koherens kockázati mérték. \square

2. A BÁZELI BANKFELÜGYELETI BIZOTTSÁG SZEREPE ÉS INTÉZKEDÉSEI

Az 1960-as évek végére a pénzügyi szektor gyors fejlődése és globalizációja megteremtette az igényt egy egységes és szakértői szabályozói rendszer bevezetésére, ezáltal egy központi, nemzetközi szabályozó szervezet megalakulására. Ennek hatására 1974-ben a vezető gazdasági nagyhatalmak¹ központi bankjainak vezetői megalakították a Bázeli Bankfelügyeleti Bizottságot (*Basel Committee on Banking Supervision*, a továbbiakban: BCBS). Ezen fejezetben átfogó képet szeretnék adni a BCBS főbb ajánlásairól, illetve a VaR, valamint az ES jelenlegi és jövőbeli szerepéről a szabályozásban. A fejezet megírásában Dömötör Barbara és Miskó Judit ([19]) összefoglalójára, valamint a *Bank for International Settlements* weboldalán² található BCBS dokumentumokra támaszkodtam.

A Bázeli Bizottság célja a tőkekövetelmény meghatározására vonatkozó ajánlások létrehozásával és nemzetközi felügyelet biztosításával növelni a pénzügyi stabilitást. Ezen ajánlások nem kötelező érvényűek a tagországok számára, egyénileg kell azokat implementálni az adott ország jogrendszerébe.

A bizottság első javaslata "*International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*" ([5]) néven 1988-ban jelent meg, amely a bankok tőketartalék-számításának módszerét határozta meg a hitelkockázatuk függvényében. A később Bazel I. néven ismertté vált egyezmény a bankok eszközeit öt kategóriába sorolta, melyekhez egyedi kockázati súlyokat rendelt (0%, 20%, 50%, 100% és egyéb kategória). A bankok egyedi tőkeszükséglete a kockázattal súlyozott eszközérték (*risk-weighted assets*, RWA) 8%-a volt. A Bazel I. által meghatározott tőketartalék-számítás elvét kisebb-nagyobb változtatásokkal több, mint 100 ország adaptálta a saját jogrendszerébe.

Amellett, hogy ezen szabályozás csak a hitelviszonyból eredő kockázatot vette figyelembe, a metodológia nem ösztönözte a pénzügyi intézményeket saját kockázatkezelési modellek fejlesztésére. A kritikákra választ adva 1996-ban a BCBS kiegészítette a korábbi egyezményt olyan ajánlásokkal, melyek a piaci kockázatokra vonatkozó tartalékképzésre szóltak. Ezek már előírták az egyedi, belső kockázatkezelési modellek alkalmazását, melynek hatására megnőtt a kvantitatív modellező területek szerepe a pénzügyi intézményeken belül. Újítás volt továbbá az ún. jelzőlámpa-rendszer ("*traffic light approach*"), amely a VaR-átlépések számához tartozó valószínűségek alapján sorolja piros, sárga és zöld kategóriákba az adott modellt a binomiális eloszlásnak megfelelően (4. ábra). Amennyiben a modell a sárga kategóriába esik, úgy a piaci tőkekövetelmény számításánál szereplő $3 \leq m_c \leq 4$ szorzó értékét meg kell emelni a minimális 3-ról.

Ezt követően 2004-ben jelent meg az újabb, Bazel II. néven ismert *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework* ([6]) ajánlás, amely már megkülönböztette a hitel-, működési- és piaci kockázatot.

¹Amerikai Egyesült Államok, Belgium, Egyesült Királyság, Franciaország, Hollandia, Japán, Kanada, Olaszország, Németország és Svédország.

²<https://www.bis.org/bcbs/>

zóna	átlépések száma	szorzó	$P_{99\%}$
zöld	0	3,00	0,0811
	1	3,00	0,2858
	2	3,00	0,5432
	3	3,00	0,7581
	4	3,00	0,8922
sárga	5	3,40	0,9588
	6	3,50	0,9863
	7	3,65	0,9960
	8	3,75	0,9989
	9	3,85	0,9997
piros	10 vagy több	4,00	0,9999

4. ábra. A jelzőlámpa-rendszer $\alpha = 99\%$ és $T = 250$ nap esetén

Három pillérből tevődik össze:

- (1) I. pillér: Minimális tőkekövetelmény meghatározása
- (2) II. pillér: Felügyeleti ellenőrzés intézményesítése
- (3) III. pillér: Nyilvánosságra hozatali követelmények összefoglalása.

A piaci kockázatokra vonatkozó tőkekövetelmény számítása történhet a *sztenderd* (standardized approach - SA), vagy a *belső modellen alapuló módszer* (internal models approach - IRB) szerint. A sztenderd módszer a szabályozók által szigorúan meghatározott lépéseken alapul, ennek ismertetésétől most eltekintek.

A belső modellen alapuló kockázatértékelésnek számos feltétele van a hitelintézetekre nézve, melyet a megfelelő szabályozói szerv ellenőriz. A szabályozó nem specifikálja a modell részleteit, ezért pénzügyintézetként különböző modelleket alkalmazhatnak. Közös pont viszont, hogy ezen modelleknek a kockázatból származó veszteségeloszlást kell modellezniük, melyből napi szinten 99%-os konfidencia szintű kockázatotott érték (Value at Risk, VaR) számítására van szükség legalább 10 napos tartási periódussal. A megfigyelt adatoknak legalább egy éves periódusból kell származniuk, és a modell teljesítőképességét rendszeres utóteszteléssel (backtest) kell ellenőrizni.

A 2008-as válságra számos válasz és kiegészítés született a BCBS részéről, ezeket összefoglalóan Bazel 2.5 néven ismerhetjük. A fő változás a korábbiakhoz képest, hogy a stresszelt időszaki adatokból számított kockázatotott értéket is figyelembe veszi a piaci kockázatra vonatkozó tőkekövetelmény meghatározása során, amelyet egy 250 napos múltbeli stresszperiódus alapján kell számolni.

A Bázeli Bizottság 2010-re dolgozta ki részletesen a válságra adott válaszát, mely *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems* néven vált ismertté. Ezen ajánlás újragondolja a piaci és hitelkockázatból származó tőketartalék számításának módszerét, már figyelembe veszi a likviditási és a működési kockázatot is.

A piaci kockázat kezelésének megújítása érdekében 2012-ben párbeszéd indult el a bankok és a Bázeli Bizottság között, melynek eredményeként 3 konzultációs dokumentumot bocsátott ki a szervezet (*Fundamental Review of the Trading Book - FRTB*, [9], [10], [11]). A piaci kockázatokra vonatkozó újításokat a "*Minimum capital requirements of market risk*" néven kibocsátott ajánlás tartalmazza.

Az új szabályozás főbb változásai:

- (a) felülvizsgálja a sztenderd és a belső modelleken alapuló módszert,
- (b) VaR helyett expected shortfall (ES) alapú kockázatmérést vezet be,
- (c) változnak a banki és a kereskedési könyv elhatárolásának szabályai,
- (d) a likviditást is figyelembe veszi a tőkekövetelmény számítása során.

A piaci kockázatokra vonatkozó sztenderd módszer változásait jelen dolgozatban nem tárgyalom, mert kevésbé releváns a kockázati mértékek utótesztelése szempontjából. A módosítások részletei megtalálhatóak [19] 4.2. fejezetében.

A legjelentősebb változás a piaci kockázatokra vonatkozó belső modelleket alkalmazó megközelítésben, hogy a szabályozók felismerték a VaR gyengeségeit (melyeket az 1.3 fejezetben én is tárgyaltam) és helyette az expected shortfallra térnek át. Míg jelenleg a 99%-os VaR alapján történik a tőketartalék számítása, addig a jövőben a 97,5%-os ES-t javasolja erre a célra a bizottság. Érdeemes azonban megjegyezni, hogy amennyiben a hozamok normális eloszlást követnek μ várható értékkel és σ szórással, úgy ez a két érték majdnem megegyezik (Hull, [25]). Ekkor ugyanis a 99%-os VaR és a 97,5%-os ES előáll

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{99\%} &= \mu + \sigma \mathcal{N}^{-1}(99\%) = \mu + 2,326\sigma \\ \text{ES}_{97,5\%} &= \mu + \sigma \frac{\exp(-(\mathcal{N}^{-1}(97,5\%))^2/2)}{\sqrt{2\pi}(1 - 97,5\%)} = \mu + 2,338\sigma \end{aligned} \quad (2.0.19)$$

alakban, ahol $\mathcal{N}^{-1}(\cdot)$ a standard normális eloszlásfüggvény inverze. Az ES akkor lesz jelentősen nagyobb a VaR-nál, ha a hozameloszlás a normálisnál vastagabb farokrészrel rendelkezik.

A belső modellek utótesztelésére vonatkozó szabályozói javaslatot a 2016-ban megjelent [12] B Függelék tartalmazza. A pénzügyi intézményeknek a belső kockázati modellek utótesztelését a 99%-os VaR alapján kell elvégezniük annak ellenére, hogy a piaci kockázat mérésére a 97,5%-os szignifikancia szintű ES használatát írja elő a szabályozás.

Folyamatos a kommunikáció a Bázeli Bizottság és a bankok között az új szabályozás hatásáról, a visszajelzések alapján a bizottság további változtatásokat eszközölt. Megállapítható az elemzésre alkalmas banki visszajelzésekből, hogy a változtatások következtében a teljes tőkekövetelmény közel 5%-kal növekedne, a legnagyobb növekedés a sztenderd módszer esetében figyelhető meg.

A visszajelzésekre 2018. március 22-én adott választ a Bizottság, [15]-ben összegyűjtötték [12] utólagos módosításait. Többek között

- (a) módosították a sztenderd módszeren, hogy érzékenyebb legyen a kockázatra,
- (b) változtatták a kockázati súlyokon,
- (c) tisztázták, hogy melyek azon a kockázati faktorok, amelyek alkalmazhatóak belső modellezésre,
- (d) pontosították, hogy mely kitettségre kell tőketartalékot képezni.

A javaslatok véglegesítése a közeljövőben várható, ezért a Bizottság 2022. január 1-ig elhalasztotta az új szabályozás életbe léptetését, ezzel időt adva az országok jogalkotó testületeinek a szabályok implementálására és a pénzügyi intézményeknek a gyakorlati megvalósítás fejlesztésére.

3. KOCKÁZATI MÉRTÉKEK UTÓTESZTELÉSE

Az utótesztelés (backtesting) fontos eszköz egy statisztika, esetünkben egy adott kockázati mérték vizsgálatára. Megmutatja, hogy az adott módszer, amellyel a kockázati mérőszámot számoljuk, mennyire pontosan becsüli meg a várható kockázatot múltbeli adatokhoz képest. A gyakorlatban például a VaR utótesztelése során megvizsgáljuk, hogy a ténylegesen realizált napi hozamok hány-szor haladták meg az általunk számolt napi kockázati mérőszám értékét.

Abban az esetben, ha egy kiugró érték figyelhető meg a bank historikus adatai között, amelyet valamilyen nem modellezhető kockázati tényező okoz és ezen a napon a realizált hozam meghaladja a napi kockázati mérőszámot, akkor a banknak megfelelően dokumentálnia kell ezen nem-modellezhető kockázati faktor időbeli változását és igazolnia kell, hogy valóban ezen tényező okozta az átlépést.

3.1. A VALUE AT RISK UTÓTESZTELÉSE Ebben a fejezetben John Hull [25] munkájára támaszkodtam.

Tegyük fel, hogy van egy módszerünk, amellyel egy napos VaR-t számolunk $\alpha = 99\%$ -os konfidencia szinten. A gyakorlatban az utótesztelés során megvizsgáljuk, hogy a ténylegesen realizált napi hozamok hány-szor haladták meg az általunk számolt egy napos, 99% -os VaR érték (-1) -szeresét. Ezeket az eseményeket VaR-átlépésnek nevezzük.

Azt várjuk, hogy $\alpha = 99\%$ mellett körülbelül az esetek $(1 - \alpha) = 1\%$ -ában történik VaR-átlépés. Ekkor a modell, amellyel a VaR értéket számoljuk megfelelőnek mondható. Ha a túllépés az esetek magasabb százalékában történik, akkor a modellünk alulbecsüli a VaR értékét. Fordított esetben, ha például az esetek $0,1\%$ -ában történik VaR-túllépés, akkor a modell túlbecsüli a VaR-t. Szabályozói szempontból az első esetben a kiszámolt tőke értéke túl alacsony, míg az utóbbiban túl magas.

A modellünk megfelelő lenne, ha a VaR-átlépés valószínűsége egy adott napon $p = 1 - \alpha$ lenne. Tegyük fel, hogy az egy napos VaR-t α konfidencia-szint mellett összesen n napra kiszámolva m napon történt VaR-kiütés. Felmerül a kérdés, hogy mi a teendő, ha $\frac{m}{n} > p$. Mikor kell elutasítani a modell használatát?

Tekintsük a két fent említett problémát külön-külön, egyoldali tesztek elvégzése. Az első esetben legyen H_0 a nullhipotézis, míg H_1 az ellenhipotézis az alábbi módon:

H_0 : A VaR-átlépés valószínűsége p .

H_1 : A VaR-átlépés valószínűsége nagyobb, mint p .

Annak a valószínűsége, hogy n napból pontosan m napon történik VaR-átlépés, binomiális eloszlást követ n és p paraméterekkel, azaz $P(X = m) = \binom{n}{m} p^m (1 - p)^{n-m}$. Ennek megfelelően annak a valószínűsége, hogy legalább m napon történik

$$P(X \geq m) = \sum_{k=m}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (3.1.1)$$

Amennyiben ez a valószínűség kisebb, mint a szignifikancia-szint (statisztikában ez leggyakrabban 5%), úgy elutasítjuk a nullhipotézist, és egyúttal a modellünket is. Ellenkező esetben elfogadjuk H_0 -t a modellel együtt.

A második esetben legyen

H_0 : A VaR-átlépés valószínűsége p .

H_1 : A VaR-átlépés valószínűsége kisebb, mint p .

Ekkor a (3.1.1)-hez hasonlóan annak valószínűsége, hogy a VaR-átlépések száma legfeljebb m :

$$P(X \leq m) = \sum_{k=0}^m \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (3.1.2)$$

A modell jóságáról dönthetünk a fenti két, egyoldali teszt eredménye alapján, vagy használhatjuk a Kupiec (1995) által kifejlesztett kétoldali tesztet, amelyben p egy VaR-átlépés valószínűsége és m a megfigyelt VaR-átlépések száma. Ekkor a próbastatisztika értéke

$$T = -2 \ln \left((1-p)^{n-m} p^m \right) + 2 \ln \left(\left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-m} \left(\frac{m}{n}\right)^m \right), \quad (3.1.3)$$

ami Khí-négyzet eloszlás követ 1 szabadsági fokkal. Ismert továbbá, hogy $P(\chi_1^2 < 3.84) = 0.95$, ami azt jelenti, hogy 95%-os szignifikancia-szinten akkor utasítjuk el a modellünket, ha $T > 3.84$. A kritikus értékek 97.5% és 99% esetén rendre 5.02 és 6.63.

3.2. AZ EXPECTED SHORTFALL UTÓTESZTELÉSE Míg a VaR utótesztelhetősége köztudott és az 3.1 fejezetben leírtak szerint történik, addig az ES-ről az volt az általános vélekedés, hogy nem utótesztelhető, mert nem elicítabilis (Gneiting, [23], 2011).

3.2.1. Definíció. Legyen (Ω, \mathcal{F}, P) egy valószínűségi mező, és legyen \mathcal{X} valószínűségi változók halmaza Ω -n, $Y \in \mathcal{X}$. Ekkor egy $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ statisztika *elicítabilis*, ha létezik egy olyan S ún. tesztfüggvény (score function), amelynek ψ minimalizálja a várható értékét, azaz

$$\psi(Y) = \arg \min_x \mathbb{E}[S(x, Y)]. \quad (3.2.1)$$

A Bázeli Bizottság döntése – miszerint a VaR helyett az ES-t kell használni a piaci kockázatokra vonatkozó tőkekövetelmény számításánál – jelentős visszhangot kapott, hiszen sokan úgy gondolták, hogy az utótesztelhetőség hiánya miatt az ES nem megfelelő kockázati mérték erre a célra.

A 2000-es évek elején több tanulmány is született a témában, ám összességében ezek nem voltak alkalmazhatóak a gyakorlatban. Berkowitz (2001), valamint Kerkhof és Melenberg (2004) utótesztelési módszerei kis mintaelemszám esetén pontatlanok voltak, míg Wong (2008) módszere standard normális hozameloszlást tételezett fel.

Carlo Acerbi és Székely Balázs azonban megmutatta, hogy az ES valóban elicítabilis és ez a tulajdonság nem ekvivalens az utótesztelhetőséggel. Emellett javasoltak három módszert az ES utótesztelésére ([2], 2014). A továbbiakban ezen cikkekre támaszkodva ismertetem a három módszert.

Legyenek x_1, \dots, x_T egy statisztika becsült értékei, y_1, \dots, y_T a mintarealizációk és legyen S kétváltozós tesztfüggvény. Ekkor általánosságban annál jobb a becslési modellünk, minél kisebb az

$$\hat{S} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T S(x_t, y_t) \quad (3.2.2)$$

ún. tesztfüggvény értéke. Gyakori például az átlagos abszolút vagy átlagos négyzetes eltérés minimalizálása is.

3.2.2. Megjegyzés. Az α -kvantilis, így a VaR is elicítabilis az $S(x, y) = (\mathbb{1}_{\{x > y\}} - \alpha)(x - y)$ tesztfüggvénnyel.

1. MÓDSZER: UTÓTESZTELÉS A VAR ALAPJÁN

Tegyük fel, hogy minden napra ismerjük az $X_i, i = 1, \dots$ napi hozamokat, amelyek valamely ismeretlen F_t eloszlásból származnak, melyet a P_t eloszlással közelítünk. Tegyük fel továbbá, hogy F_t és P_t folytonos, szigorúan monoton növekvő függvények. Ekkor az α szinthez tartozó ES felírható

$$\text{ES}_{\alpha, t} = -\mathbb{E}(X_t \mid X_t < -\text{VaR}_{\alpha, t}) \quad (3.2.3)$$

alakban, ahol $\text{ES}_{\alpha, t}$ és $\text{VaR}_{\alpha, t}$ jelölik a $(t - 249, \dots, t)$ egy éves időintervallumból számolt VaR és ES értékeket.³

A (3.2.3) egyenlet átrendezésével kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_t}{\text{ES}_{\alpha, t}} + 1 \mid X_t < -\text{VaR}_{\alpha, t}\right) = 0 \quad (3.2.4)$$

Legyen $I_t := \mathbb{1}_{\{X_t < -\text{VaR}_{\alpha, t}\}}$. Ekkor (3.2.4) tovább írható

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_t}{\text{ES}_{\alpha, t}} \mid X_t < -\text{VaR}_{\alpha, t}\right) + 1 = \mathbb{E}\left(\frac{X_t I_t}{\text{ES}_{\alpha, t}}\right) + 1 = 0$$

alakban. A várható értéket az átlaggal közelíthetjük, így $N_T := \sum_{i=1}^T I_t > 0$ esetén legyen a Z_1 tesztfüggvény

$$Z_1(X_1, \dots, X_T) = \frac{\sum_{i=1}^T \frac{X_i I_i}{\text{ES}_{\alpha, t}}}{N_T} + 1 \quad (3.2.5)$$

módon értelmezve.

A nullhipotézis szerint a becsült ES és VaR értékek megegyeznek az ismeretlen F_t eloszlású X -ekből számolt kockázati mérőszámokkal, míg az ellenhipotézis szerint az ES alulbecsli a kockázatot, azaz

$$H_0: \text{ES}_{\alpha, t}^F = \text{ES}_{\alpha, t} \text{ és } \text{VaR}_{\alpha, t}^F = \text{VaR}_{\alpha, t} \quad \forall t.$$

$$H_1: \text{ES}_{\alpha, t}^F \geq \text{ES}_{\alpha, t} \quad \forall t \text{ és } \exists \text{ olyan } t, \text{ amire } > \text{teljesül, valamint } \text{VaR}_{\alpha, t}^F = \text{VaR}_{\alpha, t} \quad \forall t.$$

³A diplomamunkámban az az alapértelmezés, hogy $\text{VaR}_{\alpha} > 0$, ahogyan a valóságban a várható veszteségünk is.

A Z_1 statisztika várható értéke H_0 vagy H_1 teljesülése esetén⁴

$$\mathbb{E}_{H_0}(Z_1 | N_T > 0) = 0 \quad \text{és} \quad \mathbb{E}_{H_1}(Z_1 | N_T > 0) < 0. \quad (3.2.6)$$

Fontos megjegyezni, hogy Z_1 érzékeny a VaR-átlépések nagyságára, de a gyakoriságukra nem.

2. MÓDSZER: KÖZVETLENÜL AZ ES TESZTELÉSE

3.2.3. Lemma. *Legyenek $X_i, i = 1, \dots, T$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók egy folytonos, szigorúan növekvő F eloszlásból és tegyük fel, hogy $\text{VaR}_\alpha(X) = -F_X^{-1}(\alpha)$ ismert. Jelölje $I_t := \mathbb{1}_{\{X_t < -\text{VaR}_\alpha(X_t)\}}$ indikátorfüggvényt és $N_T := \sum_{i=1}^T I_t$ a VaR-átlépések számát. Legyen $N_T > 0$ esetén*

$$\widehat{\text{ES}}_\alpha^{(N)}(X) = -\frac{\sum_{i=1}^N X_i I_i}{N_T}. \quad (3.2.7)$$

Ekkor

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\text{ES}}_\alpha^{(N)}(X) \mid N_T > 0\right) = \text{ES}_\alpha(X) \quad (3.2.8)$$

Bizonyítás. A (3.2.7) összefüggést behelyettesítve, feltételes várható értéket véve I_1, \dots, I_T -re, majd kihasználva az X_i -k függetlenségét kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\widehat{\text{ES}}_\alpha^{(N)}(X) \mid N_T > 0\right) &= \mathbb{E}\left(-\frac{\sum_{i=1}^T X_i I_i}{N_T} \mid N_T > 0\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(-\frac{\sum_{i=1}^T X_i I_i}{N_T} \mid I_1, \dots, I_T\right) \mid N_T > 0\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[-\frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^T I_i \mathbb{E}(X_i \mid I_i) \mid N_T > 0\right] = (*). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $I_i \mathbb{E}(X_i \mid I_i) = I_i \mathbb{E}(X_i \mid X_i < -\text{VaR}_\alpha(X)) = -I_i \text{ES}_\alpha(X)$, így

$$(*) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^T I_i \text{ES}_\alpha(X) \mid N_T > 0\right] = \text{ES}_\alpha(X),$$

ami éppen a lemma állítása. □

(3.2.8)-ba behelyettesítve, majd az egyenletet átrendezve $N = T$ esetén adódik, hogy

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^T \frac{X_i I_i}{N_T \text{ES}_\alpha(X)}\right) + 1 \mid N_T > 0\right] = 0. \quad (3.2.9)$$

Definíció alapján annak a valószínűsége, hogy egy kockázati mérték alulbecsülte a kockázatot meg kell hogy egyezzen $(1 - \alpha)$ -val, tehát $\mathbb{E}_{H_0}(N_T) = T(1 - \alpha)$. Ebből adódik, hogy $N_T > 0$ esetén $\mathbb{E}_{H_0}\left(\frac{1}{N_T}\right) = \frac{1}{T(1-\alpha)}$, amit (3.2.9)-be helyettesítve

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^T \frac{X_i I_i}{T(1-\alpha)\text{ES}_\alpha(X)}\right) + 1\right] = 0. \quad (3.2.10)$$

⁴Ezen állítás igazolása [2] függelékében található.

Definiáljuk a Z_2 tesztfüggvényt a következőképpen:

$$Z_2(X_1, \dots, X_T) = \sum_{i=1}^T \frac{X_i I_i}{T(1-\alpha) \text{ES}_\alpha(X)} + 1. \quad (3.2.11)$$

A nullhipotézis szerint – hasonlóan a korábbi esethez – a becsült ES és VaR értékek megegyeznek az ismeretlen F_t eloszlású X -ekből számolt kockázati mérőszámokkal. Azonban az ellenhipotézis most gyengébb, ugyanis nem teszi fel, hogy a VaR jól mérje a kockázatot:

$$H_0: \text{ES}_{\alpha,t}^F = \text{ES}_{\alpha,t} \text{ és } \text{VaR}_{\alpha,t}^F = \text{VaR}_{\alpha,t} \quad \forall t.$$

$$H_1: \text{ES}_{\alpha,t}^F \geq \text{ES}_{\alpha,t} \quad \forall t \text{ és } \exists \text{ olyan } t, \text{ amire } > \text{ teljesül, valamint } \text{VaR}_{\alpha,t}^F \geq \text{VaR}_{\alpha,t} \quad \forall t.$$

A Z_2 statisztika várható értéke a null- és az ellenhipotézis teljesülése esetén

$$\mathbb{E}_{H_0}(Z_2) = 0 \quad \text{és} \quad \mathbb{E}_{H_1}(Z_2) < 0. \quad (3.2.12)$$

3.2.4. Megjegyzés. Z_2 esetében nem kell feltenni a napi hozamok függetlenségét, továbbá a teszt általánosítható nem folytonos eloszlások esetén is.

3.2.5. Megjegyzés. Felhasználva, hogy $\mathbb{E}_{H_0}(N_T) = T(1-\alpha)$, Z_2 felírható

$$Z_2 = 1 - (1 - Z_1) \frac{N_T}{T(1-\alpha)} \quad (3.2.13)$$

alakban.

Tehát Z_2 kiszámításához szükséges minden napra eltárolni az $X_i I_i$ és az ES_i , $i = 1, \dots, T$ értékeket. Fontos megjegyezni, hogy Z_2 egyaránt érzékeny a VaR-átlépések nagyságára és a gyakoriságára is.

A második módszer előnye, hogy (3.2.11) alapján az

$$s \mapsto \sum_{i=1}^s \frac{X_i I_i}{T(1-\alpha) \text{ES}_\alpha(X)} + \frac{s}{T}, \quad s = 1, \dots, T \quad (3.2.14)$$

hozzárendelés ábrázolásával szemléletes képet kaphatunk a Z_2 időbeli alakulásáról.

3. MÓDSZER: AZ ES ÚJRABECSLÉSE

Az általam elvégzett számításokban az 1. és a 2. módszert alkalmazom, ezért a 3. módszer lényegét és a tesztfüggvényt ismertetem csupán.

Berkowitz ([16]) szerint lehetséges utótesztelni egy modellt az eloszlásának farkrészén keresztül, ugyanis amennyiben a modell jó, úgy ha az eloszlásfüggvényébe helyettesítjük az X_t valószínűségi változót, azaz $U_t = P_t(X_t)$, akkor U_t , $t = 1, \dots, T$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $(0, 1)$ intervallumon.

Legyenek \vec{V} független, $U(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók és definiáljuk a Z_3 tesztfüggvényt

$$Z_3(X_1, \dots, X_T) = -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{\widehat{\text{ES}}_\alpha^{(T)}(P_t^{-1}(\vec{U}))}{\mathbb{E}_V(\widehat{\text{ES}}_\alpha^{(T)}(P_t^{-1}(\vec{V})))} + 1 \quad (3.2.15)$$

szerint. Ezen statisztika kiszámolása már jóval több memóriát és időt igényel, mint az előző két eset, hiszen itt a nevezőben lévő tag analitikus számítást igényel.

A null- és ellenhipotézis a következő:

$$H_0: P_t = F_t$$

$$H_1: P_t \succ F_t \forall t \text{ és } \exists \text{ olyan } t, \text{ amire } \succ \text{ teljesül,}$$

ahol \succ (\succ) az elsőrendű (gyenge) sztochasztikus konvergenciát jelöli.

A Z_3 statisztika várható értéke a null- és az ellenhipotézis teljesülése esetén

$$\mathbb{E}_{H_0}(Z_3) = 0 \quad \text{és} \quad \mathbb{E}_{H_1}(Z_3) < 0. \quad (3.2.16)$$

3.2.6. Megjegyzés. Az egyes teszt-statisztikák szignifikanciáját és erejét Monte-Carlo szimulációval lehet vizsgálni (Acerbi és Székely, [2]). Első lépésben független, azonos eloszlású X_i hozamokat kell generálni, majd kiszámolni a teszt-statisztikákat és végül becsülni a $p = P_{Z_i}(Z_i(\vec{x}))$ értékeket. Láthatóan ez a folyamat rendkívül memóriaigényes, mert szükséges hozzá a P_t eloszlások rögzítése. A tesztek erejének vizsgálata a diplomamunkám célján kívül esik.

4. AZ ADATOK STATISZTIKAI VIZSGÁLATA

Két portfólión végeztem el az empirikus vizsgálataimat, melyeket a TheStreet szakértői portál ([32]) minősítései és a Forbes magazin ([31]) ajánlásai alapján állítottam össze. Az előbbi oldal A+-tól F kategóriáig minősíti a részvényeket az 5. ábra szerint, annak megfelelően, hogy az adott részvényt vételre, tartásra vagy eladásra javasolja.

Vétel						Tartás			Eladás						
A+	A	A-	B+	B	B-	C+	C	C-	D+	D	D-	E+	E	E-	F

5. ábra. A TheStreet által meghatározott részvényminősítések

Az 1. portfóliómban – az egyszerűség kedvéért – az alábbi 6 darab, befektetésre ajánlott, magas minősítésű részvényből 1-1 darab szerepel:

- (1) Apple Inc. (AAPL, A–),
- (2) FedEx Corporation (FDX, B+),
- (3) Johnson & Johnson (JNJ, C+),
- (4) Microsoft Corporation (MSFT, A–),
- (5) UnitedHealth Group Incorporated (UNH, A+),
- (6) T-Mobile US, Inc. (TMUS, A–).

A 2. portfólióban a szakértői portál által eladásra javasolt részvényekből választottam szintén 6 darabot:

- (1) Alaska Communications Systems Group, Inc. (ALSK, D+),
- (2) Alphatec Holdings, Inc. (ATEC, E+),
- (3) Black Box Corporation (BBOX, D),
- (4) Cellular Biomedicine Group, Inc. (CBMG, D),
- (5) Chicago Bridge & Iron Company N.V. (CBI, D),
- (6) Eldorado Gold Corporation (EGO, D).

A részvényekre vonatkozó historikus adatok 2008.03.28. és 2018.03.28. közötti időszakra vonatkoznak, forrásuk [33].

4.1. NORMALITÁS VIZSGÁLATA Annak érdekében, hogy ellenőrizsem a leggyakoribb feltételezést a loghozamok eloszlásáról, illetve hogy a kockázati mértékek három számítási módszere közül az adataimnak legmegfelelőbbet alkalmazzam, először megvizsgáltam, hogy az adatokból számolt logaritmikus hozamok normális eloszlást követnek-e. Ez a gyakorlatban általában nincs így, a realizált hozamok tipikusan csúcsosabb, enyhén jobbra ferdült eloszlásból származnak.

A portfólióban szereplő i . részvény t . napra számolt loghozamát az $r_{i,t} = \ln\left(\frac{x_{i,t}}{x_{i,t-1}}\right)$ képlettel számolom, ahol $x_{i,t}$ jelöli az i . részvény értékét t -ben, $i = 1, \dots, 6$.

LEÍRÓ STATISZTIKÁK

Első lépésben kiszámoltam a hozamok néhány leíró statisztikáját, úgy mint az átlagot, szórást, ferdeséget és csúcsosságot. A normalitás vizsgálatánál fontos megnézni az utóbbi két mutatót, hiszen a normális eloszlás szimmetrikus, így a ferdesége 0, és a csúcsossága szintén 0. Például a negatív ferdeség azt jelenti, hogy az eloszlás jobbra ferdült, azaz a bal farokrész hosszabb, vastagabb, míg a negatív csúcsosság arra utal, hogy az eloszlás lapultabb, mint a normális eloszlás. Az eredmények a 6. ábrán találhatóak.

Részvények	Átlag	Szórás	Ferdeség	Csúcsosság	Részvények	Átlag	Szórás	Ferdeség	Csúcsosság
MSFT	0,0006	0,0174	0,1593	10,0950	ALSK	-0,0006	0,0305	0,9005	32,6426
JNJ	0,0004	0,0105	0,3299	11,8111	ATEC	-0,0012	0,0506	-1,2575	23,3724
TMUS	0,0003	0,0290	-1,9028	39,6637	BBOX	-0,0010	0,0333	-2,6284	48,3680
UNH	0,0008	0,0210	0,6972	27,0557	CBMG	0,0003	0,1064	0,2063	13,0296
AAPL	0,0010	0,0193	-0,4478	8,6634	CBI	-0,0004	0,0363	-0,8203	14,2680
FDX	0,0004	0,0190	-0,2276	5,3861	EGO	-0,0008	0,0388	-0,4193	7,3608

6. ábra. A két portfólióban lévő 6-6 részvény leíró statisztikái

Az értékek igazolják várakozásaimat, miszerint az első, magas minősítésű részvényekből álló portfólió loghozamainak átlaga pozitív, 0 közeli szórással, míg a 2. portfólió átlagos loghozamai negatívak, nagyobb szórással. Emellett a 2. portfólió loghozamai abszolút értékben nagyobb ferdeséggel rendelkeznek, és látható, hogy a BBOX áll a legtávolabb a normális eloszlástól a ferdeség és csúcsosság tekintetében.

GRAFIKUS NORMALITÁSVIZSGÁLAT

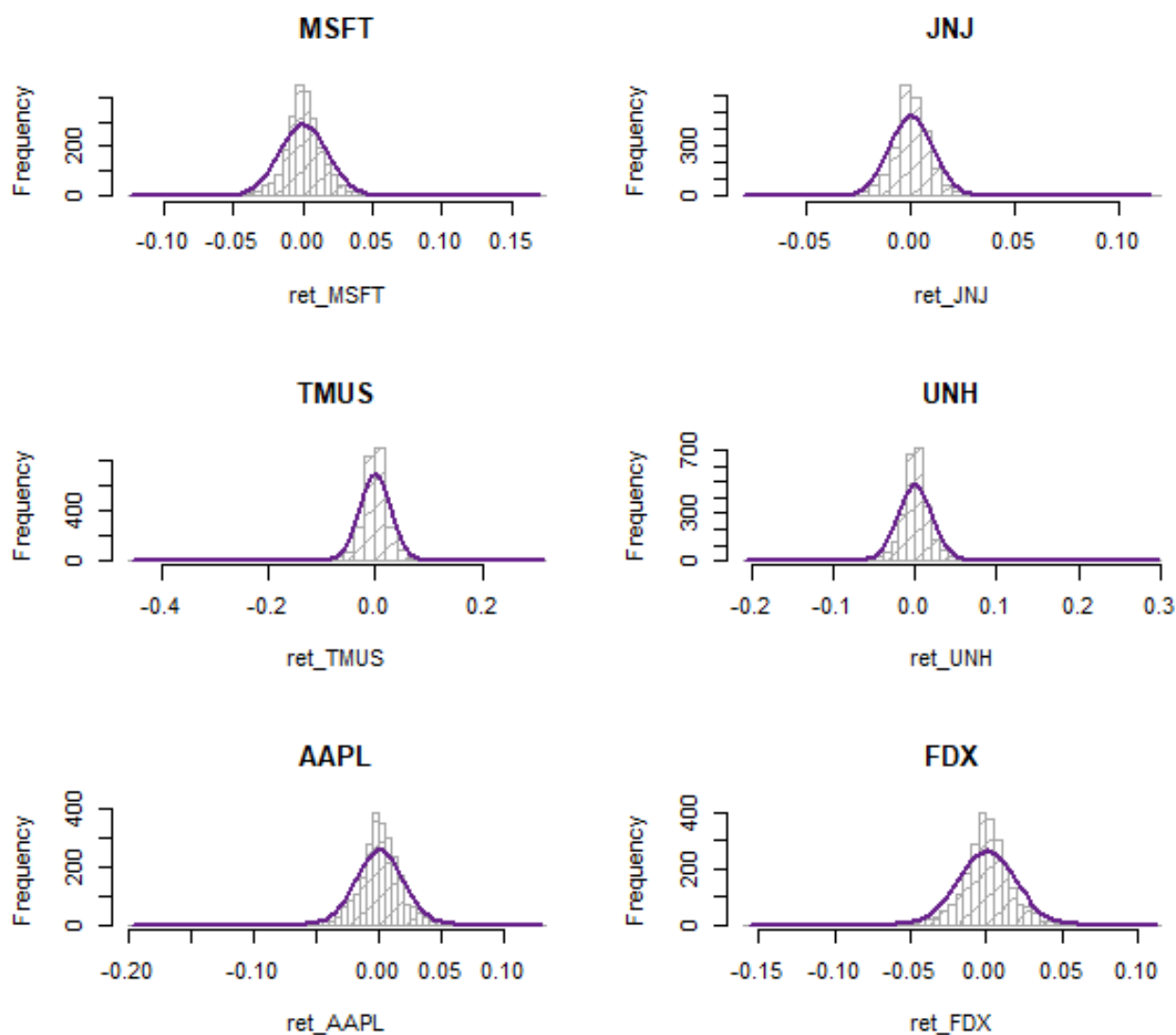
A normalitásvizsgálat két legszemléletesebb módja a hisztogramok megfigyelése és a kvantilis-kvantilis ábra (Q-Q plot).

A 8. ábrán találhatóak a részvények napi loghozamaira illesztett hisztogramok, ahol a lila görbe az adatokból számolt átlaggal és szórással megegyező várható értékű és szórású normális eloszlás.

A hisztogramok is alátámasztják a leíró statisztikák eredményét, a hozamok eloszlása közel szimmetrikus, azonban láthatóan csúcsosabb, mint az elméleti normális eloszlás.

Az ún. Q-Q plot vagy kvantilis-kvantilis ábra a minta és az elméleti eloszlás (esetünkben most a normális eloszlás) kvantiliseit hasonlítja össze. Amennyiben a vizsgált két eloszlás között lineáris kapcsolat van, úgy a kvantilisek egy egyenesen helyezkednek el, és ha a két eloszlás megegyezik, úgy ez az egyenes az $y = x$ egyenessel esik egybe.

Az 1. portfólió részvényeinek kvantilis-kvantilis ábrái a 18. ábrán, míg a 2. portfólió esetén a 19. ábrán találhatóak a függelékben. Az eloszlások alsó, illetve felső szélein lévő kvantilis értékek nem illeszkednek az egyenesre, sok a kilógó érték (outlier), tehát az eloszlások egyezőségét minden esetben elvethetjük.

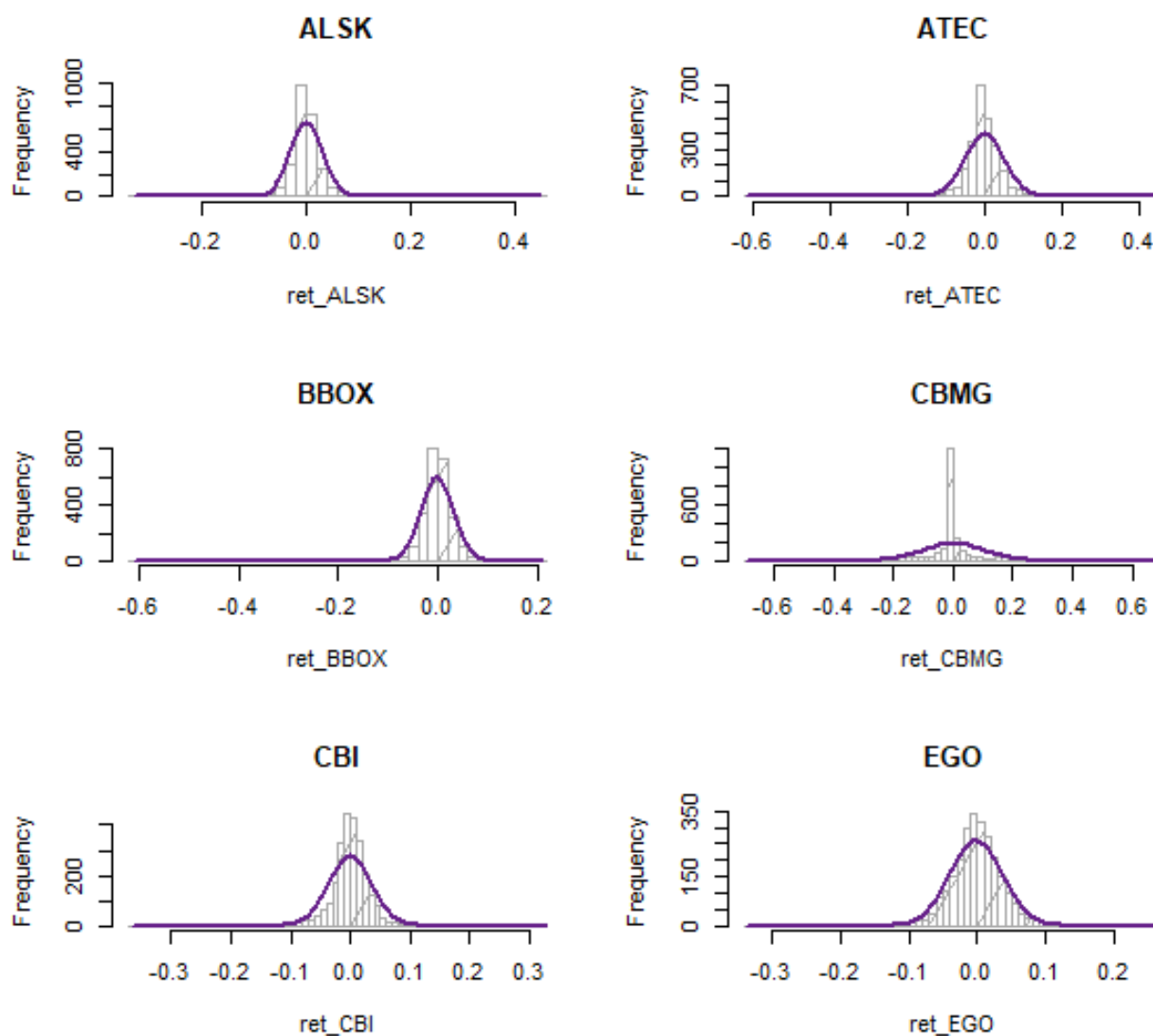


7. ábra. Az 1. portfólióban lévő 6 részvény loghozamainak hisztogramja

NEMPARAMÉTERES PRÓBÁK

A két leggyakoribb statisztikai próbát végeztem még el a normalitás vizsgálatára: a Kolmogorov-Smirnov és Shapiro-Wilk próbát.

A Kolmogorov-Smirnov teszt két minta eloszlásának összehasonlítására alkalmas. Egymintás esetben a nullhipotézis az, hogy a minta eloszlása megegyezik a feltételezett eloszlással, ami most a normális eloszlás. A Shapiro-Wilk próba nullhipotézise, hogy a tapasztalati eloszlás megegyezik a normálissal. Mindkét teszt esetében 5%-os konfidencia szinten elvetjük a minta normalitását, ha a p -érték < 0.05 . A tesztek eredményeit a 9. ábra tartalmazza, amely alapján minden részvény esetén elvethetjük a loghozamok normalitását.



8. ábra. A 2. portfólióban lévő 6 részvény loghozamainak hisztogramja

Részvények	Shapiro-Wilk	Kolmogorov-Smirnov	Részvények	Shapiro-Wilk	Kolmogorov-Smirnov
MSFT	< 2.2e-16	< 2.2e-16	ALSK	< 2.2e-16	< 2.2e-16
JNJ	< 2.2e-16	< 2.2e-16	ATEC	< 2.2e-16	< 2.2e-16
TMUS	< 2.2e-16	< 2.2e-16	BBOX	< 2.2e-16	< 2.2e-16
UNH	< 2.2e-16	< 2.2e-16	CBMG	< 2.2e-16	< 2.2e-16
AAPL	< 2.2e-16	< 2.2e-16	CBI	< 2.2e-16	< 2.2e-16
FDX	< 2.2e-16	< 2.2e-16	EGO	< 2.2e-16	< 2.2e-16

9. ábra. A nemparaméteres próbák eredménye

KONKLÚZIÓ

Mind a leíró statisztikákat, mind a grafikus módszereket és a nemparaméteres próbákat vizsgálva ugyanahhoz a következtetéshez jutunk, elvetjük a hozamok normalitását. Az 1. portfólió hozamainak várható értéke pozitív, míg a 2. esetben negatív, a tapasztalati eloszlások közel szimmetrikusak (legkevésbé a BBOX és a TMUS), de láthatóan csúcsosabbak, mint a normális eloszlás. Az FDX és EGO részvények hozamai állnak legközelebb a normális eloszláshoz, míg a BBOX és TMUS hozamai a legkevésbé normálisak.

A két eloszlás kvantilisei egyik esetben sem egyeznek meg olyan mértékben, hogy normalitást feltételezhessünk. Végül a két nemparaméteres teszt alapján 5%-os konfidencia-szinten szintén elvetettük a hozamok normalitását.

5. UTÓTESZTELÉS HISTORIKUS VAR ÉS ES ESETÉN

A kockázatos érték és az expected shortfall számításának három alapvető módszere ismert:

- (1) Delta-normál vagy variancia-kovariancia módszer,
- (2) Historikus módszer,
- (3) Monte Carlo szimuláció.

Az (1) módszer a portfólióban szereplő termékek variancia-kovariancia mátrixának kiszámításán alapszik, melyből a portfólió összetételének megfelelő súlyozással kapjuk meg annak varianciáját. A módszer feltételezi, hogy a varianciák és a kovarianciák az időben állandóak és hogy a portfólióban szereplő eszközök hozamainak alakulása normális eloszlást követ. Míg az előbbi feltevés pontatlanságokhoz vezethet, addig az utóbbi a valóságban általában egyáltalán nem teljesül. A gyakorlatban (főleg rövid időintervallumok esetén) a hozamok eloszlása csúcsosabb, valamint vastagabb szélű, mint a normális eloszlás, azaz gyakoribbak az extrém, kilógó értékek (Embrechts, [20]). További stilizált tény, hogy a valóságban a negatív hozamok gyakoribbak, ezáltal az eloszlás enyhén balra ferdült.

A (2) módszerben a referencia-időszakra vonatkozó historikus hozamok adják az eloszlást, melyből azonos valószínűségekkel véve az egyes kimenetek jövőbeli eloszlását könnyedén meghatározható az adott α -hoz tartozó kvantilis, azaz a kockázatos érték. Előnye, hogy nem él semmilyen feltételezéssel portfólióban szereplő eszközök hozamainak eloszlásáról, csupán azt tételezi fel, hogy a múltbeli adatokból pontosan előrejelezhető a jövő.

(3) magában foglalja az összes olyan numerikus módszert, melynek során nagy számú véletlenszám generálásával becsüljük a hozamok eloszlását. Első lépés egy modell illesztése és kalibrálása historikus adatokra, majd ezen modell alapján nagy elemszámú, azonos eloszlású mintarealizáció generálása. Innen már meghatározható a minta eloszlása és így a kockázati mérőszám is. Hasonlóan, mint (1)-nél, itt is valamilyen feltételezéssel kell élni a hozamok eloszlásáról, ami szintén pontatlansághoz vezet. A leggyakoribb feltételezés, hogy a részvényárfolyamok geometriai Brown-mozgást (GBM) követnek, ami azt jelenti, hogy a loghozamok eloszlását normális eloszlással közelítik. A módszer további hátránya, hogy a nagy mintaelemszám miatt rendkívül számításigényes, ezért viszonylag lassú.

Az előző fejezet eredményeit figyelembe véve historikus módszerrel fogom elvégezni a kockázati mértékek számítását.

5.1. A KOCKÁZATI MÉRŐSZÁMOK ÉS A TESZTFÜGGVÉNYEK SZÁMÍTÁSA Számításaimat elsősorban R Studio-ban és Microsoft Excel-ben végeztem el. Összesen $N = 2519$ napi adat áll rendelkezésemre, melyekből első lépésben kiszámítottam a portfólióban szereplő i . részvény t . napra számolt loghozamát a jól ismert

$$r_{i,t} = \ln \left(\frac{x_{i,t}}{x_{i,t-1}} \right), \quad i = 1, \dots, 6, t = 2, \dots, N \quad (5.1.1)$$

módon. A portfólió értéke az 1. napon a 6 részvény aznapi árának összege, majd innen a $t + 1$. napra az

$$X_{t+1} = \sum_{i=1}^6 x_{i,1} \exp(r_{i,t}), \quad t = 1, \dots, N - 1 \quad (5.1.2)$$

képlettel számolható. Erre azért volt szükség, hogy rögzített legyen a portfólióban szereplő részvények aránya a kiindulási napon. Innen a portfólió loghozamait (5.1.1)-hez analóg módon az

$$R_{i,t} = \ln \left(\frac{X_{i,t}}{X_{i,t-1}} \right), \quad i = 1, \dots, 6, \text{ és } t = 2, \dots, N \quad (5.1.3)$$

képlettel számoltam.

Az így kapott $N - 1$ hosszú idősort [12] alapján $T = 2267$ darab 250 napos ún. idő-ablakra (time window) bontottam. A 251. naptól kezdve minden napra kiszámoltam a $\text{VaR}_{97,5\%}$, $\text{VaR}_{99\%}$ és az $\text{ES}_{97,5\%}$ értékeket az elmúlt 250 napos "VaR-ablak" alapján, historikus módszerrel.

Jelölje $I_t^{\alpha_i}$ azt, hogy történt-e VaR átlépés α_i mellett, ahol $i = 1, 2$ és $t = 251, \dots, N - 1$, azaz

$$I_{t+1}^{\alpha_i} = \begin{cases} 1, & \text{ha } R_{t+1} < -\text{VaR}_{\alpha,t} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Az ES számítását (3.2.3) alapján végeztem el, felhasználva, hogy diszkrét esetben a várható értéket az átlaggal közelíthetjük⁵:

$$\text{ES}_{\alpha_1,t} = - \frac{\sum_{i=t-250}^t R_i I_i^{\alpha_1}}{\sum_{i=t-250}^t I_i^{\alpha_1}}, \quad t = 252, \dots, N. \quad (5.1.5)$$

Ezt követően Z_1 értékét, illetve a Z_2 teszt-statisztika közelítő értékeit számoltam ki (3.2.14) alapján $t = 252, \dots, N$ esetén.

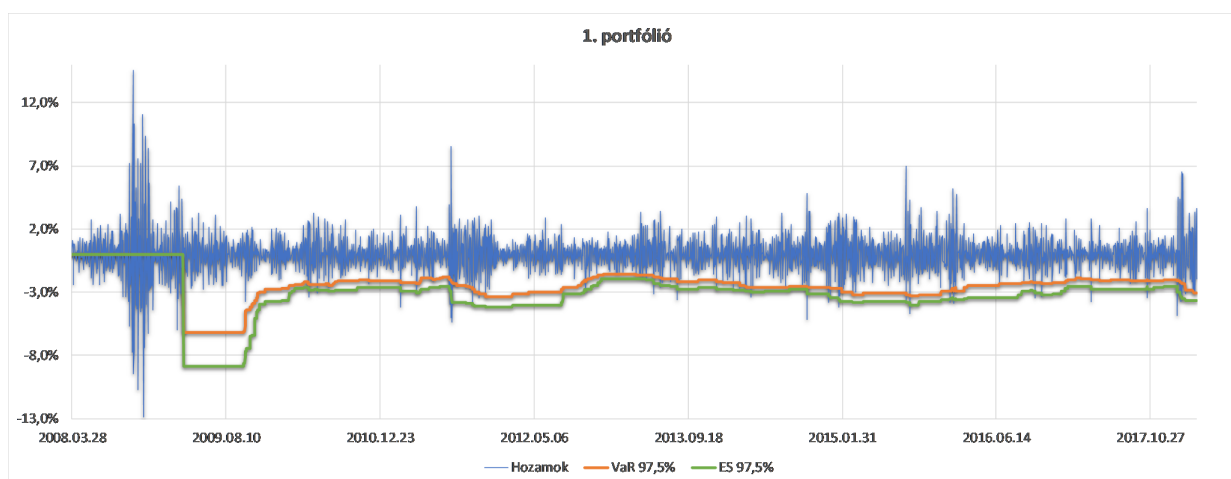
⁵A gyakorlati számításoknál a VaR és az ES értékek (-1) -szeresével számoltam.

6. EREDMÉNYEK

A 10. és 11. ábrán ábrázoltam az eredményül kapott napi loghozamokat és kockázati mértékeket $\alpha_1 = 97,5\%$ esetén.

Kiugró hozamokat vártam 2008.09.15. után, hiszen ezen a napon jelentette be a Lehman Brothers amerikai befektetési bank, hogy csődvédelmet kér. 2008. októbere és novembere között a hozamok volatilitása – a várakozásaimnak megfelelően – valóban megnőtt. Míg az első portfólió esetén 2008.11.14-én volt a legkisebb loghozam ($-12,89\%$), és 2008.10.13-án pedig a legnagyobb ($14,59\%$), addig a második portfólió esetén 2009.03.04-én volt a minimum ($-29,76\%$) és 2008.12.02-án a maximum ($39,45\%$).

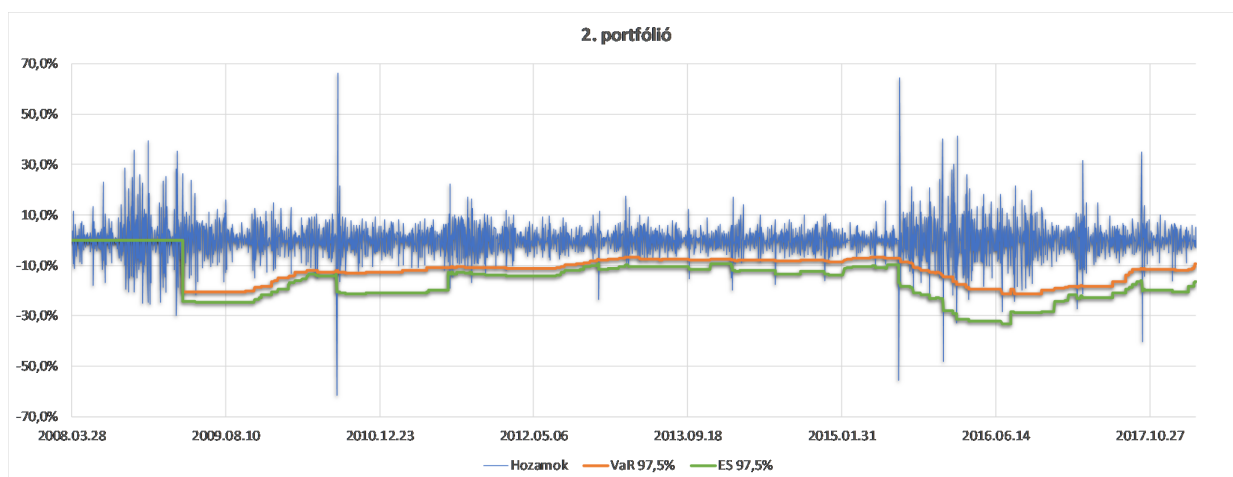
A második portfólió esetén hasonlóan volatilis időszak figyelhető meg 2015. közepe és 2017. vége között, amely valószínűleg a Brexitről szóló tárgyalásoknak, a népszavazásnak (2016.06.23.) és annak eredményének tulajdonítható (11. ábra).



10. ábra. Az 1. portfólió esetén számolt hozamok és kockázati mértékek

A (2.0.19) összefüggés szemléltetéséhez a 20. és 21. ábrán kirajzoltam a $\text{VaR}_{99\%}$ és az $\text{ES}_{97,5\%}$ értékeit az idő függvényében. Az első portfólió esetén a két érték az egész időintervallum alatt szorosan együtt mozog, azonban a második portfóliónál hosszabb-rövidebb időszakokra a két mérték elszakad egymástól. Jellemzően az $\text{ES}_{97,5\%}$ konzervatívabb, magasabb várható kockázatot mér, ami a szabályozó szempontjából pozitívum, a pénzügyi intézmények számára pedig nagyobb tőkekövetelményt jelent.

6.1. A VAR ÉRTÉKEK UTÓTESZTELÉSE A $\text{VaR}_{97,5\%}$ és $\text{VaR}_{99\%}$ értékek utótesztelését a 3.1. fejezet alapján végeztem el. (3.1.1) és (3.1.2) alapján kiszámoltam az m db ($m = 1, \dots, 80$) VaR -átlépéshez tartozó megfelelő valószínűségeket, illetve (3.1.3) alapján a Kupiec-teszt értékét. Az eredményeket a 22. táblázat tartalmazza.



11. ábra. A 2. portfólió esetén számolt hozamok és kockázati mértékek

A VaR-átlépések számának várható értéke $T = 2267$, $\alpha_1 = 97,5\%$ és $\alpha_2 = 99\%$ esetén rendre 57 és 23. Az általam tapasztalt túllépések száma mind a négy esetben meghaladja a várható értéket (12. ábra). A kétoldali tesztek eredményeként 5%-os konfidencia-szint mellett akkor fogadjuk el a VaR-modellünket, ha a túllépések száma $\alpha_1 = 97,5\%$ esetén $44 < k < 70$ között, $\alpha_2 = 99\%$ esetén pedig $14 < k < 32$ között van ($T = 2267$). Tehát az első portfóliónál $\alpha_1 = 97,5\%$ mellett éppen meghaladja az átlépések száma a határt, míg $\alpha_2 = 99\%$ mellett határozottan elutasítjuk a VaR-modellt. A második portfólió esetén elfogadjuk azt, mert pontosan méri a kockázatot (12. ábra).

1. portfólió	97.5%	99%
VaR átlépés	70	33
alsó	0,9651	0,9849
felső	0,0457	0,0238
döntés	0,0500	0,0500

2. portfólió	97.5%	99%
VaR átlépés	65	25
alsó	0,8810	0,7322
felső	0,1466	0,3389
döntés	0,0500	0,0500

12. ábra. A kétoldali tesztek eredménye $\alpha_1 = 97,5\%$, $\alpha_2 = 99\%$ és $T = 2267$ esetén

A Kupiec-teszt szerint $\alpha_1 = 97,5\%$ esetén $40 < k < 75$, $\alpha_2 = 99\%$ esetén pedig $11 < k < 36$ között fogadjuk el a modellt. A 13. ábra táblázatai alapján a Kupiec-teszten mindkét modell jól teljesített mindkét α érték mellett. Tehát a kétoldali tesztek szigorúbbak, kevesebb túllépést engednek meg, mint a binomiális eloszláson alapuló két egyoldali teszt.

1. portfólió	97.5%	99%
VaR átlépés	70	33
Kupiec	2,99	4,17
Kritikus érték	5,02	6,63

2. portfólió	97.5%	99%
VaR átlépés	65	25
Kupiec	1,20	0,23
Kritikus érték	5,02	6,63

13. ábra. A Kupiec-teszt eredménye $\alpha_1 = 97,5\%$, $\alpha_2 = 99\%$ és $T = 2267$ esetén

Ábrázoltam a VaR-átlépések eloszlását a vizsgált időtartamon (23. és 24. ábra), mert azt vártam, hogy a pénzügyi válságot követő időszakban volt gyakoribb a jelenség. Azonban nem ez volt megfigyelhető, ezen ábrák alapján az első portfólió esetén nem volt különösebb koncentrációja a túllépéseknek, míg a második portfólió esetén 2015. január és 2016. június között sűrűsödnek a VaR-átlépések. Ennek hátterében a már korábban említett Brexit állhat.

Összességében tehát az általam használt historikus VaR-modell a második portfólió esetén jól teljesít, így elfogadhatjuk azt, míg az első portfólió esetén kevésbé megbízható, az egyoldali tesztek alapján éppen el kell utasítani a használatát. Ennek oka az lehet, hogy a második portfólió esetén a modell jobban "meg tudja fogni" az egyedi kockázatot, mint az első esetén. Általánosságban ugyanis a kockázatnak két formáját szokás megkülönböztetni (Hull, [25]):

- (1) piaci, vagy nem-diverzifikálható (*systematic* vagy *un-diversifiable risk*) és
- (2) egyedi kockázatot (*specific risk*, *nonsystematic* vagy *diversifiable risk*).

A piaci kockázat a piac bizonytalanságából ered, épp ezért minden pénzügyi termékre jellemző, így ezt a fajta kockázatot nem lehet diverzifikációval csökkenteni. Ellenben az egyéni kockázat egy adott termékcsoportra, ipari ágazatra, vagy csupán néhány vállalat vagy termék kis csoportjára jellemző, ezért például az én esetemben a részvények számának növelésével, különböző ipari ágazatokba tartozó részvények választásával az egyedi kockázat csökkenthető lenne.

6.2. AZ ES UTÓTESZTELÉSE A (3.2.5) és a (3.2.11) alatti két tesztfüggvény, valamint a $\text{VaR}_{97,5\%}$ utótesztelése alapján értékeltem az általam használt módszert az $\text{ES}_{97,5\%}$ számítására.

Mivel az első portfólió esetén a VaR-modellt elvettem, így természetes azt várni, hogy az ES-modell nem lesz megfelelő ebben az esetben, hiszen $\text{ES}_{97,5\%}$ -t a $\text{VaR}_{97,5\%}$ -on túli veszteségek átlagaként számoltam. Továbbá, mivel Z_1 előzetesen a VaR utótesztelésének eredményére épül, így az első portfólió esetén nem is használható $T = 2267$ esetén. Így ebben az esetben összhangban van a két módszer eredménye, egyhangúan el kell utasítani a modellt.

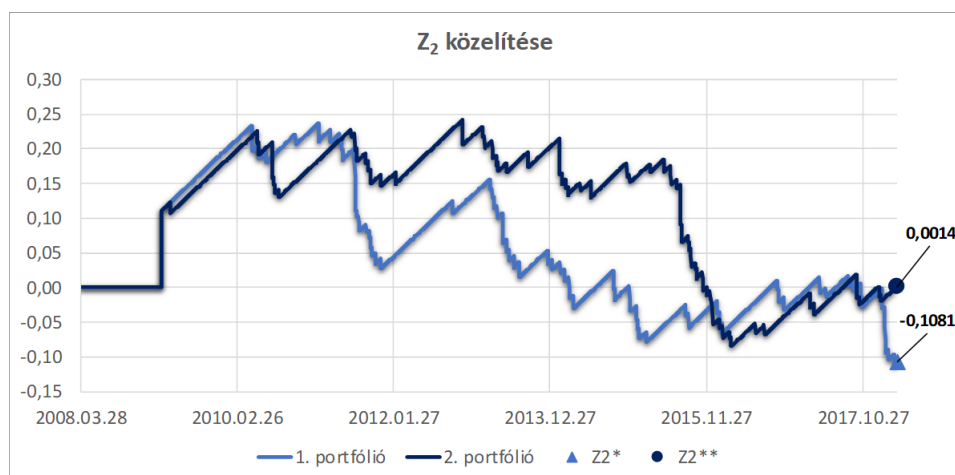
Az utótesztelés eredményeit a 14. ábra foglalja össze. A VaR-hoz tartozó két eredmény közül az első a binomiális eloszláson alapuló kétoldali tesztek összesített eredményére, míg a második a Kupiec-tesztre vonatkozik.

módszer	1. portfólió	2. portfólió
$\text{VaR}_{97,5\%}$	✗ ✓	✓ ✓
$\text{ES}_{97,5\%} - Z_1$	✗	✓
$\text{ES}_{97,5\%} - Z_2$	✗	✓

14. ábra. Utótesztek eredményei az egész időintervallumra

Az előző állítást igazolja a 15. ábra is, amelyen a (3.2.14) alapján számolt Z_2 értékének alakulása látható a teljes időintervallumon. Tehát Z_2 alapján a második portfólió esetén elfogadjuk az ES-modellt, míg az első esetén ismételten elutasítjuk.

Annak érdekében, hogy pontosabb képet kapjak a teszt-statisztikák viselkedéséről és az ES-modell minőségéről, az M hosszú időintervallumot – melyre kockázati mértékeket számoltam – ekvidisztáns osztópontrendszer alapján $i = 1, 2, 3, 4, 5$ egyenlő részintervallumra bontottam.

15. ábra. Z_2 időbeli alakulása

Ezekre a periódusokra kiszámítottam a megfelelő $Z_1^{i,j}$, $Z_2^{i,j}$ értékeket, ahol $i = 1, 2, 3, 4, 5$ jelöli, hogy hány intervallumra bontottam a teljes megfigyelési időszakot és $j = 1, \dots, i$ hogy hanyadik intervallumra vonatkozik a statisztika (16. ábra).

Ahogy azt a 3.2. alfejezetben említettem, Z_1 érzékeny arra, hogy mekkora volt az előző napi VaR érték és a tényleges hozam közti különbség VaR-átlépés esetén, arra viszont nem, hogy hány átlépés történt, ezért számomra kevésbé tűnik megbízhatónak. Emellett szól az is, hogy az első portfólióban 5, míg a másodikban 4 olyan eset van, amikor Z_1 és Z_2 ellentmond egymásnak.

Az ES első portfólión való gyenge teljesítményét igazolja az is, hogy Z_2 alapján közel az összes részintervallumon el kell utasítanunk a modellt, hiszen $Z_2^{4,1}$ és $Z_2^{5,1}$ kivételével minden statisztika értéke negatív.

Számításaim helyességének ellenőrzése céljából a (3.2.13) összefüggés felhasználásával becsült \hat{Z}_2 értékeket is számoltam, melyeket a 16. ábrán Z_2' néven gyűjtöttem össze a Z_1 , Z_2 eredményeivel együtt. Jól látszik, hogy a tényleges és a becsült Z_2 értékek közti különbség a VaR-modell elfogadása mellett minden esetben 0,005 alatt van, így nem tételezek fel számítási hibát.

Nyilván csak azokban a periódusokban lehet Z_1 értékét értelmezni, ahol a VaR-átlépések száma a kétoldali tesztek határai között van. A különböző felosztásokra vonatkozó határokat a 17. ábrán gyűjtöttem össze, ahol k a túllépések számát jelöli. A részletes táblázatok a függelékben találhatóak (25., 26., 27. és 28. ábrák).

Az átlépések számát pirossal emeltem ki abban az esetben, amikor az az elfogadási intervallumon kívül esett a 17. ábra alapján. Ezekben az esetekben csak a Z_2 statisztika értéke mérvadó, és ez alapján két kivétellel kivételével minden esetben elvetjük, hogy az $ES_{97,5\%}$ jól méri a kockázatot. Ez a két érték az első portfólióban $Z_2^{5,1} = 0,5587$ és a másodikban $Z_2^{4,1} = 0,4350$.

Ha összehasonlítjuk a $VaR_{97,5\%}$ utótesztelésének eredményét Z_2 -vel a két portfólióban, akkor rendre azt kapjuk, hogy míg a kétoldali tesztek alapján a vizsgált 15 esetből 4-et és 5-öt utasítunk el, addig Z_2 alapján 13-at és 6-ot.

1. portfólió	1.	2.	3.	4.	5.
átlépések	70				
Z ₁	0,0132				
Z ₂	-0,1081				
Z ₂ '	-0,2172				
Z ₂ -Z ₂ '	0,1092				
átlépések	34	36			
Z ₁	0,0281	-0,0009			
Z ₂	-0,1666	-0,2721			
Z ₂ '	-0,1666	-0,2710			
Z ₂ -Z ₂ '	0,0000	0,0011			
átlépések	23	26	21		
Z ₁	0,0569	-0,0161	0,0016		
Z ₂	-0,1492	-0,3996	-0,1108		
Z ₂ '	-0,1492	-0,3978	-0,1093		
Z ₂ -Z ₂ '	0,0000	0,0019	0,0015		
átlépések	10	24	17	19	
Z ₁	0,0208	0,0311	-0,0096	0,0069	
Z ₂	0,3080	-0,6433	-0,2129	-0,3335	
Z ₂ '	0,3080	-0,6404	-0,2108	-0,3311	
Z ₂ -Z ₂ '	0,0000	0,0029	0,0021	0,0024	
átlépések	5	19	17	13	16
Z ₁	0,0027	0,0665	-0,0008	-0,0366	0,0086
Z ₂	0,5587	-0,5697	-0,5057	-0,1926	-0,4038
Z ₂ '	0,5587	-0,5662	-0,5024	-0,1899	-0,4007
Z ₂ -Z ₂ '	0,0000	0,0035	0,0033	0,0026	0,0031

2. portfólió	1.	2.	3.	4.	5.
átlépések	65				
Z ₁	0,0327				
Z ₂	0,0014				
Z ₂ '	0,0016				
Z ₂ -Z ₂ '	0,0003				
átlépések	24	41			
Z ₁	-0,0316	0,0704			
Z ₂	0,1259	-0,3455			
Z ₂ '	0,1259	-0,3444			
Z ₂ -Z ₂ '	0,0000	0,0012			
átlépések	15	19	31		
Z ₁	-0,0547	0,0168	0,0849		
Z ₂	0,1618	0,0103	-0,5030		
Z ₂ '	0,1618	0,0116	-0,5010		
Z ₂ -Z ₂ '	0,0000	0,0013	0,0020		
átlépések	7	17	28	13	
Z ₁	-0,1421	0,0139	0,0937	0,0204	
Z ₂	0,4350	-0,1847	-0,7934	0,1000	
Z ₂ '	0,4350	-0,1826	-0,7903	0,1016	
Z ₂ -Z ₂ '	0,0000	0,0021	0,0032	0,0016	
átlépések	7	8	16	26	8
Z ₁	-0,1421	0,0218	-0,0097	0,1148	0,0148
Z ₂	0,2925	0,3075	-0,4297	-1,0367	0,3025
Z ₂ '	0,2925	0,3090	-0,4265	-1,0322	0,3041
Z ₂ -Z ₂ '	0,0000	0,0015	0,0032	0,0045	0,0015

16. ábra. Az ES_{97,5%} utótesztelésének eredménye

# intervallum	elfogadási határok
1	44 < k < 70
2	19 < k < 38
3	11 < k < 27
4	7 < k < 22
5	5 < k < 18

17. ábra. Elfogadási határok a VaR-lépések számára a részintervallumok számának függvényében

7. KÖVETKEZTETÉSEK

A kockázati mértékek kiszámítására használt módszereim célja az volt, hogy viszonylag kevés számolással, standard modelleken keresztül végezzem el a tanult kockázati mértékek számítását és utótesztelését egyszerű pénzügyi termékekből álló portfóliókon, felhasználva Acerbi és Székely eredményeit ([2]). Az eredményeket a megújuló bázeli szabályozással összevetve értékeltem ki, és ezen felül összehasonlítottam az általam vizsgált két portfólión.

Míg a magasabb minősítésű, népszerűbb részvények hozamainak várható értéke pozitív volt, addig az eladásra javasolt részvények negatív átlagos hozammal, magasabb szórással és csúcsossággal rendelkeztek. Az első portfólión nagy, kiugró hozamokat figyeltem meg 2008. októbere és novembere között. Ezzel szemben a második portfólión a Brexit hatása láthatóan jelentősebb, ugyanis hosszabb és volatilisabb időszakot eredményezett.

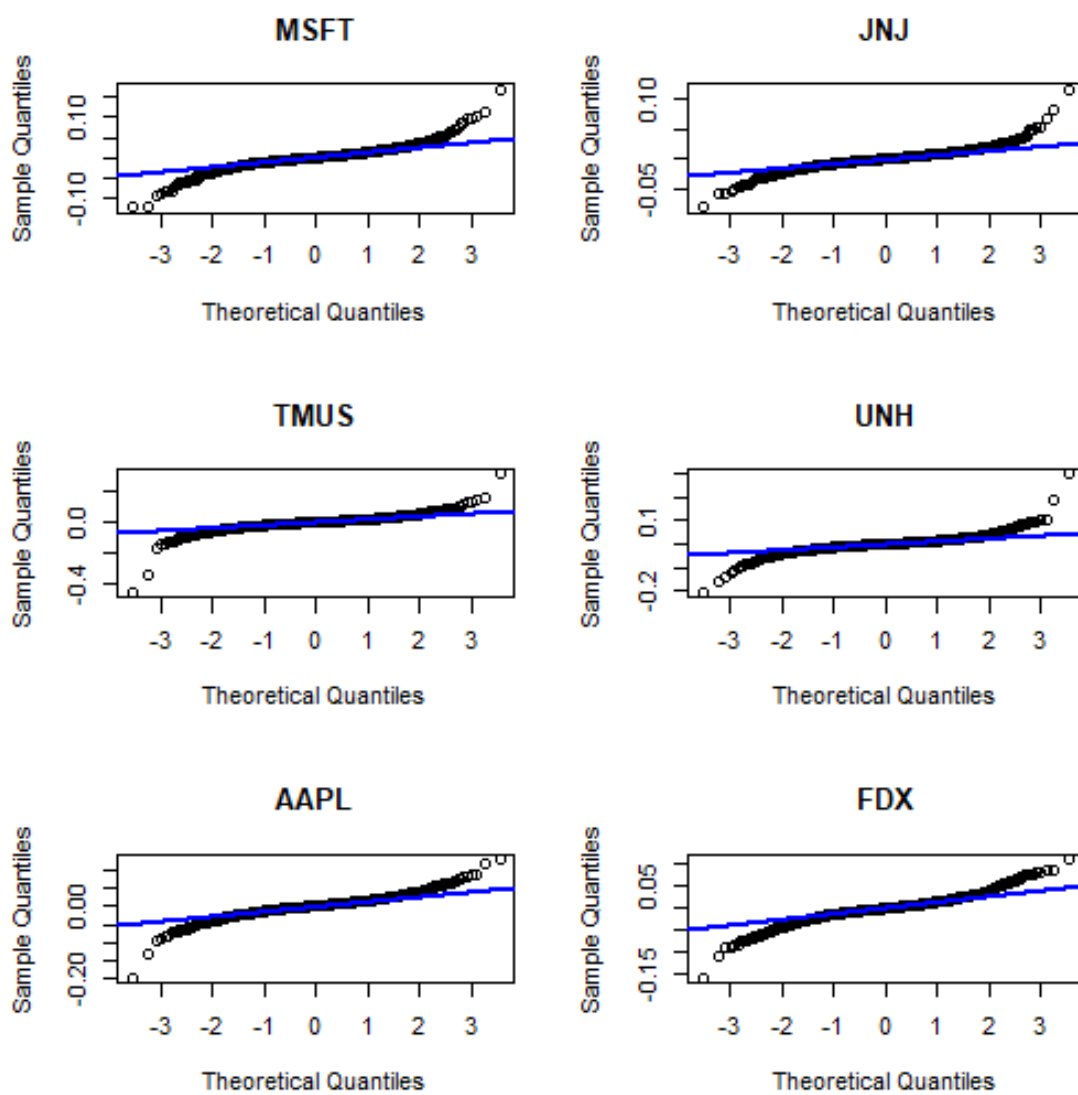
Intuitíven azt vártam, hogy az első portfólió részvényeire kevésbé jellemzőek a hirtelen kiugró hozamok és hogy ezáltal a VaR-modell is jól teljesít. Azonban az eredmények szerint pont a második portfólió esetén fogadtam el a VaR-modellt $T = 2267$, $\alpha_1 = 97,5\%$ és $\alpha_2 = 99\%$ mellett, valamint az ES-modellt α_1 mellett.

A várakozásoknak megfelelően igazolódott, hogy a Bázeli Bizottság a $\text{VaR}_{99\%}$ helyett az $\text{ES}_{97,5\%}$ számítására való áttéréssel a konzervatívabb tőkeszámítást támogatja. Az első portfóliónál a két kockázati mérőszám közel együtt mozgott a 10 éves időtartam alatt, míg a második esetén az $\text{ES}_{97,5\%}$ alapú számítás magasabb tőkekövetelményt eredményezett. Ezt a néhány kiugró, extrém érték (outlier) okozhatta.

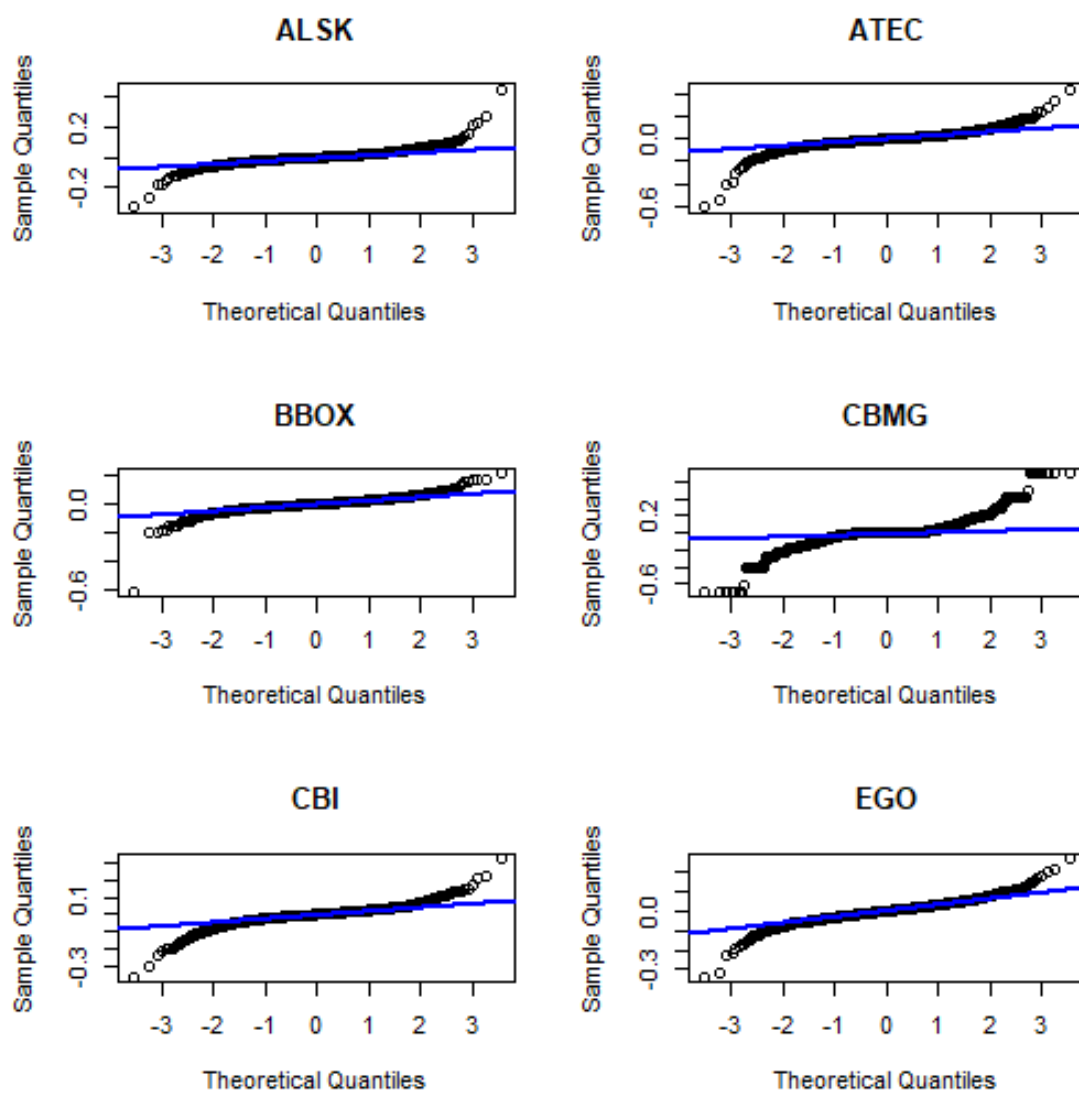
Az általam bemutatott két példán keresztül arra a következtetésre jutottam, hogy valóban lehetséges viszonylag stabil utótesztelést végezni az expected shortfallra, azonban az általam használt két módszer közül a Z_2 teszt-statisztika alkalmas erre. Nem szükséges hozzá előzetesen feltételezni a VaR-modell jóságát, így nem kell külön ellenőrizni azt, mint Z_1 esetén. Ez utóbbi kevésbé stabil módszer az ES utótesztelésére, melynek előfeltétele, hogy a vizsgált időszakban lennie kell VaR-átlépésnek, illetve hogy a VaR-modell jól teljesít.

Összességében racionális döntésnek tartom az $\text{ES}_{97,5\%}$ -ra való áttérést, ugyanis így pontosabb képet kaphatunk a várható kockázatról. Amennyiben az $\text{ES}_{97,5\%}$ utótesztelését a $\text{VaR}_{97,5\%}$ alapján végzem el, úgy Z_2 -höz képest egy kevésbé szigorú, enyhébb, de megbízhatóbb elutasítási módszert kaptam. Ésszerű továbbá, hogy a BCBS ezen utótesztelési módszert választotta az expected shortfall esetén, hiszen a VaR-modell megfelelése szükséges feltétele az ES helytállásának és ezt a módszert már minden pénzügyi intézmény megfelelően implementálta saját rendszerében.

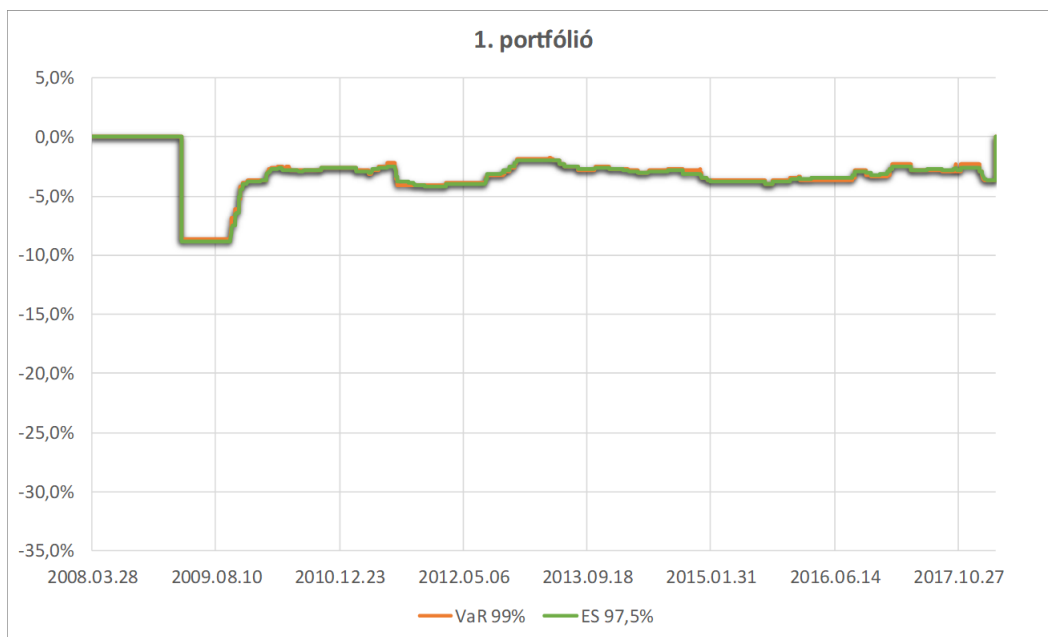
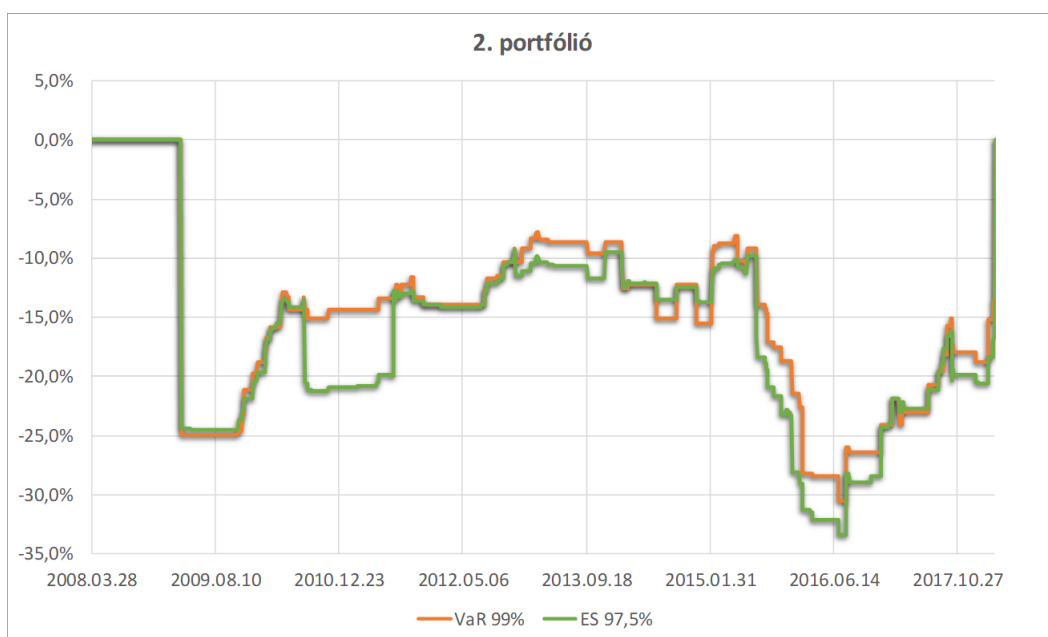
FÜGGELÉK A. ÁBRÁK ÉS TÁBLÁZATOK



18. ábra. Az 1. portfólióban lévő 6 részvény loghozamainak kvantilis-kvantilis ábrája

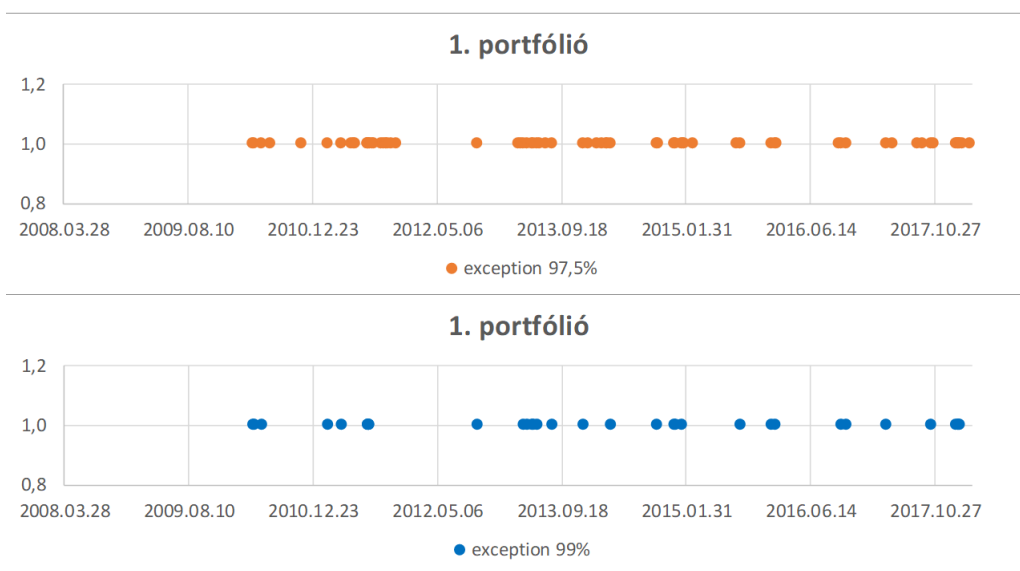


19. ábra. A 2. portfólióban lévő 6 részvény loghozamainak kvantilis-kvantilis ábrája

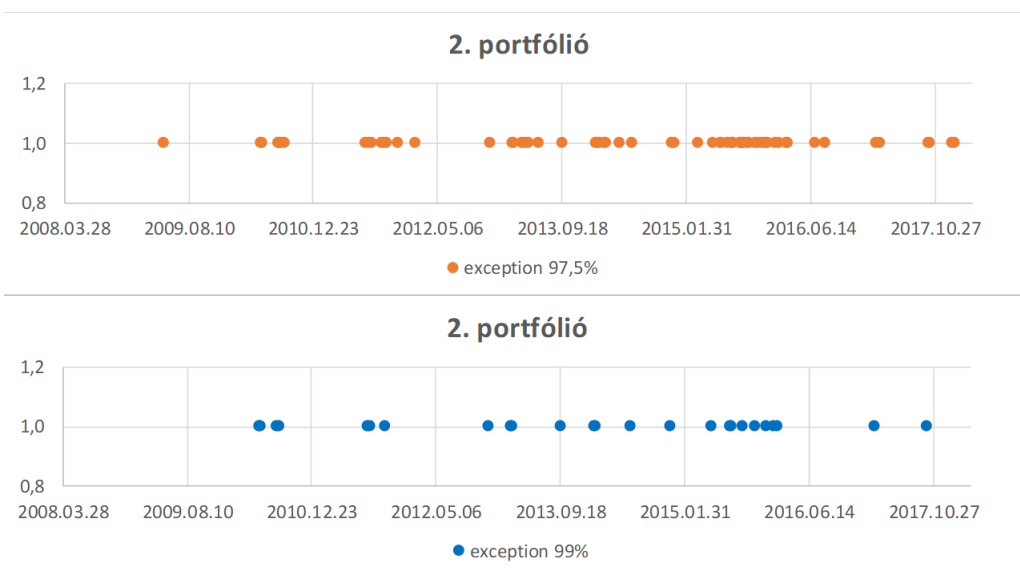
20. ábra. Az 1. portfólió esetén számolt $VaR_{99\%}$ és $ES_{97,5\%}$ 21. ábra. A 2. portfólió esetén számolt $VaR_{99\%}$ és $ES_{97,5\%}$

átlépések		97,50%	99%	97,50%	99%	97,50%	99%	átlépések	97,50%	99%	97,50%	99%	97,50%	99%
száma	felső határ		alsó határ		Kupiec			száma	felső határ		alsó határ		Kupiec	
1	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	104,6661	37,3065		41	0,9884	0,0003	0,0170	0,9998	4,9125	12,0775
2	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	97,3147	31,8182		42	0,9830	0,0002	0,0243	0,9999	4,2755	13,3036
3	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	91,0107	27,3773		43	0,9757	0,0001	0,0340	1,0000	3,6870	14,5783
4	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	85,3872	23,6169		44	0,9660	0,0000	0,0466	1,0000	3,1459	15,9003
5	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	80,2698	20,3627		45	0,9534	0,0000	0,0625	1,0000	2,6512	17,2687
6	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	75,5561	17,5121		46	0,9375	0,0000	0,0823	1,0000	2,2018	18,6825
7	1,0000	1,0000	0,0000	0,0001	71,1782	14,9973		47	0,9177	0,0000	0,1062	1,0000	1,7968	20,1406
8	1,0000	0,9999	0,0000	0,0004	67,0879	12,7701		48	0,8938	0,0000	0,1345	1,0000	1,4353	21,6422
9	1,0000	0,9996	0,0000	0,0010	63,2490	10,7944		49	0,8655	0,0000	0,1674	1,0000	1,1164	23,1863
10	1,0000	0,9990	0,0000	0,0023	59,6338	9,0422		50	0,8326	0,0000	0,2049	1,0000	0,8391	24,7722
11	1,0000	0,9977	0,0000	0,0051	56,2198	7,4913		51	0,7951	0,0000	0,2466	1,0000	0,6028	26,3990
12	1,0000	0,9949	0,0000	0,0105	52,9887	6,1234		52	0,7534	0,0000	0,2922	1,0000	0,4066	28,0659
13	1,0000	0,9895	0,0000	0,0199	49,9254	4,9232		53	0,7078	0,0000	0,3411	1,0000	0,2497	29,7722
14	1,0000	0,9801	0,0000	0,0352	47,0170	3,8779		54	0,6589	0,0000	0,3924	1,0000	0,1315	31,5171
15	1,0000	0,9648	0,0000	0,0584	44,2524	2,9764		55	0,6076	0,0000	0,4454	1,0000	0,0513	33,3000
16	1,0000	0,9416	0,0000	0,0914	41,6221	2,2093		56	0,5546	0,0000	0,4991	1,0000	0,0083	35,1201
17	1,0000	0,9086	0,0000	0,1355	39,1179	1,5681		57	0,5009	0,0000	0,5525	1,0000	0,0019	36,9768
18	1,0000	0,8645	0,0000	0,1912	36,7322	1,0456		58	0,4475	0,0000	0,6047	1,0000	0,0315	38,8696
19	1,0000	0,8088	0,0000	0,2579	34,4586	0,6351		59	0,3953	0,0000	0,6548	1,0000	0,0965	40,7977
20	1,0000	0,7421	0,0000	0,3335	32,2912	0,3308		60	0,3452	0,0000	0,7020	1,0000	0,1964	42,7606
21	1,0000	0,6665	0,0000	0,4152	30,2247	0,1274		61	0,2980	0,0000	0,7458	1,0000	0,3304	44,7578
22	1,0000	0,5848	0,0000	0,4995	28,2544	0,0202		62	0,2542	0,0000	0,7858	1,0000	0,4982	46,7887
23	1,0000	0,5005	0,0000	0,5826	26,3759	0,0048		63	0,2142	0,0000	0,8217	1,0000	0,6991	48,8527
24	1,0000	0,4174	0,0000	0,6611	24,5853	0,0773		64	0,1783	0,0000	0,8534	1,0000	0,9327	50,9494
25	1,0000	0,3389	0,0000	0,7322	22,8789	0,2341		65	0,1466	0,0000	0,8810	1,0000	1,1984	53,0783
26	1,0000	0,2678	0,0000	0,7942	21,2534	0,4718		66	0,1190	0,0000	0,9045	1,0000	1,4958	55,2388
27	1,0000	0,2058	0,0000	0,8461	19,7058	0,7873		67	0,0955	0,0000	0,9244	1,0000	1,8245	57,4305
28	1,0000	0,1539	0,0000	0,8881	18,2332	1,1777		68	0,0756	0,0000	0,9408	1,0000	2,1839	59,6531
29	1,0000	0,1119	0,0000	0,9209	16,8329	1,6406		69	0,0592	0,0000	0,9543	1,0000	2,5736	61,9059
30	1,0000	0,0791	0,0001	0,9455	15,5025	2,1733		70	0,0457	0,0000	0,9651	1,0000	2,9932	64,1886
31	0,9999	0,0545	0,0001	0,9635	14,2396	2,7735		71	0,0349	0,0000	0,9737	1,0000	3,4423	66,5008
32	0,9999	0,0365	0,0002	0,9762	13,0422	3,4392		72	0,0263	0,0000	0,9804	1,0000	3,9204	68,8421
33	0,9998	0,0238	0,0004	0,9849	11,9082	4,1683		73	0,0196	0,0000	0,9856	1,0000	4,4273	71,2121
34	0,9996	0,0151	0,0007	0,9906	10,8357	4,9589		74	0,0144	0,0000	0,9895	1,0000	4,9625	73,6104
35	0,9993	0,0094	0,0012	0,9943	9,8229	5,8093		75	0,0105	0,0000	0,9925	1,0000	5,5256	76,0366
36	0,9988	0,0057	0,0020	0,9967	8,8682	6,7176		76	0,0075	0,0000	0,9947	1,0000	6,1163	78,4904
37	0,9980	0,0033	0,0032	0,9981	7,9699	7,6825		77	0,0053	0,0000	0,9963	1,0000	6,7342	80,9714
38	0,9968	0,0019	0,0051	0,9989	7,1266	8,7023		78	0,0037	0,0000	0,9974	1,0000	7,3790	83,4794
39	0,9949	0,0011	0,0078	0,9994	6,3368	9,7756		79	0,0026	0,0000	0,9982	1,0000	8,0504	86,0138
40	0,9922	0,0006	0,0116	0,9997	5,5992	10,9011		80	0,0018	0,0000	0,9988	1,0000	8,7480	88,5746

22. ábra. A VaR-átlépések számához tartozó valószínűségek és a Kupiec-teszt értéke



23. ábra. A VaR-átlépések eloszlása az 1. portfólió esetén



24. ábra. A VaR-átlépések eloszlása a 2. portfólió esetén

periódus	T	1- α	átlépések	felső határ	alsó határ	Kupiec
2	1133	2,5%	1	1,0000	0,0000	48,6329
			2	1,0000	0,0000	42,6700
			3	1,0000	0,0000	37,7554
			4	1,0000	0,0000	33,5221
			5	1,0000	0,0000	29,7960
			6	1,0000	0,0000	26,4743
			7	1,0000	0,0000	23,4894
			8	1,0000	0,0000	20,7928
			9	1,0000	0,0000	18,3487
			10	1,0000	0,0001	16,1291
			11	0,9999	0,0002	14,1116
			12	0,9998	0,0004	12,2780
			13	0,9996	0,0010	10,6129
			14	0,9990	0,0021	9,1037
			15	0,9979	0,0042	7,7393
			16	0,9958	0,0081	6,5100
			17	0,9919	0,0146	5,4076
			18	0,9854	0,0249	4,4248
			19	0,9751	0,0404	3,5549
			20	0,9596	0,0626	2,7921
			21	0,9374	0,0928	2,1311
			22	0,9072	0,1319	1,5672
			23	0,8681	0,1803	1,0961
			24	0,8197	0,2377	0,7137
			25	0,7623	0,3030	0,4165
			26	0,6970	0,3743	0,2012
			27	0,6257	0,4493	0,0646
			28	0,5507	0,5253	0,0038
			29	0,4747	0,5995	0,0164
			30	0,4005	0,6696	0,0997
			31	0,3304	0,7335	0,2515
			32	0,2665	0,7899	0,4697
			33	0,2101	0,8382	0,7522
			34	0,1618	0,8782	1,0971
			35	0,1218	0,9104	1,5026
			36	0,0896	0,9356	1,9672
			37	0,0644	0,9548	2,4891
			38	0,0452	0,9690	3,0669
			39	0,0310	0,9792	3,6992
			40	0,0208	0,9863	4,3846

25. ábra. A VaR-átlépések számához tartozó valószínűségek és a Kupiec-teszt értéke, $T = 1133$

periódus	T	1- α	átlépések	felső határ	alsó határ	Kupiec
3	755	2,5%	1	1,0000	0,0000	30,3049
			2	1,0000	0,0000	25,1552
			3	1,0000	0,0000	21,0546
			4	1,0000	0,0000	17,6362
			5	1,0000	0,0001	14,7259
			6	0,9999	0,0005	12,2209
			7	0,9995	0,0015	10,0535
			8	0,9985	0,0038	8,1755
			9	0,9962	0,0089	6,5508
			10	0,9911	0,0184	5,1515
			11	0,9816	0,0351	3,9552
			12	0,9649	0,0615	2,9437
			13	0,9385	0,1003	2,1017
			14	0,8997	0,1530	1,4163
			15	0,8470	0,2198	0,8767
			16	0,7802	0,2989	0,4732
			17	0,7011	0,3871	0,1975
			18	0,6129	0,4799	0,0422
			19	0,5201	0,5721	0,0008
			20	0,4279	0,6592	0,0675
			21	0,3408	0,7373	0,2369
			22	0,2627	0,8041	0,5043
			23	0,1959	0,8588	0,8653
			24	0,1412	0,9015	1,3161
			25	0,0985	0,9335	1,8530
			26	0,0665	0,9565	2,4726
			27	0,0435	0,9725	3,1719
			28	0,0275	0,9831	3,9481
			29	0,0169	0,9900	4,7984
			30	0,0100	0,9942	5,7205

26. ábra. A VaR-átlépések számához tartozó valószínűségek és a Kupiec-teszt értéke, $T = 755$

periódus	T	1- α	átlépések	felső határ	alsó határ	Kupiec
4	566	2,5%	1	1,0000	0,0000	21,3115
			2	1,0000	0,0001	16,7393
			3	0,9999	0,0004	13,2172
			4	0,9996	0,0015	10,3782
			5	0,9985	0,0046	8,0481
			6	0,9954	0,0122	6,1243
			7	0,9878	0,0277	4,5390
			8	0,9723	0,0554	3,2439
			9	0,9446	0,0996	2,2031
			10	0,9004	0,1626	1,3885
			11	0,8374	0,2443	0,7779
			12	0,7557	0,3412	0,3530
			13	0,6588	0,4471	0,0985
			14	0,5529	0,5543	0,0016
			15	0,4457	0,6555	0,0514
			16	0,3445	0,7449	0,2382
			17	0,2551	0,8190	0,5537
			18	0,1810	0,8770	0,9906
			19	0,1230	0,9198	1,5423
			20	0,0802	0,9499	2,2029
			21	0,0501	0,9699	2,9673
			22	0,0301	0,9827	3,8306
			23	0,0173	0,9904	4,7886
			24	0,0096	0,9949	5,8372
			25	0,0051	0,9974	6,9728

27. ábra. A VaR-átlépések számához tartozó valószínűségek és a Kupiec-teszt értéke, $T = 566$

periódus	T	1- α	átlépések	felső határ	alsó határ	Kupiec
5	452	2,5%	1	1,0000	0,0001	15,9893
			2	0,9999	0,0009	11,8683
			3	0,9991	0,0036	8,7982
			4	0,9964	0,0116	6,4122
			5	0,9884	0,0298	4,5360
			6	0,9702	0,0647	3,0670
			7	0,9353	0,1217	1,9373
			8	0,8783	0,2030	1,0989
			9	0,7970	0,3059	0,5156
			10	0,6941	0,4227	0,1595
			11	0,5773	0,5431	0,0082
			12	0,4569	0,6565	0,0436
			13	0,3435	0,7549	0,2504
			14	0,2451	0,8340	0,6157
			15	0,1660	0,8933	1,1286
			16	0,1067	0,9348	1,7795
			17	0,0652	0,9621	2,5600
			18	0,0379	0,9790	3,4629
			19	0,0210	0,9889	4,4815
			20	0,0111	0,9944	5,6101

28. ábra. A VaR-átlépések számához tartozó valószínűségek és a Kupiec-teszt értéke, $T = 452$

HIVATKOZÁSOK

- [1] Acerbi, C., Nordio, C. and Sirtori, C. *Expected Shortfall as a tool for financial risk management*, arXiv preprint cond-mat/0102304, 2001.
- [2] Acerbi, C. and Szekely, B. *Back-testing expected shortfall*, Risk, vol. 76, Incisive Media Limited, 2014.
- [3] Acerbi, C. and Szekely, B. *General properties of backtestable statistics*, 2017.
- [4] Acerbi, C. and Tasche, D. *On the coherence of expected shortfall*, Journal of Banking & Finance, Elsevier, 2002.
- [5] Basel Committee on Banking Supervision, *International convergence of capital measurement and capital standards*, 1988.
- [6] Basel Committee on Banking Supervision, *Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework*, 2004.
- [7] Basel Committee on Banking Supervision, *Revisions to the Basel II market risk framework - final version*, 2009.
- [8] Basel Committee on Banking Supervision, *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*, 2010.
- [9] Basel Committee on Banking Supervision, *Fundamental review of the trading book - consultative document*, 2012.
- [10] Basel Committee on Banking Supervision, *Fundamental review of the trading book - second consultative document*, 2013.
- [11] Basel Committee on Banking Supervision, *Fundamental review of the trading book: outstanding issues - consultative document*, 2014.
- [12] Basel Committee on Banking Supervision, *Minimum capital requirements for market risk*, 2016.
- [13] Basel Committee on Banking Supervision, *Basel III: Finalising post-crisis reforms*, 2017.
- [14] Basel Committee on Banking Supervision, *High-level summary of Basel III reforms*, 2017.
- [15] Basel Committee on Banking Supervision, *Revisions to the minimum capital requirements for market risk*, 2018.
- [16] Berkowitz, J., *Testing density forecasts, with applications to risk management*, Journal of Business & Economic Statistics, 19(4), 465-474, 2001.
- [17] Bugár, Gy. és Uzsocki, M., *Befektetések kockázatának mérése*, Statisztikai Szemle, 84(9), 2006.
- [18] Csóka, P., *Koherens kockázatomérés és tőkeallokáció= Coherent risk measurement and capital allocation*, Közgazdasági Szemle, 50(10), 855-880, 2003.
- [19] Dömötör, B., Miskó J., *A piaci kockázat tőkekövetelményének szabályozása*, Gazdaság és Pénzügy 3.3: 188-210, 2016.
- [20] Embrechts, P., Frey, R. and McNeil, A., *Quantitative risk management*, Princeton Series in Finance, Princeton 10.4 (2005).
- [21] Fissler, T. and Ziegel, J. and Gneiting, T. *Expected Shortfall is jointly elicitable with Value at Risk - Implications for backtesting*, arXiv preprint arXiv:1507.00244, 2015.
- [22] Gáll, J. és Pap, Gy. *Bevezetés a pénzügyi matematikába*, Szegedi Egyetemi Kiadó, 2010.
- [23] Gneiting, T. *Making and evaluating point forecasts*, Journal of the American Statistical Association, 106.494: 746-762, 2011.
- [24] Hull, J. *Options, Futures and Other Derivatives*, Pearson/Prentice Hall, 2009.
- [25] Hull, J. *Risk management and financial institutions*, vol. 733, John Wiley & Sons, 2012.
- [26] Jorion, P. *Value at Risk*, 1999.
- [27] Jorion, P. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, 2006.
- [28] Joshi, M. S., & Paterson, J. M., *Introduction to mathematical portfolio theory*, Cambridge University Press, 2013.
- [29] Miskolczi, P., *A value at risk és az expected shortfall összehasonlítása történeti szimuláció segítségével*, vol. 22, Szigma Matematikai-közgazdasági folyóirat, MTA Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottság, 2016.
- [30] Markowitz, H., *Portfolio selection*, The journal of finance, 7(1), 77-91, 1952.
- [31] <https://www.forbes.com>
- [32] <http://www.thestreet.com>
- [33] <http://www.finance.yahoo.com>