Eötvös Loránd Tudományegyetem
Budapesti Corvinus Egyetem

Nász Tünde

A Kelly kritérium elemzése

Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak
Kvantitatív pénzügyek szakirány

Témavezető:

Bihary Zsolt

Befektetések és Vállalati Pénzügyek Tanszék

Budapest, 2018

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Bihary Zsoltnak a lelkesítésért, a számtalan hasznos tanácsért és a rengeteg eredményes konzultációért. Szakértelmével hatalmas segítséget nyújtott a szakdolgozat elkészülésében.

Hálával tartozom továbbá szüleimnek és testvéremnek, akik tanulmányaim során türelemmel és megértéssel támogattak, valamint minden helyzetben mellettem álltak.

Budapest, 2018. május 9.

Nász Tünde

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Befektetések, illetve szerencsejátékok során, legyen szó akár blackjack-ről, sportfogadásokról vagy részvénypiacról, mindig lennie kell egy **tét**nek. Ezen befektetett/kockáztatott mennyiség meghatározása az egyik legmérvadóbb döntés lehet. Természetesen senki sem szeretne sokat veszíteni, ellenben nyerni annál többet. John Larry Kelly Jr. 1956-os cikke áttörést jelentett erre a problémára.

A méltán híres **Kelly kritérium** szerint amennyiben a fogadónak nagyobb a valószínűsége arra, hogy a csapata nyer, akkor nagyobb tétet kockáztat, amennyiben a bukás kockázata valószínűbb, akkor kisebb összeggel próbálkozik, ha egyáltalán próbálkozik. A befektetett tőke arányát (a vagyon figyelembevételével) úgy kell kiszámolni, hogy a hosszabb távon bekövetkező nyereség minél nagyobb legyen. Ezt pedig a Kelly által létrehozott matematikai képlet segítségével tudjuk megtenni. Ám ezen képlet feltételezi az esélyek és szorzók pontos ismeretét. Mi történik olyankor, ha egy fogadó nem rendelkezik a nyerési valószínűségek pontos ismeretével?

Szakdolgozatom célja, hogy megvizsgáljam a **bizonytalansági paraméter** jelenlétét a Kelly stratégiában, és bemutassam az ezen kérdéshez vezető mérvadó cikkek eredményeit. A diplomamunka első részében számos igazán értékes munkát ismertetek az olvasóval, mint például az eredeti, Kelly által írt cikket [Kelly, 1956], Medo és társai felvetését a korlátos információval kapcsolatban [Medo, 2008], valamint a szakdolgozat alapját képező, Baker és McHale által megírt bizonytalansági paraméterre vonatkozó munkásságukat [Baker, 2013].

A diplomamunka második felében a bizonytalansági paraméter jelenlétével, valamint a megismert **zsugorítási faktor** segítségével átültetem a cikkben kapott stratégiát a részvénypiacra, specializálódva a Bitcoin és S&P500 részvények vizsgálatára.

2. A Kelly kritérium ismertetése

A Kelly kritérium egy erőteljes eszköz mindazon döntéshozók számára a szerencsejáték, illetve befektetési világból, akik arra keresnek választ, hogy mekkora tétet szükséges kockáztatniuk a hosszútávú növekedési ráta maximalizálásának szempontjából. J. L. Kelly 1956-ban megírt cikke az első expliciten megfogalmazott szakirodalom a Kelly stratégia bemutatására [Kelly, 1956]. Az író egy, a valós életből kiragadott szituáció által mutatja be az általa felvetett kommunikációs problémát, és annak megoldását.

Először azt az esetet vizsgálja, amikor egy zajmentes, bináris csatorna van, amelyen például egy baseball meccs sorozat eredményei továbbítódnak két egyenlő csapatról, még azelőtt, hogy ez mindenki számára ismert lenne. A nyereség, amelyet az erre kötött fogadásokból szerezhetne csak attól függ, mekkora téttel hajlandó játszani. Mekkora téttel kellene részt vennie a fogadásban? Nyilván, amekkorával csak tud, hiszen (az eredmények ismeretében) minden bizonyossággal nyerni fog. Ez a legegyszerűbb (dupla vagy semmi) játék sémája, ahol annak a valószínűsége, hogy az információ helyes 1. Ekkor a tőkéje exponenciálisan növekedne, és N fogadás után 2^N-szeresére változna a vagyona. Az értékalakulását jól jellemzi a következő mennyiség:

2.1. Definíció. (Hosszútávú növekedési ráta)

$$G = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log_2 \frac{V_N}{V_0}, \tag{2.1}$$

ahol V_N a fogadó vagyona N kör után, V_0 pedig a kezdőtőkéje.

Az előbb vizsgált esetben $G = 1$.

Legyen most adott egy zajos csatorna, ahol a kapott információ helyességének valószínűsége p, a hibavalószínűség pedig $(1-p)$. Ebben az esetben is fogadhat a rendelkezésre álló vagyona teljes egészével, sőt ez maximalizálná is a tőke $\mathbb{E}(V_N)$ várható értékét, amely az alábbiak szerint alakulna:

$$\mathbb{E}(V_N) = (2p)^N V_0. \tag{2.2}$$

Viszont abban az esetben, ha N túl nagy, már 1 valószínűséggel csődbe mennénk, hiszen

$$\lim_{N\to\infty} P(\exists 1 \le i \le N : \chi_i = -1) = \lim_{N\to\infty} (1 - P(\forall 1 \le i \le N : \chi_i = 1)) = \lim_{N\to\infty} (1 - p^N) = 1, \tag{2.3}$$

ahol χ olyan valószínűségi változó, amely 1-et vesz fel, ha az i. körben kapott információ helyes, és -1-et, ha az i. lépésben ellentétesen alakul a fogadás eredménye. Ehelyett inkább tegyük fel, hogy a tőkéjének csak egy f hányadával fogad. Ekkor

$$V_N = (1+f)^W (1-f)^L V_0, \tag{2.4}$$

ahol W jelöli a nyereségek számát, L pedig a veszteségekét N fogadásban. Így

$$\begin{aligned} G &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log_2 \frac{V_0 * (1+f)^W * (1-f)^L}{V_0} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{W}{N} \log_2(1+f) + \frac{L}{N} \log_2(1-f) \right] \\ &= p \log_2(1+f) + (1-p) \log_2(1-f), \end{aligned} \tag{2.5}$$

ahol a nagy számok erős törvényéből következően $\lim_{N\to\infty} \frac{W}{N} = p$ 1 valószínűséggel. Ha ezt f szerint deriváljuk, majd nullával egyenlővé tesszük és a függvény szigorú konvexitását is belátjuk, a második derivált segítségével megkapjuk a **Kelly kritériumot**

$$f^* = 2p - 1 \tag{2.6}$$

alakban. A célfüggvény optimális értéke pedig

$$G_{max} = 1 + p \log p + q \log q = R, \tag{2.7}$$

ahol R a Shannon által definiált transzmissziós ráta [Shannon 1948].
$R = H(X) - H(X/Y)$, mint a G_{max} növekedése a kommunikációs csatorna következtében, ahol X a csatorna inputja, Y az outputja, $H(X)$ az input entrópiája, $H(X/Y)$ pedig az input átlagos entrópiája, feltéve, hogy ismerjük az outputot. Tehát annál nagyobb a hosszútávú növekedési ráta, minél több információt tartalmaz a hozzánk jutott tipp (output) a zajos csatornán keresztül a fogadás kimeneteléről (input).

3. A diverzifikáció és a korlátos információ hatása

A portfólió optimalizálás egy kulcsfontosságú témája a pénzügyi világnak. Ez leírható úgy, mint egy kompromisszum keresése a befektető tőkéjének maximalizálása és a vállalt kockázat minimalizálása között. Az eredmények a befektető kockázatvállalásától és a befektetési lehetőség tulajdonságaitól függenek, valamint döntő szerepe van az optimalizálási cél kiválasztásának is.

Bár a szakdolgozatban nem foglalkoztam a diverzifikáció hatásával a Kelly kritériumban, mégis érdemesnek találom bemutatni a következőkben ismertetett cikk által leírt eredményeket ezen a területen.

Vegyük az esetet, amikor ismétlődő befektetések vannak hosszútávon. Mint egy optimális kritérium, az átlagos hosszútávú növekedési ráta maximalizálása javasolt. Medo, Pis'mak és Zhang általánosították a Kelly stratégiát diverzifikált befektetésekre, majd ennek és a korlátos információnak megvizsgálták a hatását a befektetés teljesítményén [Medo, 2008].

3.1. Diverzifikáció

Legyen M darab független, kockázatos játék, amelyeket egyidejűleg játszhatunk minden fordulóban. Az i. játékban a befektető vagyonának f_i hányadát kockáztatja. Feltesszük, hogy a játékok tulajdonságai időben nem változnak, valamint a befektetési hányad is konstans. Legyen R_i az alábbi változó:

$$R_i = \frac{W_r - W_i}{W_i 0,} \tag{3.8}$$

ahol W_r az i. játék utáni vagyon, W_i pedig az i. körben befektetett mennyiség.

Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy minden játék azonos, tehát p valószínűséggel $R_i = 1$, és $(1-p)$ valószínűséggel $R_i = -1$. Így az optimális hányados is azonos, és a befektetés optimalizálási feladat egy egyváltozós probléma, ahol $f_i = f$.

Annak a valószínűsége, hogy egyetlen forduló alatt az összes játék veszteséges $(1-p)^M$. Ekkor minden $p < 1$ esetén az optimális f^* befektetési hányados kisebb, mint $1/M$, és így $Mf^* < 1$ (máskülönben a játékos a csődbemenést kockáztatja, és a bekövetkezés esélye az 1-hez konvergál hosszútávon). Ha egy fordulóban W nyertes és $M-W$ vesztes játék van, akkor a befektetés hozama $(2W-M)f$, és a befektető vagyon $(1+(2W-M)f)$-szeresére változik. Tehát a hosszútávú növekedési ráta

$$G = \sum_{W=0}^{M} P(W;M,p)\ln[1+(2W-M)f], \tag{3.9}$$

ahol $P(W;M,p) = \binom{M}{W} p^W (1-p)^{M-W}$ a binomiális eloszlás. A $\frac{\partial G}{\partial f} = 0$ egyenlet megoldásával megkapjuk az optimális f^* befektetési hányadot.
Ha $2W - M = \frac{f(2W-M)+1-1}{f}$, és normáljuk $P(W;M,p)$-t, akkor egyszerűsíthetjük a kapott egyenletet a következő alakra:

$$\sum_{W=0}^{M} \frac{P(W;M,p)}{1+(2W-M)f} = 1. \tag{3.10}$$

$M = 1$-re a jól ismert $f^* = 2p-1$ eredményt kapjuk. $M \geq 5$ esetben sajnos már nem ad elég jó közelítést a fenti egyenlet.

3.2. Limitált információ

A valóságban a befektetőknek csak korlátozott mennyiségű információ áll rendelkezésükre az elérhető játékok nyerési valószínűségeiről. Becsülhetőek ugyan múltbéli adatokra támaszkodva, ám ezek az eredmények zajosak. Ugyanakkor a belsős információ jelentősen megnövelheti a befektetés teljesítményét.

Tekintsünk most két játékost, egy bennfentest és egy kívülállót, akik részt vehetnek a játékokban. Minden játéknak van egy $p+\Delta$ és $p-\Delta$ közt változó nyerési valószínűsége ($\frac{1}{2} < p < 1, 0 \leq \Delta \leq 1-p$). A bennfentes egyetlen játékra koncentrál, célja, hogy minél több információt nyerjen, valamint feltesszük, hogy számára pontosan ismert a nyerési valószínűség. A kívülálló számos játékba fektet, de csak az átlagos p ismert számára. A bennfentes a nyerési valószínűség pontos ismeretében befektet az $f_K(p) = 2p-1$ egyenlet szerint. Ha $p - \Delta > \frac{1}{2}$, akkor minden körben befektet, ha $p - \Delta \leq \frac{1}{2}$, akkor csak abban az esetben, amikor a nyerési valószínűség $p+\Delta$. Ezekből a bennfentes hosszútávú növekedési rátája egyszerűsíthető

$$G_I = \begin{cases} \frac{1}{2}[\ln 2 + S(p+\Delta)], & \text{ha } p-\Delta \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}[\ln 2 + S(p+\Delta)] + \frac{1}{2}[\ln 2 + S(p-\Delta)], & \text{ha } p-\Delta > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.11}$$

ahol $S(p-\Delta) = -[(p-\Delta)\ln(p-\Delta) + (1-(p-\Delta))\ln(1-(p-\Delta))]$, $S(p+\Delta)$ pedig az előzőekhez hasonlóan konstruálható.

Tegyük fel, hogy a kívülálló M azonos, független játékban vesz részt. Számára minden kockázatos játék leírható egy átlagos p nyerési valószínűséggel. A hosszútávú növekedési rátája ekkor megegyezik a (3.9) egyenlettel, valamint az optimális befektetési hányadosa is látható az előzőek alapján. A delta korlátozó értéke, azaz amikor a bennfentes jobban teljesít, mint a kívülálló, adott

$$G_I(p,\Delta) = G_O(p,M). \tag{3.12}$$

Ezen formula alapján lehetetlen találni analitikus kifejezést deltára, egy közelítő megoldás ugyan megkapható, ha növeljük $G_I(p,\Delta)$ értékét deltában. Ezen kiterjesztés első feltételének formulája:

$$G_I(p,\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[G_K(p) + \Delta(\ln p - \ln(1-p)) + \frac{\Delta^2}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right)\right], & \text{ha } p-\Delta \leq \frac{1}{2} \\ G_K(p) + \frac{\Delta^2}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} + \frac{\Delta^4}{12}\left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{(1-p)^3}\right)\right), & \text{ha } p-\Delta > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.13}$$

Behelyettesítve ezt a (3.11)-es egyenletbe egy másodfokú (ha $p-\Delta \leq \frac{1}{2}$), illetve egy negyedfokú (ha $p-\Delta > \frac{1}{2}$) egyenletet kapunk deltára, amely már megoldható analitikus. Így kapjuk, hogy ha $\Delta < \Delta(p,M)$, akkor a kívülálló jobban teljesít, mint a bennfentes.

4. Bizonytalansági paraméter jelenléte

4.1. Általános tudnivalók

Az eredeti Kelly stratégia feltételezi a nyerési valószínűségek ismeretét, de előfordul, hogy ezen tudás nincs a birtokunkban. Az előzőekben már láthattuk, hogy bizony a korlátos információ komoly hatással lehet a kritériumra. Ráadásul számos tapasztalt szerencsejátékos állítja, hogy az eredeti kritérium túl magas, és gyakran vezet pénzügyi veszteséghez [Murphy, 2015].
Ebben a fejezetben ismertetjük azt az esetet, amikor valamiképp javítani szeretnénk a Kelly formulán a bizonytalanság figyelembevételével. Rose D. Baker és Ian G. McHale 2013-as cikke egy igazán friss és érdekfeszítő munka ezen a területen, így az alábbiakban az ezzel kapcsolatos munkásságukat szeretném részletesen ismertetni [Baker, Mchale, 2013].

Általában, ha egy nyerés hasznossága u_w, a veszteségé pedig u_l, akkor adott p nyerési valószínűség mellett a várható hasznosság felírható, mint

$$pu_w + (1-)u_l.$$

Abban az esetben, ha p nem ismert, a Bayes-i közelítés ajánl egy a priori eloszlást, amely megtestesíti az elképzelésünket p értékéről. Ekkor a várható hasznosság

$$E(p)u_w + (1 - E(p))u_l,$$

a korábbi eloszlásból átvett elvárásokkal. Mivel a hasznosság lineáris p-ben, így a várható hasznosság csak $E(p)$ függvénye, és ekkor a hagyományos hasznosságmaximalizálás kihagyja a bizonytalanságot p-ben.

A bizonytalanság problémát okoz olyan esetekben, amikor egy döntésváltozó szerint maximalizáljuk a hasznosságot, mint például, hogy a vagyon mekkora hányadát érdemes kockáztatni egy adott eseményen. A döntésváltozó bármely értékére kiszámolt $u(s)$ hasznosság lehet torzítatlan becslése a valós, elvárt hasznosságnak. Habár a kiszámított és maximalizált $u(s^*(\hat{p}))$ elvárt hasznosság, ahol $s^*(\hat{p})$ a fogadó optimum értéke s-re, nem lesz torzítatlan becslése az out-of-sample maximalizált elvárt hasznosságnak, sőt gyakran felső becslést ad, ahogy ezt majd a későbbiekben látni fogjuk. A problémánk pedig a következő: hogyan tudjuk javítani az $s^*(\hat{p})$ döntésváltozó optimum out-of-sample értékét, ha tudásunk bizonytalan a p valószínűségről?

Be szeretnénk látni, hogy a Kelly kritérium során használt logaritmikus hasznosságfüggvény esetében (a bizonytalansági paraméter figyelembevételével) a fogadás kívánt átskálázása mindig a méret csökkentése lesz (zsugorítás), és ez igaz lesz egyéb hasznosságfüggvények esetében is, bár ritka esetekben, az igazán kedvező odds jelenlétében a fogadási méret növekedhet is. Az optimális zsugorítás mértéke természetesen függ a bizonytalanság mértékétől.

A Kelly kritériumhoz köthető irodalom csak egy nagyon kis része foglalkozik a bizonytalan valószínűségek problémájával, bár javasolt, hogy a nyerési valószínűség pontatlan ismerete mellett csökkenteni érdemes a tétet. Számos fogadó alkalmazza az úgynevezett „fél-Kelly" módszert, amikor is kiszámítják a Kelly optimumot, majd elfelezik azt. A részleges Kelly stratégiák alapja az, hogy a való életben van egy minimális fogadási összeg. Tehát még óvatosabbnak kell lennünk, hiszen a vagyonunk nem végtelenül osztható, és a tönkremenés is lehetséges.

4.2. Átskálázás

Legyen egy előforduló esemény valószínűsége p, és tegyük fel, hogy a p egy q (amennyiben véletlen változó, akkor Q) becslésének mintavételi eloszlása $f(q)$, mely p várható értékkel és σ^2 varianciával rendelkezik. Amennyiben p ismert, használva egy logaritmikus hasznosságfüggvényt, az elvárt hasznosság maximalizálása:

$$E(u(s)) = p(\ln(1+bs)) + (1-p)\ln(1-s),$$

ahol b a bukméker által ajánlott tört odds, tehát a fogadó egy sikeres fogadás során a tét b egységnyi részét kapja, mint profit. Ekkor az optimális hányada a vagyonnak, amelyet befektetünk:

$$s^*(p) = \frac{(b+1)p-1}{b},$$

amely éppen a Kelly formula. Ha Q becslése lenne p-nek, akkor az optimum tét $s^*(Q)$ lenne, és így a várható, maximalizált hasznosság a következő:

$$E(u^*) = \int_0^1 f(q)\{p\ln(1+bs^*(q)) + (1-p)\ln(1-s^*(q))\}\,dq. \tag{4.14}$$

Az $E(u^*)$ hasznosság némiképp alacsonyabb lesz, mint a maximalizált hasznosság naiv becslése, mivel az integrandus maximalizálható az $s^*(q) = s^*(p)$ beállítással, abban az esetben, amikor $E(u^*)$ csökkentené a várható hasznosság naiv becslését, tehát

$$p\ln(1+bs^*(p)) + (1-p)\ln(1-s^*(p)).$$

A probléma tehát jól látható: amikor p nem ismert pontosan, a várható nyereség alacsonyabb lesz, mint azt az elvárt hozam maximalizációja sugallja.

Arra törekszünk, hogy növeljük a várható hasznosságot a tét újraskálázásával, tehát az $s^*(Q)$ Kelly érték helyett $ks^*(Q)$ használatát vezetjük be. Ekkor a várható hasznosság az alábbiak szerint alakul:

$$E(u^*) = \int_0^1 f(q)\{p\ln(1+bks^*(q)) + (1-p)\ln(1-ks^*(q))\}\,dq. \tag{4.15}$$

Némi hanyagsággal a továbbiakban is $E(u^*)$ jelöli a k által átskálázott várható, maximalizált hasznosságot.

4.1. Tétel. *Az $E(u^*)$ várható, maximalizált hasznosság növelhető a fogadás méretének zsugorításával.*

Bizonyítás. A fenti állítás bizonyításához belátjuk, hogy $dE(u^*)/dk|_{k=1} < 0$ nem degenerált $f(q)$-ra. Így

$$E(u^*)/dk|_{k=1} = \int_0^1 f(q)s^*(q)\left\{\frac{pb}{1+bs^*(q)} - \frac{1-p}{1-s^*(q)}\right\}dq,$$

amely csökkenti

$$E(u^*)/dk|_{k=1} = 1 - \frac{1}{b+1}E\left\{\frac{p}{Q} + \frac{(1-p)b}{1-Q}\right\}$$

értékét. Mivel $\frac{1}{q}$ és $\frac{1}{1-q}$ konvex függvények, a Jensen-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $E\left(\frac{1}{Q}\right) > \frac{1}{E(Q)}$ és $E\left(\frac{1}{1-Q}\right) > \frac{1}{E(1-Q)}$ (ezeket közvetlenül a Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenségből is származtathatnánk). Ekkor az $E(Q) = p$ adja a kívánt eredményt.

Amikor bizonytalanság van a nyerési valószínűségben, az egyenlőtlenség azonossággá válik. ■

Megmutatható, hogy $d^2E(u^*)/dk^2|_{k=1}$ görbesége negatív, így $dE(u^*)/dk|_{k=0} > 0$, tehát létezik egy egyedi maximum hasznosság $0 < k < 1$-re.

A következő lépés az, hogy találjunk egy optimum értéket a k skálázási paraméterre. Ezen paraméter kielégíti az alábbi egyenletet:

$$dE(u^*)/dk = \int_0^1 f(q)s^*(q)\left\{\frac{pb}{1+bks^*(q)} - \frac{1-p}{1-ks^*(q)}\right\}dq = 0. \tag{4.16}$$

Az optimum k^* érték megtalálható a Newton-Raphson iteráció használatával:

$$k_{n+1} = k_n - \frac{dE(u^*)/dk}{d^2E(u^*)/dk^2}.$$

Ahhoz, hogy ezt az eljárást a gyakorlatban is megvalósíthassuk, szükségünk lesz egy speciális formulára $f(q)$ valószínűségi eloszlásfüggvényhez. Feltesszük, hogy csak a mintavételi eloszlás varianciája adható meg, csak 2 változós eloszlást választhatunk, és így a béta eloszlás a nyilvánvaló választás. Legyen ez az eljárás a *béta eljárás*.

A béta valószínűségi eloszlásfüggvény $f(q) \propto q^{\alpha-1}(1-q)^{\beta-1}$, ahol $\alpha = p\left\{\frac{p(1-p)}{\sigma^2-1}\right\}$, $\beta = (1-p)\left\{\frac{p(1-p)}{\sigma^2-1}\right\}$. A σ maximális értéke elérhető $\frac{1}{2}$-ben, és ez azt is jelenti, hogy a kapott érték egy p valószínűségből egyenlő eséllyel 0 vagy 1. Egy állandó valószínűség eloszlásnál $\alpha = \beta = 1$ és $\sigma = \left(\frac{1}{12}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 0,289$.

k^* első- és másodrendű közelítései kiszámíthatóak, és az elsőrendű közelítés (kis σ esetén) egy egyszerű formula, amely egy ésszerű közelítést ad k-ra.

Bővítve u^*-ot $s^*(p)$-vel kapjuk, hogy

$$E(u^*) = E\left(u\left(s^*(p)\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\partial^2\frac{E(u(x))}{\partial x^2|_{\{x=s^*(p)\}}} \times \int_0^1 (ks^*(q)-s^*(p))^2 f(q)dq + \ldots, \tag{4.17}$$

ahol a kimaradt kifejezés $\frac{\partial E_p(u(x))}{\partial x|_{\{x=s^*(p)\}}} = 0$. Deriválva (4.17)-es egyenletet k szerint, majd egyenlővé téve 0-val kapjuk, hogy az optimum k^* érték

$$k^* = \frac{((b+1)p-1)^2}{((b+1)p-1)^2 + (b+1)^2\sigma^2} = \frac{s^*(p)^2}{s^*(p)^2 + ((b+1)/b)^2\sigma^2}. \tag{4.18}$$

Ebből az egyenletből a „fél-Kelly” eljárás optimális választás lenne ($k = \frac{1}{2}$-re), amikor σ értéke megközelítőleg $\frac{p-1}{1+b}$.

A valóságban nem ismerjük p-t és σ^2-et, csupán csak $\hat{p}$ és $\hat{\sigma}^2$ becsléseink vannak. Az optimális k^* zsugorítási paraméter természetesen csak egy becslése a valóban optimális mennyiségnek. Ám adott, hogy valamekkora zsugorítás szükséges, hogy ezen eljárás jobban szerepeljen, mint a „nyers” Kelly kritérium.

4.3. Néhány komplikáció

Eddig nem vettük figyelembe, hogy negatív tét nem mindig lehetséges a való életben. Ha a (4.14) egyenletben a $Q < \frac{1}{1+b}$, akkor a Kelly megoldás $s^*(Q) < 0$. Lehetséges fogadásokat kötni betting exchange-n keresztül is (csinálunk néhány negatív fogadást, ami lényegében a short-selling). Ezt az esetet vizsgáltuk implicit eddig. Habár, ilyenkor egy versenypályán egyszerűen nem történne fogadás, és így a várható hasznosság 0 lenne. Egy ilyen esetben az $f(q)$ integráljának, például a (4.14)-es egyenletben egy alacsonyabb határa lenne $\frac{1}{1+b}$.

Ha a negatív fogadásokat nem megengedettek, akkor legalább két esetet különböztetünk meg. Az elsőben, amennyiben az odds nem kedvező, tehát $Q < \frac{1}{1+b}$, a fogadó egyszerűen nem fogad. Ez esetben a (4.16)-ban levő integrál alsó határ $\frac{1}{1+b}$-re változik. Egy fogadásban, ahol két játékos közül csak egy nyeri a meccset, és ahol a bukméker b_1, b_2 odds-ot ajánl a két játékosra, ha $Q < \frac{1}{1+b_2}$, akkor a második játékosra érdemes fogadni. Amennyiben az első játékos megjósolt nyerési valószínűsége nő, úgy a második játékosra mégse fogadunk, és helyette az első játékosra történik a fogadás. A (4.16) integrandus eszerint változik. Ha az odds alapján mindkét játékosra érdemes lenne fogadni, akkor a maximalizált hasznosság alapján választanánk. Előfordulhat, hogy valaki szeretne mindkét játékosra fogadni ilyen kedvező odds mellett, de ettől eltekinthetünk, hiszen a bukmékerek aligha kínálnak efféle lehetőséget. A döntésfa ekkor:

- ha $s_1(p) < 0$ & $s_2(1-p) < 1$, akkor **nem fogadunk**
- ha $s_1(p) > 0$ & $s_2(1-p) < 0$ vagy $s_1(p) > 0$ & $p > \frac{\ln\{b_1(1+b_2)/(1+b_1)\}}{\ln(b_1 b_2)}$, akkor **fogadunk az első játékosra**
- különben **fogadunk a második játékosra**,

és a (4.16) integrandus úgy alakul, hogy tükrözze ezt a döntési fát. A lényeg, hogy az átskálázott Kelly fogadás becsült várható hasznosságának meg kell felelnie a fogadó tényleges gyakorlatának.

4.4. Átskálázás kockázatkerülő hasznosságfüggvényekre

A Kelly eljárás logaritmikus hasznosságfüggvényt használ. Most általánosítjuk az átskálázást általános u kockázatkerülő hasznosságfüggvényre. Általában

$$E(u) = pu(1 - bs^*) + (1 - p)u(1 - s^*),$$

melyből $s^*(p)$-ben az első derivált $E(u') = 0$. Egy kockázatkerülő hasznosságfüggvényre $u'' < 0$ esetén a második derivált $E(u'') < 0$, tehát $s^*(p)$ inkább maximalizálja a hasznosságot, mintsem minimalizálja azt. Ahhoz, hogy tanulmányozzuk a tét átskálázást általános kockázatkerülő hasznosságfüggvényekre, újra figyelembe vesszük $dE(u^*)/dk|_{k=1}$-et. A zsugorítás bekövetkezik, ha ez a differenciál negatív. Differenciálva a következő egyenletet

$$E(u^*) = E\{pu(1 + bks^*(Q)) + (1 - p)u(1 - ks^*(Q))\},$$

kapjuk, hogy

$$dE(u^*)/dk|_{k=1} = E\{s^*(Q)[pbu'(1 + bs^*(Q)) - (1 - p)u'(1 - s^*(Q))]\}.$$

Észrevehetjük, hogy

$$dE(u^*)/dk|_{k=0} = (b - (1 - p))u'(1)E\{s^*(Q)\},$$

amely pozitív, ha a fogadás pozitív várható nyereséget nyújt. Így $k^* > 0$.
Jelöljük s^* n-edik deriváltját s^*_n-gal. A

$$bqu'(1 + bs^*(q)) = (1 - q)u'(1 - s^*(Q)) \tag{4.19}$$

azonosságot használva kapjuk, hogy

$$dE(u^*)/dk|_{k=1} = -E\left\{\frac{(Q - p)s^*(Q)u'(1 - s^*(Q))}{Q}\right\}. \tag{4.20}$$

A fenti egyenlet átalakítható az alábbiak szerint

$$dE(u^*)/dk|_{k=1} = -E\left\{\frac{(Q-p)s^*(Q)bu'(1+bs^*(Q))}{1-Q}\right\},$$

vagy

$$dE(u^*)/dk|_{k=1} = -E\left\{(Q-p)s^*(Q)[bu'(1+bs^*(Q))+u'(1-s^*(Q))]\right\}.$$

Ahhoz, hogy bevezessük az átskálázást, általánosan felírjuk a következőt:

$$dE(u^*)/dk|_{k=1} = -E\{\frac{Q-p}{h(Q)}\},$$

amely elégséges feltétele a zsugorításnak, amennyiben $h'(Q) > 0$ minden Q-ra. Ekkor

$$E\{(Q-p)h(Q)\} = Q\{(Q-p)(h(Q)-h(p))\} > 0,$$

ahogy $h(Q) > h(p)$, ha $Q > p$, különben $h(Q) < h(p)$.
Egyszerűsíthetünk tovább kis σ esetekre, ekkor például felírható, hogy

$$dE(u^*)/dk|_{k=1} = -\sigma^2 s_1^*\{bu'(1+bs^*)+b^2s^*u''(1+bs^*)+u'(1-s^*)-s^*u''(1-s^*)\},$$

ahol s^* és s_1^* becsülik p-t. Habár ez az egyszerűsítés csak a szemléltetésre volt alkalmas, és az eredmények kizárólag azt feltételezik, hogy $h'(q) > 0$, amely igaz is, ha σ nem kicsi.

4.2. Tétel. *Az $s_1 > \frac{s}{p}$ feltétel elégséges a zsugorításra.*

Bizonyítás. Kis σ esetekre a (4.20) egyenletből kapjuk, hogy

$$dE(u^*)/dk|_{k=1} = -\frac{\sigma^2}{p}\left\{s_1^*u'(1-s^*)-s^*s_1^*u''(1-s^*)-\frac{s^*u'(1-s^*)}{p}\right\}.$$

Ebből az egyenletből, mivel $u'' < 0$, elégséges feltétel az, ha $s_1^* > \frac{s^*}{p}$. ∎
Ezen feltétel csak korlátosan használható, hiszen nincs közvetlenül kifejtve a hasznosságfüggvényekre. Láthatjuk ugyanakkor, hogy kielégíti a logaritmikus hasznosságfüggvényeket.

4.3. Tétel. *Az*

$$R_\tau(1+bs^*) < \frac{b^2}{b^2-1}/(1-p) \tag{4.21}$$

elégséges feltétel a zsugorításra, ahol R_τ az Arrow-Pratt relatív kockázatkerülő mérték.

Bizonyítás. Figyelembe véve a $-(b^2-1)s^*u''(1+bs^*) < \frac{bu'(1+bs^*)}{1-p}$ átskálázási feltételt, látjuk, hogy a zsugorításnak meg kell történnie, amennyiben $R_\tau = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$ teljesül. ■

A zsugorítás tehát bekövetkezik, még akkor is, ha a hasznosságfüggvény relatív kockázatkerülő együtthatója teljesíti a (4.21)-es egyenlőtlenséget. Ezen feltétel lefedi a logaritmikus, valamint az izoelasztikus hasznosságfügvvényeket ($u(x) = \frac{x^\alpha - 1}{\alpha}$, ahol $0 < \alpha < 1$, melyre $R_\tau \leq 1$).

A (4.19) differenciálásával kapjuk, hogy $s_1^* > 0$. Az egyetlen negatív tag a (4.20)-ban a $b^2 s^* u''(1+bs^*)$. Az $u(x) = -exp(-\lambda x)$ exponenciális hasznosságfüggvény esetében nem történik zsugorítás, ahol λ jelöli a kockázatkerülő paramétert. Ezen hasznosságra a (4.19) egyenlőségből kapjuk, hogy

$$s^*(p) = \ln \frac{bp}{1-p} / (b+1)\lambda. \tag{4.22}$$

A vagyon feltett hányada meghaladhatja az egységet, amennyiben a hasznosságfüggvényt negatív értékekre is definiáljuk, valamint a fogadó kölcsönkérhet.

A (4.22)-es egyenlet $s^*(p)$-re az alábbiakat adja

$$\frac{dE(u^*)}{dk}|_{k=1} \propto -\left[1 + \ln \frac{bp}{1-p} \left\{p - \frac{b}{b+1}\right\}\right].$$

Nyilván, amennyiben az odds nagyon jó (azaz $b >> 1$), akkor $\frac{b}{b+1} > p$ és $\frac{dE(u^*)}{dk}|_{k=1} > 0$, valamint az optimális tét növekedni fog zsugorodás helyett. Intuitívan azért van ez a növekedés, mert ez a hasznosságfüggvény nem bünteti olyan mértékben a veszteséget, mint a logaritmikus hasznosságfüggvény, így amikor az odds nagyon kedvező, előnyösebb növelni a tétet, mint zsugorítani. Ez a szituáció nagyon ritka a gyakorlatban, ahogy kiváló nyerési odds sincs gyakran.

Tudva, hogy a kockázatkerülő hasznosságfüggvények néha produkálhatnak növekedést zsugorodás helyett, így további elégséges feltétel szükséges.

4.4. Tétel. *A*

$$p \leq \frac{2b^2 + b - 1}{b^3 + b^2 - b - 1}$$

és $u''' > 0$ *elégséges feltételek a zsugorításra.*

Bizonyítás. A Taylor tétel alapján $g(a) = g(x) - g'(\xi)(x-a)$, ahol $a < \xi < x$, így ha $g'(\xi)$ csökken, akkor $g(a) > g(x) - g'(x)(x-a)$. Jelen esetben $u'(1-s^*) >$

$u'(1+bs^*) - u''(1+bs^*)(b+1)s^*$. Ez az egyenlet pontosan akkor következik be, ha u'' csökken s-ben.

$u''(\xi) > -\frac{u'(a)}{x-a}$, tehát u'' a nulla irányába növekszik, de nem feltétlen monoton. Tehát feltételeznünk kell u simaságát $u''' > 0$ által. Ekkor $u''(x) = u''(a) + u'''(\xi)(x-a) > u''(a)$. ■

Minden ilyen tulajdonsággal rendelkező hazsnosságfüggvény ismert számunkra. Továbbá $u'(1+bs^*) = \frac{1-p}{bp} u'(1-s^*)$, így

$$u'(1-s^*) + bu'(1+bs^*) = \frac{u'(1-s^*)}{p} > \frac{-(b+1)s^* u''(1+bs^*)}{1-\frac{1-p}{bp}}.$$

Használva ezt az egyenlőtlenséget, kis σ esetén kapjuk, hogy

$$\frac{dE(u^*)}{dk}|_{k=1} < -\sigma^2 s_1^* \left\{ -s^* u''(1-s^*) + \left(b^2 - \frac{b+1}{p-\frac{1-p}{b}} \right) s^* u''(1+bs^*) \right\}.$$

Mivel $u''(1+bs^*) > u''(1-s^*)$,

$$\frac{dE(u^*)}{dk}|_{k=1} < -\sigma^2 s_1^* \left(-b^2 - 1 - \frac{b+1}{p-\frac{1-p}{b}} \right) s^* u''(1+bs^*). \tag{4.23}$$

A (4.23) egyenlőtlenség egy elégséges feltételt nyújt a zsugorításhoz, mégpedig

$$b^2 - \frac{b+1}{p-\frac{1-p}{b}} \leq 1$$

vagy

$$p \leq \frac{2b^2+b-1}{b^3+b^2-b-1}.$$

$b = 2$-re $p \leq 1$, így a tét zsugorítás $b \leq 2$-re minden esetben előfordul bármely sima kockázatkerülő hasznosságfüggvény esetén.

Tehát a k^* optimális skálázási faktor közelítése könnyedén kiszámítható bármely hasznosságfüggvényre, nem csak logaritmikus esetre.

Konstruálva egy $E(u^*(ks(Q)))$ bootsrappelt becslést, bővítve $s^*(p)$ Taylor-sorával, és maximalizálva k-ban kapjuk, hogy

$$k^* = \frac{s^*(p)E(s^*(Q))}{E(s^*(Q)^2)}, \tag{4.24}$$

amely érvényes kis $ks^*(Q) - s^*(p)$ esetén, azaz kis σ^2 varianciára. A (4.24) formula nem függ explicite u alakjától, de természetesen implicite igen, mivel $s^*(Q)$ egy függvénye

u-nak. Kifejtve $s^*(Q)$-t p egy Taylor-sorával

$$k^* = \frac{s^*(p)\left\{s^*(p) + \frac{1}{2}s_2^*(p)\sigma^2\right\}}{s^*(p)^2 + (s_1^*(p)^2 + s^*(p)s_2^*(p))\sigma^2}. \tag{4.25}$$

Ez a szakasz egy általános közelítő formulát eredményezett a fogadás átskálázására kockázatkerülő hasznosságfüggvények mellett, és felmerült a kérdés, hogy vajon a tét zsugorítása gyakrabban fordul-e elő bizonytalansági paraméter és bármely kockázatkerülő hasznosságfüggvény mellett, mint annak növelése. Meglepően volt olyan eset növekedésre, amely előfordulhat néhány hasznosságfüggvény esetében (amelyre példa volt az exponenciális), akkor, ha az odds nagyon kedvező.

4.5. Rövid összefoglaló a cikkről

Baker és McHale ezen cikkben egy határozottan eltérő megközelítést választottak a Kelly kritérium használatát illetően. Egy $ks^*(q)$ fogadási törtet vezettek be, ahol $s^*(p)$ a Kelly hányados, q egy becslése p-nek, $0 < k < 1$ pedig egy zsugorítási/átskálázási faktor. Kivetett feltételek alapján létrejött hasznosságfüggvényekre fókuszáltak, és a függvény viselkedésére k befogadása mellett, konkrét becsléseket végeztek q-ra és a helyettesítő mintavételi eloszlásra. Speciális p értékekre vizsgálták a hasznosságot, valamint alternatív (kockázatkerülő) hasznosságfüggvényeket tanulmányoztak. A fő eredménye ezen cikknek, hogy a zsugorított fogadás növeli a várható hasznosságot, így ezen Kelly stratégia kedvezőnek tűnik (ennek bizonyítása a cikkben szereplő szimulált fogadási szituációban, valamint teniszfogadási példán keresztül látható).
Egy későbbi tanulmányukban, amely ezen cikken alapszik, biztosítanak számos olyan feltételt, amelyeknél az előzőekben alkalmazott zsugorított fogadási hányad előnyben részesíthető a várható posterior veszteség minimalizálása érdekében [Baker, McHale, 2016].

4.6. Bizonytalanság jelenléte a lóverseny fogadások világában

Michael R. Metel különböző sztochasztikus optimalizálási modelleket vizsgált a Kelly-stílusú fogadásokra a kölcsönösen kizárólagos eredmények tekintetében, figyelembe véve a logisztikus regresszióból eredő valószínűségi becslési bizonytalanságot [Metel, 2017].

Az író a lóverseny fogadásokra koncentrált a cikkben, de általánosan is alkalmazható az eljárás bármely befektetésre. A cikk konklúziója szerint célja, hogy összehasonlítsa a sztenderd Kelly fogadás, a tört Kelly fogadás és a Kelly fogadás a bizonytalansági paraméter melletti teljesítményét szimulált adatok segítségével. A hosszútávú növekedésben rejlő nagy különbség, a valós valószínűségi eredmények és a kísérleteken alapuló becslések között az, hogy a valószínűségbecslési hiba jelentős a döntéshozatalban, és a kihívást jelent azok számára, akik a spekulatív piac hozamot szeretnének maximalizálni. A szerző talált néhány javítási lehetőséget, például a bizonytalanság figyelembevételét a várható logaritmikus vagyon számítása során, és egy enyhe esélykorlátozással, amelyet valószínűleg minden alkalmazáskor újra kell kalibrálni, hogy megtaláljuk a megfelelő egyensúlyt a bizonytalanságból származó veszteségek megakadályozásában, anélkül, hogy túlzott mértékben csökkentenék a pozitív hozamok elfogadásának lehetőségét.

5. Zsugorított Kelly stratégia a részvénypiacon

5.1. Kelly kritérium a pénzügyekben

Eddig beláttuk, hogy a binomiális játékok esetében, amennyiben maximalizálni szeretnénk a várható vagyonunkat úgy, hogy minden körben a teljes vagyonunkkal fogadunk, sajnos a csőd valószínűsége 1. Másfelől, ha minimalizálni szeretnénk a csődbejutás valószínűségét, akkor a jól ismert „gambler's ruin formula" [Feller, 1966] megmutatja, hogy a minimum fogadásnak minden egyes körben egy szerencsétlen velejárója, hogy a várható átlagos gyarapodást is minimalizálja.

Most próbáljuk meg átvinni a Kelly kritériumot a folytonos világba, a pénzügyi piacok terére, ahol a részvénypiac egy igazán alkalmas helyszín a prezentációra. Louis M. Rotando és Edward O. Thorpe 1992-ben már felvázoltak egy alkalmazást az amerikai tőzsde fényében [Rotando, Thorp, 1992].

Minden befektetésnek egy tőzsdei szerencsejáték sorozatban csak véges számú kimenete van. Matematikailag azonban kényelmesebb egy folytonos eloszlás modellel történő közelítés egy véges eloszlásra. Ám a folytonos modell eredményeinek muszáj megőriznie a diszkrét eset konklúzióit. Ezek fényében továbbra is az $\mathbb{E}(\log \frac{V_n}{V_0})$ érték maximalizálása a cél.

A részvénypiacra történő befektetés tekinthető egyfajta folytonos szerencsejátéknak, amelynek pozitív, egyéves várható megtérülése megegyezik a historikus, éves hozamok átlagával egy elég hosszú időintervallumon keresztül. Számos bizonyíték sugallja, hogy az árváltozások a spekulatív piacokon független, azonos eloszlású véletlen változókként viselkednek véges varianciával. A centrális határeloszlás tétel alapján belátható, hogy az árváltozások az amerikai tőzsdén közelítőleg normális eloszlást követnek (igazából a lognormális eloszlás jobb illeszkedést eredményez, de lényegesen megnehezítené a számításokat). A kritika felrója a Kelly stratégia számára azt, hogy a való életben a vagyon nem végtelenül osztható, és sosem használnak kisebb téteket egy meghatározott mennyiségnél (mint például 0,01$).

A cikk alkotói az S&P500 részvényekbe történő befektetés során vizsgálták az optimális Kelly hányad meghatározását. Az általuk használt normális görbe valószínűségi eloszlásként alkalmatlannak bizonyult, így egy kvázi-normális eloszlást használtak meghatározott várható értékkel és szórással. Arra jutottak, hogy amennyiben számításba veszik a pénz időértékét, a Kelly-optimális befektetőnek hajlandónak kellene lennie az erőforrásainak 100%-os befektetésére egy S&P500 részvényekből álló diverzifikált portfólióba, amennyiben a margin nem megengedett. Ám a valódi maximális növekedés akkor következne be, ha valaki 117-szeresét fektetné be az eredeti vagyonának, tehát egy hosszútávú befektetőnek minden évben a teljes vagyonát, valamint a kölcsönkért összeget is be kéne fektetnie. Vitatható tény a cikkel kapcsolatban, hogy a valahogyan mesterségesen létrehozott valószínűség-eloszlást nem lehet teljes mértékben számításba venni.

Paolo Laureti, Matús Medo és Yi-Cheng Zhang Kelly-optimális portfóliók vizsgálatát végezték [Laureti, Medo, Zhang, 2008]. Cikkükben az egyszerűség kedvéért kizárták az osztalékot, a tranzakciós költségeket és adókat. Az egyszerű eszközárazásra használt sztochasztikus modellek esetére tanulmányozták a Kelly optimalizálási stratégiát. Egy igazán pontos közelítő analitikus képletet számítottak ki az optimális portfólió hányadokra. A kapott eredmények fényében egy egyszerű algoritmust javasoltak az optimális portfólió megkonstruálására. Belátták, hogy mivel a lognormális hozamok esetében a Kelly közelítés elutasítja a short pozíciók, valamint kölcsön felvét lehetőségét, így az elérhető eszközök csak egy bizonyos része lehet jelen az optimális portfólióban. Néhány esetben az optimális portfólió mérete jóval kisebb, mint az elérhető eszközök száma. Főleg, amikor az átlag eszköz hozamok eloszlása széleskörű, akkor nagy a valószínűsége, hogy a portfólióban csak a legnyereségesebb eszközök vannak.

5.2. Gyakorlati bevezető

Az előzőekben részletesen ismertetett, Baker és McHale által írt cikk szolgál alapjául az alábbi fejezetnek. Célom, hogy átültessem az ott létrehozott, ún. **zsugorított Kelly stratégiát** a részvénypiacra. Két jól ismert pénzügyi instrumentummal foglalkozom, a Bitcoin, valamint az S&P500 részvények portfólióban történő átrendezésével. Megvizsgálom, hogy az eredeti Kelly kritérium teljesítménye valóban alulmúlja-e az átskálázott eljárás hatékonyságát. A későbbiekben pedig egy hipotetikus befektetőt tekintünk, kinek kezdeti vagyona 100$. Tegyük fel, hogy a befektető egy adott befektetési stratégiát követ, mely szerint minden nap rendezi a portfólióját. Az előbb említett két befektetési stratégiát vizsgálom meg és hasonlítom össze.

Továbbra is az $\mathbb{E}\left[\log\left(\frac{V_{t+1}}{V_t}\right)\right]$ értéket szeretnénk maximalizálni. Tekintsünk egy portfóliót, amely egy kockázatos és egy kockázatmentes eszközből áll.Tegyük fel, hogy a kockázatos eszköz értéke Geometriai Brown-mozgást követ, azaz a következő sztochasztikus differenciálegyenlet jellemzi:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{5.26}$$

Az egyenlet első tagja az úgynevezett drift tényező, melyben a konstans μ paraméter méri a drift erősségét, a második tag pedig a diffúziós tényező, konstans σ volatilitás paraméterrel.
A kockázatmentes termék árának alakulását a következő differenciálegyenlet írja le:

$$dB(t) = rB(t)dt, \tag{5.27}$$

ahol r jelöli a konstans, kockázatmentes hozam mértékét.

A portfóliónkat, melyet a továbbiakban V-vel jelölünk ebből a két termékből építjük fel. A részvénybe fektetett hányad legyen α, a kötvénybe fektetett pedig $1-\alpha$. Ekkor a portfóliónk két részének értékfolyamata:

$$\begin{aligned} d(\alpha V(t)) &= \mu\alpha V(t)dt + \sigma\alpha V(t)dW(t) \\ d((1-\alpha)V(t)) &= r(1-\alpha)V(t)dt \end{aligned}$$

Az egyenletek átrendezése után a portfóliónk dinamikája az alábbi:

$$dV(t) = V(t)(\alpha\mu dt + (1-\alpha)rdt) + \alpha V\sigma dW(t) \tag{5.28}$$

A sztochasztikus világban az összetett függvények deriválási szabályára speciális egyenlet, úgynevezett Îtó-formula áll rendelkezésünkre. Az Îto-formula egyik legismertebb alakja a következő:

$$df(X(t)) = \left[f'(X(t))a(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t)\right]dt + f'(X(t))\sigma(t)dw(t), \tag{5.29}$$

ahol az $X(t)$ az alábbi egyenlet segítségével írható fel:

$$dX(t) = a(t)dt + \sigma(t)dw(t).$$

Ezen formulát alkalmazva, az értékfolyamat logaritmusának differenciálegyenlete:

$$d\ln(V(t)) = (\alpha\mu + (1-\alpha)r - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2})dt + \alpha\sigma dW(t) \tag{5.30}$$

melyből látszik, hogy az értékfolyamat logaritmusa normális eloszlású, tehát a portfólió értékfolyamata maga lognormális eloszlású, méghozzá a következő paraméterekkel:

$$V \sim LN(\alpha\mu + (1-\alpha)r - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2}, \alpha\sigma) \tag{5.31}$$

Ezekből következik, hogy a loghozam várható értéke egységnyi idő alatt:

$$\mathbb{E}\left[\log\left(\frac{V_{t+1}}{V_t}\right)\right] = \alpha(\mu - r) - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2} \tag{5.32}$$

Ezen egyenlet deriválásával, majd nullával egyenlővé tételével megkapható a Kelly kritérium általi optimális alfa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha(\mu - r) - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2} &= 0 \\ (\mu - r) - \alpha\sigma^2 &= 0 \\ \alpha^* &= \frac{\mu - r}{\sigma^2} \end{aligned} \tag{5.33}$$

Ezen alfa érték használatára alapszik az eredeti Kelly stratégia.

Az eddigiekben a becsült p valószínűség eloszlásfüggvényét $f(q)$-val jelöltük, így tegyük most ugyanezt a megfelelő paraméterrel. Legyen tehát $f(\nu)$ a μ becsült valószínűségi eloszlása, melyről feltehetjük, hogy normális eloszlású, hiszen a loghozamokról normális eloszlást feltételezünk. Ekkor $f(\nu) \sim N(\mu, \Sigma)$.

A cikkben szereplő

$$p\ln(1 + bs^*(q)) + (1-p)\ln(1 - s^*(q))$$

megfelelője ebben az esetben az

$$\alpha^*(\nu)(\mu - r) - \frac{\alpha^{*2}(\nu)\sigma^2}{2}. \tag{5.34}$$

Ekkor nyilván az $s^*(q) = \frac{(b-1)q-1}{b}$ is átalakul

$$\alpha^*(\nu) = \frac{\nu - r}{\sigma^2} \tag{5.35}$$

alakúra. A későbbi számítások során a μ várható érték rendelkezésünkre fog állni, így a ν becslési érték helyett magát a μ értéket használjuk.

A (4.14) egyenletet formázzuk a megfelelő alakra az alábbiak szerint:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\nu)\left(\alpha^*(\nu)(\mu - r) - \frac{\alpha^{*2}(\nu)\sigma^2}{2}\right) d\nu. \tag{5.36}$$

Legyen $\alpha_{strat} = k \cdot \alpha^*$. Ekkor a (4.15) a következőképpen néz ki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\nu)\left(k\alpha^*(\nu)(\mu - r) - \frac{k^2\alpha^{*2}(\nu)\sigma^2}{2}\right) d\nu \tag{5.37}$$

Kiszámolva az integrált és k szerint maximalizálva megkapjuk az optimális k^* értéket.

$$\frac{\partial}{\partial k}\int_{-\infty}^{\infty} f(\nu)\left(k\alpha^*(\nu)(\mu - r) - \frac{k^2\alpha^{*2}(\nu)\sigma^2}{2}\right) d\nu = 0 \tag{5.38}$$

Érdemes figyelembe vennünk, hogy $f(\nu)$ a normális eloszlás sűrűségfüggvényét jelöli, így először rendezzük az egyenletet a megfelelő alakra:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{kr}{\sigma^2}(\mu - r) - \frac{k^2}{2}\frac{r^2}{\sigma^2}\right) f(\nu) + \left(\frac{k(\mu - r)}{\sigma^2} + \frac{k^2 r}{\sigma^2}\right)\nu f(\nu) + \left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right)\nu^2 f(\nu) d\nu.$$

Jól látható, hogy rendre megjelent az első, illetve második momemtum, tehát ez tovább egyenlő

$$\left(-\frac{kr}{\sigma^2}(\mu - r) - \frac{k^2}{2}\frac{r^2}{\sigma^2}\right) + \mu\left(\frac{k(\mu - r)}{\sigma^2} + \frac{k^2 r}{\sigma^2}\right) + (\mu^2 + \Sigma^2)\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) =$$
$$\frac{1}{\sigma^2}\left(k(-r(\mu - r) + \mu(\mu - r)) + k^2\left(-\frac{r^2}{2} + r\mu - \frac{\mu^2 + \Sigma^2}{2}\right)\right),$$

melyet k szerint deriválva kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial k}\frac{1}{\sigma^2}\left(k(-r(\mu - r) + \mu(\mu - r)) + k^2\left(-\frac{r^2}{2} + r\mu - \frac{\mu^2 + \Sigma^2}{2}\right)\right) =$$
$$\frac{1}{\sigma^2}\left((\mu - r)^2 + 2k\left(-\frac{(\mu - r)^2 + \Sigma^2}{2}\right)\right).$$

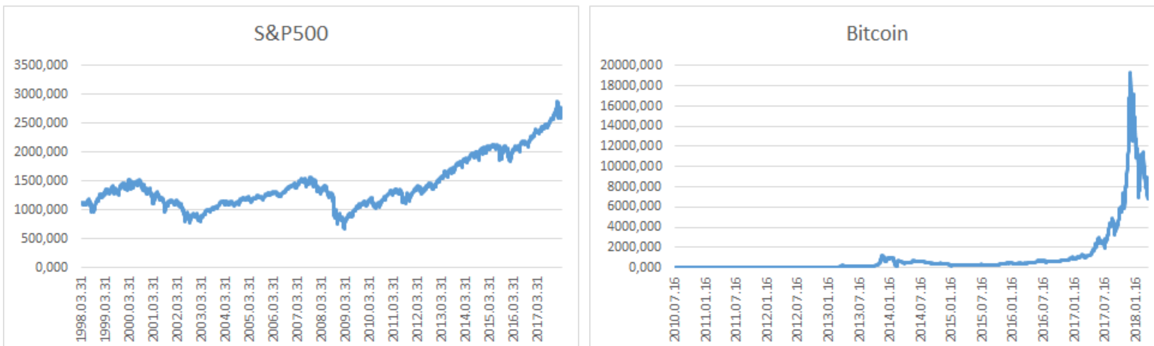
Ezen egyenletet nullával egyenlővé téve elérjük a k skálázási faktor optimális értékét:

$$k = \frac{(\mu - r)^2}{(\mu - r)^2 + \Sigma^2}. \tag{5.39}$$

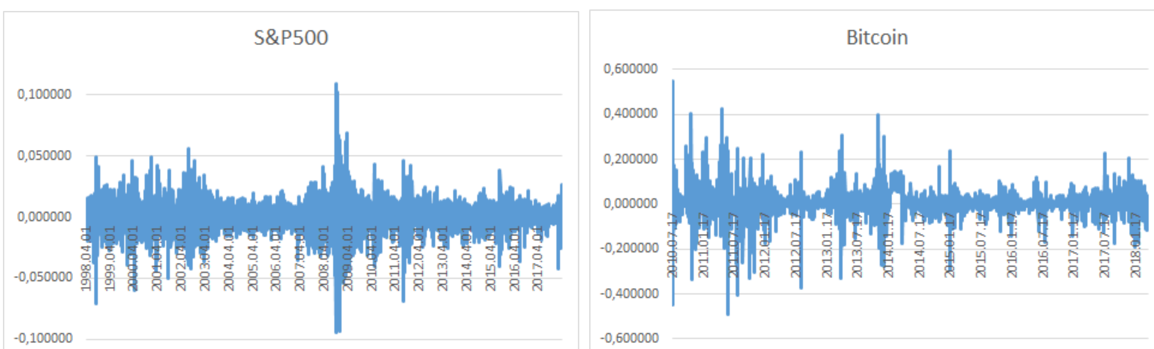
Tehát megkaptuk az optimális zsugorítási mértéket, mellyel a továbbiakban dolgozni fogunk.

5.3. A vizsgált pénzügyi termékek bemutatása

Az adatokat a `https://finance.yahoo.com` oldalról töltöttem le. A Bitcoin esetében a lehető leghosszabb, 2017.07.16. és 2018.03.30 közti időszakot vettem alapul, az S&P500 esetében pedig az elmúlt 20 év historikus adatait vizsgáltam Microsoft Excel segítségével.

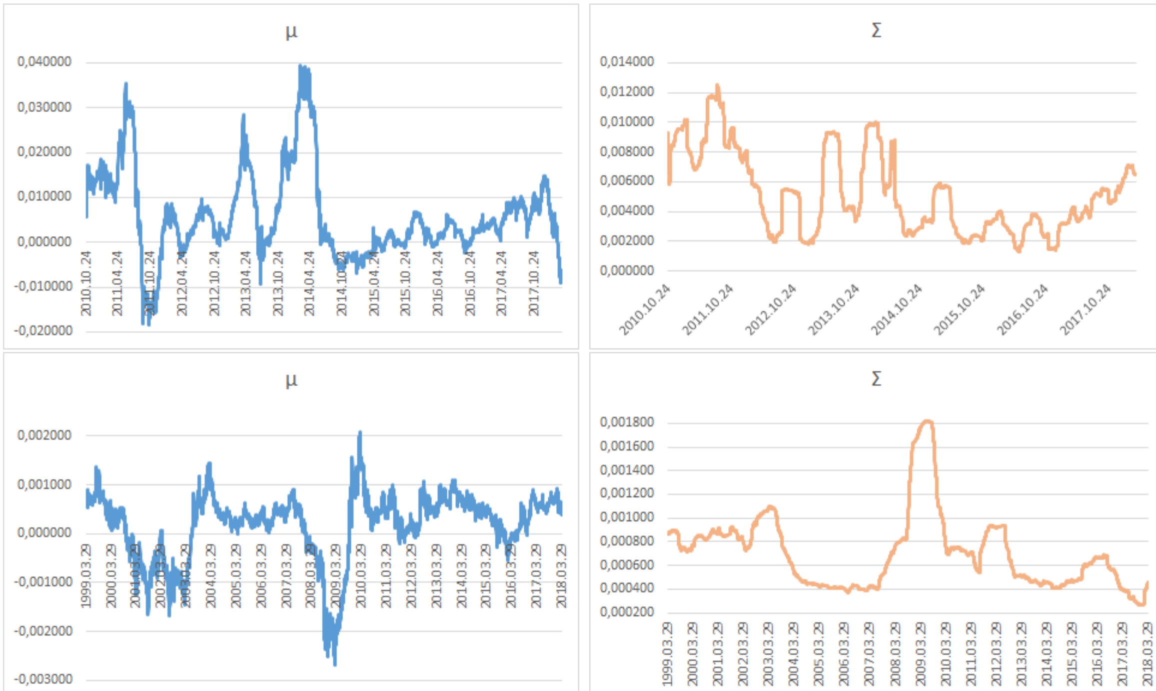


1. ábra. Az S&P500 és Bitcoin záróárfolyamai



2. ábra. Napi loghozamok

A záróárfolyamok alapján napi loghozamokat számoltam, majd a Bitcoin esetében 100 napos, az S&P500-nál pedig 250 napos bontásban μ várható értéket és ν szórást kalkuláltam. A normális eloszlás paraméterei közül ekkor a várható érték már rendelkezésünkre áll, azonban a Σ-t meg kell határozni. A hozamok szórásának $\sqrt{250}$-ed, illetve $\sqrt{100}$-ad részét véve ezt is megkapjuk. A két eszköz loghozamának eloszlásparaméterei az alábbi ábrákon láthatóak. Ezen értékek kiemelkedő szerepet játszanak az alfa meghatározásában.



3. ábra. Felül Bitcoin, alul S&P500 loghozamok eloszlásparaméterei

5.4. Különböző stratégiák összehasonlítása

A továbbiakban 3 befektetési stratégiát vizsgálunk. Az első és legegyszerűbb, amikor minden vagyonunk az első időpillanattól kezdve részvénybe vagy Bitcoinba fektetjük, a portfóliónk nem áll semmi másból, így nem is rendezzük át az adott időszak alatt. A második stratégia, amikor az eredeti, „nyers” Kelly kritériumot alkalmazzuk a fent kiszámolt α^* értékkel, tehát vagyonunk α^* részét részvényben/Bitcoinban tartjuk, $(1-\alpha^*)$ részét pedig kockázatmentes eszközben, jellemzően bankbetétben. Minden időpillanatban újraszámoljuk az α^* értéket, és ennek megfelelően átrendezzük a portfóliónk. Természetesen a folyamat során odafigyelünk a betét kamatozására, valamint a részvény hozamára, ezeket mind belekalkuláljuk a vagyonunk alakulásába. Az átrendezésből adódó tranzakciós költségek levonásra kerülnek. A harmadik, és egyben utolsó eljárás a már jól ismert zsugorított Kelly formula. Ez csupán annyiban különbözik az előző stratégiától, hogy egy ún. k skálázási faktor segítségével csökkentjük a tét nagyságát. Tehát $\alpha = k \cdot \alpha^*$ hányadát tartjuk ekkor részvényben/Bitcoinban, és $(1-\alpha)$ hányadát kockázatmentes eszközben. Az átrendezés itt is folyamatosan megtörténik.

Idézzük fel α^* képletét!

$$\alpha^*(\nu) = \frac{\nu - r}{\sigma^2}$$

Látható, hogy az eredeti kritérium alapján annak értéke, vagyonunk mekkora részét tartsuk kockázatos termékben csupán a várható értéktől, a konstans kamatlábtól, valamint a szórásnégyzettől függ.

Már csak a k zsugorítási faktorra van szükségünk, amely az előzőek szerint

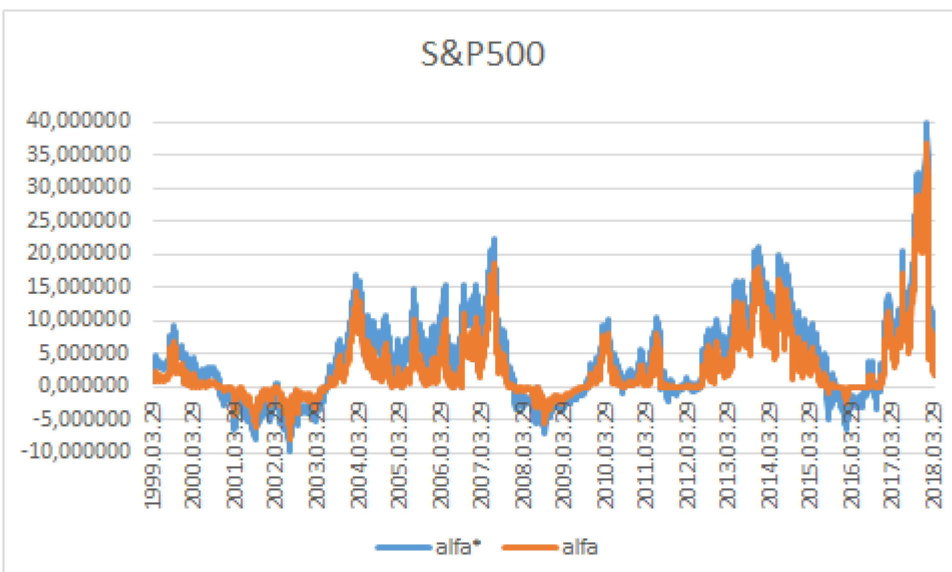
$$k = \frac{(\mu - r)^2}{(\mu - r)^2 + \Sigma^2}.$$

Most már minden készen áll a stratégiák összehasonlításának futtatására.

5.4.1. S&P500

Az első eszköz, melyre a stratégiák közti különbségeket kutattam, az S&P500 részvény. 1999.03.29. és 2018.03.29 közti intervallumra futtattam az eljárásokat.

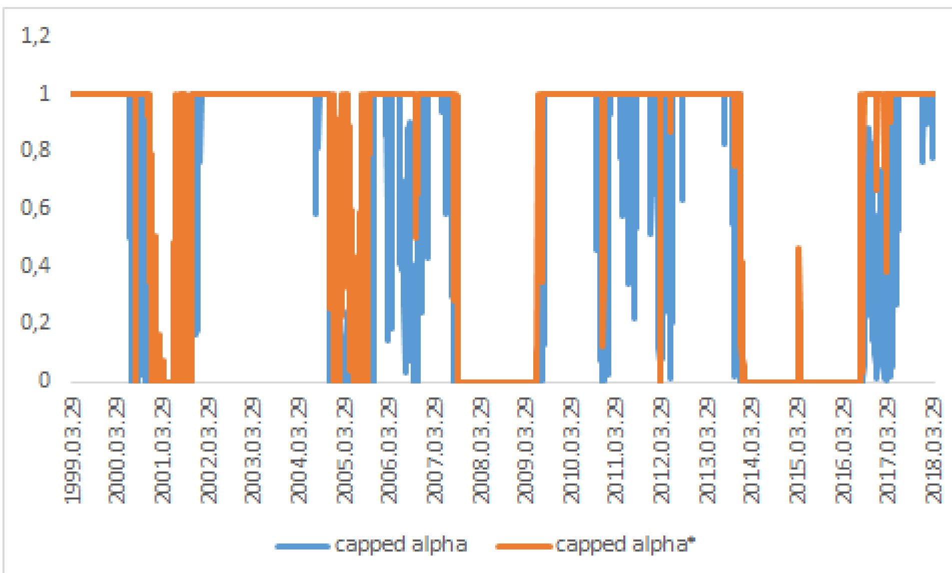
Az α^* hányad és a k faktor meghatározása után, az α értékéhez már csak egy szorzás művelet kellett. Az alábbi ábrán meglepően tapasztalhatjuk, hogy várakozásainkkal ellentétben a zsugorított hányados szépen követi az eredeti α^* mennyiséget.



4. ábra. Alfa és alfa* hányadosok az S&P500 esetében

Észrevehető, hogy némiképp talán konzervatívabb az átskálázott Kelly kritérium, ám olyan jelentős eltérés nincs, mint amire számítottunk. A nagyon magas értékeknél (mint például a 20-szoros vagyon befektetése tőkeáttétellel) sem tapasztalható erőteljes visszaesés az α szempontjából. Megfigyelhető még, hogy a negatív eséseknél is követi az eredeti mennyiséget, de például a 2016.03.29-es tengelypontnál már nem esik az α^* mennyiséggel együtt, hanem egyenletes nagyságrendben tartja az α hányadost. Ha jobban belegondolunk, talán mégsem olyan váratlan ez az eredmény, hiszen magas várható érték ugrás esetén a szórás is megnövekszik, így ezek hatása mind kiül az α, illetve α^* hányadosokra.

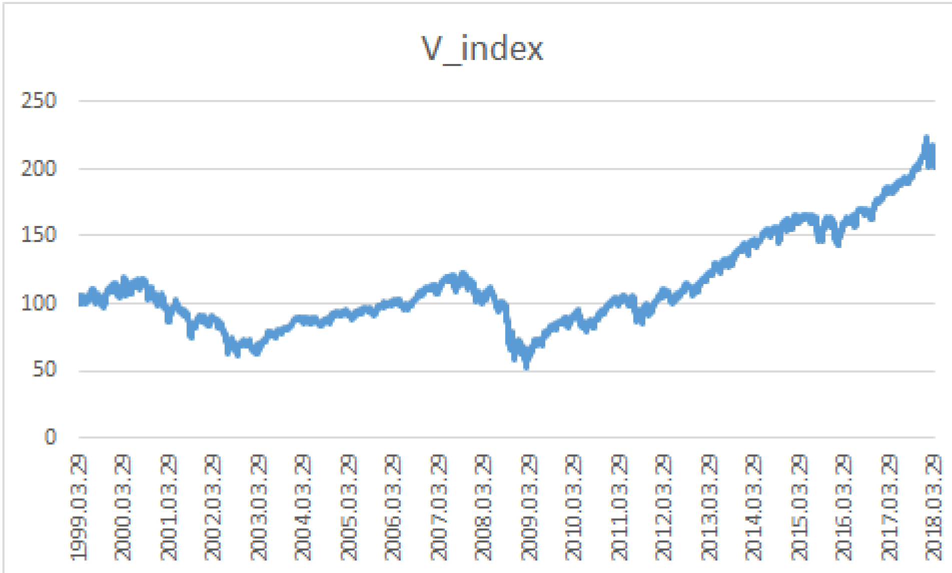
Mivel az egyszerűség kedvéért kizárjuk a shortolás és tőkeáttétel lehetőségét, így bevezetünk egy α_{min} és α_{max} korlátolt, melyek által meghatározzuk a capped alpha és capped alpha* értékeket.



5. ábra. Nincs shortolás,illetve tőkeáttétel

Tehát a részvénybe fektethető vagyon hányadát leszorítottuk a [0,1] intervallumra.

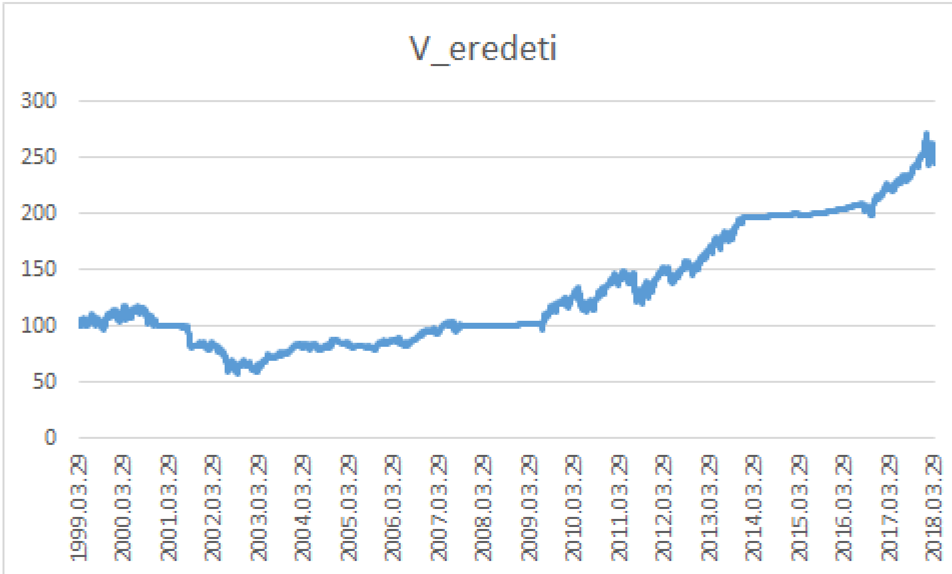
Tekintsük most a befektetések közti differenciát a különböző eljárások alapján. Legyen a kezdeti V_0 vagyonunk 100$. Az első procedúra alapján ezt mind részvénybe fektetjük, és az intervallum végéig nem is változtatunk ezen a felosztáson. Nem túl meglepő, hogy ekkor a végső V_N vagyonunk megegyezik a részvényárfolyam alakulásának formájával.



6. ábra. Csak részvénybe fektetett vagyon alakulása

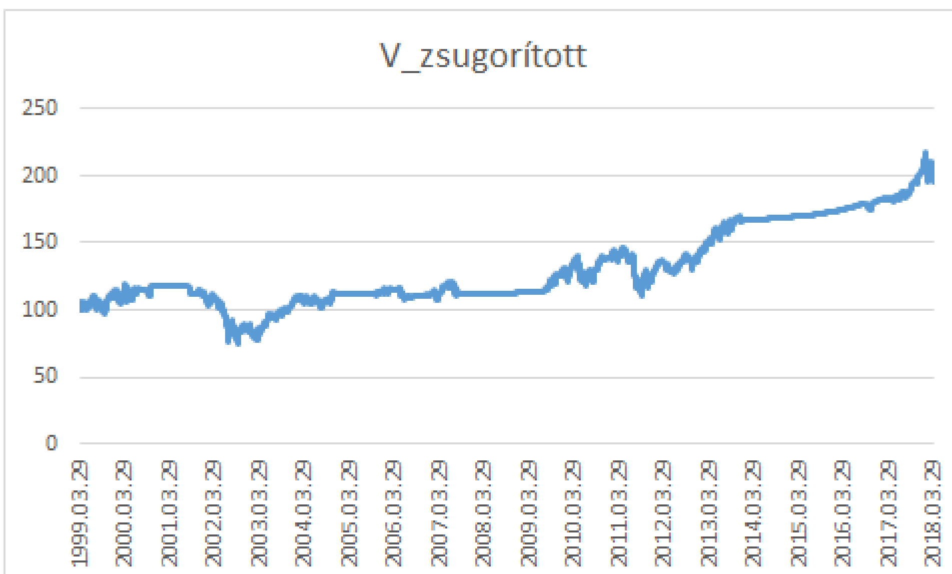
1980 és 2013 között mindössze 8 olyan év volt, amikor a félezer amerikai részvény mozgását leképező S&P500-as tőzsdeindex nem zárt magasabban az előző évinél, annak ellenére, hogy év közben esetenként vaskos mínuszban állt. Ebből az elmúlt 33 évből 25-ben az S&P500 hozamot termelt, dacára a 14,7%-os átlagos éven belüli árfolyamcsökkenésnek.
A kezdeti összeg kicsit több, mint a duplájára nőtt, köszönhetően a folyamatosan tartó növekvő trendnek.

A módosítatlan Kelly stratégia ennél kicsit fejlettebb, és némileg magasabb végösszeget is eredményez. Igazán szembetűnő, hogy az erőteljesebb zuhanásoknál a Kelly eljárás kimarad ebből az esésből, viszont a növekedésnél mindent beleadva emelkedik felfelé.



7. ábra. A „nyers" Kelly stratégia általi vagyon alakulása

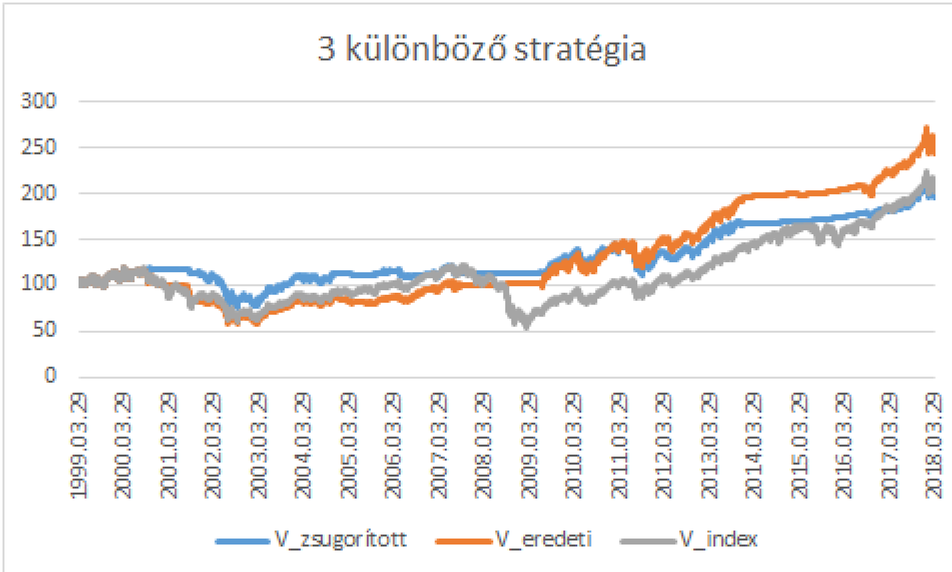
Végül jöjjön az átskálázott Kelly folyamat eredménye:



8. ábra. A zsugorított Kelly stratégia általi vagyon alakulása

Az alakja szinte megegyezik az előbbi ábrán látható függvénnyel, viszont végeredményben alulmúlja azt. Az 1999-2003 közti időszakban ugyan eredményesebbnek tűnik, ám ez nem tart sokáig. A zuhanásoknál ez az eljárás is egyenesben marad, ami természetesen egy nagyon előnyös tulajdonsága, de ezzel sem tűnik ki az eredeti Kelly eljárás mögül.

Tehát összesítve a 3 stratégia:

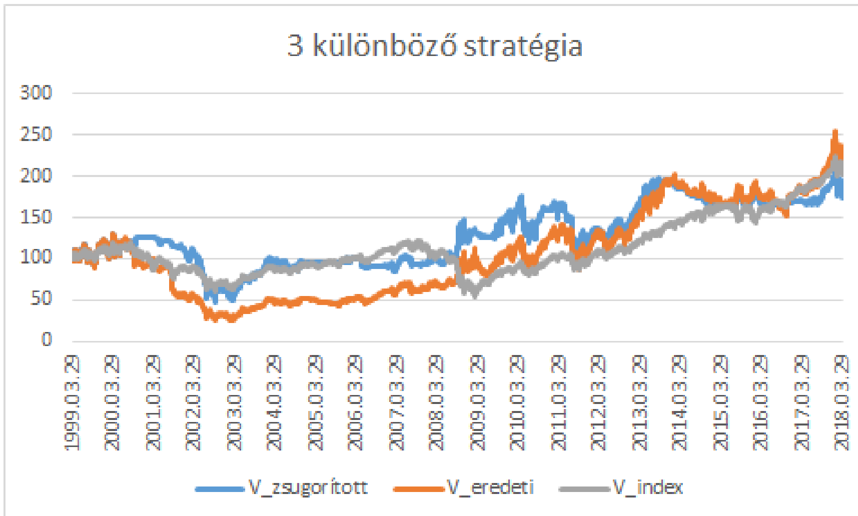


9. ábra. A 3 különböző vagyonalakulás

Szomorúan konstatáljuk, hogy még az indexkövető stratégia is hajszálnyival jobban teljesít végeredményben, mint az általunk nagyra tartott, átskálázott Kelly kritérium. Igaz ugyan, hogy menetközben, egészen a 2012-es évig az utóbbi eljárás teljesít a legjobban, ám utána az eredeti Kelly már fölényesen elemelkedik tőle.

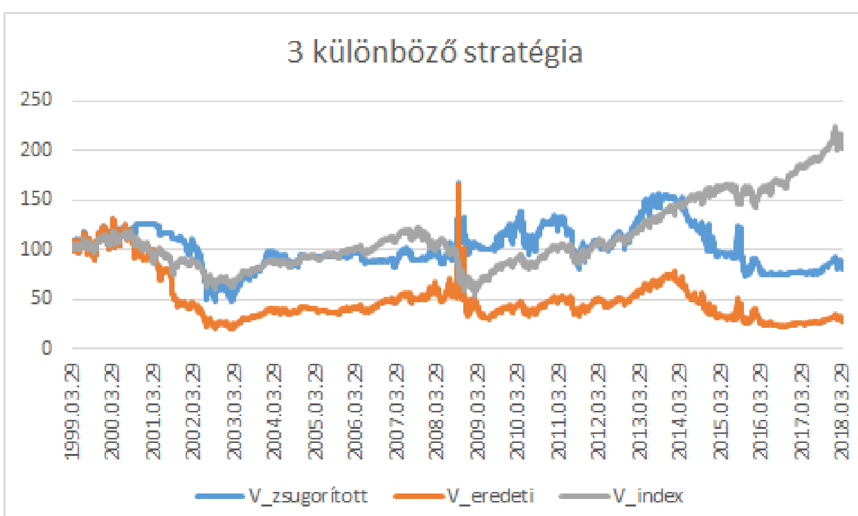
Az S&P500 részvény jelentős likviditása miatt a tranzakciós költségként elkönyvelt, relatív bid-ask spread fele igazán alacsony, így sajnos látványos különbség nem vehető észre a költségektől mentes, illetve azokkal ellátott eljárások közt. Jelen esetben a tranzakciós költséget 0,001$-nak vettük.

Érdekességképp kirajzoltattam az esetet, mikor mégis megengedjük a shortolás, illetve tőkeáttétel lehetőségét. A korlátokat most -1-re csökkentettem, valamint +2-re növeltem.



10. ábra. A 3 különböző vagyonalakulás shortolás és tőkeáttétel mellett

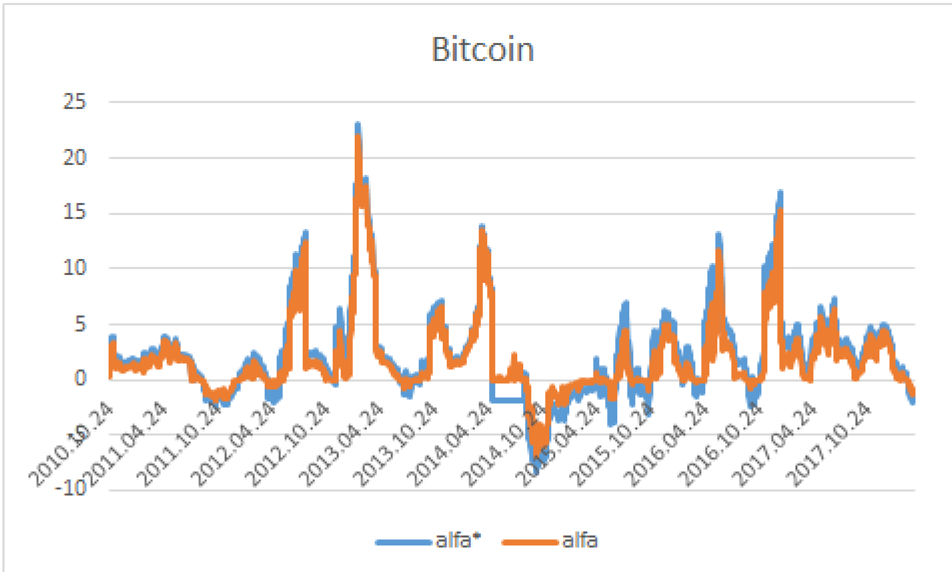
Ekkor hevesebb mozgások figyelhetőek meg, de végeredményben még mindig az eredeti eljárás teljesít a legjobban. Ám ha még jobban eltolom a korlátokat, például [-5,2] közé, akkor már érdekesebb eredmények figyelhetők meg.



11. ábra. A 3 különböző vagyonalakulás shortolás és tőkeáttétel mellett

5.4.2. Bitcoin

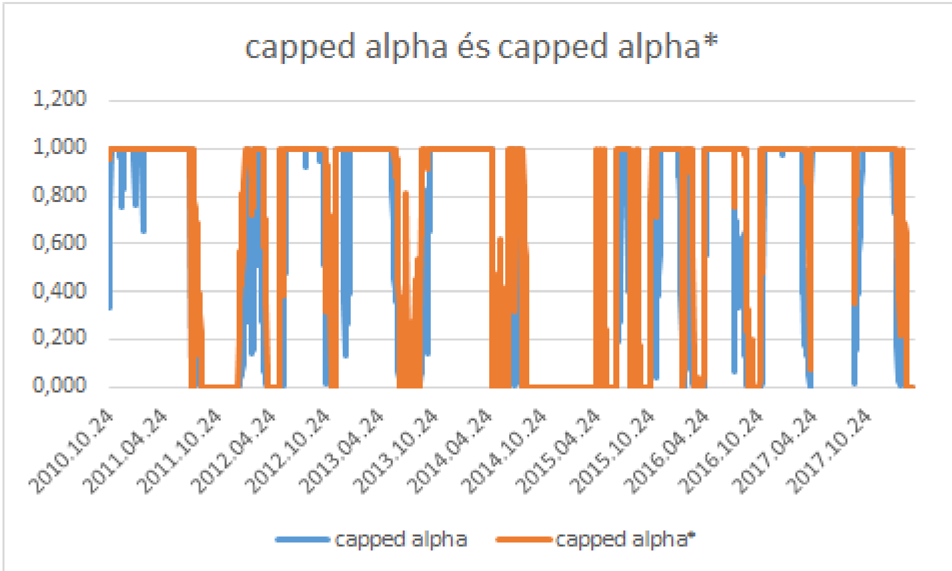
Járjuk végig ugyanezt az utat a Bitcoin esetében is. Először nézzük a két különböző mértékű hányadost.



12. ábra. Alfa és alfa* hányadosok a Bitcoin esetében

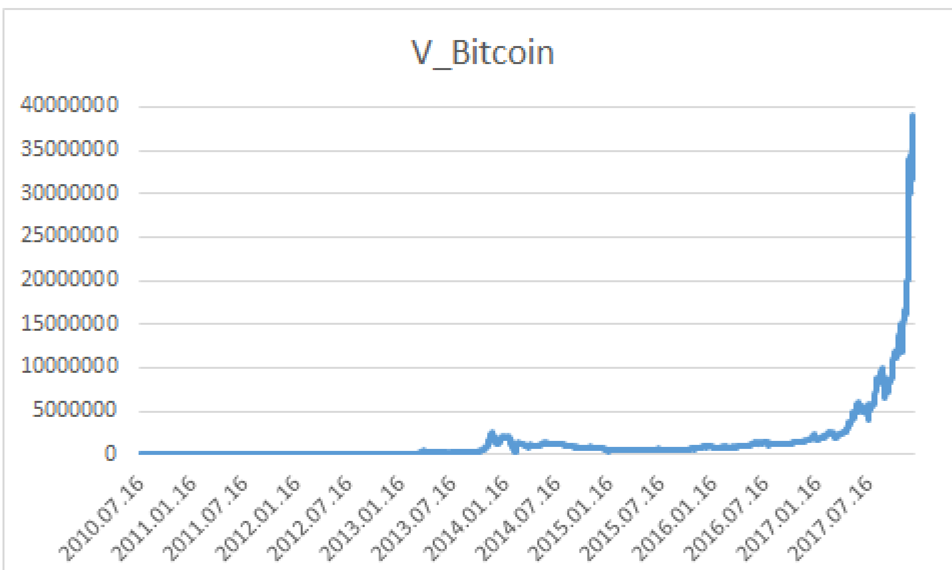
Különösebb eltérés itt sem fedezhető fel, a 2014.04.24-es dátumtól fél évig a zsugorított eljárás kimarad az esésből, és egyenesben tartja az addigi mennyiséget, ellentétben a „nyers" Kelly stratégiával. Sajnálatosan a nagyon magas (akár 20-szoros tőkeáttételi) mennyiségeket sem korlátozza le igazán.

Itt is elsőként kizárjuk a shortolási, illetve tőkeáttételi lehetőségeket, így újra beszorítjuk az α, illetve α^* mennyiségeket a 0 és $+1$ közé.



13. ábra. Nincs shortolás, illetve tőkeáttétel

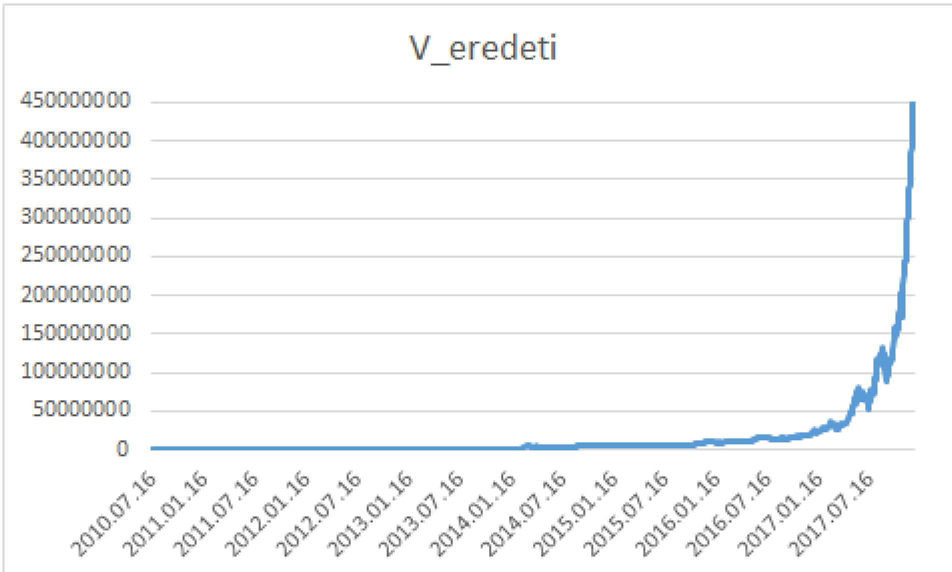
A Bitcoinról mindenki tudja, hogy aki az elején vásárolt belőle, az mára már dollármilliomos. Így nem lesz túl meglepő a csak Bitcoinból álló vagyon alakulása sem.



14. ábra. Csak Bitcoinból álló vagyon alakulása

Hatalmas volatilitás mellett, de szinte megállás nélkül emelkedett az elmúlt években míg a 2017-es év elején, a fennállása óta először már többet kellett fizetni a kriptopénzért, mint egy uncia aranyért. A 2018-as év elején egy 30%-os zuhanás után állt vissza az emelkedésre, egyből egy 6%-os növekedéssel kezdve.

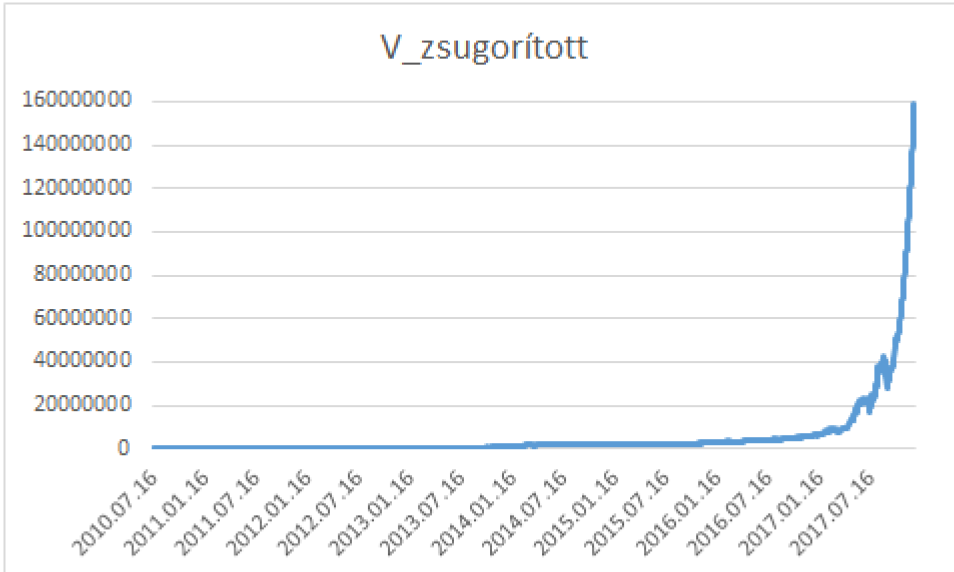
Ha a vagyonunkat Bitcoin és kockázatmentes eszközök között osztjuk szét az eredeti Kelly stratégia szerint, akkor az alábbi vagyonalakulás figyelhető meg:



15. ábra. Eredeti Kelly szerint szétosztott vagyon alakulása

Ezen is megfigyelhető, hogy laposabban indul, sőt 2013.07.16. és 2014.07.16. között egy hullámzást szinte teljesen kihagy, illetve csak kis mértékben vesz részt benne. Ám, a Kelly kritérium elveihez híven, a 2016-os évtől kezdődő növekedésben már jelentős szerepet vállal, és végeredményben jobban teljesít, mint az előbbi stratégia.

A zsugorított eljárással az alábbi ábrát kapjuk:



16. ábra. Zsugorított Kelly szerint szétosztott vagyon alakulása

Meglepően nyugtázzuk, hogy nagymértékben alulteljesít az előzőekhez képest, az eredeti eljárásnak szinte a harmadát képes eredményezni. Látható, hogy még a „nyers” Kelly-hez képest is laposabb a 2013-2014 szakaszon, és azután sincs soknak mondható hullámzása, inkább csak hellyel-közzel monoton növekszik felfelé. Ám akkor miért is lehetséges az, hogy ennyire alulmarad az eredeti kritériummal szemben?

Ha megvizsgáljuk a capped alpha-kat szemléltető 13. ábrát, szembetűnő, hogy a capped alpha már az elején óvatosan vásárol csak Bitcoint, amit tart is egy éven át, majd több számos időszakon keresztül alulmúlja a capped alpha* mennyiségét. Ennek tudatában már nem olyan meghökkentő, hogy a kisebb kockázatvállalással kisebb végső vagyont is szerzett.

Tekintsük most egyben a 3 procedúra eredményét:

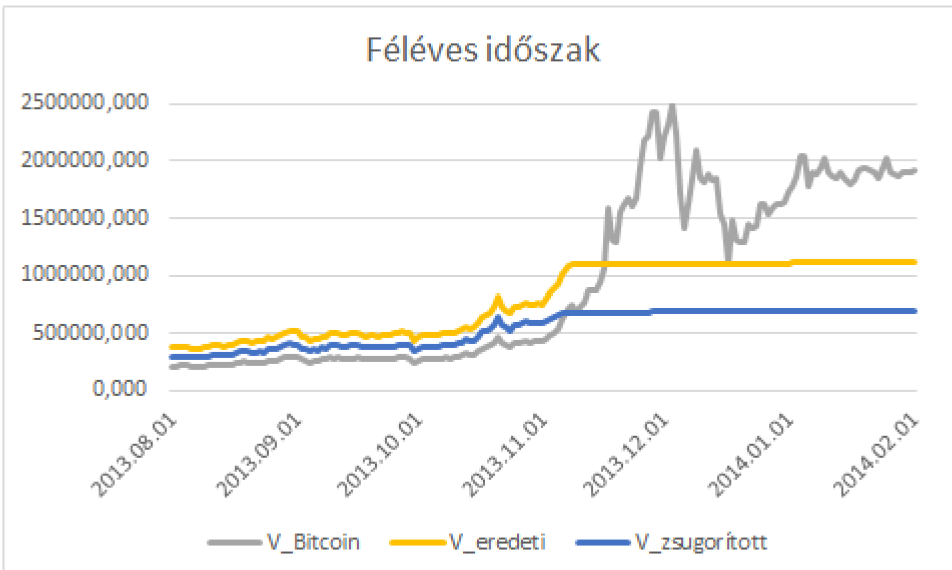
17. ábra. A 3 különböző vagyonalakulás

Jól kivehető, hogy ugyan a csak Bitcoinból álló portfólió vagyonát meredeken lehagyva menetel felfelé az átskálázott Kelly kritérium, de az eredeti stratégiával szemben hatalmas lemaradása van. A jobb szemléltethetőség érdekében egy kicsit visszavágtam a végső vagyont ábrázoló tengelyt..

18. ábra. A 3 különböző vagyonalakulás

Beigazolódott, hogy aki a Bitcoinnál merész volt az elején, ami a Kelly stratégiáról elmondható, hiszen folytonos növekedés láttán a Bitcoin vásárlására ösztönöz, míg a zsugorított kritérium csak óvatosan száll be a játékba, az bizony hatalmas vagyonra tett szert igazán rövid időn belül. Igaz ugyan, hogy a módosítatlan Kelly stratégia okozhat pénzügyi veszteségeket, de ebben a helyzetben nagyon jól helytállt.

Megfigyelhető, hogy egyes időszakokban akár teljesen más eredmény is születhet. Tekintsünk például egy fél éves kiragadott intervallumot, például 2013. augusztusától 2014. februárjáig.



19. ábra. Adott szakasz szemléltetése

Látványos, hogy 2011. novemberétől egyik Kelly stratégia sem vett részt a kiugrásokban, így ugyan a magas árfolyam emelkedésből kimaradt, de az év végi zuhanás sem érintette ezeket.

Mi történik, ha megengedjük a shortolási és tőkeáttételi alternatívát? Toljuk ki a capped alpha és capped alpha* korlátait a [-1,2] intervallumra.

20. ábra. A 3 különböző vagyonalakulás shortolás és tőkeáttétel mellett

Óriási változást ugyan nem okozott, hiszen ebben az esetben is az eredeti kritérium magasan túlszárnyalja a másik kettőt. Ami megfigyelhető, hogy sokkal erősebb kilengésekkel bír ekkor, és a jelentősebb esésekből sem igazán marad ki.

A tranzakciós díjakat a jelen állás szerint a 0,0005 BTC-s minimáldíjjal számolják, így mi is ezt az esetet alkalmaztuk. A régebbi rendszer szerint minden 0,01 BTC-nél alacsonyabb összegű tranzakció díja 0,01 BTC volt. A kockázatmentes eszköznél maradtunk a 0,001$-os nagyságrendnél, így ezek kinullázása nem mutat látványos eredményt.

5.5. Konklúzió

Sajnálatos módon a bevezetett, átskálázott Kelly stratégia őszinte meglepődésünkre egyetlen esetben sem mutatott jelentős eredményességet a másik két eljárással szemben. Sőt, az S&P500 esetében azt is láthattuk, hogy bizony az indexkövető stratégia is jobban teljesíthet, bár hozzátesszük, hogy abban az esetben az eredeti kritérium sem állta meg a helyét. Azt viszont bátran állíthatjuk, hogy az esetek erős többségében a Kelly kritériumok (legyen szó akár az eredeti vagy a zsugorított stratégiáról) magasabb végső vagyont eredményeztek, mint az átrendezés nélküli portfólió.

6. Összefoglalás

A szakdolgozat során ismertettem számos igazán érdekes cikket. Elsősorban az 1956-ban létrejött, J. L. Kelly által leírt Kelly kritériumot láthattuk. Megismerkedtünk a hosszútávú növekedési ráta fogalmával, valamint megtudtuk, hogy ezen mérték maximalizálása hosszú távon eredményesebb vagyont teremt. A számítások alapján megkaptuk, hogy az optimális befektetési hányados az $f^* = 2p - 1$, ahol p jelölési a nyerési valószínűséget. Sajnos nem minden esetben ismerjük pontosan ezt a p értéket.

Medo és társai felvetették a problémát a korlátos információ hatásával kapcsolatban. Nem túl meglepő, hogy a belsős információ (mint például a végeredmények ismerete a meccs lezajlása előtt) jelentősen megnövelheti a befektetés teljesítményét. Megvizsgálták egy belsős és külsős befektető teljesítményét, és egy végső $\Delta < \Delta(p, M)$ feltétel által a külsős befektető jobban teljesít, mint bennfentes társa. Természetesen csak aproximációs eljárást konstruáltak a p meghatározására a Δ érték közelítésének lehetőségével.
Egy rövid alfejezet erejéig foglalkoztunk a diverzifikáció hatásával is, amikor egyidejűleg M darab független, kockázatos játékba is befektet a résztvevő. Itt is az optimális f befektetési hányad problémáját vizsgálták, melyet egyváltozós esetre vezettek vissza. $M = 1$ esetben a jól ismert $f^* = 2p - 1$ eredményt láthattuk.

A diplomamunka alapját képező, Rose D. Baker és Ian G. McHale által létrehozott cikk a bizonytalansági paraméter vizsgálatára hivatott. Többször megemlítik ugyan, hogy frequentist szemléletet követnek, ám a Bayes-i eljárást is tanulmányozzák egy rövid mondat erejéig. Írásuk a hasznosságfüggvény maximalizálásra teszi a hangsúlyt a bizonytalanság figyelembevételével. Eleinte az eredeti, Kelly által írt cikkben használt logaritmikus hasznosságfüggvény vizsgálatával dolgoznak, majd általánosítják ezt kockázatkerülő esetre is. Megismerhettük a dolgozat gyakorlati részéhez vezető zsugorított Kelly stratégiát, melynek lényege, hogy a „nyers" Kelly kritérium által kiszámolt hányadot egy $0 < k < 1$ skálázási faktor segítségével csökkentsék.

Michael R. Metel 2017-es írásában, az előbbi bizonytalanság mellett a lóversenyek fogadásának világával foglalkozott.

Végül pedig átültettük a Baker és McHale által kapott stratégiát a pénzügyi világba, méghozzá S&P500 és Bitcoin befektetések segítségével. A kezdeti löketet Louis M. Rotando és Edward O. Thorpe 1992-ben megírt tanulmánya nyújtotta, melyben a Kelly kritériumot kapcsolatba hozzák a részvénypiaccal, és kutatják az optimális f^* befektetési hányadost. Egy kicsit frissebb cikk a Medo és társai által 2008-ban ismertetett írás, melyben Kelly-optimális portfóliók tanulmányozásával foglalkoztak.

A pénzügyi piacokra átvezetett stratégiát két különböző eljárással vetettem össze. Az eredeti Kelly által biztosított kritérium mellett az egyszerű indexkövető, illetve csak Bitcoinból álló portfólió teljesítményét hasonlítottam össze. A Kelly kritériumok ugyan szinte minden esetben felülmúlják az átrendezés nélküli portfólió végeredményét, ám mély sajnálatunkra a zsugorított eljárás nem teljesítette az elvárásokat. Már a kezdetekben is látható, hogy az α és α^* között nincs mérvadó különbség, csupán egy picivel óvatosabbnak mondható az átskálázott eljárás. Természetesen tranzakciós költségek figyelembevétele mellett zajlott a vizsgálat. Megvizsgáltuk a shortolás, illetve tőkeáttétel nélküli eredményeket, és érdekességképp megnéztük, mekkora változást von maga után ezen lehetőségek bevonása a befektetésekbe.

További kutatásra ad lehetőséget a kérdés, hogy vajon különböző trajektóriák szimulálása esetén (például 100 trajektória átlagát nézve) is ennyire radikális túlteljesítés látható-e a Kelly-féle kritériumok szempontjából.

Hivatkozások

[1] Baker R. D. & McHale I. G.: *Optimal Betting under Parameter Uncertainty: Improving the Kelly Criterion*, Decision Analysis **10**(3) (2013), 189–199

[2] Baker R. D. & McHale I. G.: *Making Better Decisions: Can Minimizing Frequentist Risk Help?* , International Journal of Statistics and Probability **5**(3) (2016)

[3] Chu D., Wu Y. and Swartz T. B.: *Modified Kelly criteria*, J. Quant. Anal. Sports **14**(1) (2018) 1–11

[4] Feller W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Application*, John Wiley, New York **1** (1966)

[5] Juhász, B.: *Kockázati mértékek és Kelly kritérium*, (2017) (http://publikaciok.lib.uni-corvinus.hu/publikus/szd/Juhasz_Balint.pdf).

[6] Kelly, J. L.: *A New Interpretation of Information Rate*, Bell System Technical Journal, **35**(4) (1956), 917–926.

[7] Laureti P., Medo M., Zhang Y.-C.: *Analysis of Kelly-optimal portfolios*, Journal of Quantitative Finance, **10**(7) (2010) 689–697

[8] Lensberg, T. & Schenk-Hoppé, K. R.: *On the Evolution of Investment Strategies and the Kelly Rule – A Darwinian Approach*, Review of Finance **11** (2007), 25–50.

[9] MacLean, L. C., Thorp, E. O., Ziemba W. T.: *The Kelly Capital Growth Investment Criterion: Theory and Practice*, World Scientific Press, Singapore, (2011)

[10] Márkus L.: *Eszközár Folyamatok Modellezése, Valamint Európai és Amerikai Opciók Árazása*, Eötvös Lóránd Tudományegyetem, (2017)

[11] Medo M., Pis'mak YM. & Zhang Y.: *Diversification and Limited Information in the Kelly Game*, Physica A **387**(24) (2008), 6151–6158.

[12] Metel M. R.: *Kelly Betting on Horse Races with Uncertainty in Probability Estimates*, Decision Analysis **15**(1) (2017) 47–52

[13] Murphy A.: *How to Use Kelly Criterion in Online Sports Betting*, (2015) (`https://mybookie.ag/sports-betting-guide/how-to-use-kelly-criterion/`).

[14] Rising J. K., Wyner A. J.: *Partial Kelly Portfolios and Shrinkage Estimators*, IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings (2012), 1618–1622

[15] Rotando L. M., Thorp E. O.: *The Kelly Criterion and the Stock Market*, The American Mathematical Monthly **99**(10) (1992) 922–931

[16] Shannon C. E. : *A Mathematical Theory of Communication*,In The Bell System Technical Journal **27** (1948)

[17] Thorp E. O.: *The kelly Criterion in Blackjack, Sports Betting, and the Stock Market*, Handbook of Asset and Liability Management **1** (1992) 387–428

[18] Yaari G., Solomon S.: *Cooperation Evolution in Random Multiplicative Environments*, The European Physical Journal B, **73** (2010) 625–632