Budapesti Corvinus Egyetem
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Romvári Petra

BIZTOSÍTÁSI KÖTELEZETTSÉGEK FAIR ÉRTÉKELÉSE, IDŐ- ÉS PIACKONZISZTENS AKTUÁRIUSI ÉRTÉKELÉSEK

MSc szakdolgozat

Témavezető:
Arató Miklós
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2018

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatom célkitűzése egy olyan értékelési módszer bemutatása, mely kezelni tudja egy biztosítási portfólióban megjelenő aktuáriusi és pénzügyi kockázat kettősét. A biztosítási termékek palettáján ugyanis már régóta jelen vannak olyan termékek, amelyek kockázata nem csupán valamilyen biztosítási folyamat sztochasztikájából fakad, hanem bizonyos piacon kereskedett termékek áralakulásának véletlenségéből is. Példaként említhetőek ezek között a unit-linked biztosítások, valamint a garanciális biztosítási kifizetések is. Habár sokfajta konstrukció foglal magában az aktuáriusi mellett piaci kockázatot is, a kétféle kockázattípus együttes értékelésére és kezelésére a biztosítók még mindig viszonylag kis hangsúlyt fektetnek.

A dolgozat végcélja, hogy a vonatkozó szakirodalom felhasználásával megismerkedjünk az úgynevezett idő- és piackonzisztens aktuáriusi értékelésekkel: ezen értékelések már alkalmasak lesznek arra, hogy a kétféle kockázatot együttesen kezeljék. Ilyen értékeléseket nyerhetünk a már széleskörűen használt aktuáriusi díjelvek megfelelő kiterjesztéseiből. Ahhoz azonban, hogy odáig eljussunk, elsőképp szükségünk lesz a fogalmi keretek felállítására.

Először, a második fejezetben az időkonzisztencia fogalmával ismerkedünk meg: mit értünk alatta, miért adódhat elvárásként egy értékeléssel szemben, illetve hogyan valósítható meg az aktuáriusi díjelvek időkonzisztens kiterjesztése? Ebben a fejezetben össze is fogom vetni a hagyományosan felírt aktuáriusi díjelveket a bevezetett időkonzisztens kiterjesztésükkel.

Ezt követően a harmadik fejezetben a piackonzisztencia fogalmát is bevezetjük, s megnézzük, hogy az hogyan érvényesíthető egy biztosító keretrendszerében.

Végül a két fogalom tisztázását követően az utolsó fejezetben már rátérhetünk az idő- és piackonzisztens értékelések tanulmányozására, amelyek tehát már lehetséges eszközt kínálnak arra, hogy az említett kockázatkettőst együttesen is tudjuk kezelni.

A szakdolgozat során többször is példán illusztrálunk egy-egy bevezetett megközelítést. Ez nem pusztán a könnyebb megérthetőséget segíti elő, de arra is rávilágít, hogy konkrét biztosítási szituációkban is jól alkalmazhatóak a megismertetett módszereink.

2. Időkonzisztencia

2.1. Időkonzisztens értékelések a biztosítási szektorban

Az aktuáriusi feladatok legfontosabbikai közé tartozik a biztosítási szerződések árazása: legyen szó akár egy konkrét szerződésről, akár egy teljes állomány vizsgálatáról. Vegyünk egy egyszerű példát: mennyit kérjünk egy T tartamú elérési biztosításért? Vagy általánosabban: vizsgáljunk egy olyan homogén portfóliót, amelyben valamennyi szerződés kifizetése a T. időpillanatban esedékes! A felmerülő kérdés: mennyi legyen ennek az ára?

A kérdés lehetséges megválaszolásának széles irodalma van, ugyanakkor a megközelítéseknek rendszerint közös jellemzője, hogy az árazáshoz kizárólag a kifizetés T. időpontbeli mutatóit veszik figyelembe. Gondolhatunk például a hagyományos díjkalkulációs elvekre: mind a várható érték elv, mind a szórásnégyzet elv, mind a szórás elv alapvetően a T. időpontra vonatkozó várható érték, illetve szórásnégyzet (vagy szórás) függvényeként írják fel az árat, de a háttérben meghúzódó biztosítási folyamat (például egy elérési biztosítás esetében a túlélőszám-folyamat) fejlődésdinamikájával magával, a folyamat időbeni változásának jellemzőivel nem foglalkoznak.

Ahogy Thomas Møller is hangsúlyozza Indifference pricing of insurance contracts in a product space model című cikkének bevezetőjében ([1]), az ilyen módszerek azért is vetnek fel problémákat, mert nem engedik, hogy a biztosító a $(0, T)$ intervallumon reagáljon a kockázatra s a biztosítási folyamat alakulására. Így a vizsgálódásból kizárják a viszontbiztosítási és pénzügyi piac meglétét, noha a valóságban kínálkozik lehetőség az azokon történő kereskedésre, s ezáltal a kockázat lehetséges mérséklésére és megfelelőbb kezelésére.

Az Antoon Pelsser és Ahmad Salahnejhad Ghalehjooghi által tárgyalt időkonzisztens aktuáriusi értékelés ([2]) ugyancsak a statikus vizsgálódás miatt felvetődő problémára reflektál. A szerzők tehát némileg új nézőpontból közelítik meg a kérdéskört: már figyelembe veszik a korábban elhanyagolt fejlődésdinamikát, s így fognak árat rendelni egy biztosítási szerződéshez. A hozzáállás abban az értelemben nem teljesen újszerű, hogy ez a fajta logika már régóta jelen van bizonyos pénzügyi termékek árazásánál –például opciók és derivatívák esetében–, gondoljunk csak a Fischer Black és Myron Scholtz által kidolgozott opcióárazási modellre ([3]). Igaz, pénzügyi termékek esetén a dinamikus árazás magyarázata, hogy ott az a replikálás és hedzselés elvén alapszik, amire pénzügyi termékek esetében valóban van is lehetőség.

Biztosítási szerződések árazása esetében némileg más a helyzet, elvégre például egy túlélőszám-folyamat olyan kockázatforrás a biztosító számára, amivel szemben nem tud kockázatsemleges pozíciót felvenni piacon kereskedhető termékek megvásárlásával. Mindazonáltal –már csak azért is, mert bizonyos biztosítási szerződések nem hedzselhető kockázatokon kívül hedzselhetőeket is magukban foglalnak– valóban van létjogoultsága az említett időkonzisztens árazás feltérképezésének és vizsgálatának.

Ebben a fejezetben tehát az időkonzisztens árazást fogjuk feldolgozni, mégpedig nagyrészt az Antoon Pelsser és Ahmad Salahnejhad Ghalehjooghi által írt cikkben leírtakat felhasználva. Az ő megközelítésük lényege, hogy a széles körben ismert és használt aktuáriusi díjelvek alkalmazását fogják kiterjeszteni oly módon, hogy az teljesítse az időkonzisztencia feltételét, azaz igaz legyen rá, hogy egyetlen időhorizonton értékelve ugyanazt az eredményt adja, mintha az időhorizontot tovább osztva értékelnénk pontról pontra. A fejezetben továbbá össze fogom hasonlítani az ő eredményeiket azzal, hogy mit kaptunk volna, ha "hagyományos", statikus elven áraztunk volna, tehát a t. időpontban a T-ben esedékes kifizetést a már megszokott aktuáriusi díjelvekkel kezeltük volna.

Lássunk is most neki az időkonzisztencia fogalmának bevezetéséhez, majd ismerkedjünk meg az időkonzisztens árazás mibenlétével!

2.2. Az időkonzisztencia fogalma

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $y(t)$ egy ezen értelmezett biztosítási folyamat, $\mathcal{A}_t$: $\sigma(y_r | \ 0 \leq r \leq t)$ filtráció. Az állományra vonatkozó kifizetés a T. időpillanatban fog történni, a portfólió akkori kifizetése a szóban forgó biztosítási folyamat T. pontbeli értékének, $y(T)$-nek lesz a függvénye: $f(y(T))$.

Példaképp vegyünk egy elérési biztosítást! Adott számú szerződővel indulunk: akik közülük megélik T-t, ők kifizetésre jogosultak, a többiek viszont nem. A szerződők számát modellezzük esetünkben a biztosítási folyamattal, y-nal: $y(0)$ szerződővel indulunk, a t. időpillanatban $y(t)$ a még életben lévők száma, s végül a T-t megélő $y(T)$ számú biztosítottnak tartozunk kifizetéssel. A rájuk vonatkozó teljes kifizetés tehát $y(T)$ függvénye: $f(y(T))$.

Jelöljük az árat π-vel! $\pi : \mathcal{L}^2(\mathcal{A}_T) \to \mathcal{L}^2(\mathcal{A}_t)$ feltételes kockázati mérték. Ekkor π-ről akkor mondjuk, hogy időkonzisztens, ha teljesül rá az alábbi:

$$\pi[f(y(T))|t, y(t)] = \pi[\pi[f(y(T))|s, y(s)]|t, y(t)] \quad \forall\ 0 \leq t < s \leq T.$$

Ez a felírás a feltételes várható érték toronyszabályának megfelelőt követel meg. Azt hivatott kifejezni, hogy ha a t. időpillanatban adnánk el a portfóliót, akkor ugyanannyit kérnénk érte, mintha a t. időpillanatban azért kérnénk árat, hogy az s. időpillanatban $(0 \leq t < s \leq T)$ megváljunk az akkor már $\pi(s, y(s))$ árú portfóliótól. A fenti formalizálja a fejezet bevezetésében említett követelményt, miszerint egyetlen időhorizonton árazva ugyanazt az árat kéne megszabnunk, mintha az időhorizontot tovább osztva pontról pontra áraznánk.

Az időkonzisztens értékelés arról fog szólni, hogy az árfüggvénynek valamennyi belső pontjára vonatkozóan eleget kell tennie az időkonzisztencia feltételének. Nézzük is meg pontosan, hogy ez mit jelent, miképp írható fel és valósítható meg!

2.3. Az időkonzisztens aktuáriusi értékelések

[2] alapján: az időkonzisztens árazás lényege tehát, hogy az időkonzisztencia feltételét kell alkalmaznunk. Beárazandó a t. időpillanatban egy szerződés, aminek kifizetése a T. időpontban esedékes. Hangsúlyozandó, hogy az időkonzisztencia maga egy módszer, de önmagában nem biztosít árazó formulát, így nekünk kell még külön megadni mellé egy árazási eszközt. Ahogy a feldolgozott cikk is teszi, mi is a bevett aktuáriusi díjelvekkel (a szórásnégyzet és szórás elvvel) fogunk operálni, csak nem a hagyományos, statikus módon, hanem tehát az időkonzisztencia módszerével.

Az időkonzisztens árazás megvalósítási módja, hogy a kezdő- és végpont által meghatározott időintervallumot kisebb, Δt hosszú intervallumokra osztjuk. Ezeken a kis intervallumokon már tudunk a hagyományos módon árazni, vagyis az időhorizontot tovább nem osztva felírhatjuk a szokásosan alkalmazott aktuáriusi díjelveinket a végpont kezdőpont szerinti beárazására. Elsőképp az utolsó intervallumon teszünk így: $T - \Delta t$-ben határozzuk meg az arra vonatkozó feltétellel (vagyis a feltételes várható érték és szórásnégyzet felírásával), hogy mennyit kérünk a Δt idő elteltével, T-ben esedékes portfóliókifizetésért. A szórásnégyzet elvvel illusztrálva:

$$\pi_{T-\Delta t}\big(f(y(T))\big) = \mathbb{E}\big(f(y(T))\big|T - \Delta t, y(T - \Delta t)\big) + \frac{1}{2}\alpha \mathbb{V}\mathrm{ar}\big(f(y(T))\big|T - \Delta t, y(T - \Delta t)\big),$$

ahol $\alpha \geq 0$. Az utolsó időintervallumra szóló árazással így meg is lennénk.

Ezt követően haladhatunk hátulról előrefele, a következő lépésben az előzőhöz hasonlót fogunk felírni, csak immáron a $[T-2\Delta t, T-\Delta t]$ intervallumra: a $T-2\Delta t$-beni feltételes várható érték és szórásnégyzet felírásával adjuk meg a $T-2\Delta t$ pontbeni árat a $T-\Delta t$-beni "kifizetésre" vonatkozóan (ez a "kifizetés" a T-beli ténylegesen megvalósuló kifizetésből levezetett $\pi_{T-\Delta t}$ árfüggvényből származik). A felírt követelmény biztosítja, hogy az időkonzisztencia elvárása teljesüljön a $T-2\Delta t$, $T-\Delta t$ és T pontokat illetően. Megegyezően folytathatjuk a hátulról előrefele haladást, mígnem végül elérünk a kezdőpontig, t-ig, ezzel meghatározván a módszerrel a $\pi_t(f(y(T)))$ árat.

Vegyük észre, hogy ahogy a $T-2\Delta t$, $T-\Delta t$ és T pontokat illetően teljesül az időkonzisztencia, úgy ha folytatjuk a módszert, s intervallumról intervallumra lépve árazunk, úgy az időkonzisztencia bármely olyan $[t, T]$-beli pontegyüttes esetén is igaz lesz, ahol a pontok az intervallumhatárként szereplő pontok közül kerülnek ki.

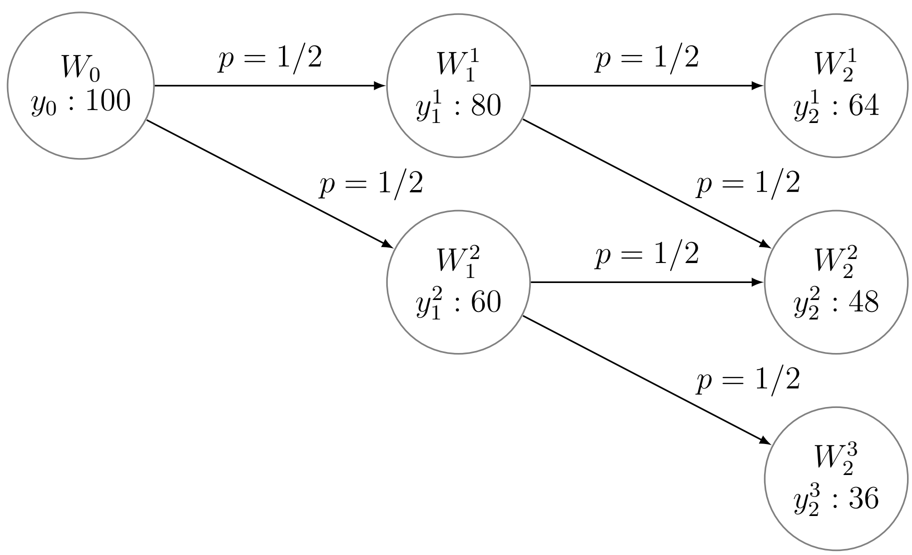
Összegezve: ez a kis időintervallumokra történő felosztás, s hátulról előrefele történő feltételes árazás biztosítja, hogy úgy adjuk meg a kezdőpontbeli árat, hogy az intervallumhatárként szereplő köztes pontok bármely választása esetén fennálljon az időkonzisztencia feltétele. Vegyük közben észre, hogy ez az időkonzisztens árazás megadható tetszőlegesen kis Δt időintervallum-hossz választása mellett is! Ebből adódóan persze arra is lehetőségünk kínálkozik, hogy $\Delta t \to 0$ határértékképzés mellett adjuk meg a keresett időkonzisztens árat. Ha pedig így járunk el, akkor bármilyen $[t, T]$-közbülső pontok választása esetén teljesülni fog az időkonzisztencia feltétele.

Letettük az időkonzisztens árazás mint módszer alapjait. A későbbiekben persze vár még ránk a feladat, hogy adott árazási eszköz (például: szórásnégyzet elv, szórás elv) mellett a biztosítási folyamat dinamikája, valamint az f kifizetésfüggvény ismeretében pontosan is leírjuk a konkrét módszert s megadjuk a keresett árat. Mielőtt azonban erre rátérnénk, még egy rövid kitérőt teszünk, s megvizsgáljuk, hogy mi mondható el a statikus megközelítések időkonzisztenciájáról.

2.4. Időkonzisztensek-e a statikus megközelítések?

A cikk szerzői ugyan nem térnek ki erre, de az új módszer megismertetésével egy időben felvetődhet bennünk a kérdés: a korábban alkalmazott statikus módszerek, az aktuáriusi díjelvek "hagyományos" felírása ezek szerint nem teljesítette az időkonzisztencia feltételét? A válasz az, hogy nem feltétlenül, sőt bizonyos speciális esetektől eltekintve rendszerint nem. Egy későbbi alfejezetben részletesen is fogunk foglalkozni azzal, hogy milyen kapcsolatban áll egymással az időkonzisztens és a statikus módszer által szolgáltatott díj, de egyelőre korlátozzuk figyelmünket arra, hogy ez a kettő nem feltétlenül esik egybe. Ezt a szórásnégyzet elv esetében egy egyszerű példán mutatjuk be.

Legyen a vizsgált biztosítási folyamat a következő: $y(0) = 100$, majd innen két lépésben, faszerűen ágazunk el: minden lépésben a folyamat értéke vagy 0.8-szeresére, vagy 0.6-szeresére változik, és a két eset megegyező valószínűségű, $p = \frac{1}{2}$. Ábrán szemléltetve: (W: a világállapot megjelölése, y : a biztosítási folyamat konkrét értéke.)



Ez egy lehetséges megbúvó biztosítási folyamat leképzése: 100 fős állományból indulunk, mely a következő időpontban 80, illetve 60 fősre csappanhat, majd a második időpontban már csak 64, 48, illetve 36 fős lehet. Elérési biztosítással foglalkozunk, vagyis a biztosító kizárólag a túlélőknek tartozik kifizetéssel, azaz jelen esetben a tartam végén életben maradt 64, 48, illetve 36 főnek. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy minden túlélő egységnyi kifizetésre jogosult: $f(y(T)) = 1 \cdot y(T) = y(T)$, továbbá a diszkontálástól is tekintsünk el!

Most tehát szórásnégyzet elvvel árazunk. Ha a statikus árazás maga időkonzisztens lenne, akkor ugyanazt az árat szolgáltatná "egyből árazva", mint köztes osztópontokat véve, és azokon keresztül árazva. Most vegyünk egyetlen köztes osztópontot, s vessük össze, hogy mit kapnánk, ha először hagyományosan, statikusan áraznánk, majd másodjára egy osztóponttal, két lépésben.

(Megjegyzés I.: alsó indexben az időtényezőt fogjuk feltüntetni, amelyre vonatkozóan számítjuk a megfelelő feltételes várható értéket és szórásnégyzetet. Megjegyzés II.: az α díjparaméterre vonatkozóan értékadással kell élnünk. Legyen $\alpha = 0.2$, s így $\frac{1}{2} \cdot \alpha = 0.1$.)

- Statikus árazás:

$$\begin{aligned}\pi_0\big(f(y(2))\big) &= \mathbb{E}_0\big(f(y(2))\big) + \frac{1}{2}\alpha\mathbb{V}\mathrm{ar}_0\big(f(y(2))\big) = \\ &= \frac{1}{4}\cdot(64+48+48+36) + 0.1\cdot\Bigg(\frac{1}{4}(64^2+48^2+48^2+36^2) - \\ &- \big(\frac{1}{4}\cdot(64+48+48+36)\big)^2\Bigg) = \\ &= \frac{1}{4}\cdot 196 + 0.1\cdot\Bigg(\frac{1}{4}\cdot 10000 - (\frac{1}{4}\cdot 196)^2\Bigg) = \\ &= 49 + 0.1\cdot\big(2500-2401\big) = 49 + 0.1\cdot 99 = 49 + 9.9 = 58.9\end{aligned}$$

Azaz hagyományosan árazva 58.9 egységet kérnénk a portfólióért.

- Osztópontos árazás:

Elsőképp az 1-es időpillanat két lehetségesen bekövetkező világállapotára vonatkozó π_1 árakat kell meghatároznunk.

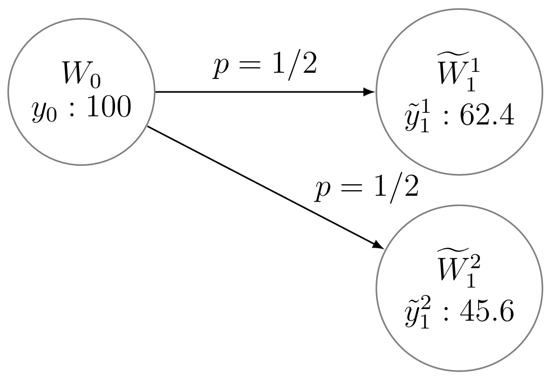
  - W_1^1-re:

$$\begin{aligned}\pi_1\big(f(y(2))\big) &= \mathbb{E}_1\big(f(y(T))|y(1)=y_1^1\big) + \frac{1}{2}\alpha\mathbb{V}\mathrm{ar}_1\big(f(y(2))|y(1)=y_1^1\big) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot(64+48) + 0.1\cdot\Bigg(\frac{1}{2}(64^2+48^2) - \big(\frac{1}{2}\cdot(64+48)\big)^2\Bigg) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot 112 + 0.1\cdot\Bigg(\frac{1}{2}\cdot 6400 - (\frac{1}{2}\cdot 112)^2\Bigg) = \\ &= 56 + 0.1\cdot\big(3200-3136\big) = 56 + 0.1\cdot 64 = 56 + 6.4 = 62.4\end{aligned}$$

– W_1^2-re:

$$\begin{aligned}\pi_1\big(f(y(2))\big) &= \mathbb{E}_1\big(f(y(T))|y(1)=y_1^2\big)+\frac{1}{2}\alpha\mathbb{V}\mathrm{ar}_1\big(f(y(2))|y(1)=y_1^2\big)=\\ &=\frac{1}{2}\cdot(48+36)+0.1\cdot\left(\frac{1}{2}(48^2+36^2)-\big(\frac{1}{2}\cdot(48+36)\big)^2\right)=\\ &=\frac{1}{2}\cdot 84+0.1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3600-(\frac{1}{2}\cdot 84)^2\right)=\\ &=42+0.1\cdot\big(1800-1764\big)=42+0.1\cdot 36=42+3.6=45.6\end{aligned}$$

Ezen kettő ismeretében a 0. időpontra vonatkozó ár is megadható, ábránk a következőre módosul:



– W_0-ra:

$$\begin{aligned}\pi_0\big(f(\widetilde{y}(1))\big) &= \mathbb{E}_0\big(f(\widetilde{y}(1))\big)+\frac{1}{2}\alpha\mathbb{V}\mathrm{ar}_0\big(f(\widetilde{y}(1))\big)=\\ &=\frac{1}{2}\cdot(62.4+45.6)+0.1\cdot\left(\frac{1}{2}(62.4^2+45.6^2)-\big(\frac{1}{2}\cdot(62.4+45.6)\big)^2\right)=\\ &=\frac{1}{2}\cdot 108+0.1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 5973.12-(\frac{1}{2}\cdot 108)^2\right)=\\ &=54+0.1\cdot\big(2986,56-2916\big)=54+0.1\cdot 70.56=54+7.056=61.056\end{aligned}$$

Ezzel az osztópontos, kétlépéses esetre is meghatároztuk a keresett árat. Vessük is össze a statikus módszerrel kapottal!

	A módszer szerinti ár 0-ban
Statikus árazás	58.9
Osztópontos árazás	61.056

Látható, hogy a két ár nem esik egybe. Ezzel sikerült egy konkrét példát mutatnunk, mely alátámasztja, hogy a hagyományos, statikus árazási módszerre nem feltétlenül teljesül az időkonzisztencia követelme. Ez persze azt is jelenti, hogy ha a későbbiekben már időkonzisztens módon árazunk, akkor a korábbi, statikus ártól eltérő eredményt kaphatunk, hiába használjuk ugyanazt az aktuáriusi díjelvet és megegyező paramétert.

Ennek tisztázása és hangsúlyozása után rátérhetünk arra, hogy közelebbről is megismerkedjünk az időkonzisztens árazással mint elvvel magával, s megnézzük, milyen árakat fog adni különböző feltételezések mellett.

Még egyszer: az időkonzisztens árazás során a vizsgált $[t, T]$ intervallumot előbb kis intervallumokra osztjuk, s ezeken lokálisan árazunk valamilyen aktuáriusi díjelv segítségével. Ezt követően az intervallumok hosszával 0-hoz tartunk, ezzel elérve, hogy a teljes intervallum tetszőleges belső pontjait választva fennálljon az időkonzisztencia követelménye.

A dolgozatban két aktuáriusi elvre vezetjük le az időkonzisztens árazás képleteit, ezek a szórásnégyzet elv és a szórás elv lesznek. Elsőképp a szórásnégyzet elvvel ismerkedünk meg közelebbről.

2.5. A szórásnégyzet elv

Ebben az alfejezetben Antoon Pelsser és Ahmad Salahnejhad Ghalehjooghi Time-Consistent Actuarial Valuations című cikkje alapján fogunk dolgozni ([2]).

2.5.1. A szórásnégyzet elv felírása

Vizsgálatunk első alanya a szórásnégyzet elv. Egyelőre diszkontálással nem foglalkozunk, arra a fejezet egy későbbi alfejezetében fogunk kitérni.

Fontos hangsúlyozni, hogy ebben az alfejezetben a kezdő időpontunk kivételesen nem t, hanem 0 lesz, s ezáltal nem is a $[t, T]$ időintervallumot fogjuk részintervallumokra osztani, hanem a $[0, T]$-t. Ennek a változtatásnak az az oka, hogy ez az alfejezet a kis intervallumokon történő árazásra fog fókuszálni, ami miatt sokszor lesz szükségünk időváltozókra, s praktikusabbnak tűnt fenntartani most t-t az elsődleges időváltozó jelölésére, mintsem még egy új karaktert bevezetni. Továbbá ezzel a jelölésrendszerrel a feldolgozott cikk jelöléseivel is összhangban tudunk maradni.

A biztosítási folyamat kövesse az alábbi sztochasztikát (most tehát t nem a kezdőpont, hanem tetszőleges belső pont):

$$dy(t) = a(t, y(t))dt + b(t, y(t))dW(t)$$

$t \geq 0$ esetén A_t jelöli a megfelelő filtrációt. $W(t)$ standard Wiener-folyamat, $a(t, y(t))$ és $b(t, y(t))$ folytonosak és adaptáltak. $y(t)$ Itô-folyamat, négyzetesen integrálható.

Írjuk fel az időkonzisztens árazást! A korábban említettek értelmében ekkor először a $[0, T]$ intervallumot kis időintervallumokra kell felosztanunk, s ezeken egyesével áraznunk, esetünkben egyesével fel kell írnunk rájuk a szórásnégyzet elvet. Nézzük, hogy pontosan mit is jelent ez! Egy vizsgált intervallumunk $[t, t + \Delta t]$, ekkor a t-beni ár a $t + \Delta t$-re vonatkozó feltételes várható érték és variancia függvényeképp az alábbiként áll elő (felső indexben a szórásnégyzet, variancia V betűjét tüntetjük fel):

$$\pi^V(t, y(t)) = \mathbb{E}_t[\pi^V(t + \Delta t, y(t + \Delta t))|A_t] + \frac{1}{2}\alpha \mathbb{V}\mathrm{ar}_t[\pi^V(t + \Delta t, y(t + \Delta t))|A_t] \tag{1}$$

(A továbbiakban a jelölés megkönnyítése érdekében le fogjuk hagyni a feltétel jelzését, vagyis valamennyi t-re vonatkozó várható érték, illetve szórásnégyzet az A_t filtrációra vett feltételes értéket fogja jelenteni.)

Tegyük fel, hogy π^V kétszer folytonosan differenciálható t-ben, továbbá a π_t, π_y, π_{yy} deriváltak folytonosak! Ugyancsak a jelölés megkönnyítése érdekében a továbbiakban az integrandusokban $t \leq s \leq t + \Delta t$ esetén a $\pi_t(s, y(s)), \pi_y(s, y(s)), \pi_{yy}(s, y(s))$ értékeket röviden π_t, π_y, π_{yy}-vel fogjuk jelölni. Hasonlóan járunk el az $a(s, y(s))$ és $b(s, y(s))$ folyamatok esetén is, ezekre a-ként, illetve b-ként fogunk hivatkozni.

Ahhoz, hogy a szórásnégyzet elvet alkalmazhassuk a $[t, t + \Delta t]$ intervallumra, ismernünk kell a $t + \Delta t$-beli várható értéket és szórásnégyzetet. Az Itô-formula alkalmazásával felírható $\pi^V(t + \Delta t, y(t + \Delta t))$ és $\left(\pi^V(t + \Delta t, y(t + \Delta t))\right)^2$ sztochasztikája, azokból pedig meghatározható a keresett várható érték és szórásnégyzet. Írjuk is fel a formulát, nézzük meg, milyen alakot ölt $\pi^V(t + \Delta t, y(t + \Delta t))$ és $\left(\pi^V(t + \Delta t, y(t + \Delta t))\right)^2$!

$$\pi^V(t + \Delta t, y(t + \Delta t)) = \pi^V(t, y(t)) + \int_t^{t+\Delta t} \left(\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V\right)ds + \int_t^{t+\Delta t} b\pi_y^V dW(s) \tag{2.1}$$

A jelölés könnyebbsége érdekében π^{V2} jelölje $(\pi^V)^2$-t, ekkor:

$$\begin{aligned}\pi^{V2}(t+\Delta t, y(t+\Delta t)) &= \pi^{V2}(t, y(t)) + \int_t^{t+\Delta t}\left((\pi^{V2})_t + a(\pi^{V2})_y + \frac{1}{2}b^2(\pi^{V2})_{yy}\right)ds+\\ &+\int_t^{t+\Delta t} b(\pi^{V2})_y dW(s) =\\ &= \pi^{V2}(t, y(t)) + \int_t^{t+\Delta t}\left(2\pi^V\pi_t^V + 2a\pi^V\pi_y^V + b^2((\pi_y^V)^2 + \pi^V\pi_{yy}^V)\right)ds+\\ &+\int_t^{t+\Delta t} 2b\pi^V\pi_y^V dW(s) \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Használjuk ki a Brown-mozgás martingáltulajdonságát ($t \leq s$)! Ennek értelmében megadhatóak az előbbi 2.1-es és 2.2-es egyenletek esetében a keresett várható értékek. Ezek az alábbiak lesznek:

$$\mathbb{E}\big[\pi^V(t+\Delta t, y(t+\Delta t))\big] = \pi^V(t, y(t)) + \mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\Delta t}(\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V)ds\right] \qquad (3.1)$$

$$\mathbb{E}[\pi^{V2}(t+\Delta t, y(t+\Delta t))] = \pi^{V2}(t, y(t)) + \mathbb{E}_t\left[\int_t^{\Delta t}[2\pi^V(\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V)) + (b\pi_y^V)^2]ds\right] \qquad (3.2)$$

A 3.1-es összefüggést négyzetre emelve az alábbit is megkaptuk:

$$\begin{aligned}\left[\mathbb{E}\big[\pi^V(t+\Delta t, y(t+\Delta t))\big]\right]^2 =& \pi^{V2}(t, y(t)) + 2\pi^V(t, y(t))\cdot\mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\Delta t}(\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V)ds\right]+\\ &+\left(\mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\Delta t}(\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V)ds\right]\right)^2 \qquad (3.3)\end{aligned}$$

A 3.3-as és a 3.2-es összefüggések különbségét véve a keresett szórásnégyzet, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_t[\pi^V(t+\Delta t), y(t+\Delta t)]$ is megadható:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}_t[\pi^V(t+\Delta t), y(t+\Delta t)] =& \mathbb{E}_t\left[\int_t^{\Delta t}[2\pi^V(\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V)) + (b\pi_y^V)^2]ds\right]-\\ &-2\pi^V(t, y(t))\cdot\mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\Delta t}(\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V)ds\right]-\\ &-\left(\mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\Delta t}(\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V)ds\right]\right)^2 \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Ezek ismeretében térjünk vissza a kiindulási egyenletünkhöz, a szórásnégyzet elv $[t, t+\Delta t]$ intervallumra történő felírásához! Az előbbi eredményeink alapján behelyettesíthetjük a korábban keresett várható értéket és szórásnégyzetet, és megnézhetjük, milyen formát ölt így az 1-es összefüggés. Most már feltüntetjük az argomentumban $(s, y(s))$-t, hogy értelemszerűen meg legyenek különböztetve a függvényértékek a $(t, y(t))$ helyen felvett értékektől. Egyszerűsítéseket követően az alábbit kapjuk:

$$\begin{aligned}\pi^V(t,y(t)) = \pi^V(t,y(t)) + \mathbb{E}_t\Big[\int_t^{t+\Delta t} \pi_t^V(s,y(s)) + a\pi_y^V(s,y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s,y(s))ds\Big] + \\ + \frac{1}{2}\alpha\mathbb{E}_t\Big[\int_t^{t+\Delta t}(b\pi_y^V(s,y(s)))^2 ds\Big] + \frac{1}{2}\alpha\Big[2\mathbb{E}_t\int_t^{t+\Delta t}(\pi^V(s,y(s)) - \pi^V(t,y(t))\cdot \\ \cdot\Big(\pi_t^V(s,y(s)) + a\pi_y^V(s,y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s,y(s))\Big)ds\Big] - \\ - \frac{1}{2}\alpha\Big(\mathbb{E}_t\int_t^{t+\Delta t}(\pi_t^V(s,y(s)) + a\pi_y^V(s,y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s,y(s)))ds\Big)^2\end{aligned} \tag{4.1}$$

Átrendezés után leoszthatunk Δt-vel, majd vehetjük mindkét oldal határértékét $\Delta t \to 0$-ban.

$$\begin{aligned}0 = \mathbb{E}_t\Big[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\pi_t^V(s,y(s)) + a\pi_y^V(s,y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s,y(s)) + \frac{1}{2}\alpha(b\pi_y^V(s,y(s)))^2 ds\Big] + \\ + \alpha\mathbb{E}_t\Big[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\big(\pi^V(s,y(s)) - \pi^V(t,y(t))\big)\Big(\pi_t^V(s,y(s)) + a\pi_y^V(s,y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s,y(s))\Big)ds\Big] - \\ - \frac{1}{2}\alpha\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big(\mathbb{E}_t\Big[\int_t^{t+\Delta t}\pi_t^V(s,y(s)) + a\pi_y^V(s,y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s,y(s))ds\Big]\Big)^2\end{aligned} \tag{4.2}$$

Határértékeket kiszámolva az első sorban, s a második sor első szorzótényezőjét kifejtve:

$$\begin{aligned}0 = \pi_t^V(t,y(t)) + \alpha\pi_y^V(t,y(t)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(t,y(t)) + \frac{1}{2}\alpha\big(b\pi_y^V(t,y(t))\big)^2 + \\ + \alpha\cdot\mathbb{E}_t\Big[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\pi^V(s,y(s))\Big(\pi_t^V(s,y(s)) + a\pi_y^V(s,y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s,y(s))\Big)ds\Big] - \\ - \alpha\cdot\big(\pi^V(t,y(t))\big)\cdot\mathbb{E}_t\Big[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\Big(\pi_t^V(s,y(s)) + a\pi_y^V(s,y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s,y(s))\Big)ds\Big] - \\ - \frac{1}{2}\alpha\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big(\mathbb{E}_t\Big[\int_t^{t+\Delta t}(\pi_t^V(s,y(s)) + a\pi_y^V(s,y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s,y(s)))ds\Big]\Big)^2\end{aligned} \tag{4.3}$$

Az egyenlőség jobb oldalának első sorát abból kaptuk, hogy korábban feltettük π_t, π_y, π_{yy}, továbbá a és b folytonosságát, s ebből adódóan ez a határértékképzés a t-beli függvényértékeket fogja adni.

Vizsgáljuk a jobb oldal második és harmadik sorát! Ugyancsak a megfelelő függvényfolytonosságokból adódóan határértékük az alábbi lesz (előbb pozitív, majd negatív előjellel): $\alpha \cdot \pi^V(t, y(t)) \cdot \left(\pi_t^V(t, y(t)) + a\pi_y^V(t, y(t)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(t, y(t))\right)$. Minthogy ez a kifejezés egyszer tehát pozitívként, egyszer pedig negatívként szerepel, így az összeadásban a két sor kinullázza egymást.

A jobb oldal negyedik sora esetében az alábbi átalakítást végezhetjük:

$$-\frac{1}{2}\alpha \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\mathbb{E}_t \int_t^{t+\Delta t} \pi_t^V(s, y(s)) + a\pi_y^V(s, y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s, y(s))ds\right)^2 =$$

$$-\frac{1}{2}\alpha \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\mathbb{E}_t \int_t^{t+\Delta t} \pi_t^V(s, y(s)) + a\pi_y^V(s, y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s, y(s))ds\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\mathbb{E}_t \int_t^{t+\Delta t} \pi_t^V(s, y(s)) + a\pi_y^V(s, y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s, y(s))ds\right) =$$

bevíve a határértékképzést az első tényezőbe:

$$= -\frac{1}{2}\alpha\mathbb{E}_t\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \pi_t^V(s, y(s)) + a\pi_y^V(s, y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s, y(s))ds\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\mathbb{E}_t \lim_{\Delta t \to 0} \int_t^{t+\Delta t} \pi_t^V(s, y(s)) + a\pi_y^V(s, y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s, y(s))ds\right)$$

Belátjuk, hogy ez a szorzat nullával egyenlő. A feladatunk alapvetően a két várható értékként felírt szorzótényező meghatározása. A kettő között lényegi különbség, hogy az egyikben megjelenik az $\frac{1}{\Delta t}$ szorzóként, a másikban viszont nem, és ez jelentős eltérést eredményez.

- $\mathbb{E}_t\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \pi_t^V(s, y(s)) + a\pi_y^V(s, y(s)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s, y(s))ds\right)$ határértékkel nem sokkal korábban találkoztunk, egészen pontosan a 4.2-es összefüggés első összeadandó tagjában. Ahogy ez megállapításra került, folytonossági okok miatt a keresett határérték a kifejezés $(t, y(t))$ pontban felvett értéke lesz, mégpedig: $\pi_t^V(t, y(t)) + \alpha\pi_y^V(t, y(t)) + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(t, y(t))$. Ez egy véges értékű szorzótényező.

- $\mathbb{E}_t\bigg(\lim_{\Delta t\to 0}\int_t^{t+\Delta t}\pi_t^V(s,y(s))+a\pi_y^V(s,y(s))+\frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(s,y(s))ds\bigg)$ viszont "üres" integrállá fog redukálódni a $\frac{1}{\Delta t}$ szorzótényező hiányában, így értéke 0 lesz.

Vagyis a 4.3-as összefüggés negyedik sora egy véges érték és egy 0-s tényező szorzata, így maga is 0 lesz.

Ezek alapján elmondható, hogy a 4.3-as összefüggés jobb oldalának kizárólag az első sora fog 0-tól különböző értéket felvenni, következésképp az az alábbi egyszerűbb alakot fogja ölteni:

$$0=\pi_t^V(t,y(t))+\alpha\pi_y^V(t,y(t))+\frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V(t,y(t))+\frac{1}{2}\alpha\big(b\pi_y^V(t,y(t))\big)^2 \tag{4.4}$$

Ezzel meg is kaptuk a szórásnégyzet elvhez tartozó parciális differenciálegyenletet:

$$\pi_t^V+a\pi_y^V+\frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V+\frac{1}{2}\alpha(b\pi_y^V)^2=0 \tag{5.1}$$

A hozzá tartozó peremfeltétel pedig:

$$\pi^V(T,y(T))=f(y(T)) \tag{5.2}$$

Foglaljuk össze, mire jutottunk!

Időkonzisztens árazási alapon felírtuk a szórásnégyzet elvet. Ennek értelmében a kezdőponttól a végpontig tartó időintervallumot kisebb intervallumokra bontottuk, s valamennyi ilyen intervallum esetén a szórásnégyzet elvnek megfelelően áraztunk. Egy kis időintervallum kezdőpontbeli ára a végpontbeli várható érték és szórásnégyzet függvénye. Ezen várható érték és szórásnégyzet az Itô-formula alkalmazásával megadható az intervallumon vett megfelelő integrálok összegeként. Az így felírt összefüggéseket alakítva egy parciális differenciálegyenletet tudtunk levezetni, amely esetén $\pi^V(T,y(T))=f(y(T))$ peremfeltételnek kell teljesülnie, elvégre biztosítói kifizetés kizárólag a T. időpontban esedékes, így a biztosító számára a portfólió pontosan annyiba kerül ekkor ($\pi^V(T,y(T))$), mint amennyit ekkor kifizetnie szükséges ($f(y(T))$).

Lássuk tehát, hogy mi a levezetésből megkapott parciális differenciálegyenlet megoldása!

2.5.2. Feynman-Kac formula

A keresett ár meghatározásához szükségünk lesz a Feynman-Kac formulára. A Richard Feynman és Mark Kac neveit viselő összefüggés kapcsolatot teremt, illetve ír le bizonyos parabolikus parciális differenciálegyenletek és sztochasztikus folyamatok között. A formula segítségével például felírhatóak egyes parciális differenciálegyenletek megoldásai egy megfelelő sztochasztikus folyamat feltételes várható értékeként. Feladatunk során pontosan erre lesz szükségünk, nézzük is tehát a formulát! Az alábbi parciális differenciálegyenletet vizsgáljuk:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\mu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+\frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-V(x,t)u(x,t)+g(x,t)=0, \qquad (6.1)$$

amely $\forall x \in \mathbb{R}$ és $t \in (0,T)$ esetén fennáll, továbbá eleget tesz az $u(x,T)=\phi(x)$ peremfeltételnek. μ, σ, V, g és ϕ eleve adott függvények, T paraméter. $u:\mathbb{R}\times T\to\mathbb{R}$-t keressük. A Feynman-Kac formula értelmében ekkor u előáll az alábbi feltételes várható érték alakjában:

$$u(x,t)=\mathbb{E}^Q\left[\int_t^T e^{-\int_t^r V(X_\tau,\tau)d\tau}g(X_r,r)dr+e^{-\int_t^T V(X_\tau,\tau)d\tau}\phi(X_T)\middle| X_t=x\right], \qquad (6.2)$$

ahol a várható érték azon Q valószínűségi mérték alatt értendő, amelyre X Itô-folyamat a $dX=\mu(X,t)dt+\sigma(X,t)dW^Q$ sztochasztikával és az $X_t=x$ induló ponti peremfeltétellel. ($W^Q(t)$ Brown-mozgás Q mérték alatt.)

Ezt a formulát fogjuk tehát használni a keresett ár meghatározásához, de előbb még szükségünk van arra, hogy a parciális differenciálegyenletünket megfelelő alakra hozzuk.

2.5.3. A parciális differenciálegyenlet explicit megoldása

Jelenleg az alábbi egyenlet megoldását keressük:

$$\pi_t^V+a\pi_y^v+\frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V+\frac{1}{2}\alpha(b\pi_y^V)^2=0 \qquad (7.1)$$

A négyzetes tag jelenléte miatt ez egy nemlineáris egyenlet, amit ebben a formában nem tudunk megoldani. Mindazonáltal megfelelő transzformálással lineárissá tudjuk alakítani, amire már alkalmazható lesz a korábban ismertetett eszközünk. Írjuk fel rá tehát a Hopf-Cole transzformációt! Legyen $h^V(t,y):=e^{\alpha\pi^V(t,y)}$. Ekkor természetesen invertálással kifejezhető $\pi^V(t,y)$ is $h^V(t,y)$ függvényében, mégpedig: $\pi^V(t,y)=\frac{1}{\alpha}\ln h^V(t,y)$.

Írjuk fel $\pi^V(t,y)$ megfelelő deriváltjait is:

$$\pi^V_t = \frac{1}{\alpha}\frac{h^V_t}{h^V}, \qquad \pi^V_y = \frac{1}{\alpha}\frac{h^V_y}{h^V}, \qquad \pi^V_{yy} = \frac{1}{\alpha}\frac{h^V_{yy}h^V - (h^V_y)^2}{(h^V)^2}. \tag{7.2}$$

Ezeket behelyettesítve a 7.1-es összefüggésbe a négyzetes tagok ki fogják egymást oltani, s végül az alábbira jutunk:

$$h^V_t + ah^V_y + \frac{1}{2}b^2h^V_{yy} = 0 \tag{7.3}$$

Látható, hogy valóban sikerült a transzformációnak köszönhetően megszabadulni a négyzetes tagtól, s immáron egy lineáris parciális differenciálegyenlet megoldását keressük. A hozzá tartozó peremfeltétel (a korábbi, π-re vonatkozó peremfeltétel h függvényében felírva): T pontban teljesítendő, hogy $h^V(T,y(T)) = e^{\alpha\pi^V(T,y(T))} = e^{\alpha f(y(T))}$.

Vegyük észre, hogy a 7.3-as egyenlet már olyan alakú, amire alkalmazható a Feynman-Kac formula! Nézzük is meg, mit kapunk belőle: elsőképp írjuk fel, hogy a 6.1-es felírásban szereplő függvényeknek az esetünkben mik felelnek meg!

- $u := h$
- $\mu := a$
- $\sigma := b$
- $V := 0$ (azonosan 0 függvény)
- $g := 0$ (azonosan 0 függvény)
- a peremfeltételből: $\phi(y(T)) = e^{\alpha f(y(T))}$

Ezeket behelyettesítve az alábbira jutunk (most nem 0-ra, hanem t-re felírva):

$$h^V(t,y) = \mathbb{E}^Q\big[e^{\alpha f(y(T))}\big|y(t)=y\big]. \tag{8.1}$$

Azaz π-re vonatkozóan:

$$\pi^V(t,y) = \frac{1}{\alpha}\ln\mathbb{E}^Q\big[e^{\alpha f(y(T))}\big|y(t)=y\big]. \tag{8.2}$$

Vagyis amennyiben időkonzisztens árazási módszerrel árazunk be egy biztosítási portfóliót a szórásnégyzet elv alkalmazása mellett, úgy (a diszkontálást egyelőre figyelembe nem véve) explicit formulát tudunk felírni a portfólió árára. A formula által szolgáltatott konkrét érték kiszámolásához szükségünk van $f(y(T))$ momentumgeneráló függvényére, annak ismeretében pedig már kiszámolható a keresett ár. (Megjegyzés: ugye $f(y(T))$ maga a biztosító összkifizetése, elvégre kizárólag a T. időpontban történik kifizetés, amely akkor $f(y(T))$.) Minden olyan esetben tehát, ahol ismert $f(y(T))$ momentumgeneráló függvénye, a keresett érték könnyedén meghatározható.

Összefoglalás

Ebben az alfejezetben az időkonzisztens árazás azon alesetével ismerkedtünk meg, melyben a szórásnégyzet elvvel operálunk. Először a sztochasztikus analízis módszereit alkalmazva egy parciális differenciálegyenlet megoldására vezettük vissza a feladatot. Ezt követően ezen egyenlet transzformálásával olyan alakra sikerült hozni a megoldandó problémát, hogy alkalmazni tudjuk rá a Feynman-Kac formulát. A formula felírásával végül explicit alakját tudtuk megadni a keresett árnak, mely a végső kifizetés momentumgeneráló függvényének ismeretében már konkrétan kiszámolható.

Hátra van még annak a figyelembe vétele, hogy a pénznek időértéke is van, így magát a diszkontálást is bele kell foglalnunk az árazási metódusunkba. Lássuk tehát, hogy ez hogyan valósítható meg!

2.5.4. A szórásnégyzet elv diszkontálással

Értelemszerűen adódik az igény, hogy az árazási eljárás magába foglalja a diszkontálást is. Minthogy a biztosítási szerződések maguk igen hosszú tartamúak is lehetnek, így nem pusztán elméleti megfontolásból van erre szükség, de a diszkontálási tényezőnek meghatározó hatása is van az árra. Nézzük meg tehát, hogy a pénz időértékének számításba vételével hogyan írható fel a keresett ár ugyancsak időkonzisztens árazási módszerrel, a szórásnégyzet elv alkalmazásával.

Mielőtt nekilátunk a feladatnak, tegyünk egy fontos megfigyelést, pontosabban állapítsuk meg, hogy az árazás megadásánál milyen mértékegységekkel dolgoztunk! Újra felírva az 1-es összefüggést:

$$\pi^V(t, y(t)) = \mathbb{E}_t[\pi^V(t+\Delta t, y(t+\Delta t))|A_t] + \frac{1}{2}\alpha \mathbb{V}\mathrm{ar}_t[\pi^V(t+\Delta t, y(t+\Delta t))|A_t].$$

Leolvasható, hogy a várható érték és a szórásnégyzet formájában különböző mértékegységekben kifejezett értékekkel kerülünk szembe: míg a várható érték az adott valutában, például forintban kifejezett, addig a szórásnégyzet ennek második hatványában. Ahhoz, hogy a felírt összefüggés jobb oldalának két tagja értelmesen összeadható legyen, el kellene érnünk, hogy a két összeadandó azonos mértékegységgel jelenjen meg. Amennyiben például a második tagban megjelenő α szorzótényezőt magát is mértékegységgel rendelkezőnek választanánk, mégpedig például forintban történő megadás esetén $\frac{1}{Ft}$-nak, akkor elérhetnénk, hogy a különböző dimenziók már ne okozzanak gondot, elvégre ahogy $\mathbb{E}_t$, úgy immáron $\frac{1}{2}\alpha\mathbb{V}\mathrm{ar}_t$ is a valuta első hatványában lenne kifejezve.

Ez tehát egy fontos észrevétel, mindenképpen figyelnünk kell a különböző hatványok megjelenéséből adódó mértékegységbeli differenciára.

Mindazonáltal a diszkontálás hozzávételekor máshogy fogjuk orvosolni az eltérő mértékegységekből adódó problémát. Tesszük ezt azért, mert ezen másképp történő orvoslás egyben azt is biztosítani fogja, hogy a diszkontálás maga is figyelembe vegyen véve. A korábban használt α helyett egy abszolút, mértékegység nélküli szorzóra térünk át, ezt δ-val jelöljük. δ-t viszont korrigálni szükséges, elvégre a szórásnégyzet szorzótényezőjének $\frac{1}{Ft}$-os mértékegységgel kell szerepelnie. Ha leosztjuk δ-t egy úgynevezett benchmark árszinttel, akkor újból $\frac{1}{Ft}$-os mértékegységgel jelenik meg a szórásnégyzet együtthatója. Ez a benchmark árszint a T. időpontra vonatkozik, értéke: X_T (a nulladik időpontban ez az árszint X_0), mértékegysége: az adott valuta. Feltéve, hogy a kockázatmentes kamatláb r, ezen X_T egyenlő lesz X_0e^{rT}-vel. Így a szórásnégyzet elv újraírható az alábbi formában (ez egy időhorizontra történő, tehát statikus felírás):

$$\Pi_0^V(f(y(T))) = \mathbb{E}_0[f(y(T))] + \frac{1}{2}\frac{\delta}{X_0e^{rT}}\mathbb{V}\mathrm{ar}_0[f(y(T))]. \tag{9}$$

Mi történik tehát? Egyrészt mértékegység szempontjából rendben van a felírás. Másrészt vegyük észre, hogy $\Pi_0^V(f(y(T)))$ már "forward árban kifejezett". Az X_0e^{rT}-vel történő leosztás csak a benchmark szintjét korrigálta, de mind a várható érték, mind a szórásnégyzet T-beni értéken lett megadva. Így amennyiben egy korábbi időpontbeli árat akarunk megkapni (ahogy történni fog ez az időkonzisztens felírásnál, mikor $\pi_t^V(t, y(t))$ a $t + \Delta t$-beli várható érték és szórásnégyzet függvényeként lesz kifejezve), úgy ezt akkori jelenértékre kell hoznunk, azaz diszkontálnunk szükséges. Lássuk, hogy mi történik, mikor ezennel már $\pi_t^V(t, y(t))$-t kifejezve a $(t, t + \Delta t)$ intervallumra írjuk fel a formulát:

$$\pi^V(t, y(t)) = e^{-r\Delta t}\Big(\mathbb{E}_t[\pi^V(t+\Delta t, y(t+\Delta t))] + \frac{1}{2}\frac{\delta}{X_0e^{rT}}\mathbb{V}\mathrm{ar}_t[\pi^V(t+\Delta t, y(t+\Delta t))]\Big). \tag{10}$$

Oldjuk meg az egyenletet!

Emlékezzünk rá, hogy korábban, a diszkontálás elhanyagolása mellett is hasonló megoldandó egyenlettel álltunk szemben (1-es összefüggés). A mostani felírást a korábbitól kizárólag két szorzó jelenléte különbözteti meg (a jobb oldal $e^{-r\Delta t}$ együtthatója, illetve a variancia α helyetti $\frac{\delta}{X_0 e^{rT}}$ együtthatója). A már akkor ismertetett módon most is az Itô-formulát fogjuk alkalmazni, $[t, t+\Delta t]$-n vett integrálok összegeként fogjuk kifejezni $\pi^V(t+\Delta t, y(t+\Delta t))$ várható értékét és szórásnégyzetét.

Átalakításokat követően kapjuk a következőt (a könnyebb áttekinthetőség érdekében ahol egyértelműen $(s, y(s))$ az argomentum, ott ezt az integrálokban nem tüntettük fel):

$$\begin{aligned}(e^{r\Delta t}-1)\cdot\pi^V(t,y(t)) = \mathbb{E}_t\Big[\int_t^{t+\Delta t}\big(\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V\big)ds\Big] + \\ + \frac{1}{2}\frac{\delta}{X_0 e^{rT}}\mathbb{E}_t\Big[\int_t^{t+\Delta t}(b\pi_y^V)^2 ds\Big] + \\ + \frac{1}{2}\frac{\delta}{X_0 e^{rT}}\Big[2\mathbb{E}_t\int_t^{t+\Delta t}\big(\pi^V(s,y(s)) - \pi^V(t,y(t))\big)\cdot\Big(\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V\Big)ds\Big] - \\ - \frac{1}{2}\frac{\delta}{X_0 e^{rT}}\Big(\mathbb{E}_t\int_t^{t+\Delta t}(\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V)ds\Big)^2 \end{aligned} \tag{11.1}$$

Ahogy ezt megelőzően is eljártunk, most is osztjuk az egyenlet mindkét oldalát Δt-vel, majd $\Delta t \to 0$ határértéket veszünk. Így az alábbi parciális differenciálegyenletet kapjuk:

$$\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V + \frac{1}{2}\frac{\delta}{X_0 e^{rT}}(b\pi_y^V)^2 - r\pi^V = 0 \tag{11.2}$$

A parciális differenciálegyenlet linearizálása most a $h^V(t,y) = e^{\frac{\delta}{X_0 e^{rT}}\pi^V(t,y)}$-ra való áttéréssel történik. A h-ra vonatkozó egyenlet megoldása végül elvezet a keresett megoldáshoz, mégpedig (immáron nem 0-ra, hanem általános t-re felírva, elvégre a szerződés egy köztes időpontban is beértékelhető):

$$\pi^V(t,y) = \frac{X_0 e^{rt}}{\delta}\ln\mathbb{E}\Big[e^{\frac{\delta}{X_0 e^{rT}}f(y(T))}\Big| y(t) = y\Big] \tag{11.3}$$

Összefoglalás

Ebben az alfejezetben megvizsgáltuk, hogy időkonzisztens árazási módszerrel, a szórásnégyzet elv alkalmazásával milyen árat állapíthatunk meg egy T. időpontbeli $f(y(T))$

kifizetésű portfólió esetében, ahol $y(t)$ egy eleve adott sztochasztikájú biztosítási folyamat volt. Előbb a diszkontálás elhanyagolásával, majd a diszkontálást is figyelembe véve áraztunk. Egy-egy parciális differenciálegyenlet megoldására vezettük vissza a feladatokat, majd ezeket megoldva egy-egy feltételes várható érték alakjában tudtuk felírni az árakat. A keresett árak a T. pontbeli kifizetés, $f(y(T))$ momentumgeneráló függvényének ismeretében már kiszámolhatóak.

2.6. A szórás elv

Ebben az alfejezetben továbbra is Antoon Pelsser és Ahmad Salahnejhad Ghalehjooghi Time-Consistent Actuarial Valuations című cikkét fogjuk feldolgozni ([2]).

2.6.1. A szórás elv felírása

A korábbi alfejezetben egy gyakran használt aktuáriusi díjelv, a szórásnégyzet elv alkalmazásával vizsgáltuk az időkonzisztens árazás módszerét. Most egy másik széleskörűen elterjedt aktuáriusi díjelvvel történő árazást veszünk górcső alá az időkonzisztens árazási módszer keretei között: ez a szórás elv. Feltevéseink ugyanazok: a t. időpontbeli árát kívánjuk meghatározni egy olyan szerződésnek, amely esetében kizárólag a végpontban, T-ben történik kifizetés, ami akkor $f(y(T))$. Az y-ra, illetve f-re történő feltételezéseink is változatlanok.

A hagyományos, statikus felírás szerint ebben az esetben a t. időpontbeli ár az alábbi módon áll elő (a felső indexben szereplő S a szórásra, standard deviationre utal):

$$\Pi_t^S(f(y(t)) = \mathbb{E}_t[f(y(T))|A_t] + \beta\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}_t[f(y(T))|A_t]} \tag{12}$$

Ahogy korábban is, most is felosztjuk a kezdő- és végpont által határolt időintervallumot kisebb, Δt nagyságú intervallumokra, s elsőképp egy-egy ilyen intervallumra határozzuk meg az árat. Végig feltételes várható értékekkel és szórásokkal dolgozunk, a végpontra vonatkozó feltétel függvényében adható meg a kezdőpontbeli ár. Így hátrafele iterációval T-től egészen t-ig "visszafejthető" az ár. Végül $\Delta t \to 0$ határértéket veszünk.

Nézzük meg, hogy mit jelent a szórás elv egy $[t, t + \Delta t]$ intervallum esetén! (Kivételesen újra áttérünk arra, hogy t időváltozó legyen a levezetésben, ugyancsak azért, mert célszerűen adódik tetszőleges időparaméter megjelölésére.) Most már a szórásnégyzet elv elemzésével ellentétben rögtön a diszkontálást is számításba fogjuk venni. A szórás elv az alábbit írja fel:

$$\pi^S(t,y(t)) = e^{-r\Delta t}\bigg(\mathbb{E}_t[\pi^S(t+\Delta t, y(t+\Delta t))] + \beta\sqrt{\Delta t}\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}_t[\pi^S(t+\Delta t, y(t+\Delta t))]}\bigg) \tag{13}$$

Hangsúlyozandó, hogy immáron a variancia együtthatója β-ról $\beta\sqrt{\Delta t}$-re módosul. Már a szórásnégyzet elv alfejezetében a diszkontálás hozzávételekor tettünk egy kitérőt a mértékegységeket illetően. Akkor a következetlenséget az okozta, hogy a várható érték mértékegysége az adott valuta, míg a szórásnégyzeté az adott valuta négyzete volt. Most ez a probléma nem merül fel, elvégre a várható érték és a szórás egyaránt az adott valuta első hatványában kifejezett, adódik viszont egy másik gond. Az időkonzisztens árazás módszerének egyik lépése során $\Delta t \to 0$ határértéket veszünk: a jelenlevő mögöttes biztosítási fejlődésében szereplő Brown-mozgás miatt a várható érték ugyan Δt szerint lineárisan fog skálázódni, de a szórás csak annak gyökével, $\sqrt{\Delta t}$-vel. Ebből adódóan ahhoz, hogy a jobb oldalon szereplő két tag megegyező dimenziókkal kerülhessen összeadásra, korrekcióra van szükségünk, s emiatt a szórástagot kiegészítjük egy $\sqrt{\Delta t}$-s szorzóval.

Ugyanazon eljárással, ahogy a szórásnégyzet elv esetén is dolgoztunk, az alábbi formára hozhatjuk az iménti felírást:

$$\begin{aligned}(e^{r\Delta t}-1)\cdot\pi^S(t,y(t)) &= \mathbb{E}\bigg[\int_t^{t+\Delta t}\Big(\pi_t^S + a\pi_y^S + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^S\Big)ds\bigg] + \\ &+ \beta\sqrt{\Delta t}\cdot\sqrt{\begin{aligned}&2\mathbb{E}\bigg[\int_t^{t+\Delta t}\big(\pi^S(s,y(s)) - \pi^S(t,y(t))\big)(\pi_t^S + a\pi_y^S + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^S)ds\bigg] + \\ &+\mathbb{E}\bigg[\int_t^{t+\Delta t}(b\pi_y^S)^2 ds\bigg] - \bigg(\mathbb{E}_t\int_t^{t+\Delta t}(\pi_t^S + a\pi_y^S + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^S)ds\bigg)^2\end{aligned}}\end{aligned} \tag{14.1}$$

Mindkét oldalt Δt-vel osztva, $\Delta t \to 0$ határértéket véve, s a bal oldalon azt konkrétan ki is számolva:

$$
\begin{aligned}
r\pi^S(t,y(t)) = {} & \mathbb{E}\Bigg[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\Big(\pi_t^S + a\pi_y^S + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^S\Big)ds\Bigg] + \\
& + \beta\sqrt{\begin{aligned}&2\mathbb{E}\Bigg[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\big(\pi^S(s,y(s)) - \pi^S(t,y(t))\big)(\pi_t^S + a\pi_y^S + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^S)ds\Bigg] + \\ &+ \mathbb{E}\Bigg[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}(b\pi_y^S)^2 ds\Bigg]\end{aligned}}
\end{aligned}
\tag{14.2}
$$

A gyök alatti kifejezésben szereplő harmadik tagot elhagytuk, hiszen az osztás és határértékképzés után a négyzetes kitevője miatt 0-val lesz egyenlő, ahogy ezt már korábban a szórásnégyzet elv levezetésénél is láttuk (a 4.3-as összefüggés negyedik sorának vizsgálatakor).

Elvégezve a határértékképzést a többi tagra is, a szórásnégyzet elvnél részletezett okok miatt hasonló számítással az alábbi parciális differenciálegyenletet nyerjük:

$$\pi_t^S + a\pi_y^S + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^S + \beta\sqrt{(b\pi_y^S)^2} - r\pi^S = 0 \tag{15.1}$$

$\sqrt{(b\pi_y^S)^2} = |b\pi_y^S|$-t felhasználva, továbbá azzal az ésszerű feltételezéssel élve, hogy b nemnegatív:

$$\pi_t^S + a\pi_y^S + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^S + \beta b|\pi_y^S| - r\pi^S = 0 \tag{15.2}$$

Ennél a parciális differenciálegyenletnél szembeötlő gondot okozhat az abszolút érték megjelenése. Mindazonáltal figyelembe véve, hogy az abszolút érték argomentumában a keresett ár y biztosítási folyamat szerinti deriváltja szerepel, így mégis jogos feltevés, hogy ez a derivált végig azonos előjelű marad (azaz az ár monoton függvénye y-nak). Ebből a megállapításból következően kapjuk a derivált előjelétől függően:

$$\pi_t^S + (a \pm \beta b)\pi_y^S + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^S - r\pi^S = 0 \tag{15.3}$$

Akárcsak a szórásnégyzet elv esetében, most is a Feynman-Kac formulát alkalmazzuk, amiből rögtön megkapjuk a keresett $\pi^S(t,y)$-t (tehát immáron nem 0-ban, hanem t-ben kifejezve az árat):

$$\pi^S(t,y) = \mathbb{E}_t^S\Big[e^{-r(T-t)}f(y(T))\Big|y(t)=y\Big], \tag{16}$$

ahol $\mathbb{E}_t^S$ egyfajta korrigált várható értéket jelent, egészen pontosan egy módosított y^S folyamat alapján vett várható értéket, ahol y^S driftje a $\pm\beta b(t,y)$ taggal egészül ki, vagyis:

$$dy^S = \big(a(t,y) \pm \beta b(t,y)\big)dt + b(t,y)dW^S.$$

Összességében tehát megkaptuk az időkonzisztens árazás képletét szórás elv alkalmazása mellett is. Az eredmény már a diszkontálást is magában foglalja. A köztes számolások és használt módszerek nagyrészt megegyeztek a korábban, a szórásnégyzet elvnél látottakkal.

2.7. Elméleti eredményeink vizsgálata

Az előző alfejezetben bevezettük az időkonzisztens árazás mint árazási lehetőség fogalmát, s megnéztük, hogy különböző díjelvek alkalmazása mellett milyen elméleti eredményeket ad. Az explicit képletek rendelkezésünkre állnak valamennyi vizsgált alesetben, a szórásnégyzet és a szórás elv alkalmazása során egyaránt. Ezen eredmények birtokában már lehetőségünk nyílik ezek konkrét vizsgálatára.

A cikk szerzőpárosa ugyan ennek nem szentel figyelmet, de összehasonlítható például, hogy adott díjelv és biztosítási folyamat mellett, az elv és a folyamat paramétereinek rögzítésével mennyire fog eltérni egymástól a hagyományos, statikus módszer és az időkonzisztens megközelítés által szolgáltatott ár. Természetesen tudjuk, hogy ezen módszerek teljesen más alapokon nyugszanak, így nem lehet messzire menő következtetéseket levonni mondjuk abból, hogy az egyik magasabb árat kér, mint a másik, de ettől függetlenül érdemes összevetni a kettőt. Megnézhetjük például, hogy esetleg egybeesnek-e valamilyen esetben, vagy ha nem, akkor mekkora a differencia és miből adódik. Az elméleti összehasonlításon túl persze konkrét gyakorlati példákon is kiszámolható egyik s másik, s így is megvizsgálható a szolgáltatott eltérés.

Mielőtt rátérnénk a megfelelő vizsgálódásra, meg kell jegyezni, hogy a hagyományosan felírt aktuáriusi díjelvek nem foglalják magukban a diszkontálást, viszont annak érdekében, hogy értelmesen hasonlíthassuk össze a két megközelítés eredményeit, nem tehetjük meg, hogy azok közül az egyikben diszkontálunk, a másikban pedig nem. Ezt a problémát azzal küszöböljük ki, hogy abban a speciális esetben hasonlítjuk össze a megkapott árakat, amikor a használt r kamatláb 0%. Ez lényegében azt jelenti, hogy az időkonzisztens esetben sem történik diszkontálás, elvégre a pénz időértéke ekkor fix lesz, azaz a t időpontbeli 1 forint értéke azonos lesz a T időpontbeli 1 forintéval. (Különben a szórásnégyzet eset felírásakor ugye lépésről lépésre haladtunk, s a kezdetekben még elhanyagoltuk a diszkontálást, így ott rögtön felírható a diszkontálást mellőző formula.)

A diszkontáláshoz fűződő megjegyzés megtétele után már rá is térhetünk az összehasonlításokra, tegyünk is így! Az explicit képletek már a korábbiak alapján rendelkezésünkre állnak, ezek pedig a következők:

- Szórásnégyzet elv

	A módszer szerinti ár t-ben
Időkonzisztens módszer	$\pi^V(t,y) = \frac{1}{\alpha}\ln\mathbb{E}^Q\left[e^{\alpha f(y(T))}\big\vert y(t)=y\right]$
Statikus megközelítés	$\Pi_t^V(f(y(t)) = \mathbb{E}_t[f(y(T))] + \frac{1}{2}\alpha\mathbb{V}\mathrm{ar}_t[f(y(T))]$

- Szórás elv

  (Az $\mathbb{E}^S$ jelölés a $dy^S = \big(a(t,y) \pm \beta b(t,y)\big)dt + b(t,y)dW^S$ módosított folyamat szerinti várható értéket jelöli továbbra is.)

	A módszer szerinti ár t-ben
Időkonzisztens módszer	$\pi^S(t,y) = \mathbb{E}_t^S\left[e^{-r(T-t)}f(y(T))\big\vert y(t)=y\right]$
$r=0$ választással	$\pi^S(t,y) = \mathbb{E}_t^S\left[f(y(T))\big\vert y(t)=y\right]$
Statikus megközelítés	$\Pi_t^S(f(y(t)) = \mathbb{E}_t[f(y(T))] + \beta\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}_t[f(y(T))]}$

Ahhoz, hogy a keresett kifejezések kiszámolhatóak legyenek, először is valamilyen feltételezéssel kell élnünk a mögöttes biztosítási folyamattal kapcsolatban. Modellezze y egy állomány túlélőinek számát! Ésszerűen milyen sztochasztikával rendelkezhet y? Írjuk fel két gyakorta előforduló folyamat megvalósulásaként y-t! Az egyik ilyen az Ornstein–Uhlenbeck folyamat lesz, a másik pedig a geometriai Brown-mozgás. Ezekre a folyamatokra ismertek a várható értékek, a szórásnégyzetek, illetve az, hogy $y(T)$ milyen eloszlást fog követni. Nézzük is meg ezeket! (Az index nélkül jelzett várható érték és szórás a 0 pontra vonatkozó feltételes értékeket jelölik.)

- 1. eset: Ornstein–Uhlenbeck folyamat:

$$dy(t) = -\mu \cdot y(t)dt + \sigma dW(t) \tag{17.1}$$

Ekkor levezethetőek az alábbiak:

$$\mathbb{E}(y_t) = y_0 e^{-\mu t} \tag{17.2}$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t) = \frac{\sigma^2}{2\mu}(1 - e^{-2\mu t}) \tag{17.3}$$

$$y_t \sim N\big(y_0 e^{-\mu t}, \frac{\sigma^2}{2\mu}(1 - e^{-2\mu t})\big) \tag{17.4}$$

- 2. eset - geometriai Brown-mozgás:

$$dy(t) = a \cdot y(t)dt + b \cdot y(t)dW(t) \tag{18.1}$$

Ekkor levezethetőek az alábbiak:

$$\mathbb{E}(y_t) = y_0 e^{at} \tag{18.2}$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t) = y_0^2 e^{2at}(e^{b^2 t} - 1) \tag{18.3}$$

$$y_t \sim \mathrm{LogNorm}\big(\ln y_0 + (a - \frac{1}{2}b^2)t, b^2 t\big) \tag{18.4}$$

A biztosítási folyamat megadása még nem elég ahhoz, hogy konkrét biztosítási helyzetekre eredményeket kapjunk, hiszen a kifizetésfüggvény is alapjaiban határozza meg a biztosítási szerződést, így erre vonatkozóan is valamilyen feltevéssel kell élnünk. $f(y(T))$ jelentése: mennyit kell kifizetnie a biztosítónak a T. időpillanatban azt tudván, hogy ott a biztosítási folyamat az $y(T)$ értéket vesz fel. (Az $y(T)$ adott esetben a túlélőszámot jelenti, ekkor a kérdés az, hogy $y(T)$ túlélőre vonatkozóan mekkora lesz a biztosító kifizetése.) Természetesen adódhat az $f(y(T)) = c \cdot y(T)$ választása, ahol c pozitív konstans. Ez olyan biztosítási szituációkban fordul elő, ahol valamennyi biztosítottnak ugyanaz a végkifizetés garantált, ilyen lehet például egy fix biztosítási összeges elérési biztosítás, ahol tehát valamennyi túlélő c értéket kap a T időpillanatban.

Most kizárólag erre a természetesen adódó, gyakori esetre korlátozzuk a vizsgálódásunkat, s ezen $f(y(T)) = c \cdot y(T)$ feltevés mellett nézzük meg, hogy a különböző megközelítések milyen eredményekre vezetnek. Vegyük is sorra ezen levezethető analitikus formulákat, írjuk fel, hogy milyen egyenlőség alapján kell számolnunk, s helyettesítsük be a feltevéseinkből következő megfelelő értékeket!

- Ornstein–Uhlenbeck folyamat, szórásnégyzet elv

  - Időkonzisztens módszer:
    $\pi^V(t,y) = \frac{1}{\alpha}\ln\mathbb{E}\big[e^{\alpha f(y(T))}\big|y(t)=y\big] = \frac{1}{\alpha}\ln\mathbb{E}\big[e^{\alpha c y(T)}\big|y(t)=y\big]$.

    Ahhoz, hogy ezt kiszámolhassuk, szükségünk van $y(T)$ momentumgeneráló függvényére. Használjuk ki, hogy $y(T)$ ebben az esetben normális eloszlású, s így momentumgeneráló függvénye ismert! Ekkor a függvényt M-mel jelölve (a 0 időpillanatra vonatkozóan): $M_{y_T}(s) = e^{\mathbb{E}(y_T)s}e^{\frac{1}{2}\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_T)s^2}$, s ebbe a 17-es összefüggés eredményét helyettesítve: $M_{y_T}(s) = e^{y_0 e^{-\mu T}s}e^{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{2\mu}(1-e^{-2\mu T})s^2} = e^{y_0 e^{-\mu T}s}e^{\frac{\sigma^2 s^2}{4\mu}(1-e^{-2\mu T})}$. Ugyanez a t-re vonatkozó feltétellel: $M_{t,y_T}(s) = e^{y_t e^{-\mu(T-t)}s}e^{\frac{\sigma^2 s^2}{4\mu}(1-e^{-2\mu(T-t)})}$.

    Visszatérve a keresett π_t^V-re, s felhasználva, hogy $f(y(T)) = c\cdot y(T)$:

$$\pi^V(t,y) = \frac{1}{\alpha}\ln\mathbb{E}\big[e^{\alpha c y(T)}\big|y(t)=y\big] = \frac{1}{\alpha}\ln\big[e^{y_t e^{-\mu(T-t)}\alpha c}e^{\frac{\sigma^2(\alpha c)^2}{4\mu}(1-e^{-2\mu(T-t)})}\big] =$$
$$\frac{1}{\alpha}\big[c y_t \alpha e^{-\mu(T-t)} + \frac{\sigma^2(\alpha c)^2}{4\mu}(1-e^{-2\mu(T-t)})\big] = c y_t e^{-\mu(T-t)} + \frac{\sigma^2\alpha c^2}{4\mu}(1-e^{-2\mu(T-t)}) \tag{19}$$

  - Statikus megközelítés: $\Pi_t^V(f(y(T)) = \mathbb{E}_t[f(y(T))] + \frac{1}{2}\alpha\mathbb{V}\mathrm{ar}_t[f(y(T))]$.

    Ebbe behelyettesítve a 17-es összefüggés eredményeit $f(y(T)) = c\cdot y(T)$ feltevés mellett:

$$\begin{aligned}\Pi_t^V(f(y(T)) &= c y_t e^{-\mu(T-t)} + \frac{1}{2}\alpha c^2\frac{\sigma^2}{2\mu}(1-e^{-2\mu(T-t)}) = \\ &= c y_t e^{-\mu(T-t)} + \frac{\sigma^2\alpha c^2}{4\mu}(1-e^{-2\mu(T-t)})\end{aligned} \tag{20}$$

Mit kaptunk?

Ornstein–Uhlenbeck folyamatot és a természetesen adódó $f(y(T)) = c\cdot y(T)$ kifizetést feltételezve: a szórásnégyzet elv ugyanazt az eredményt fogja adni mind időkonzisztens árazás, mind a hagyományos, statikus árazás használatával.

Felmerül az igény, hogy közelebbről is szemügyre vegyük ezt az eredményt, miért egyezhet meg ez a kettő? Emlékezzünk rá, hogy miből származott az időkonzisztens árazás eredménye! A megfelelő levezetést és átalakításokat követően egy parciális differenciálegyenlet megoldására vezettük vissza akkor a feladatot. Az, hogy a statikus és az időkonzisztens módszer ugyanazt az árat adja, egyenértékű azzal, hogy a statikus módszer megkívánt $\Pi_t^V(f(y(T))$ ára kielégíti az időkonzisztencia parciális differenciálegyenletének 5.1-es egyenletét. Elevenítsük fel ezt a parciális differenciálegyenletet:

$$\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V + \frac{1}{2}\alpha(b\pi_y^V)^2 = 0$$

Ezt kellene kielégítenie $\Pi_t^V(f(y(T))$-nek, vagyis $cy_te^{-\mu(T-t)} + \frac{\sigma^2\alpha c^2}{4\mu}(1-e^{-2\mu(T-t)})$-nek. Ellenőrizzük, hogy valóban teljesül-e rá a követelem! Elsőképp kiszámoljuk a megfelelő deriváltakat:

- ⋆ $\pi^V = cy_te^{-\mu(T-t)} + \frac{\sigma^2\alpha c^2}{4\mu}(1-e^{-2\mu(T-t)})$
- ⋆ $\pi_t^V = \mu cy_te^{-\mu(T-t)} - 2\mu e^{-2\mu(T-t)} \cdot \frac{\sigma^2\alpha c^2}{4\mu} = \mu cy_te^{-\mu(T-t)} - e^{-2\mu(T-t)} \cdot \frac{\sigma^2\alpha c^2}{2}$
- ⋆ $\pi_y^V = ce^{-\mu(T-t)}$
- ⋆ $\pi_{yy}^V = 0$

Helyettesítsük be ezeket, továbbá az $a(t,y) = -\mu y_t$ és $b(t,y) = \sigma$ értékeket! Így:

$$\pi_t^V + a\pi_y^V + \frac{1}{2}b^2\pi_{yy}^V + \frac{1}{2}\alpha(b\pi_y^V)^2 = \mu cy_te^{-\mu(T-t)} - e^{-2\mu(T-t)} \cdot \frac{\sigma^2\alpha c^2}{2} -$$
$$- \mu y_t(ce^{-\mu(T-t)}) + 0 + \frac{1}{2}\alpha(\sigma ce^{-\mu(T-t)})^2 = \mu cy_te^{-\mu(T-t)} - e^{-2\mu(T-t)} \cdot \frac{\sigma^2\alpha c^2}{2} -$$
$$- \mu cy_te^{-\mu(T-t)} + \frac{1}{2}\alpha \cdot \sigma^2c^2e^{-2\mu(T-t)} = 0.$$

Vagyis valóban kijön, hogy a parciális differenciálegyenlet felírása teljesül. Ez azt jelenti, hogy egyúttal ellenőriztük is, hogy az időkonzisztens és a statikus ár megegyezik egymással.

- Ornstein–Uhlenbeck folyamat, szórás elv
  - Időkonzisztens módszer $r = 0\%$ választással:
    $\pi^S(t,y) = \mathbb{E}_t^S\big[f(y(T))\big|y(t) = y\big] = \mathbb{E}_t^S\big[c \cdot y(T)\big|y(t) = y\big]$.
    Ezesetben $dy^S = (-\mu y \pm \beta\sigma)dt + \sigma dW^S$ szerinti várható értéket számolunk, ezt jelenti számunkra az $\mathbb{E}_t^S$ felírás. Ebben az esetben – ahogy az látható is – a drift kiegészül egy korrekciós taggal. A várható érték a 0. időpontban az alábbi lesz: $\mathbb{E}(y_T) = y_0e^{-\mu T} \pm \beta\sigma T$, a t időpillanatban pedig $y(t)$-t ismerve: $\mathbb{E}_t(y_T) = y_te^{-\mu(T-t)} \pm \beta\sigma(T-t)$. Jegyezzük meg, hogy ha túlélőszámot modellezünk (s

ebben a dolgozatban ez a fő irányvonal), úgy az ár y szerinti deriváltja pozitív lesz, elvégre magasabb túlélőszám magasabb összkifizetést eredményez. Ez matematikailag azt is jelenti, hogy a $\beta\sigma$ szorzójaként feltűnő előjel pozitív lesz, hiszen korábban, a képlet levezetésénél megjegyeztük, hogy ez az előjel π_y előjelével egyezik meg. Ezen megjegyzést megtéve a várható érték az alábbira módosul: $\mathbb{E}_t(y_T) = y_t e^{-\mu(T-t)} + \beta\sigma(T-t)$, s ezt behelyettesítve már könnyedén megkapható $\pi^S(t, y)$ is:

$$\pi^S(t, y) = cy_t e^{-\mu(T-t)} + c\beta\sigma(T-t) \tag{21}$$

– Statikus árazással:
$\Pi_t^S(f(y(t)) = \mathbb{E}_t[f(y(T))] + \beta\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}_t[f(y(T))]}$
Behelyettesítve a 17-es összefüggés eredményeit:

$$\Pi_t^S(f(y(t)) = cy_t e^{-\mu(T-t)} + \beta\sqrt{c^2\frac{\sigma^2}{2\mu}(1 - e^{-2\mu(T-t)})} =$$
$$= cy_t e^{-\mu(T-t)} + c\beta\sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu}} \tag{22}$$

Mit kaptunk?

Időkonzisztens módszerrel $cy_t e^{-\mu(T-t)} + c\beta\sigma(T-t)$, míg statikus felírással $cy_t e^{-\mu(T-t)} + c\beta\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu}}$ árat kérnénk a portfólióért. Leolvasható, hogy az eltérés a kockázati felárban jelenik meg, az összeadás első tagja mindkét esetben a kifizetés várható értéke $cy_t e^{-\mu(T-t)}$. (Várhatóan $y_t e^{-\mu(T-t)}$ túlélőnk lesz, s mindegyikük számára c a kifizetendő összeg.)

A kockázati felár tehát eltér a két esetben, de vajon mennyire? Az időkonzisztens hozzáállás $c\beta\sigma(T-t)$ pluszt kér a statikus megközelítés $c\beta\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu}}$-jével szemben. Írjuk fel az utóbbi esetére $e^{-2\mu(T-t)}$ elsőrendű közelítését! $e^{-2\mu(T-t)} \approx 1 - 2\mu(T-t)$.

Behelyettesítve ezt:

$$
\begin{aligned}
1 - e^{-2\mu(T-t)} &\approx 2\mu(T-t) \\
\frac{1 - e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu} &\approx \frac{2\mu(T-t)}{2\mu} = T - t \\
\sqrt{\frac{1 - e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu}} &\approx \sqrt{T-t} \\
c\beta\sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu}} &\approx c\beta\sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

Vagyis azt látjuk, hogy az exponenciális kifejezést annak elsőrendű közelítésére átírva egy becsült értékkel dolgozhatunk tovább (bár ez a becslés a műveleti transzformációk miatt már nem kezelhető elsőrendű közelítésként), s ekkor a statikus megközelítés hozzávetőleges kockázati többlete $c\beta\sigma\sqrt{T-t}$ lesz az időkonzisztens árazás $c\beta\sigma(T-t)$ pluszával szemben. Az előbbi persze hangsúlyozottan egy becsült érték, mégis leolvasható, hogy a két kockázati többlet között azért felfedezhető rokonság: mindkettő a $c\beta\sigma$ szorzatot súlyozza még egy időtényezőtől függő szorzóval. Pontos összehasonlításra persze ez alapján nem nyílik lehetőségünk, de majd konkrét számértékek mellett összevethető lesz a kettő által produkált ár.

- Geometriai Brown-mozgás, szórásnégyzet elv
  - Időkonzisztens módszer:
    $\pi^V(t,y) = \frac{1}{\alpha}\ln\mathbb{E}\left[e^{\alpha f(y(T))}\middle|y(t)=y\right] = \frac{1}{\alpha}\ln\mathbb{E}\left[e^{\alpha c y(T)}\middle|y(t)=y\right]$.
    Ugyancsak a momentumgeneráló függvényre lesz szükségünk, ahogy ez a szórásnégyzet elv felírásakor már korábban, Ornstein–Uhlenbeck folyamatot feltételezve is megtörtént. Tudjuk, hogy a mostani esetben y_T lognormális eloszlású lesz. Ekkor azonban az is ismert, hogy a momentumgeneráló függvény nem létezik, egészen pontosan az exponenciális kifejezés várható értéke $+\infty$ lesz. Ebből adódóan esetben $\pi^V(t,y) = +\infty$ lesz a kért ár.

- Statikus árazással: $\Pi_t^V(f(y(t))) = \mathbb{E}_t[f(y(T))] + \frac{1}{2}\alpha\mathbb{V}\mathrm{ar}_t[f(y(T))]$.

  Ebbe behelyettesítve a 18-as összefüggés eredményeit $f(y(T)) = c \cdot y(T)$ feltevés mellett:

$$\Pi_t^V(f(y(T))) = cy_te^{a(T-t)} + \frac{1}{2}\alpha c^2 y_t^2 e^{2a(T-t)}(e^{b^2(T-t)} - 1) \tag{23}$$

Mit kaptunk?

Geometriai Brown-mozgást feltételezve a szórásnégyzet elv időkonzisztens esetben nem adott racionálisan használható eredményt. Hiába implikálja a számítás maga ezt a $+\infty$ árat, reálisan nem indokolt ennyit kérni a biztosítási portfólióért. Kiindulva abból, hogy $y(T)$ a túlélők számát jelenti: $y(T) \leq y(t)$ felső korlát adható, vagyis "legrosszabb esetben" a portfólió valamennyi tagja életben marad, s ezáltal jogosult a megillető biztosítási összegre. Átírva $f(y(T))$-re: $f(y(T)) = c \cdot y(T) \leq c \cdot y(t)$, azaz maximum $c \cdot y(t)$ fizetés terheli a biztosítót a T. időpillanatban. Nem indokolt tehát $+\infty$-re árazni a portfóliót, hiszen véges felső korlát adható a kifizetésre, s így az árra magára is.

Ezzel szemben a statikus módszer véges eredményt ad, ami tehát "valóságközelibb", mint az előbb tárgyalt időkonzisztens ár. A statikus módszer ára: $cy_te^{a(T-t)} + \frac{1}{2}\alpha c^2 y_t^2 e^{2a(T-t)}(e^{b^2(T-t)} - 1)$, azaz a várható értéken felüli kockázati felára: $\frac{1}{2}\alpha c^2 y_t^2 e^{2a(T-t)}(e^{b^2(T-t)} - 1)$.

- Geometriai Brown-mozgás, szórás elv

  - Időkonzisztens módszer $r = 0\%$ választással:

    $\pi^S(t,y) = \mathbb{E}_t^S\big[f(y(T))\big|y(t) = y\big] = \mathbb{E}_t^S\big[c \cdot y(T)\big|y(t) = y\big]$.

    Ahogy már korábban is a szórás elv felírásakor, most is $dy^S = (a \pm \beta b)ydt + bdW^S$ szerinti várható értéket számolunk, vagyis a drift most is kiegészül egy korrekciós taggal. A várható érték így az alábbi az lesz: $\mathbb{E}(y_T) = y_0e^{(a\pm\beta b)T}$, illetve t-re vonatkoztatva: $\mathbb{E}_t(y_T) = y_te^{(a\pm\beta b)(T-t)}$. Ugyancsak a korábban is előjövő logikát felhasználva, feltételezve, hogy y a túlélőszámot modellezi, vagyis a π_y deriváltfüggvény végig pozitív, a várható érték az alábbira módosul: $\mathbb{E}_t(y_T) = y_te^{(a+\beta b)(T-t)}$. Ezt behelyettesítve, t időpontra számolva:

$$\pi^S(t,y) = cy_te^{(a+\beta b)(T-t)} \tag{24}$$

– Statikus árazással:

$\Pi_t^S(f(y(t))) = \mathbb{E}_t[f(y(T))] + \beta\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}_t[f(y(T))]}$

Behelyettesítve a 18-as összefüggés eredményeit:

$$\begin{aligned}\Pi_t^S(f(y(t)) &= cy_te^{a(T-t)} + \beta\sqrt{c^2y_t^2e^{2a(T-t)}(e^{b^2(T-t)}-1)} = \\ &= cy_te^{a(T-t)} + \beta cy_te^{a(T-t)}\sqrt{e^{b^2(T-t)}-1} = \\ &= cy_te^{a(T-t)}\left(1+\beta\sqrt{e^{b^2(T-t)}-1}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

Mit kaptunk?

Időkonzisztens logikával $cy_te^{(a+\beta b)(T-t)}$, míg hagyományos módszerrel $cy_te^{a(T-t)}\big(1+\beta\sqrt{e^{b^2(T-t)}-1}\big)$ árat kérnénk a portfólióért. Most is érdemes lehet megvizsgálni, hogy milyen kapcsolatban áll egymással a két érték.

Az időkonzisztens ár:

$$\begin{aligned} &cy_te^{(a+\beta b)(T-t)} = cy_te^{a(T-t)}\cdot e^{\beta b(T-t)}, && e^{\beta b(T-t)}\text{elsőrendű közelítéséből:}\\ &cy_te^{(a+\beta b)(T-t)} \approx cy_te^{a(T-t)}\cdot(1+\beta b(T-t)), && \text{vagyis:}\\ &cy_te^{(a+\beta b)(T-t)} \approx cy_te^{a(T-t)} + cy_te^{a(T-t)}\cdot\beta b(T-t) \end{aligned}$$

A statikus ár:

$$\begin{aligned} &cy_te^{a(T-t)}\big(1+\beta\sqrt{(e^{b^2(T-t)}-1)}\big), && e^{b^2(T-t)}\text{elsőrendű közelítéséből:}\\ &cy_te^{a(T-t)}\big(1+\beta\sqrt{(e^{b^2(T-t)}-1)}\big) \approx cy_te^{a(T-t)}\big(1+\beta\sqrt{b^2(T-t)}\big), \text{ebből } (b\geq 0):\\ &cy_te^{a(T-t)}\big(1+\beta\sqrt{(e^{b^2(T-t)}-1)}\big) \approx cy_te^{a(T-t)} + cy_te^{a(T-t)}\cdot\beta b\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

Tehát mindkét esetben egy elsőrendű közelítés értékét behelyettesítve hasonló alakra hozható a két megkívánt ár, persze ezek az árközelítések a műveleti transzformációk miatt már nem tekinthetőek elsőrendű közelítéseknek. Most is kirajzolódik az a formula, ami már az Ornstein–Uhlenbeck folyamat szórás elvénél is: az árban a várható érték mellett megjelenő kockázati felár az időkonzisztens árnál és a statikusnál hasonló ugyan, viszont az időtől függő szorzó az előbb $(T-t)$-ként, míg utóbb annak gyökeként, $\sqrt{T-t}$-ként jelenik meg. Ugyanezt figyeltük meg tehát korábban is a szórás elv esetében, akkor még az Ornstein–Uhlenbeck folyamat tanulmányozása során. Ahogy akkor is, most is csak becsléseket vethettünk össze egymással, pontos összehasonlítás most is csak úgy lehetséges, hogy adott, konkrét számértékeket helyettesítünk az eredeti képletekbe.

2.8. Elméleti eredményeink alkalmazása

Ebben az alfejezetben gyakorlati példákon nézzük meg, hogy a korábban levezetett és elemzett elméleti eredményeink mit adnak konkrét biztosítási szituációkban. Ugyanazokat a feltevéseket használjuk a kapcsolódó biztosítási folyamatra és kifizetésfüggvényre vonatkozóan, mint azt az előbbi alfejezetben is tettük, ezen felül most már a megjelenő paramétereknek is értéket adunk. Így pontosan kiszámolhatóak a keresett árértékeink.

Elsőképp az Ornstein–Uhlenbeck folyamattal foglalkozzunk! Ahogy korábban is írtuk:

$$dy(t) = -\mu \cdot y(t)dt + \sigma dW(t)$$

Tegyük fel, hogy a portfóliónk 10000 szerződéssel indul, vagyis $y(t) = 10000$! A biztosítási tartam 10 év lesz: $T-t = 10$. $y(t)$ fejlődésére vonatkozóan: μ alapvetően a folyamat adott pillanatbeli várható értékét határozza meg (a várható értékre kizárólag a kiinduló értéknek és μ-nek van befolyása), míg a σ érték a szórásnégyzetben játszik szerepet. Vegyünk észre, hogy az Ornstein–Uhlenbeck folyamat esetén a véletlen tag nem függ a folyamat adott pontbeli értékétől (s pontban nem függ $y(s)$-től), így értelemszerűen magas σ-t kell választanunk, hogy az önmagában, $y(s)$ szorzó nélkül is meg tudja ragadni a folyamat véletlenszerűségét. Így adódhat egy lehetséges választásnak a $\mu = 0.05$, illetve $\sigma = 20$ érték.

Az egyszerűség kedvéért c-t vegyük egységnyi értékűnek, vagyis a konstans kifizetésre: $c = 1$. A szórásnégyzet elv α paramétere pedig legyen 0.5! Mekkora lesz ekkor az ár szórásnégyzet, valamint szórás elvvel a különböző módszerek esetén?

- Ornstein–Uhlenbeck folyamat, szórásnégyzet elv

  Ahogy láttuk egy alfejezetettel korábban (19-es és 20-as összefüggések), a szórásnégyzet elvvel mindkét megközelítés ugyanazt az árat adta, amely:

  $$\pi^V(t,y) = \Pi_t^V(f(y(T))) = cy_te^{-\mu(T-t)} + \frac{\sigma^2\alpha c^2}{4\mu}(1-e^{-2\mu(T-t)})$$

  Behelyettesítve:

  $$\pi^V(t,y) = \Pi_t^V(f(y(T)) = 1 \cdot 10000 \cdot e^{-0.05\cdot 10} + \frac{20^2 \cdot 0.5 \cdot 1^2}{4 \cdot 0.05}(1-e^{-2\cdot 0.05\cdot 10}) =$$
  $$= 6065 + \frac{200}{0.2}(1-e^{-1}) \approx 6065 + 1000 \cdot 0,632 = 6697.$$

Leolvasható, hogy várhatóan 6065 túlélőnk lesz, mindegyikük számára 1 egység kifizetés jár. A várható értéken felül megjelenő kockázati felár pedig 632.

- Ornstein–Uhlenbeck folyamat, szórás elv

  Paraméterfeltevéseink megegyeznek az előbbiekkel, β pedig legyen 2!

  Időkonzisztens árazással (21-es öf.):

$$\pi^S(t,y) = cy_t e^{-\mu(T-t)} + c\beta\sigma(T-t)$$

  Behelyettesítve:

$$\pi^S(t,y) = 1 \cdot 10000 \cdot e^{-0.05\cdot 10} + 1 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10 = 6065 + 400 = 6465.$$

  Statikus árazással (22-es öf.):

$$\Pi_t^S(f(y(t)) = cy_t e^{-\mu(T-t)} + c\beta\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu}}$$

  Behelyettesítve:

$$\Pi_t^S(f(y(t)) = 1 \cdot 10000 \cdot e^{-0.05\cdot 10} + 1 \cdot 2 \cdot 20\sqrt{\frac{1-e^{-2\cdot 0.05\cdot 10}}{2\cdot 0.05}} \approx$$
$$\approx 6065 + 40 \cdot 2.514 \approx 6065 + 101 = 6166. \text{ (egészre kerekített érték)}$$

Valóban szembeötlő a kockázati felárak okozta különbség, míg az előbbi módszer 6465-ös, addig az utóbbi 6166-os végeredményt hoz. Persze ahogy az már korábban is említésre került, ez a két módszer merőben más alapokon nyugszik, így nem feltétlenül érdemes következtetéseket levonni az eredményeikből. Téves lenne azt leszűrni, hogy az időkonzisztens árazás magasabb kockázati felárat követel, elvégre más a két módszer mögöttes logikája, így eleve nem is indokolt a két esetben ugyanannak választani a díjelvek paramétereit. (S gondoljunk bele, hogy az ár nagyban függ a díjelvparamétertől, ami értelemszerűen máshogy választható meg a különböző logikákra támaszkodva.)

Most térjünk át a geometriai Brown-mozgásra! Ekkor:

$$dy(t) = a \cdot y(t)dt + b \cdot y(t)dW(t)$$

Ahol lehet, ugyanazokat a feltevéseket tesszük, mint az Ornstein–Uhlenbeck folyamatnál, így: $y(t) = 10000$, $T - t = 10$. A kifizetés most is egységnyi: $c = 1$, a díjelvek paraméterei is változatlanok: $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$. A biztosítási folyamat paraméterei viszont korábban nem ebben a formában kerültek elő, így azokra most kell meghatároznunk feltevéseinket. Legyen $a = -0.05$, ezzel ugyanaz a várható érték jelenik meg $\forall s \geq t$ esetén $y(s)$-re, mint a korábbi Ornstein–Uhlenbeck folyamat paraméterválasztásánál (korábban $\mu = 0.05$ fordult elő paraméterként, viszont ott a fejlődésdinamikában ez negatív előjellel jelent meg). A fejlődésdinamika másik paramétere most azonban másfajta szerepet tölt be, elvégre a véletlentagot már nem σ szorozza önmagában, hanem a b paraméter y-szerese, vagyis már maga a folyamat aktuális nagysága is befolyásolja a véletlenértéket. Példánkban válasszuk b-t 0.005-nek. Mekkorák lesznek ekkor a keresett árak?

- Geometriai Brown-mozgás, szórásnégyzet elv

  Az időkonzisztens árazás $+\infty$ eredményt hozott paraméterválasztástól függetlenül.

  Statikus árazással viszont véges árat kapunk a 23-as összefüggés alapján:

$$\Pi_t^V(f(y(T))) = cy_t e^{a(T-t)} + \frac{1}{2}\alpha c^2 y_t^2 e^{2a(T-t)}(e^{b^2(T-t)} - 1)$$

  Behelyettesítve:

$$\Pi_t^V(f(y(T))) = 1 \cdot 10000 \cdot e^{-0.05 \cdot 10} + \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 1^2 \cdot 10000^2 \cdot e^{-2 \cdot 0.05 \cdot 10} \cdot (e^{0.005^2 \cdot 10} - 1) \approx$$

$$\approx 6065 + 2300 = 8365. \text{ (egészre kerekített érték)}$$

- Geometriai Brown-mozgás, szórás elv

  A korábban definiált paraméterekkel dolgozunk.

  Időkonzisztens árazással (24-es öf.):

$$\pi^S(t, y) = cy_t e^{(a+\beta b)(T-t)}$$

  Behelyettesítve:

$$\pi^S(t, y) = 1 \cdot 10000 \cdot e^{(-0.05+2 \cdot 0.005) \cdot 10} = 6703. \text{ (egészre kerekített érték)}$$

Statikus árazással (25-ös öf.):

$$\Pi_t^S(f(y(t))) = cy_t e^{a(T-t)}\big(1+\beta\sqrt{(e^{b^2(T-t)}-1)}\big)$$

Behelyettesítve:

$$\Pi_t^S(f(y(t))) = 1\cdot 10000\cdot e^{-0.05\cdot 10}\cdot\big(1+2\cdot\sqrt{(e^{0.005^2\cdot 10}-1)}\big)\approx$$
$$\approx 6065\cdot 1.031625\approx 6257. \text{ (egészre kerekített érték)}$$

Itt is azt kaptuk a vártnak megfelelően, hogy az időkonzisztens ár felül fogja múlni a statikusat, elvégre a megelőző alfejezetben láthattuk, hogy míg az előbbi hozzávetőlegesen az eltelt időt, addig az utóbbi annak gyökét veszi szorzósúlyul a kockázati felárnál, s esetünkben az idő 1 egységnél nagyobb ($T-t=10$), így a $(T-t)$-s szorzó nagyobb lesz, mint a $\sqrt{T-t}$-s. Jelen esetben az eltérés $6703 \leftrightarrow 6257$. Most is hangsúlyozandó azonban, hogy ez az eltérés megegyező díjelvparaméter esetén adódott, de ez természetesen nem azzal ekvivalens, hogy az időkonzisztens árazás mint megközelítés általánosságban magasabb kockázati felárat követelne. Másfajta szerepet tölt be egyiknél és másiknál a díjelv paramétere, nem indokolt a két módszer esetében megegyezőnek beállítani őket.

2.9. A díjelvparaméterek viszonya

A két megelőző fejezetben az időkonzisztens és a hagyományos, statikus árazás eredményeit hasonlítottuk össze egymással, összesen négy alapeset tanulmányozása révén. Ebből a négy esetből egyszer arra jutottunk, hogy a szolgáltatott árak megegyeznek, egyszer pedig arra, hogy míg az egyik $+\infty$ lesz, addig a másik véges értéket fog adni. A maradék két esetben láthattunk csak példát arra, hogy mindkét módszer véges eredményt ad ugyan, de azok képlet szerint nem egyezőek. Megállapítottuk, hogy mivel eltérő jelentőségű szerepet játszanak ezek a paraméterek a két módszer áralakításában, ezért nem is indokolt őket megegyezőnek választani: ekkor viszont felmerülhet a kérdés, hogy milyen paraméterválasztások kellenének ahhoz, hogy adott körülmények (a biztosítási folyamat jellemzőinek és a szerződés tartamának rögzítése) mellett ugyanazt az árat kapjuk. Milyen viszonyban állnának így egymással ezen paraméterek?

A két szóba jövő eset, ahol tehát értelme van a vizsgálódásnak, mert véges, ám eltérő eredményeket kapunk:

1) Ornstein–Uhlenbeck folyamat, szórás elv

2) Geometriai Brown-mozgás, szórás elv

Az időkonzisztens módszer paramétere szerepeljen $\tilde{\beta}$, a statikusé pedig $\hat{\beta}$ jelzéssel (ugye mindkét esetben a szórás elvvel áraztunk, ezek β paraméterrel szerepeltek), s lássunk neki a vizsgálódásnak!

- Ornstein–Uhlenbeck folyamat, szórás elv

	A módszer szerinti ár t-ben
Időkonzisztens módszer	$\pi^S(t,y) = cy_te^{-\mu(T-t)} + c\tilde{\beta}\sigma(T-t)$
Statikus megközelítés	$\Pi_t^S(f(y(t)) = cy_te^{-\mu(T-t)} + c\hat{\beta}\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu}}$

A két árat egyenlővé téve:

$$cy_te^{-\mu(T-t)} + c\tilde{\beta}\sigma(T-t) = cy_te^{-\mu(T-t)} + c\hat{\beta}\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu}}, \quad \text{levonva } cy_te^{-\mu(T-t)}\text{-t:}$$

$$c\tilde{\beta}\sigma(T-t) = c\hat{\beta}\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu}}, \quad \text{leosztva a nemnulla } c\sigma\text{-val:}$$

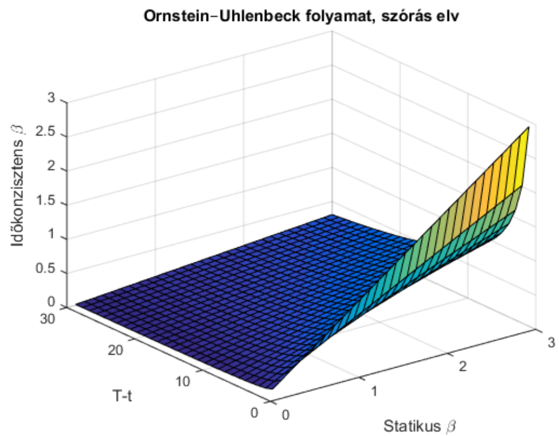
$$\tilde{\beta}(T-t) = \hat{\beta}\sqrt{\frac{1-e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu}}, \quad \text{egy oldalra rendezve, } \tilde{\beta}\text{-t kifejezve:}$$

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta}\sqrt{\frac{1-e^{-2\mu(T-t)}}{2\mu(T-t)^2}}$$

Így Ornstein–Uhlenbeck folyamatra szórás elv mellett megegyező árból kiindulva megkaptuk az időkonzisztens paramétert a statikus függvényeként kifejezve. Megtehetjük, hogy ábrázoljuk a kapottat. A biztosítási folyamat paramétereit a korábban is használt paraméterek értékeiben ($\mu = 0.05$, $\sigma = 20$) rögzítjük. Az időtényezőt mint változót kezeljük. Ekkor:

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta}\sqrt{\frac{1-e^{-2\cdot 0.05\cdot(T-t)}}{2\cdot 0.05\cdot(T-t)^2}} = \hat{\beta}\sqrt{\frac{1-e^{-0.1\cdot(T-t)}}{0.1\cdot(T-t)^2}} \tag{26}$$

Három dimenzióban ábrázolva ($0 < T - t \leq 30$, $0 \leq \hat{\beta} \leq 3$):



2. ábra. Ornstein–Uhlenbeck folyamat, szórás elv esetén: $\tilde{\beta}$ és $\hat{\beta}$ kapcsolata

Néhány érték számszerűen is:

$\tilde{\beta}$	$\hat{\beta} = 1$	$\hat{\beta} = 2$	$\hat{\beta} = 3$
$T - t = 0.5$	1.3967	2.7934	4.1902
$T - t = 1$	0.9755	1.9510	2.9265
$T - t = 5$	0.3967	0.7934	1.1902
$T - t = 10$	0.2514	0.5028	0.7543
$T - t = 15$	0.1858	0.3716	0.5574
$T - t = 20$	0.1470	0.2941	0.4411
$T - t = 25$	0.1212	0.2424	0.3636
$T - t = 30$	0.1028	0.2055	0.3083

Az ábrán is kiviláglik az, amit már analitikus vizsgálódásunk során is láthattunk korábban. Megállapítottuk ugye, hogy míg az időkonzisztens árazás kockázati többletében az időtényező maga jelenik meg együtthatóként, addig statikus esetben hozzávetőlegesen annak gyöke (utóbbi hangsúlyozottan csak közelítő eredmény). Ebből értelemszerűen adódik, hogy 1-nél kisebb időhorizontra ugyanahhoz az árhoz rögzített $\hat{\beta}$ mellett magasabb $\tilde{\beta}$, 1-es időhorizontra közel megegyező $\tilde{\beta}$, míg 1-nél nagyobb időhorizontra alacsonyabb $\tilde{\beta}$ tartozik. Ez a karakterisztika rajzolódik ki a táblázatban is.

Továbbá az is megfigyelhető, hogy minél hosszabb időtávról van szó, annál élesebben válik el egymástól a két β-érték: minél nagyobb $T-t$, arányában annál kisebb $\tilde{\beta}$ adja időkonzisztens árazással ugyanazt az árat, mint adott $\hat{\beta}$ statikus módon.

Ebből is levonható a következtetés, amiről már korábban is szó esett: nagyságrendileg más szerepű egyik és másik módszer esetében az alkalmazott díjparaméter. Lényegében azt mondhatjuk, hogy mivel az időkonzisztens megközelítés $\tilde{\beta}$-ja egymás utáni intervallumokon fog újra és újra megjelenni, így az egymás utániság miatt hosszú időtávon "felerősödik" a szerepe. Ez indokolhatja, hogy nagy $T-t$ esetén már kis $\tilde{\beta}$ is olyan magas kockázati többletet tud produkálni, amit statikus esetben relatív magas $\hat{\beta}$ kér csak.

Hasonló eredményre fogunk jutni geometriai Brown-mozgás esetén is:

- Geometriai Brown-mozgás, szórás elv

	A módszer szerinti ár t-ben
Időkonzisztens módszer	$\pi^S(t,y) = cy_t e^{(a+\tilde{\beta}b)(T-t)}$
Statikus megközelítés	$\Pi_t^S(f(y(t)) = cy_t e^{a(T-t)}\left(1+\hat{\beta}\sqrt{e^{b^2(T-t)}-1}\right)$

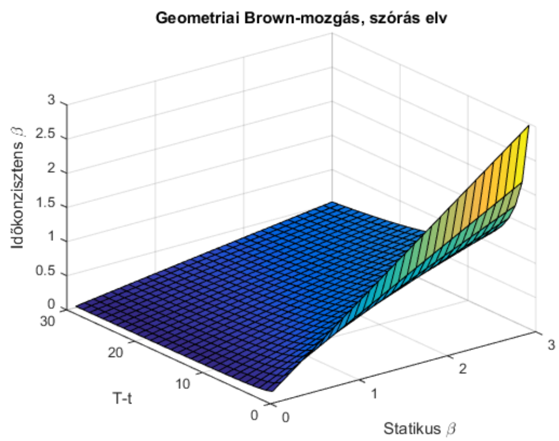
A kettőt egyenlővé téve:

$$
\begin{aligned}
cy_t e^{(a+\tilde{\beta}b)(T-t)} &= cy_t e^{a(T-t)}\left(1+\hat{\beta}\sqrt{e^{b^2(T-t)}-1}\right), && \text{leosztva a nemnulla } cy_t e^{a(T-t)}\text{-vel:}\\
e^{\tilde{\beta}b(T-t)} &= 1+\hat{\beta}\sqrt{e^{b^2(T-t)}-1}, && \text{mindkét oldal nemnegatív, így}\\
& && \text{vehetjük logaritmusukat:}\\
\tilde{\beta}b(T-t) &= \ln\left(1+\hat{\beta}\sqrt{e^{b^2(T-t)}-1}\right), && \text{egy oldalra rendezve, } \tilde{\beta}\text{-t kifejezve:}\\
\tilde{\beta} &= \frac{\ln\left(1+\hat{\beta}\sqrt{e^{b^2(T-t)}-1}\right)}{b(T-t)}
\end{aligned}
$$

Fixálva b paramétert: $b = 0.005$ (ugyanezzel az értékkel dolgoztunk ezt megelőzően is), $T-t$-t változóként kezelve:

$$
\tilde{\beta} = \frac{\ln\left(1+\hat{\beta}\sqrt{e^{0.000025\cdot(T-t)}-1}\right)}{0.005\cdot(T-t)} \tag{27}
$$

Ekkor $\tilde{\beta}$ ábrázolva $\hat{\beta}$ és $T-t$ függvényeként ($0 < T-t \leq 30$, $0 \leq \hat{\beta} \leq 3$):



3. ábra. Geometriai Brown-mozgás, szórás elv esetén: $\tilde{\beta}$ és $\hat{\beta}$ kapcsolata

Illetve néhány $\tilde{\beta}$ számszerűen is:

$\tilde{\beta}$	$\hat{\beta}=1$	$\hat{\beta}=2$	$\hat{\beta}=3$
$T-t=0.5$	1.4117	2.8185	4.2203
$T-t=1$	0.9975	1.9901	2.9777
$T-t=5$	0.4447	0.8846	1.3197
$T-t=10$	0.3138	0.6227	0.9269
$T-t=15$	0.2558	0.5067	0.7530
$T-t=20$	0.2212	0.4376	0.6494
$T-t=25$	0.1976	0.3904	0.5780
$T-t=30$	0.1802	0.3556	0.5265

Ugyanaz mondható el itt is, mint az előbb, Ornstein–Uhlenbeck folyamatot vizsgálva. Igaz azonban, hogy most rövid időtávon jelentősebb, hosszú időtávon viszont kevésbé markáns eltérések adódnak $\tilde{\beta}$ és $\hat{\beta}$ között.

2.10. Az időkonzisztenciáról szóló fejezet rövid összefoglalása

A fejezetben bevezettük az időkonzisztencia fogalmát, s elmagyaráztuk, hogy noha a hagyományosan alkalmazott, statikus környezetben felírt aktuáriusi díjelvek nem feltétlenül teljesítik a követelményét, mikor biztosítási szerződések árazásakor pénzügyi kockázatok is megjelennek, mégiscsak felmerülhet az igény annak megkövetelésére. Erre a gondolatra építve Antoon Pelsser és Ahmad Salahnejhad Ghalehjooghi időkonzisztens aktuáriusi értékelésekről szóló cikke alapján megnéztük egyes aktuáriusi díjelvek időkonzisztens kiterjesztését. Az így kapott értékeléseket összevetettük a hagyományos, statikus változataikkal is, valamint azokat konkrét példákra is kiszámoltuk.

A szakdolgozat célkitűzése olyan értékelések felállítása volt, melyek egyaránt idő- és piackonzisztensek. Az előbbi témakörét már részletesen tanulmányoztuk, utóbbiról viszont még nem esett sok szó. A következő fejezetben erre fog sor kerülni: megismerkedünk a piackonzisztenciával.

3. Piackonzisztens aktuáriusi értékelések

Korábban is a hagyományos, aktuáriusi díjelvek kiterjesztésével foglalkoztunk: idáig időkonzisztens irányba. Egy másik fajta kiterjesztési irányvonal lehet a piackonzisztens irányba történő. Ez utóbbi arra reflektál, hogy a biztosítási piacon már régóta nagy számban vannak jelen olyan termékek, amelyek kockázata nem pusztán egy kapcsolódó biztosítási folyamat véletlenségéből fakad (ezekre a kockázatokra innentől aktuáriusi kockázatokként fogunk hivatkozni), hanem amellett pénzügyi, piaci kockázatot is magukban foglalnak. Ilyenek a részvényárfolyamokon alapuló termékek (például a unit-linked biztosítások), valamint a garanciával rendelkező kifizetések is.

Amikor az aktuáriusi és pénzügyi kockázat különbözőségéről beszélünk, akkor azt nem csupán azért tesszük, mert névleg más a kockázat forrása, de maga a kockázati jelleg is eltérő lesz: míg az előbbit hedzselni rendszerint nem tudjuk, addig az utóbbit sok esetben igen. Ez azt jelenti, hogy annak ellenére, hogy biztosítóként egy véletlen kifizetést vállalunk el, nem feltétlenül vagyunk kiszolgáltatva annak kockázatával szemben. Egy leegyszerűsített példa: ha azt vállaljuk, hogy tíz év múlva kifizetjük egy adott részvény akkori árát, akkor hiába követ az ár véletlen folyamatot, ha most megvesszük a részvényt és tíz évig tartjuk, akkor tíz év múlva lényegében rendelkezésünkre fog állni az akkori ára, azaz megfelelő hedzseléssel (most: a részvény megvásárlásával) elérhetjük, hogy a részvényár változása okozta kockázattal szemben semlegesek legyünk. Ennél egy fokkal összetettebb példa lehetne, ha nem azt vállaljuk, hogy kifizetjük tíz év múlva a részvény árát, hanem azt, hogy ezt egy elérési biztosítással kombináljuk, vagyis amennyiben a biztosított megéli a tizedik évet, úgy jogosult lesz az akkori részvényár-kifizetésre, különben viszont nem. Ezen utóbbi példa továbbfejlesztése vezet el a unit-linked biztosítási termékekhez, amik jelenleg is meghatározó részét teszik ki az életbiztosítási piacnak. Érzékelhető, hogy milyen fontos feladat így manapság a piaci, pénzügyi kockázatok biztosítói értékelése.

Összefoglalva elmondható, hogy biztosítóként nem pusztán olyan kockázatokkal szembesülünk, amelyek egy kapcsolódó biztosítási folyamat (például túlélésszám) sztochasztikájából fakadnak, hanem olyanokkal is, amelyek egy vagy több piacon kereskedett termék áralakulásának véletlenségével állnak kapcsolatban, s a piacon kereskedettség volta miatt lefedezhetőek (bár a piac nem feltétlenül teljes, így nem állítható, hogy mindig megoldható a megfelelő fedezés). Minthogy tehát számos szerződés egyaránt magában foglal nem hedzselhető és hedzselhető kockázatokat is, adódik a kérdés: hogyan árazzuk s hogyan kezeljük biztosítóként ezen kockázatok együttesét?

Az alapvető nehézség abban rejlik, hogy a pénzügyi és aktuáriusi kockázattípus nagyon eltérő viselkedésű, s emiatt árazásuk is teljesen más elveken nyugszik. A kétfajta kockázat együttes jelenléte olyan hozzáállást hív elő, ami kombinálni tudja a kettőt: az aktuáriusi díjelvek idő- és piackonzisztens irányba történő kiterjesztése egy lehetséges megoldást kínál.

Mielőtt azonban hozzákezdenénk ennek tanulmányozásához, előbb több figyelmet kell szentelnünk magának a piackonzisztencia fogalmának. Mit is értünk pontosan piackonzisztencia alatt, az hogyan valósítható meg egy biztosítási portfólió keretrendszerében?

3.1. Piackonzisztencia a biztosításban

Röviden azt mondhatjuk, hogy a piackonzisztencia azt követeli meg, hogy azoknak az instrumentumoknak az ára, melyek replikálhatóak, egyezzen meg a replikálási árral.

A piackonzisztencia s annak biztosítási szektorban való megjelenése mélyrehatóan fel van dolgozva a Mario Valentin Wüthrich, Hans Bühlmann és Hansjörg Furrer hármas szerzésében megjelent Market-Consistent Actuarial Valuation című könyvben ([4]). Ebben kifejtésre kerül több, a témához kapcsolódó elméleti és gyakorlati megfontolás is, mindazonáltal a mű részletes ismertetésére most nem nyílik lehetőségünk, mindössze egyetlen, a témánkhoz szorosan fűződő szeletét fogjuk röviden áttekinteni ebben a fejezetben.

3.1.1. Kiértékelési portfólió

A piackonzisztencia megvalósításának magja egy ún. kiértékelési portfólió felállítása ($\mathbf{X}$-szel jelölvén a biztosítási portfóliót az $\mathbf{X} \mapsto VaPo(\mathbf{X})$ hozzárendelést keressük, ahol a $VaPo$ jelölés a valuation portfolióra, vagyis a kiértékelési portfólióra utal.)

Ez azt jelenti, hogy a biztosítási portfóliónk értékelésekor elsőként azt piacon kereskedett termékek összességeként írjuk fel, s végül ez utóbbinak kell majd meghatároznunk az árát. Lényegében arra törekszünk, hogy az eredeti biztosítási portfóliónkat egy replikáló portfólióvá játsszuk át, ahol a replikáló portfólió már meghatározott pénzügyi termékekből tevődik össze.

A replikálás és értékelés két fázisban történik. Először feltesszük, hogy a halálozási tábla determinisztikus, vagyis nincsen aktuáriusi kockázat, pontosan ismert, hogy mikor hányan haláloznak el. A második lépésben pedig már számolunk ezzel a kockázattal is, azaz ott már sztochasztikus halálozási táblával fogunk dolgozni.

Nézzük tehát elsőként a determinisztikus modellt!

3.1.2. Kiértékelési portfólió, determinisztikus modell

A könnyebb érthetőség kedvéért egy példán illusztrálva fogjuk levezetni a kiértékelési portfólió felállítását. Nem ugyanazt a példát vizsgáljuk, amit a felhasznált irodalom, attól eltérő tartammal és induló életkorral fogunk dolgozni, ugyanakkor mi is egy vegyesbiztosítást veszünk alapul, hogy az elérési és haláleseti kifizetés egyaránt bemutatható legyen. Továbbá ugyanúgy lesz garanciális kifizetésünk, hogy annak replikálását is szemléltetni tudjuk. Lássuk is a példát!

A biztosításba történő belépési kor 40, a tartam 3 év ($x = 40$, $n = 3$). A biztosítási díj állandó, minden év elején felmerülő: $\Pi_t = \Pi$, $t = 40, 41, 42$. A haláleseti és elérési kifizetések egy előre megnevezett **I** index (vagy részvény) adott évi értékének lesznek függvényei (I_t, $t = 41, 42, 43$), ahol az induló érték egységnyi, $I_{40} = 1$. A kifizetések:

-Elérési: I_{43}, garancia nélküli.

-Haláleseti ($t = 41, 42, 43$): $\max(I_t, (1+i)^{t-40})$, ahol i előre rögzített kamatláb. Ez a kifizetés tehát garanciális, évi i százalék kamatgaranciát vállal.

A mortalitási tábla szokásos jelöléseivel legyen l_x az x. életkort megéltek, d_x pedig az x. életkort még megélt, de $x + 1$.-et már nem elérők száma! (Értelemszerűen: $d_x = l_x - l_{x+1}$.) Ekkor a biztosító ki- és befizetései egy táblázatban összefoglalva:

t	cash flow	biztosítási díj	haláleseti kifizetés	elérési kifizetés
40	X_{40}	$-l_{40}\Pi$		
41	X_{41}	$-l_{41}\Pi$	$d_{40}\cdot \max(I_{41}, (1+i)^1)$	
42	X_{42}	$-l_{42}\Pi$	$d_{41}\cdot \max(I_{42}, (1+i)^2)$	
43	X_{43}		$d_{42}\cdot \max(I_{43}, (1+i)^3)$	$l_{43} \cdot I_{43}$

Keressük az ezt replikáló portfóliót, $VaPo(\mathbf{X})$-et. Lássuk is, milyen egységekből építhetjük ezt fel!

-Biztosítási díj: zéró-kupon kötvényekkel: Z_{40}, Z_{41}, Z_{42}. Magyarázat: például a két év múlva esedékes egy egységnyi befizetés replikálható egy most megvásárolt két év tartamú zéró-kupon kötvénnyel.

-Elérési kifizetés: $\mathbf{I}$. Magyarázat: az eléréskor esedékes I_{43} kifizetés replikálható az $\mathbf{I}$ index (részvény) azonnali megvásárlásával.

-Haláleseti kifizetés: az előbbieknél összetettebb, a t időpontra vonatkozóan $\mathbf{I}+$ $+Put^{(t)}(\mathbf{I},(1+i)^{t-40})$, ahol $t = 41, 42, 43$. Az index (részvény) megvásárlása mellett tehát egy Put opcióra is szükségünk van, mégpedig egy olyanra, amely lehetővé teszi, hogy t időpontban az $\mathbf{I}$ részvényünket $(1+i)^{t-40}$ áron eladhassuk. Ez leképzi a $\max(I_t,(1+i)^{t-40})$-et: ha az ár t-ben $(1+i)^{t-40}$ felett van, akkor nem érvényesítjük a put opció lehetőségét, így valóban I_t értékkel fogunk rendelkezni, ha az ár viszont $(1+i)^{t-40}$ alá kerül, akkor az index értéke az opció értelmében $(1+i)^{t-40}$-re "cserélhető". Összességében a t-beli kifizetés valóban $\max(I_t,(1+i)^{t-40})$ lesz.

Mindezek alapján felírható egy bázis a portfólióhoz tartozó kifizetések replikálására, mégpedig az alábbi 7-dimenziós vektor:

$$(Z_{40}, Z_{41}, Z_{42}, \mathbf{I}, Put^{(41)}(\mathbf{I},(1+i)^1), Put^{(42)}(\mathbf{I},(1+i)^2), Put^{(43)}(\mathbf{I},(1+i)^3))$$

A portfólió replikálásának hátramaradó lépése, hogy azt is megmondjuk, hogy az egyes báziselemekből mennyi szükségeltetik. Visszakanyarodva a korábban felírt replikálási táblázatunkhoz, a determinisztikus halálozási tábla feltételezéseivel élve ezek az értékek:

báziselem	egységek száma
Z_{40}	$-l_{40} \cdot \Pi$
Z_{41}	$-l_{41} \cdot \Pi$
Z_{42}	$-l_{42} \cdot \Pi$
$\mathbf{I}$	$d_{40} + d_{41} + d_{42} + l_{43} = l_{40}$
$Put^{(41)}(\mathbf{I},(1+i)^1)$	d_{40}
$Put^{(42)}(\mathbf{I},(1+i)^2)$	d_{41}
$Put^{(43)}(\mathbf{I},(1+i)^3)$	d_{42}

Mi történt? Sikeresen replikáltuk a biztosítási portfóliónkat: először meghatároztunk egy bázist, majd felírtuk a portfóliónkat ebben a bázisban, így megadván a replikáló vektorunk. Innentől a kiértékelés úgy történik, hogy egy kiértékelési függvény segítségével árat rendelünk ehhez a replikáló vektorhoz. Feltételezvén, hogy ismertek az egyes báziselemek árai (vagyis ismertek a megfelelő zéró-kupon kötvények, az index, illetve a megfelelő put opciók árai), már a replikáló portfólió ára is meghatározható: valamennyi báziselemből a replikáláshoz szükséges mennyiséget véve a portfólió ára ezen árak összegeként fog adódni. Matematikailag: először az $\mathbf{X} \mapsto VaPo(\mathbf{X})$ hozzárendelést elvégezve felírhattuk a portfóliónk replikálását, majd ezután egy A kiértékelési lineáris funkcionált véve ezen elvégezhetjük a $VaPo(\mathbf{X}) \mapsto A(VaPo(\mathbf{X}))$ hozzárendelést, amely tehát már értéket rendel a replikáló portfólióhoz.

Megjegyzés: érdemes azonban szót ejteni arról is, hogy ez a kiértékelési A függvény nem feltétlenül áll a rendelkezésünkre, például nem szükségszerűen kereskednek a piacon hétéves zéró-kupon kötvényekkel, noha lehet az az egyik báziselemünk. Így előfordulhat, hogy egyéb megfontolásokra és módszerekre is szükségünk van a portfólió árának meghatározásához. Ebből az észrevételből adódóan persze az is elmondható, hogy a kiértékelési függvényünk nem is feltétlen egyértelmű. A hétéves zéró-kupon kötvény példájánál maradva: ha nincs adott ára egy báziselemnek, akkor az azt értékelő különböző hozzáállások is eltérő értékeket rendel(het)nek hozzá, így végeredményben eltérő kiértékelési függvényt eredményez(het)nek.

Összefoglalás

A piackonzisztens értékelés első fázisában determinisztikus halálozási táblát alapul véve leképeztük a biztosítási portfóliónkat megfelelő pénzügyi termékek összességeként, azaz fel tudtunk írni egy azt replikáló portfóliót. Feltételezvén, hogy ismertek a bázisként szolgáló pénzügyi termékek értékei (árai), már a portfólió értékének magának meghatározására is lehetőségünk nyílik e replikáló portfólió alapján.

3.1.3. Kiértékelési portfólió, sztochasztikus modell

A piackonzisztens értékelés második fázisában már sztochasztikus halálozási táblával dolgozunk. Az előbbi fázisban ugye determinisztikus táblát vettünk alapul, tehát lényegében nem foglalkoztunk az aktuáriusi kockázattal, amit egy kapcsolódó biztosítási folyamat (például a túlélésszám) sztochasztikája okozott. Most viszont már ez utóbbi kockázatot is számításba vesszük azáltal, hogy a modellünk sztochasztikus mortalitási táblára fog építeni.

Miből is fakad a kockázat? Abból, hogy minthogy a halálozások immár nem determinisztikusak, így a hozzájuk kapcsolódó pénzáramok sem lesznek azok. Ebben a fázisban úgy fogunk egy portfóliót felírni, hogy annak alapja az előző fázisban bevezetett replikáló portfólió legyen: a mortalitási tábla legjobb becslése determinisztikus táblát ad, s az alapján felépíthető az előző fázisban tárgyalt replikáló portfólió. Ugyanakkor a most jelenlevő véletlenség miatt ezt a portfóliót kiegészíteni kényszerülünk egyfajta plusz biztonságot adó kockázati ráhagyással.

A könnyebb érthetőség kedvéért most is egy példán szemléltetjük a módszert. Akárcsak az első fázisban, a feladatunk ismét egy kiértékelési portfólió felállítása lesz. A vizsgálat alapjául szolgáló biztosítás legyen ugyanaz, mint a korábban látott: a vegyesbiztosítás paraméterei mind megegyezőek az előbbiben látottal, az egyedüli eltérés az lesz, hogy most miután elindultunk az l_{40} életben lévővel, már engedjük a túlélési folyamatot sztochasztikusan továbbfejlődni. (Így térünk át determinisztikusról sztochasztikus mortalitási táblára.) A következő években tehát a túlélések véletlenszámok lesznek: L_{41}, L_{42}, L_{43}, illetve hasonlóan a halálozási számok is: D_{40}, D_{41}, D_{42}.

Ezeket figyelembe véve a második fázis ki- és befizetései az alábbiak:

t	cash flow	biztosítási díj	haláleseti kifizetés	elérési kifizetés
40	$X^*_{40} = X_{40}$	$-l_{40}\Pi$		
41	X^*_{41}	$-L_{41}\Pi$	$D_{40}\cdot \max(I_{41}, (1+i)^1)$	
42	X^*_{42}	$-L_{42}\Pi$	$D_{41}\cdot \max(I_{42}, (1+i)^2)$	
43	X^*_{43}		$D_{42}\cdot \max(I_{43}, (1+i)^3)$	$L_{43} \cdot I_{43}$

Ez alapján felírható a replikáló vektor is a már korábban felállított bázisban:

báziselem	egységek száma
Z_{40}	$-l_{40} \cdot \Pi$
Z_{41}	$-L_{41} \cdot \Pi$
Z_{42}	$-L_{42} \cdot \Pi$
$\mathbf{I}$	$D_{40} + D_{41} + D_{42} + L_{43} = l_{40}$
$Put^{(41)}(\mathbf{I}, (1+i)^1)$	D_{40}
$Put^{(42)}(\mathbf{I}, (1+i)^2)$	D_{41}
$Put^{(43)}(\mathbf{I}, (1+i)^3)$	D_{42}

Látjuk, hogy most már a replikáló vektorunk elemei között véletlenszámok is megjelennek. Nyilván ezzel önmagában nem haladhatunk tovább, elvégre nem replikálhatunk véletlen mennyiségekkel. Ugyanakkor felírhatjuk, hogy milyen eltérés mutatkozik a mostani és az előző fázisbeli pénzáramok (s így a replikáló vektorok) között, vagyis megpróbálhatjuk valamelyest a mostani esetünket visszavezetni a már korábban tárgyaltra.

Mik is tehát pontosan ezek a pénzárambeli eltérések? Írjuk fel a bázis alapján! Tegyük meg ezt elsőképp $t = 41$-re, hiszen az az első év, ahol különbség mutatkozik a pénzáramok között.

-a biztosítási díjból fakadóan:

$$(l_{41} - L_{41}) \cdot \Pi \cdot Z_{41} \tag{28.1}$$

-a haláleseti kifizetésből fakadóan:

$$(D_{40} - d_{40}) \cdot (\mathbf{I} + Put^{(41)}(\mathbf{I}, (1+i)^1)) \tag{28.2}$$

Ezen felül értelemszerűen a $t = 41$-ben történő változás a későbbi évekre tartott portfóliót is felülírja, ezen portfólió megváltozását is fel kell írnunk. A $t = 42$-re vonatkozó kiértékelési portfóliót $VaPo(\mathbf{X}_{42})$-vel jelölve ez a differencia:

$$(L_{41} - l_{41}) \cdot \frac{VaPo(\mathbf{X}_{42})}{l_{41}} \tag{28.3}$$

Magyarázat: determinisztikus esetben ez a tartott portfólió $VaPo(\mathbf{X}_{42}) = \frac{l_{41}}{l_{41}} VaPo(\mathbf{X}_{42})$, míg sztochasztikus esetben ez arányosan módosul: $\frac{L_{41}}{l_{41}} VaPo(\mathbf{X}_{42})$. Ezek különbségeként valóban a fenti adódik.

Felhasználva azt a könnyen levezethető összefüggést, hogy $D_{40} - d_{40} = l_{41} - L_{41}$, az előzőek alapján a determinisztikus és sztochasztikus eset közti eltérés az alábbi formát fogja ölteni a bázisban felírva:

$$(D_{40} - d_{40}) \cdot \left(\mathbf{I} + Put^{(41)}(\mathbf{I}, (1+i)^1) + \Pi \cdot Z_{41} - \frac{VaPo(\mathbf{X}_{42})}{l_{41}}\right) \tag{29}$$

Megtehetjük, hogy kicsit jobban szemügyre vesszük a kapott összefüggést. Mi is mondható el a kockázatnak kitett összegről, mi történik, ha a várt d_{40} helyett D_{40} haláleset következik be? Egyrészt a biztosító köteles állni a vonatkozó haláleseti kifizetést, ami a bázis szerint egy főre $\mathbf{I} + Put^{(41)}(\mathbf{I}, (1+i)^1)$. Ezen felül elesik a $t = 41$ évi díjbefizetéstől is, ami egy főre nézve $\Pi \cdot Z_{41}$. Ugyanakkor az elhalálozottra már nem kell tartania a replikáló portfólió egy főre eső részét, vagyis "felszabadul" $\frac{VaPo(\mathbf{X}_{42})}{l_{41}}$-nyi bázisérték. Összességében egy főre a kockázatnak kitett összeg bázisunkban felírva: $\mathbf{I} + Put^{(41)}(\mathbf{I}, (1+i)^1) + \Pi \cdot Z_{41} - \frac{VaPo(\mathbf{X}_{42})}{l_{41}}$, $D_{40} - d_{40}$ főre pedig ebből adódóan: $(D_{40} - d_{40}) \cdot \left(\mathbf{I} + Put^{(41)}(\mathbf{I}, (1+i)^1) + \Pi \cdot Z_{41} - \frac{VaPo(\mathbf{X}_{42})}{l_{41}}\right)$. Vagyis logikusan is következik az összehasonlításból megkapott képlet.

Hasonló megfontolásokkal levezethető a $t = 42$-beli differencia a determinisztikus és sztochasztikus eset portfóliói között:

$$(D_{41} - \frac{L_{41}}{l_{41}} d_{41}) \cdot \left(\mathbf{I} + Put^{(42)}(\mathbf{I}, (1+i)^2) + \Pi \cdot Z_{42} - \frac{VaPo(\mathbf{X}_{43})}{l_{42}}\right) \tag{30}$$

Illetve $t = 43$-ra:

$$(D_{42} - \frac{L_{42}}{l_{42}} d_{42}) \cdot \left(\mathbf{I} + Put^{(43)}(\mathbf{I}, (1+i)^3) - \mathbf{I}\right) = (D_{42} - \frac{L_{42}}{l_{42}} d_{42}) \cdot Put^{(43)}(\mathbf{I}, (1+i)^3) \tag{31}$$

Mi alapján számítsunk fel kockázati többletet? Minthogy a konkrét megvalósulások (a nagybetűkkel jelölt értékek) nem ismertek, véletlenszerűek, így a 29-31-es képleteket egy az egyben természetesen nem alkalmazhatjuk, de ki tudjuk olvasni belőlük, hogy mi egy adott évben a kockázatnak kitett portfólió, amivel arányosan lehetne tartani egyfajta "kockázati többlet portfóliót". Például $t = 41$-re nézve ez: $\mathbf{I} + Put^{(41)}(\mathbf{I}, (1+i)^1) + \Pi \cdot Z_{41} - \frac{VaPo(\mathbf{X}_{42})}{l_{41}}$. Ez a konkrét megvalósulásban $D_{40} - d_{40}$-vel kerül megszorzásra, ami átírva:

$$D_{40} - d_{40} = l_{40} \cdot \left(\frac{D_{40}}{l_{40}} - \frac{d_{40}}{l_{40}}\right) \tag{32.1}$$

Bevezetve a $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ jelölést:

$$D_{40} - d_{40} = l_{40} \cdot \left(\frac{D_{40}}{l_{40}} - \frac{d_{40}}{l_{40}}\right) = l_{40} \cdot \left(\frac{D_{40}}{l_{40}} - q_{40}\right) \tag{32.2}$$

A felhasznált irodalom szerzői ebből kiindulva azt mondják, hogy tartsunk minden évre egyfajta kockázati többlet portfóliót, mégpedig az évekre vonatkozó portfóliókat KF_t-szel jelölve legyenek ezek az alábbiak:

$$KF_{41} = l_{40} \cdot (q^*_{40} - q_{40}) \cdot \left(\mathbf{I} + Put^{(41)}(\mathbf{I}, (1+i)^1) + \Pi \cdot Z_{41} - \frac{VaPo(\mathbf{X}_{42})}{l_{41}}\right) \tag{33.1}$$

$$KF_{42} = l_{41} \cdot (q^*_{41} - q_{41}) \cdot \left(\mathbf{I} + Put^{(42)}(\mathbf{I}, (1+i)^2) + \Pi \cdot Z_{42} - \frac{VaPo(\mathbf{X}_{43})}{l_{42}}\right) \tag{33.2}$$

$$KF_{43} = l_{41} \cdot (q^*_{42} - q_{42}) \cdot Put^{(43)}(\mathbf{I}, (1+i)^3) \tag{33.3}$$

A fentiekben q_x^* az aktuárius által megadható paraméter, lényegében a $q_x^* - q_x$ szorzó határozza meg a kockázati többlet portfóliók aránylagos nagyságát. Látható, hogy ezek a képletek összhangban vannak a korábbi levezetéseinkkel, a 29-31-es és a 32.2-es összefüggésekkel.

A q_x^*, illetve $q_x^* - q_x$ értékek megszabása nem kötött, például valamilyen aktuáriusi elvre támaszkodva történhet. Gondoljunk bele, milyen jelentése is van annak, hogy például a $t = 41$-re vonatkozóan az egy főre eső $\mathbf{I} + Put^{(41)}(\mathbf{I}, (1+i)^1) + \Pi \cdot Z_{41} - \frac{VaPo(\mathbf{X}_{42})}{l_{41}}$-nyi kockázati portfóliót $l_{40} \cdot (q_{40}^* - q_{40})$-vel szorozzuk! Ez a szorzó hivatott ugye leképezni a várható értéktől való $D_{40} - d_{40}$-nyi véletlen eltérést, vagyis azt, hogy ha az elhalálozás alakulása nem a vártnak megfelelően történik, akkor mennyiben módósulnak a portfólió ki- és befizetései. Az a kérdés, hogy a véletlen eltérésért hogyan felárazunk, már az aktuáriusi díjelveknél is előkerül. Alapvetően attól függhet, hogy a kapcsolódó biztosítási folyamat miféle sztochasztikát követ. Az aktuáriusi díjelvek a megkövetelt felárat például a folyamat szórásával vagy szórásnégyzetével arányosították, értelemszerűen mivel itt is hasonló dolgot számolunk, itt is történhet a felár megszabása (ezzel összefüggésben q_x^*, illetve $q_x^* - q_x$ megadása) ez alapján.

Összefoglalva a korábbiakat az mondható el, hogy a tartandó kiértékelési portfóliónk a mortalitási tábla legjobb becsléséből kapott determinisztikus tábla implikálta replikáló portfólió és a kockázati többlet portfóliók összegeként adódik. Vagyis a már kockázati ráhagyással is rendelkező kiértékelési portfóliónk:

$$VaPo^{\text{kock.véd.}}(\mathbf{X}) = VaPo(\mathbf{X}) + \sum_{t=41}^{43} KF_t \tag{34}$$

Ezen portfólió árának meghatározásához több dologra is szükségünk van:

- A determinisztikus táblából adódó replikáló portfólió ($VaPo(\mathbf{X})$) kiértékelésére. A kiértékelésről már részletesebben is esett szó az első fázis ismertetésekor, akkor A-val jelöltük a kiértékelési lineáris funkcionált.

- A kockázati többlet portfóliók meghatározására (esetünkben KF_{41}, KF_{42} és KF_{43} megadására). Ez összefügg az egy főre eső kockázati portfóliók szorzóinak megszabásával.

- Utóbbi kockázati többlet portfóliók kiértékelésére.

Mit kaptunk?

Ebben a fejezetben a piackonzisztencia fogalmával ismerkedtünk meg a Market-Consistent Actuarial Valuation című könyvben leírtakra támaszkodva. Az ott leírtakhoz hasonlóan mi is két lépésben vezettük be a piackonzisztens értékelés aktuáriusi megvalósítását: először a determinisztikus esettel foglalkozva, majd azt továbbvíve a sztochasztikus esetre. A módszer lényege egy kiértékelési portfólió felállítása volt. Az első fázis megfelelő replikáló portfóliója a második fázisban kiegészült az évekre vonatkozó kockázati többlet portfóliókkal is, azaz összességében immáron egy kockázati ráhagyással is eszközölt portfóliót írtunk fel, $VaPo^{\text{kock.véd.}}(\mathbf{X})$-et. A keresett portfóliónk felállítását követően az egy kiértékelési lineáris funkcionál segítségével alkalmasint beárazható, hangsúlyozván hogy a piac nem-teljessége miatt ez a kiértékelési lineáris funkcionál nem feltétlenül áll egyértelműen rendelkezésünkre.

4. Piac- és időkonzisztens aktuáriusi értékelések

A korábbi fejezetekben először az időkonzisztencia, majd a piackonzisztencia fogalmával ismerkedtünk meg. Röviden azt mondhatjuk, hogy egy értékelést akkor tekintünk időkonzisztensnek, hogy ha azt egyetlen időhorizonton megállapítva ugyanazt kapnánk, mintha az időhorizontot tovább bontva értékelnénk. Lényegében egyfajta feltételes várható értéknél is megjelenő toronyszabályt elégítenek ki az ilyen értékelések. Piackonzisztens értékelésnek pedig azokat az értékeléseket tekintjük, amelyek esetében a replikálható instrumentumok ára megegyezik magával a replikálási árral.

A két fogalom tisztázását követően lehetőségünk nyílik arra, hogy ötvözzük a kettőt, vagyis immár olyan értékelésekkel foglalkozzunk, amelyek egyszerre idő- és piackonzisztensek. Mi hívja életre az elvárást, hogy egy értékelés egyaránt teljesítse a két követelményt? Ahogy arról már szó esett, manapság sok olyan termék fordul elő a biztosítási piacon, ami aktuáriusi és pénzügyi kockázatot egyaránt magában foglal, s mi szeretnénk egy eszközt a kezünkben, amely kezeli ezt a kockázatkettőst. A pénzügyi termékek árazásánál már hozzászokhattunk ahhoz, hogy egyfajta dinamikus környezetben értékelünk, vagyis a pénzügyi folyamat fejlődésdinamikájának leképzése mellett. Ez a dinamikus környezet magával vonja az időkonzisztenciát, elvégre a pénzügyi termékek árazásakor természetesen adódik, hogy az ár ugyanaz, ha "egyből" értékelünk, mintha az időhorizontot felosztva értékelnénk pontról pontra. Adódik tehát az ötlet, hogy a biztosítási termékekre is vigyük át ezt a fajta dinamikus, időkonzisztens logikát, terjesszük ki a már ismert aktuáriusi díjelveket időkonzisztens módon. Ha pedig ez már megvan, úgy a piackonzisztencia feltétele is könnyen átültethetővé válik, vagyis végeredményben olyan értékeléseknél kötünk ki, amelyek egyaránt idő- és piackonzisztensek, s így alkalmasak lesznek az aktuáriusi és pénzügyi kockázatok együttes kezelésére.

Mitja Stadje és Antoon Pelsser 2014-ben megjelent Time-Consistent and Market-Consistent Evaluations című cikkében ([5]) foglalkozik a kétféle konzisztencia vegyítésével, együttes megkövetelésével. A szakdolgozat 4. fejezetében ezt a cikket fogjuk feldolgozni. Az aktuáriusi díjelvek kétirányú kiterjesztése kézenfekvő lehetőséget ad idő- és piackonzisztens értékelések felállítására. Ahogy a szerzők, úgy mi is tehát az aktuáriusi díjelvek kiterjesztésére fogunk fókuszálni, s ez alapján bevezetni újfajta kiértékeléseket, amelyek immáron alkalmasak lesznek olyan biztosítási szerződések beárazására, melyek aktuáriusi és pénzügyi kockázatokat egyaránt tartalmaznak.

A cikk egyik fontos eredménye, hogy formalizálja a mindkétféle konzisztenciával rendelkező értékeléseket. Ehhez elsőképp definiálja az úgynevezett kétlépcsős piaci értékeléseket, majd belátja, hogy megfelelő követelmények teljesülése esetén az idő- és piackonzisztens értékelések egybeesnek a kétlépcsős piaci értékelésekkel.

Ahhoz, hogy dolgozni tudjunk ezekkel az kétlépcsős piaci értékelésekkel, először be kell vezetnünk, hogy mit értünk alattuk. Tegyük is ezt meg!

4.1. A használt jelölések

Mindenekelőtt a használt jelölések bevezetésére lesz szükségünk. A feldolgozott cikk jelöléseivel élve legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a kapcsolódó valószínűségi mező, jelölje $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ azt a σ-algebrát, mely leképzi a biztosító kezdeti információját! A mostani vizsgálódásunkban már pénzügyi instrumentumok is a rendelkezésünkre állnak, jelölje $S = (S^1, S^2, \dots, S^n)$ n-dimenziós vektor a pénzügyi piac n instrumentumának áralakulási folyamatát, az általuk generált σ-algebrát pedig jelöljük $\bar{\mathcal{F}}^S$-sel, $\bar{\mathcal{F}}^S \subset \mathcal{F}$! Legyen továbbá $\mathcal{F}^S = \sigma(\bar{\mathcal{F}}^S, \mathcal{G})$!

Feltesszük, hogy a pénzügyi piac teljes és arbitrázsmentes, így minden olyan derivatíva, amely $\mathcal{G}$-re feltételt véve csak az S-beli instrumentumok árából tevődik össze, hedzselhető lesz, valamint egyértelműen létezik a $\mathbb{Q}_{\mathcal{G}}$ valószínűségi mérték (a $\mathcal{G}$-re való feltételt jelölvén alsó indexben), hogy S mint vektor martingál legyen $\mathbb{Q}_{\mathcal{G}}$ alatt. Feltesszük továbbá, hogy $\mathbb{Q}_{\mathcal{G}}$ és $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$ ekvivalens mértékek.

A szokásos jelölésekkel élve legyen $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ –vagy röviden $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{F})$– a korlátos véletlen változók tere! A pénzügyi és biztosítási véletlen változókat H-val jelölvén: $H \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F})$, $H(w)$ a w szcenárióhoz tartozó jelenérték.

A pénzügyi piacon $\mathbb{Q}_{\mathcal{G}}$ fogja definiálni az arbitrázsmentesség adta árazási operátort, $\Pi_{\mathcal{G}} : \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}^S) \to \mathcal{L}^\infty(G)$:

$$\Pi_{\mathcal{G}}(H^S) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{\mathcal{G}}}(H^S) = \int_\Omega H^S(w)\mathbb{Q}_{\mathcal{G}}(dw)$$

A piackonzisztencia formalizálva jelöléseinkkel: minden $H^S \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}^S)$, $H \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F})$ esetén:

$$\Pi_{\mathcal{G}}(H^S + H) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{\mathcal{G}}}(H^S) + \Pi_{\mathcal{G}}(H)$$

Megjegyzés: $\mathcal{F}^S$ rendszerint szigorú részhalmaza $\mathcal{F}$-nek, vagyis részhalmaza, de nem egyenlő vele. A pénzügyi piac teljességéből tehát nem következik a piac egészének teljessége: a már többször emlegetett példánkat elővéve, ha biztosítóként egy elérési biztosítással kombinált részvényár-kifizetést vállalunk, akkor az aktuáriusi kockázat jelenléte miatt (tehát annak okán, hogy nem ismert előre a túlélésszám), ez a kifizetés már nem lesz tökéletesen replikálható.

Jelöléseink bevezetése után rátérhetünk a cikk eredményeinek ismertetésére.

4.2. Kétlépcsős piaci értékelések

A feldolgozott cikk belátja, hogy minden olyan esetben, amikor a részvények áralakulása folytonos, s a kapcsolódó biztosítási folyamat értékei fix időpontokban válnak ismertté (ezek az esetek leképzik azokat, amelyekkel természetes módon foglalkoznánk egy biztosítási szerződés árazásakor), elmondható az, hogy amennyiben egy értékelés egyszerre piac- és időkonzisztens, úgy felírható kétlépcsős piaci értékelésként. De mit is értünk kétlépcsős piaci értékelés alatt? A két lépcső első lépésben az adott szerződést feltételesen értékeljük, mégpedig úgy, hogy feltesszük, hogy $\mathcal{G}$ mellett rendelkezésünkre áll az S-részvények áralakulása is. Ez annak felel meg, hogy valamennyi részvényár-alakulás mellett kapunk egy konkrét kiértékelést. Ebben az első lépésben valamilyen értékelési módszerrel kell feltételesen beáraznunk a szerződést, portfóliót, s erre kézenfekvő lehetőséget kínálnak például az aktuáriusi díjelvek. Ha ezzel végeztünk, akkor áttérhetünk a második lépésre, amiben már feltételes várható értéket kell vennünk $Q_{\mathcal{G}}$ mérték szerint.

Azokat az értékeléseket tekintjük tehát kétlépcsős piaci értékeléseknek, amelyek felírása ezen két lépés alapján történik. Formalizálva: egy $\Pi_{\mathcal{G}} : \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}) \to \mathcal{L}^\infty(\mathcal{G})$ értékelés akkor kétlépcsős piaci értékelés, ha létezik hozzá $\mathcal{F}^S$-feltételes értékelés, $\Pi_{\mathcal{F}^S} : \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}) \to \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}^S)$, hogy:

$$\Pi_{\mathcal{G}}(H) = \mathbb{E}^{Q_{\mathcal{G}}}\left[\Pi_{\mathcal{F}^S}(H)\right] \tag{35}$$

Ahogy említve lett, a kétlépcsős értékelés első lépésében valamilyen előre megválasztott értékelési technikát kell alkalmaznunk, s mi most aktuáriusi díjelvek használatával fogunk élni. A korábbi, időkonzisztenciával foglalkozó fejezetben a szórásnégyzet elvet és a szórás elvet vettünk górcső alá, tegyünk most is így! Felírva ezeket kétlépcsős piaci értékelésekként:

- Szórásnégyzet elv:

$$\Pi_{\mathcal{G}}^{V}(H) = \mathbb{E}^{Q_{\mathcal{G}}}\left[\mathbb{E}_{\mathcal{F}^S}(H) + \frac{1}{2}\alpha \mathbb{V}\mathrm{ar}_{\mathcal{F}^S}(H)\right],\ \alpha \geq 0 \tag{36}$$

- Szórás elv:

$$\Pi_{\mathcal{G}}^{S}(H) = \mathbb{E}^{Q_{\mathcal{G}}}\left[\mathbb{E}_{\mathcal{F}^S}(H) + \beta\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\mathcal{F}^S}(H)}\right],\ \beta \geq 0 \tag{37}$$

Hangsúlyozandó azonban, hogy legtöbbször olyanok az aktuáriusi és pénzügyi kockázatot egyaránt tartalmazó szerződéseink, portfóliónk, hogy a két kockázat egymástól függetlenül jelenik meg. Az aktuáriusi kockázat a leendő kifizetések számával kapcsolatban merül fel, a pénzügyi pedig egyetlen konkrét kifizetés nagyságára vonatkozóan, s ezek egymástól függetlenekként lépnek fel. Ilyenkor a kifizetés szorzatalakban írható fel, mégpedig formálisan:

$$H = y_T \cdot f(S_T), \tag{38}$$

ahol y_T azon szerződések száma, melyekre kifizetés vonatkozik (például: elérési biztosítás esetén a túlélésszám T-ben), $f(S_T)$ pedig egy darab kifizetendő pénzügyi instrumentum T-beli értéke.

A felvázolt független, szorzatalakos esetben a kétlépcsős piaci értékelés az alábbi formát fogja ölteni:

$$\Pi_{\mathcal{G}}(H) = \mathbb{E}^{Q_{\mathcal{G}}}\left[\Pi_{\mathcal{F}^S}(y_T \cdot f(S_T))\right] = \mathbb{E}^{Q_{\mathcal{G}}}\left[f(S_T)\right] \cdot \Pi_{\mathcal{G}}(y_T). \tag{39}$$

Mit is jelent ez? Adott egy H portfóliónk, ahol $H = y_T \cdot f(S_T)$, vagyis a biztosító az y biztosítási folyamat y_T értékének megfelelőször köteles kifizetni a rögzített pénzügyi instrumentumok $f(S_T)$ függvényét. Példa lehet, ha a biztosító azt vállalja, hogy az állomány túlélőinek (meghatározott tartam mellett) fizeti egyenként elérési kifizetésként 1000 MOL részvény árát. Ekkor árazáskor a biztosító egyrészt árazza a szóban forgó pénzügyi instrumentumo(ka)t, jelen esetben egy főre az 1000 MOL részvényt: $\mathbb{E}^{Q_{\mathcal{G}}}\left[f(S_T)\right]$, ami most replikálás okán megegyezik az 1000 MOL részvény aktuális árával. Majd ezt az értéket megszorozza y_T kiértékelésével, $\Pi_{\mathcal{G}}(y_T)$-vel. Ez a kiértékelés egy előre kiválasztott technika alapján történik, például a szórásnégyzet vagy szórás elv időkonzisztens kiterjesztése szerint.

4.3. Elméleti eredményeink alkalmazása

Nézzünk meg néhány konkrét példát, hogy láthassuk, a bevezetett módszer miképp alkalmazható a gyakorlatban biztosítási szerződések árazására! (A példák hangsúlyozottan egyszerűsített példák lesznek, s a kifizetések nagyságrendje sem felel meg a valóságnak, mindazonáltal ezek alkalmasak arra, hogy rajtuk a módszer szemléltethető legyen.) Az előre kiválasztott technika, mellyel a biztosítási folyamatok kockázatát fogjuk értékelni, legyen a szórás elv, a kapcsolódó biztosítási folyamatok pedig kövessenek geometriai Brown-mozgást! Természetesen más elvvel is értékelhetnénk, s a biztosítási folyamatok is lehetnének eltérő dinamikájúak, de most elsősorban a kétlépcsős piaci értékelés mint módszer bemutatása a cél, ehhez pedig elegendő ezek tanulmányozása. Más elv, illetve más dinamika választásával a képleteink értelemszerűen módosulni fognak.

- A biztosítási folyamat geometriai Brown-mozgás, tehát az alábbi alakú:

  $$dy(t) = a \cdot y(t)dt + b \cdot y(t)dW(t) \tag{40.1}$$

  Speciálisan legyen $a = -0.02$, $b = 0.015$:

  $$dy(t) = -0.02 \cdot y(t)dt + 0.015 \cdot y(t)dW(t), \tag{40.2}$$

  valamint $y(0) = 10000$.

- A szórás elv díjparaméterének $\beta = 0.2$-t választjuk.

- Ezekben a példákban 0 a kezdő időpontunk, erre vonatkozóan fogunk értékelni.

Első példa

Az előzően felvázolt példához hasonlóan vállalja a biztosító, hogy elérési kifizetésként $T = 10$ tartam mellett minden túlélőnek 1000 I index árát téríti (I tetszőleges index). Ekkor a 39-es összefüggés alapján:

$$\Pi_{\mathcal{G}}(H) = \mathbb{E}^{Q_{\mathcal{G}}}\left[f(S_T)\right] \cdot \Pi_{\mathcal{G}}(y_T) \tag{41.1}$$

A szorzótényezők értékeit külön-külön határozzuk meg.

- Az I index aktuális árát c_I-vel jelölve:

$$\mathbb{E}^{Q_{\mathcal{G}}}\big[f(S_{10})\big] = 1000 \cdot c_I \tag{41.2}$$

- Az időkonzisztens árazás 16-os összefüggéséből pedig:

$$\Pi_{\mathcal{G}}(y_{10}) = \mathbb{E}_0^S\big[y(10)\big|y(0) = 10000\big], \tag{41.3}$$

ahol $\mathbb{E}^S$ a módosított y-folyamat szerinti várható értéket jelöli, vagyis azt, amelynél:

$$dy^S = \big(a(t,y) + \beta b(t,y)\big)dt + b(t,y)dW^S$$

(A 16-os összefüggéssel szemben most $\beta b(t,y)$ előjele biztosan pozitív lesz, elvégre korábban megállapításra került, hogy ezen előjel a π_y derivált előjelével egyezik meg, ami most $+$.)

Ezt felhasználva $\Pi_{\mathcal{G}}(y_{10}) = \mathbb{E}_0^S\big[y(10)\big|y(0) = 10000\big] = y_0 \cdot e^{(a+\beta b)\cdot 10}$ lesz. Most nem kell a képletbe foglalnunk a 16-os összefüggésben szereplő diszkontálási tényezőt. Ennek az az oka, hogy a 2. fejezetben, az időkonzisztens árazás képletének levezetésekor még elhanyagoltuk a piac meglétét, s a pénz időértékét csak a diszkontálási tényező révén tudtuk figyelembe venni. Itt azonban már olyan értékeléseket használunk, melyek egyben piackonzisztensek is, így replikálásra is lehetőséget adnak. Minthogy a megjelenő részvényeket már replikáltuk is (s áruk jelenértéken szerepel), így a 16-os összefüggéssel úgy maradunk összhangban, ha újból már nem diszkontálunk (vagy másképp: az $r = 0\%$ megadással élünk).

A fenti képletbe behelyettesítve y_0, a, b és β értékeit:

$$\Pi_{\mathcal{G}}(y_{10}) = \mathbb{E}_0^S\big[y(10)\big] = 10000 \cdot e^{(-0.02+0.2\cdot 0.015)\cdot 10} \approx 10000 \cdot 0.8437 = 8437 \tag{41.4}$$

Így végül:

$$\Pi_{\mathcal{G}}(H) = \mathbb{E}^{Q_{\mathcal{G}}}\big[f(S_{10})\big] \cdot \Pi_{\mathcal{G}}(y_{10}) \approx 1000 \cdot c_I \cdot 8437 = 8437 \cdot (1000 \cdot c_I) \tag{41.5}$$

Láthatjuk, hogy a biztosító úgy kezelte a portfóliót, mintha 8437 életben maradóval kalkulálna, melyek mindegyikének $1000 \cdot c_I$ kifizetéssel tartozna. Valójában a túlélők várható értéke nem 8437, hanem $y_0 \cdot e^{-0.02\cdot 10} \approx 10000 \cdot 0.8187 = 8187$. A két érték különbözete a szórás elv időkonzisztens kiterjesztése által adott kockázati ráhagyásból adódik.

Ennek gyakorlati jelentősége, hogy a biztosító hedzseléskor nem 8187 főre vásárolhat egyenként 1000 db I indexet, hanem a kockázat menedzselése érdekében 8437 főre.

Második példa

Második példánk az első példa kiegészítése: a biztosító azt vállalja, hogy elérési kifizetésként $T = 10$ tartam mellett minden túlélőnek 1000 I index árát fizeti, most azonban ráadásul hozamgaranciát is vállal, évi i százalékot. Minden egyéb feltevésünk megegyezik az első példában látottal. Mennyire értékeli a biztosító ezt a portfóliót?

Most $f(S_{10}) = 1000 \cdot \max(I_{10}, (1+i)^{10})$. Ennek replikálása:

$$1000 \cdot \left(\mathbf{I} + Put^{(10)}(\mathbf{I}, (1+i)^{10})\right)$$

I index ára c_I, a rá vonatkozó megfelelő put opcióé pedig $p^{10}_{I,(1+i)^{10}}$. Ekkor:

$$\mathbb{E}^{Q_\mathcal{G}}\left[f(S_{10})\right] = 1000 \cdot \left(c_I + p^{10}_{I,(1+i)^{10}}\right) \tag{42.1}$$

A 39-es összefüggés szerint:

$$\Pi_\mathcal{G}(H) = \mathbb{E}^{Q_\mathcal{G}}\left[f(S_T)\right] \cdot \Pi_\mathcal{G}(y_T) \tag{42.2}$$

Az első szorzótényező már ismert (42.1-es összefüggés), meghatározandó még a második. A 41.4-es összefüggés alapján azonban már azt is ismerjük:

$$\Pi_\mathcal{G}(y_{10}) = \mathbb{E}^S_0\left[y(10)\right] = 10000 \cdot e^{(-0.02+0.2\cdot 0.015)\cdot 10} \approx 10000 \cdot 0.8437 = 8437 \tag{42.3}$$

Innen pedig:

$$\begin{aligned}\Pi_\mathcal{G}(H) = \mathbb{E}^{Q_\mathcal{G}}\left[f(S_{10})\right] \cdot \Pi_\mathcal{G}(y_{10}) \approx 1000 \cdot \left(c_I + p^{10}_{I,(1+i)^{10}}\right) \cdot 8437 = \\ = 8437 \cdot \left(1000 \cdot \left(c_I + p^{10}_{I,(1+i)^{10}}\right)\right)\end{aligned} \tag{42.4}$$

Most is azt láthatjuk, hogy a biztosító 8437 túlélőre kalkulál (ahogy az első példában is említettük, ez az érték már várható értéken felüli ráhagyást is tartalmaz), s egy-egy túlélőre a megfelelő replikáló árat veszi, $\left(c_I + p^{10}_{I,(1+i)^{10}}\right)$-t. Itt persze feltettük, hogy az I index aktuális ára mellett a rá vonatkozó megfelelő put opció ára is ismert.

4.4. Még pár szó a piac- és időkonzisztens aktuáriusi értékelésekről

Az előzőekben bevezettük, hogy mit értünk piac- és időkonzisztens aktuáriusi értékelések alatt. Ezek az értékelések már alkalmasak arra, hogy egy biztosítási portfólióban megjelenő aktuáriusi és pénzügyi kockázatot együttesen kezeljék. Milyen egyéb előnyös tulajdonsággal rendelkeznek emellett?

Térjünk vissza a kétlépcsős piaci értékelés felírásához (35-ös öf.):

$$\Pi_{\mathcal{G}}(H) = \mathbb{E}^{Q_{\mathcal{G}}}\left[\Pi_{\mathcal{F}^S}(H)\right]$$

Feltételezvén, hogy 0 az induló időpontunk, T pedig a tartamunk: ezen kiértékelés nem pusztán 0-ban ad értéket, hanem tetszőleges belső helyen felírható, ahol rendelkezünk információval (például olyan pontokban, ahol a biztosítási folyamat aktuális értéke ismertté válik): a $t \in [0, T]$ értékelésnél t-re vonatkozó feltételt véve kell árazunk.

Például formalizálva ezt a szorzatalakban előálló biztosítási kifizetésekre, $y(t) = Y$ megvalósulást tudván:

$$\Pi_{\mathcal{G},t}(H) = \mathbb{E}_t^{Q_{\mathcal{G}}}\left[f(S_T)\right] \cdot \Pi_{\mathcal{G},t}(y_T) = \mathbb{E}_t^{Q_{\mathcal{G}}}\left[f(S_T)\right] \cdot \mathbb{E}_t^S\left[y(T)\middle|y(t) = Y\right]$$

A portfólió tehát a biztosítási folyamatot követve újraértékelhető köztes pontokban, az újonnan rendelkezésre álló információk ismeretében. Első példánknál maradva tegyük fel, hogy a biztosító a már felírt sztochasztikus folyamatból indult ki:

$$dy(t) = -0.02 \cdot y(t)dt + 0.015 \cdot y(t)dW(t), \qquad y(0) = 10000$$

Az első év végén ismertté válik a túlélésszám, ami 9900. A biztosító előzetes feltevése alapján ezzel szemben $10000 \cdot e^{-0.02 \cdot 1} \approx 10000 \cdot 0.9802 = 9802$ várható túlélővel számolt. Mit tehet ekkor? Újraértékelheti a portfóliót $t = 1$-re vonatkozó feltételes értékeket véve, mégpedig:

$$\Pi_{\mathcal{G},1}(H) = \mathbb{E}_1^{Q_{\mathcal{G}}}\left[f(S_{10})\right] \cdot \Pi_{\mathcal{G},1}(y_{10}) = \mathbb{E}_1^{Q_{\mathcal{G}}}\left[f(S_{10})\right] \cdot \mathbb{E}_1^S\left[y(10)\middle|y(1) = 9900\right] \tag{43}$$

(Megjegyzés: $\mathbb{E}_1^S\left[y(10)\middle|y(1) = 9900\right]$ meghatározása során akár új paraméterekkel is kalkulálhat, vagyis megváltoztathatja a korábban a-ra és b-re tett feltevéseit.) A biztosító előzetes várakozása mindenesetre módosult, a korábbi $\mathbb{E}_0^S\left[y(10)\middle|y(0) = 10000\right]$ helyett a $\mathbb{E}_1^S\left[y(10)\middle|y(1) = 9900\right]$ szorzóval kell számolnia a portfólió értékelésekor.

Ezen újrakalkulálásnak gyakorlati jelentősége is van. Nyomatékosítanunk kell, hogy a bevezetett piac- és időkonzisztens értékelések módszere már erősen épít a hedzselés elvére. A kifizetés replikálásának felírása megfelel annak, mintha induláskor lefedeznénk portfóliónkat. Például első példánk eredményét felírva: $\Pi_G(H) = 8437 \cdot (1000 \cdot c_I)$. Ez megfelel annak, hogy induláskor megvásároltunk 8437 főre egyenként 1000 db I indexet. Mi történik $t = 1$-ben? Módosul(hat)nak a várakozásaink, s ez a gondolat gyakorlati jelentőséggel is bír. Amennyiben már más túlélőszámmal kell kalkulálnunk, úgy hedzselési stratégiánkat is ahhoz kell igazítanunk. Esetünkben: $t = 0$-ban $\mathbb{E}_0^S\left[y(10)\middle|y(0) = 10000\right]$-re kalkulálva írtuk fel árazásunk, $t = 1$-ben viszont már $\mathbb{E}_1^S\left[y(10)\middle|y(1) = 9900\right]$-re. A különbözetnek megfelelő mennyiségben tehát I indexet kell tartanunk, hogy a $t = 1$-beli értékelésünkkel összhangban maradjunk.

Ebből az is következik, hogy az idő- és piackonzisztens értékelések lehetőséget tudnak biztosítani arra, hogy a biztosító a $[0, T]$ intervallum belső pontjaiban reagálhasson a kapcsolódó biztosítási folyamat alakulására. Ha például valamely köztes időpontban azt tapasztalja, hogy jóval több túlélőre számíthat, mint azt az előzetes számításai implikálták, akkor annak megfelelően tudja igazítani replikáló portfólióját.

4.5. A fejezet rövid összefoglalása

A fejezetben összekapcsoltuk a már korábban bevezetett időkonzisztencia és piackonzisztencia fogalmaival kapcsolatos ismereteinket. Piac- és időkonzisztens aktuáriusi értékeléseket állítottunk fel már ismert aktuáriusi díjelvek kiterjesztésével. Kitértünk arra is, hogy mi hívta életre ezen értékelések felírását, s milyen gyakorlati szempontból is előnyös karakterisztikával rendelkeznek.

Hangsúlyozandó, hogy ez a fejezet csak rövid betekintést adott az idő- és piackonzisztens értékelések elméletébe. A téma részletesebb elemzése megtalálható a fejezetben feldolgozott cikkben ([5]), illetve az Antoon Pelsser és Ahmad Salahnejhad Ghalehjooghi szerzőpáros egy későbbi munkájában ([6]), melyben már nyugdíjbiztosítások körében is alkalmazásra kerülnek a bevezetett értékelések.

Utószó, összefoglalás

A dolgozat célja olyan értékelések felállítása volt, melyek fair módon képesek értékelni biztosítási kötelezettségeket, így az azokban felmerülő aktuáriusi és pénzügyi kockázatot tudják együttesen kezelni. Egy lehetséges értékelési módszert nyerhettünk a hagyományos aktuáriusi díjelvek idő- és piackonzisztens kiterjesztéséből. A kiterjesztést előbb időkonzisztens, majd piackonzisztens módon alkalmaztuk, eközben megismerkedtünk mindkét fajta konzisztencia jelentésével. Végül a kettőt összefogva már olyan értékeléseket lehetett formalizálni, melyek mindkét konzisztenciát egyszerre elégítik ki. Ezek már alkalmasak a kockázatkettős kezelésére és fair értékelésére.

A dolgozat megírása során az elméleti megalapozáshoz több forrásból is használtam fel vonatkozó irodalmat. A feldolgozott cikkekben felvázolt módszereket példákon is kiszámoltam, illusztrálva ezzel, hogy megközelítéseink jól alkalmazhatóak konkrét biztosítási szituációkban.

Az időkonzisztenciáról szóló fejezetben kitértem annak alátámasztására, hogy a hagyományosan használt, statikus környezetben felírt aktuáriusi díjelvek nem feltétlenül teljesítik az időkonzisztencia követelményét. Ezt követően a már időkonzisztensen kiterjesztett elveket összehasonlítottam azok statikus felírásával, s azt is megvizsgáltam, hogy a többi paraméter lefixálása és azonos díj mellett a két elvhez tartozó díjelvparaméterek milyen viszonyban állnak egymással.

A piac- és időkonzisztens értékelésekről szóló fejezetben írtam arról, hogy a bevezetett módszer milyen, a biztosító számára rendkívül hasznos gyakorlati jelentőséggel bír. A gondolat, hogy a tartam ideje alatt, köztes időpontokban is reagálni lehessen egy biztosítási folyamat alakulására, a klasszikus aktuáriusi árazási elvekben rendszerint nem jelent meg, a dolgozatban bevezetett piac- és időkonzisztens értékelésekben viszont már igen. Ez utóbbi azt is alátámasztja, hogy valóban van létjogosultsága a megismertetett módszereink tanulmányozásának és biztosítói alkalmazásának.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítették dolgozatom létrejöttét.

Hálás köszönettel tartozom konzulensemnek, Arató Miklósnak, amiért az elmúlt év folyamán fáradhatatlanul támogatta munkámat, a dolgozatot mindvégig rengeteg hasznos ötletével, útmutatásával és észrevételével segítette.

Emellett köszönet illeti családomat és barátaimat kitartó támogatásukért.

Köszönöm szépen!

Hivatkozások

[1] Møller, T.: *Indifference pricing of insurance contracts in a product space model*, Finance Stochast, 7: 197-217, 2003.

[2] Pelsser, A. and Salahnejhad Ghalehjooghi, A.: *Time-Consistent Actuarial Valuations*, March 23, 2015.

[3] Black, F. and Scholes, M.: *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81: 637–659, 1973.

[4] Wüthrich, M.V., Bühlmann, H. and Furrer, H.: *Market-Consistent Actuarial Valuation*, Springer International Publishing, 2007.

[5] Pelsser, A. and Stadje, M.: *Time-Consistent and Market-Consistent Evaluations*, January 7, 2014.

[6] Pelsser, A. and Salahnejhad Ghalehjooghi, A.: *Time-Consistent and Market-Consistent Actuarial Valuation of the Participating Pension Contract*, May 8, 2016.