

SZAKDOLGOZAT

Tóth Júlia

2018

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc
Kvantitatív pénzügyek szakirány

A VOLATILITÁS MINT PÉNZÜGYI TERMÉK

Tóth Júlia

Témavezető:

Dr. Vidovics-Dancs Ágnes

Egyetemi adjunktus

Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék

Budapesti Corvinus Egyetem



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR



BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Budapest, 2018

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Volatilitás a pénzügyekben	4
2.1. A historikus és az implicit volatilitás	4
2.1.1. A historikus volatilitás	5
2.1.2. Az implicit volatilitás	8
2.2. Implicit és lokális volatilitás felületek	12
2.2.1. Implicit volatilitás felület	12
2.2.2. Lokális volatilitás felület	14
2.2.3. Az implicit és a lokális volatilitás kapcsolata	16
3. A volatilitás megjelenése a pénzügyi piacokon	19
3.1. A realizált, az implicit és a lokális volatilitást megragadó kontraktusok	19
3.1.1. A realizált volatilitás szintetikus előállítása	19
3.1.2. Kereskedés az implicit volatilitással	22
3.1.3. Kereskedés a lokális volatilitással	23
3.2. Volatilitásindexek	24
3.3. Variancia swapok	25
3.4. Volatilitás swapok	27
3.5. Variancián és volatilitáson alapuló opciók	28
3.6. Target volatility	29
4. Target volatility opció árazása	32
4.1. Az árazás során használt feltételezések	33
4.2. Taylor-soros közelítés $t = 0$ esetén	34
4.2.1. A Bachelier-formula	34
4.2.2. A Bachelier és a Black–Sholes–Merton-modell kapcsolata	36
4.2.3. Az at-the-money target volatility opció ára	38
4.3. Taylor-soros közelítés $t > 0$ esetén	47
4.4. Árazás Laplace-transzformált segítségével	50
4.5. Robusztus árazás	53

4.5.1. Robusztus árazás Taylor-soros approximációval	55
4.5.2. Robusztus árazás Laplace-transzformált segítségével	56
5. Összefoglalás	58
Irodalomjegyzék	60

Ábrák jegyzéke

2.1.1. Az 1, 3 és 12 hónap lejáratú GBPUSD árfolyamra szóló opciókhoz tartozó volatilitás mosoly	9
2.1.2. Az EURJPY árfolyampárra szóló egy év lejáratig hátralévő idővel rendelkező volatilitás mosoly ferdeségét meghatározó risk reversal	10
2.2.1. Az S&P 500 indexhez tartozó implicit volatilitás felület a kötési árfolyam és a lejáratig hátralévő idő függvényében	13
2.2.2. Az S&P 500 indexhez tartozó lokális volatilitás felület a kötési árfolyam és a lejáratig hátralévő idő függvényében	14
2.2.3. A call opció értékét befolyásoló lokális volatilitás	17
3.1.1. Egy opciót és a delta fedezettjét tartalmazó portfólió értéke, valamint az idő és az alaptermék árfolyamának megváltozásával bekövetkező értékváltozása	21
3.1.2. A forward hozam (bal) és a forward volatilitás (jobb) előállítása	23

1. fejezet

Bevezetés

A volatilitás a pénzügyek mozgatórugója, így nem hiába foglalkozik vele számos szakember. Ez tükröződik a dolgozat során felhasznált irodalomjegyzékben is, hiszen szinte minden témában megannyi forrásból lehetett meríteni. Talán a target volatility opció (TVO) jelentette ezalól az egyetlen kivételt, amely viszonylag újabb terméknek számít, így egyelőre csak korlátozott számú tudományos cikk született az árazásával kapcsolatban.

A szakdolgozat felépítése során az egyszerűtől az összetettig elvet követve először a volatilitás típusait veszem sorra. Ennek során elsőként a historikus, a realizált, az implicit valamint a lokális volatilitás fogalmakat járom körbe, amelyekhez igyekszem minél több hasznos információt társítani. Mindezt elengedhetetlennek vélem a későbbi fejezetekben ismertetett termékek működése, felépítése, illetve az árazási probléma megértése érdekében.

Ezt követően a volatilitással, illetve a varianciával kapcsolatos pénzügyi instrumentumokat mutatom be. Ennek során nagy jelentőséget kapnak a variancia, illetve a volatilitás derivatívák. Habár a két eszközcsoportba más-más termékek tartoznak attól függően, hogy a származtatott termék kifizetése az alaptermék volatilitásától vagy éppen varianciájától függ, az alapterméküket megtestesítő két kockázati mutatószám szoros kapcsolatban áll egymással. Mielőtt megjelentek volna a volatilitás derivatívák a piacon, a kereskedők delta fedezett opciós portfóliók formájában kereskedhettek a volatilitással. Ez a módszer azonban nem tud tisztán csak a volatilitásban kitétséget nyújtani, hiszen a pozíció értékét nem csak az alaptermék volatilitása, hanem annak árfolyama is befolyásolja. Továbbá ahogy Carr & Lee (2009) is kifejtette, a hagyományos opciók nem sorolhatóak a volatilitás derivatívák közé, hiszen azoknak a kifizetése nem függ a volatilitástól (maximum az alaptermék értékén keresztül), hiszen a volatilitás csupán az alaptermék árfolyamának értékét befolyásolja. Ez az igény hívta életre a volatilitás és a variancia derivatívákat,

amelyeknek köszönhetően a kereskedőknek már lehetősége nyílt, hogy tisztán a volatilitásban vagy éppen a varianciában szerezzenek kitétséget. A piacon elsőként a variancia swapok terjedtek el, majd ezt követően jelentek meg a volatilitás swapok és az egyéb egzotikus változataik. Nem maradhattak ki a sorból a variancia opciók sem, amelyeknek a kifizetése a vanilla opciókhoz képest már közvetlenül az alaptermék varianciájától függ.

Ahogy azt Broadie & Jain (2008) is kifejtette a variancia és volatilitás swapokkal kereskedő traderek három csoportja különböztethető meg. Míg a variancia és a volatilitás irányával kereskedők a jövőbeli variancia, illetve volatilitás szintjére spekulálnak, addig az úgynevezett különbözeti kereskedők a realizált és az implicit volatilitás közötti különbségre tesznek fogadásokat. Továbbá vannak, akik a volatilitásban fenálló kitétségszüket szeretnék fedezni. Ilyen például, amikor az életbiztosítók garantált hozamot fizető termékeket kínálnak, amelyekkel a volatilitásban keletkezik kitétségszü, és ezt a kockázatot szeretnék fedezéssel csökkenteni. Efféle problémákra jelentenek jó megoldást a variancia és a volatilitás swapok.

Végül a szakdolgozat szempontjából a legfontosabb volatilitás derivatíva, a target volatility opció működését mutatom be. Az opció kifizetésfüggvényében megjelenik a célvolatilitás, amely egy előre rögzített konstans, valamint az alapterméknek az opció futamideje alatt realizált volatilitása is. A célvolatilitás általában a befektetőknek az alaptermék realizált volatilitásával kapcsolatos várakozásait tükrözi. A termék kifizetése tehát a lejárat időpontjában a célvolatilitás és a realizált volatilitás hányadosának, valamint az alaptermék kötési árfolyammal csökkentett értékének (amennyiben ez nagyobb, mint nulla) a szorzata. Az opcióval a befektetők így egyidőben spekulálhatnak az alaptermék árfolyamára, illetve a realizált volatilitására is. A szakdolgozatban arra keresem a választ, hogy milyen lehetőségeink vannak az opció árazására, amennyiben az alaptermék árfolyamát, illetve a volatilitását meghajtó Wiener-folyamatok függetlenségét feltételezzük. Első lépésben az ATM call TVO árát közelítem a Bachelier-formula felhasználásával, majd megvizsgálom, más kötési árfolyamok esetén is az árazást. Ennek során Taylor-soros approximációval, illetve a Laplace-transzformált segítségével vezetem le az árazó formulát a Black–Scholes-modell keretein belül, majd mindkét módszer esetén megpróbálkozok egy modelfüggetlen értékeléssel is.

A szakdolgozatban szereplő ábrák egy részét a Budapesti Corvinus Egyetemen elérhető Bloomberg adatszolgáltató rendszer *OVDV-Option Volatility Surface* menüjének segítségével készítettem. Ezáltal valós piaci adatokra épülő volatilitás mosoly, implicit, illetve lokális volatilitás felület bemutatására nyílt lehetőségem. Az ábrázolás során, számos cikkhez hasonlóan, én is egy indexet (S&P 500) vettem alapul, mivel az indexre kiírt opciók rendelkeznek a legtágabb intervallumokkal a kötési árfolyam és a lejárat idő tekintetében.

Egy további technikai jellegű megjegyzés, amely a volatilitás szó használatát érinti: ahol csak önmagában használom a fogalmat, ott nincs különösebb jelentősége a volatilitás típusai megkülönböztetésének, ugyanakkor ahol ez jelentőséggel bír, ott egyértelműen jelölöm, melyikre vonatkozik az aktuális kijelentés. Hasonlóan a félreértések elkerülése végett megjegyzném, hogy a Black–Scholes-modell, valamint a Black–Scholes–Merton-modell elnevezések a szakdolgozat során egy és ugyanazt jelentik, tehát szinonimákként szerepelnek.

2. fejezet

Volatilitás a pénzügyekben

A volatilitás egy meglehetősen komplex pénzügyi fogalom, amely szinte minden területen megjelenik. Vannak sokak által ismert, és kevésbé elterjedtebb változatai is. A volatilitás témakörében ezt a legegyszerűbbtől a komplexebb fogalmakig vezető utat Derman *et al.* (1998) munkásságából merített gondolatmenet alapján járom be.

2.1. A historikus és az implicit volatilitás

A volatilitás leginkább elterjedt megjelenési formája egyetlen érték, egy szám, ami a legtöbb pénzügyi termék esetén az adott eszköz historikus vagy implicit volatilitását jelenti. A historikus, más néven realizált volatilitáson¹ a pénzügyekben a termék adott időszak alatt vett napi hozamainak a szórását értjük, míg az implicit, azaz visszaszámított volatilitás az opciónak a piacon megfigyelhető árából a Black & Scholes (1973) által létrehozott árazó modell invertálásával kapott volatilitása. A különböző volatilitásoknak az így kapott értékeit évesített formában szokták közölni, hogy az egymástól eltérő időintervallumokra kapott értékek összehasonlíthatóak legyenek.

¹A realizált volatilitás fogalmát most úgy tekintjük, mintha a t_0 időpontban lennénk, és innen utalunk vissza a múltra. A dolgozat későbbi részeiben azonban ettől kissé eltérő nézőpontból fogjuk szemlélni, ami esetleg összezavarhatja a Kedves Olvasót. Ilyen lesz például a target volatility opció esete, amikor t_0 -ban teszünk kijelentést az alaptermékhez tartozó, egyelőre jövőbeli volatilitásra, ugyanis erre hivatkozunk úgy, mint (jövőbeli) realizált volatilitás. Ekkor azt mondjuk, hogy a termék realizált volatilitása befolyásolja a T ($T > t_i$, $i = 0, 1, \dots, T$) időpontbeli kifizetés értékét. Azonban, ha jobban belegondolunk, ez a látszólagos ellentmondás feloldható, hiszen hiába t_0 -ban használjuk a realizált volatilitás fogalmát egy t_i időszakra, valójában T -ben van szükségünk az értékre, illetve a realizált volatilitásra, amikor a t_i időpont mindegyike már a múltat képviseli, és valóban a historikus volatilitás lesz a realizált volatilitás.

2.1.1. A historikus volatilitás

A historikus volatilitás felépítésének leírásában Taleb (1997) könyvéből merített információkat használom fel. Egy adott termékhez tartozó volatilitás kiszámításához a terméknek egy meghatározott időszakonként megfigyelt árfolyamváltozásából eredő loghozamai szükségesek, amely loghozamok a következő formulával fejezhetőek ki:

$$r_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right).$$

Az itt szereplő S_t a t -edik napi árfolyamot jelöli, de ugyanígy használhatóak gyakoribb, illetve ritkább időközönként vett árfolyamértékek is, mint például a percenkénti vagy heti megfigyelésekből számolt volatilitás. Mindez attól függ, hogy milyen célból van szükségünk a termék volatilitására.

A legfontosabb feltételezés, amelyre számos modell épít, hogy a loghozam normális eloszlást követ, ami maga után vonja azt a tényt, hogy az árfolyam lognormális eloszlású. Ennek következtében az elméleti, standard modellek szerinti árfolyam nem vehet fel negatív értékeket, ami egy előnyös, a valóságnak megfelelő tulajdonság.

A normális eloszlású loghozam és a lognormális eloszlású árfolyam közötti, elméleti szempontból is fontos összefüggés a sztochasztikus matematika eszköztárával is felírható. Tekintsünk ehhez egy tetszőleges kockázatos pénzügyi terméket, amely jelen esetben legyen például egy részvény. Leggyakrabban azt feltételezzük, hogy a részvényárfolyam geometriai Brown-mozgást (GBM) követ, ami az alábbi, egymással ekvivalens alakokban írható fel:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.1.1)$$

vagy

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

ahol μ a részvényárfolyam driftje, σ a részvényárfolyam volatilitása, W pedig egy Wiener-folyamat. Az Itô-formula segítségével megadható az S egy tetszőleges g függvényének a fejlődése. Az Itô-formula általános alakja:

$$dg(t, S) = \frac{\partial g(t, S)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, S)}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, S)}{\partial S^2} dS^2, \quad (2.1.2)$$

ahol a $g(t, S) = \ln(S)$ függvényt használjuk, mivel a loghozam dinamikájához szeretnénk eljutni. Az Itô-formula alkalmazásához szükségünk van még a megfelelő parciális deri-

váltakra is, amelyek

$$\frac{\partial \ln(S)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \ln(S)}{\partial S} = \frac{1}{S}; \quad \frac{\partial^2 \ln(S)}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}. \quad (2.1.3)$$

A 2.1.2 általános formulába a 2.1.3 parciális deriváltakat, valamint a 2.1.1 GBM-et leíró egyenletet behelyettesítve, és a szükséges egyszerűsítéseket elvégezve, majd a dt , illetve dW_t -t tartalmazó tagokat csoportosítva, a következő formában kapjuk meg az árfolyam logaritmusának dinamikáját egy tetszőleges t időpontban.

$$d \ln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

Vegyük ezt az egyenletet a t , illetve a T időpontokban, és vonjuk ki őket egymásból. Ezzel eljutunk az $\ln(S_T) - \ln(S_t) = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$ kifejezéshez, amely nem más, mint a részvény loghozama. Ez pedig normális eloszlást követ az alábbi paraméterekkel:

$$\ln(S_T) - \ln(S_t) = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim N\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t); \sigma\sqrt{T-t}\right],$$

ahol $N(m, s)$ a normális eloszlást jelöli m várható érték és s szórás paraméterekkel.

A historikus volatilitáshoz visszatérve, a loghozamok becslt szórása n db megfigyelésre Bodie *et al.* (2014) alapján az alábbi formulával adható meg:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{n}{(n-1)} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2},$$

ahol \bar{r} a számítás során használt loghozamok számtani átlaga. A volatilitást az egész populációra szeretnénk megkapni, de általában csupán egy korlátozott, n elemű mintával rendelkezünk, így ebből kell következtetni az egészre. A becslés során az $\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t$ számtani átlagot használjuk a loghozamok valódi várható értéke, $E(r)$ helyett, amivel becslési hibát ejtünk. Ez a szabadságfok-vesztés következtében létrejött torzítás hatással van a variancia becslésére is, mégpedig olyan módon, hogy alulbecsüljük azt. Így egy $\frac{n}{n-1}$ -es korrekciós tényezővel való szorzás válik szükségessé annak érdekében, hogy a varianciára egy torzítatlan becslést kapjunk.

A szórás számítása során Demeterfi *et al.* (1999) alapján alkalmazhatjuk a zéró-átlag feltételt, ezzel kiküszöbölve a mintaátlag becslésének szükségességét. Így az általuk definiált „szórás” a

$$\sigma'_r = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^2}$$

formulával kapható meg, ami tulajdonképpen a loghozam eloszlásának a második momentuma. A várható érték nullának való feltételezése elméleti szempontok miatt is preferált, mivel ez áll legközelebb ahhoz az ügylethez, amely opciós portfólióval replikálható. Amennyiben ezzel a feltételezéssel élünk, elegendő az árfolyamváltozásokat ismerni a szórás meghatározásához, ami jóval gyakorlatiasabbá teszi a számítás menetét. Továbbá, mint azt Bodie *et al.* (2014) is kifejtette, a hozamok jellemzésére a normalitás feltételezése mellett elegendő az első és a második momentum ismerete, hiszen az átlag körül szimmetrikus eloszlások esetén a páratlan momentumok várható értéke nulla (kivételesen az első momentum, amelynek értéke az esetek többségében nullától különbözik, és csak centrálás után lesz nulla), a magasabb rendű páros momentumok mindegyike pedig a második momentum függvényeként már kifejezhető. Például a negyedik momentumra a $3\sigma^4$, míg a hatodikra a $15\sigma^6$ összefüggés áll fent.

Ha a múltbeli megfigyelések esetén nem minden esetben tulajdonítunk ugyanakkora jelentőséget minden értéknek, akkor az egyes megfigyelések különböző súlyokat kapnak. Ilyen például ha a jelentől távolodva egyre kevésbé szeretnénk számításba venni a múltbeli értékeket. Ekkor a Kálmán-filtert használhatjuk, amellyel a megfigyelésekhez egy exponenciálisan csökkenő súlyrendszert rendelünk. A módszerben a lecsengés sebessége a λ értékével szabályozható, ami 0 és 1 között változhat, az 1-et azonban nem veheti fel. Ahogy közelítünk a λ -val az 1-hez, úgy kapnak egyre nagyobb súlyt a jelenhez közeli megfigyelések, míg $\lambda = 0$ esetén az egyenlő súlyozást kapjuk vissza. (A képletben szereplő $t = 0$ időpont a megfigyelések első elemére értendő.)

$$\sigma_{exp} = \sqrt{\frac{1}{\Omega} \sum_{t=0}^n \lambda^t \cdot r_t^2}$$

$$\Omega = \sum_{t=0}^n \lambda^t = (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n) = \frac{(\lambda^{n+1} - 1)}{\lambda - 1} \rightarrow \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Az eddigiekben a szórás számítására leírt módszerek mindegyikéhez szükséges volt a termék árfolyamalakulásának teljes időszora arra az időintervallumra, amelyre a szórás értékét meg szeretnénk határozni. A Parkinson-szám segítségével azonban a historikus szórás a termék adott időszak alatt felvett, a gyakoriságot tekintve például napi maximum és minimum értékeivel is becsülhető, nem szükséges minden egyes árfolyam ismerete. Ekkor a P Parkinson-szám egy tetszőleges időszakra megadható, mint:

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4 \ln(2)} \left(\ln \frac{S_i^{max}}{S_i^{min}} \right)^2},$$

ahol S_i^{max} , és S_i^{min} az i -edik napi legmagasabb, illetve legalacsonyabb árfolyamokat jelöli.

A formulának azonban nem az imént leírt direkt, hanem a fordított irányú alkalmazása a leginkább elterjedt: a historikus volatilitást ismerve a formula segítségével megkapható az árfolyam maximumának és a minimumának az eloszlása. Mindennek használatához néhány feltétel teljesülése szükséges. Ilyen, hogy az árfolyam geometriai Brown-mozgást kövessen, a piac a nap 24 órájában nyitva legyen, valamint a kereskedés folytonossága is teljesüljön. Amennyiben ezek nem állnak fenn, a Parkinson-szám egy kiterjesztése, a Garman & Klass (1980) becslés használata javasolt, amely nem csak a minimum és a maximum értékeivel kalkulál, hanem figyelembe veszi a napi nyitó- és záróárfolyamokat is. Ez utóbbiak sorrendben az S_i^O és az S_i^C jelölésekkel szerepelnek. A Garman-Klass becslő formula Bennett & Gil (2012) alapján:

$$\sigma_{GK} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \left(\ln \frac{S_i^{max}}{S_i^{min}} \right)^2 - (2 \ln(2) - 1) \left(\ln \frac{S_i^C}{S_i^O} \right)^2 \right)},$$

amely az előzőekhez hasonlóan akkor ad jó becslést, amennyiben az alaptermék GBM-et követ. Ezen felül növeli a becslés hatékonyságát, ha a drift nulla, és ha nyitáskor nem következik be az árfolyamokban ugrás, azaz az adott napi nyitóárfolyam megegyezik az előző napi záróárfolyammal.

2.1.2. Az implicit volatilitás

Az implicit volatilitást a Black–Scholes-formula invertálásával kapjuk, és Σ -val jelöljük. Eredetileg a volatilitás a formula egyik bemeneti paramétere, amivel bizonyos feltételek teljesülése esetén megkapható az opció ára. Ezt a volatilitást azonban nem ismerjük pontosan. Ellentétben az opció árfolyama a piacon megfigyelhető, így a formulát átalakítva, és a volatilitás helyett az opcióárat bemeneti paraméterként használva az alapterméknek egy olyan volatilitását kapjuk meg, amely mellett az opció ára a formula alapján éppen a piacon megfigyelhető érték lesz. Ehhez a Black–Scholes-formulát használjuk, ami a call opció árazására vonatkozik:

$$C(S_t, t) = \Phi(d_1)S_t - \Phi(d_2)Ke^{-r(T-t)},$$

ahol

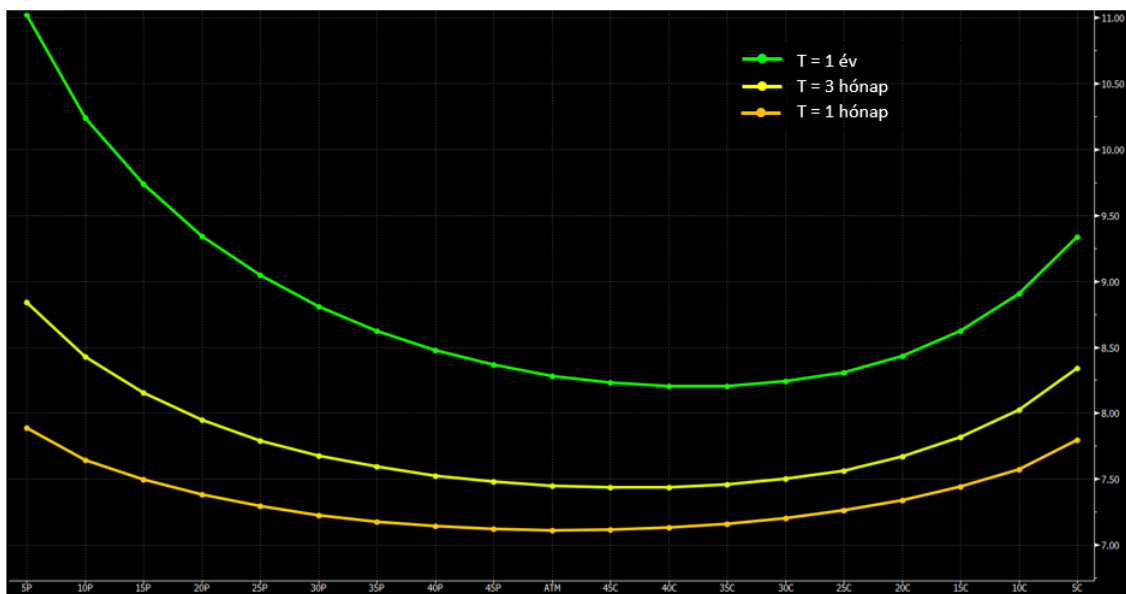
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

A képletben az $\Phi(\cdot)$ a sztenderd normális eloszlás sűrűségfüggvénye, az r a kockázat-

mentes kamatláb, a K az opció kötési árfolyama, a T pedig a lejáratig hátralévő idő.

A Black–Scholes–Merton által kifejlesztett árazási modell egy nagyon szigorú feltételt fogalmaz meg a volatilitásra, mégpedig azt, hogy az alaptermék árfolyama konstans volatilitással rendelkező geometriai Brown-mozgást kövessen. Ennek következményeként az azonos alaptermékkel rendelkező opciók mindegyikének azonos implicit volatilitással kellene rendelkeznie. A gyakorlatban azonban sérül a feltétel, és ez a modell egyik legfőbb hátránya, hiszen a piacon megfigyelhető opcióárakból visszaszámított volatilitás a kötési árfolyam, illetve a lejáratig hátralévő idő megváltozásával is változik. Ezt a tendenciát mutatja be a 2.1.1 ábra, amelyen a 2018. április 3-tól számított 1, 3 és 12 hónap lejáratú GBPUSD árfolyamra szóló opciók visszaszámított volatilitása látható. Mindez a call és put opciók prémiumokkal való kiigazítás nélküli forward deltájában van kifejezve.



2.1.1. ábra. Az 1, 3 és 12 hónap lejáratú GBPUSD árfolyamra szóló opciókhoz tartozó volatilitás mosoly

Forrás: Bloomberg rendszer OVDV volatilitás elemző felülete segítségével készített ábra

A 2.1.1 ábrán kirajzolódó implicit volatilitások ugyanarra az alaptermékre vonatkoznak, ennek ellenére jól látható, hogy a kötési árfolyam, illetve a lejárat függvényében más-más értéket vesznek fel. Ez utóbbi tényezőt tekintve egyenesen arányos a kapcsolat, tehát a hosszabb lejáratig hátralévő idővel rendelkező opció implicit volatilitása nagyobb, mint egy ugyanolyan tulajdonságú, de rövidebb lejáratig hátralévő idővel rendelkező opcióé. A volatilitások által felvett alakzatot, amennyiben egy szimmetrikusabb forma rajzolódik ki, volatilitás mosolynak nevezik, különben pedig a grimasz elnevezés használatos. A mosoly alakzat azt fejezi ki, hogy az in-the-money (ITM), valamint az out-of-the-money (OTM) opciók egyaránt nagyobb implicit volatilitással rendelkeznek, mint az at-the-money (ATM) társaik. Azaz az ITM és OTM opció mögötti volatilitást a

Black–Scholes-modell alulbecsli. Ezzel konzisztensen a volatilitás negatív görbülete esetén az alacsony kötési árfolyamokra a modell által kalkulált opcióár alacsonyabb lesz a piaci árfolyamnál.

Carr & Wu (2003) munkája alapján, a központi határeloszlás tételének következtében a loghozam eloszlása tart a normálishoz, amint a lejáratig hátralévő idő növekszik. Az implicit volatilitás képen látható alakjaival azonban sérül az állítás, nem teljesül a tétel. Grimasz estén ez a loghozam aszimmetrikus eloszlásában nyilvánul meg, pontosabban negatív ferdeség lép fel, míg a volatilitás mosoly esetén leptokurtikus, azaz vastag farkú eloszlással találkozunk.

A volatilitás mosoly ferdeségét nem csak az ábrákkal szemléltethetjük, hanem számszerűen is ki lehet őket fejezni. Erre szolgál Reiswich & Uwe (2012) szerzőpáros cikkében bemutatott risk reversal, amely tulajdonképpen két volatilitás különbségeként adódik. Legyen például a σ_{25-RR} -rel jelölt risk reversal jegyzés, ami a 0.25-ös deltával rendelkező call és a (-0.25)-ös deltával rendelkező put opció implicit volatilitásainak a különbsége. Ez azáltal mutatja a mosoly ferdeségét, hogy megadja azt az extra volatilitást, amivel a puthoz tartozó implicit volatilitás meghaladja az abszolút értékben ugyanakkora deltával rendelkező callhoz tartozó értéket. Mindez gyakorlatban az EURJPY árfolyampárra szóló 1 éves lejáratú opció implicit volatilitásai által kirajzolt ferde mosolyon a következőképp szemléltethető:



2.1.2. ábra. Az EURJPY árfolyampárra szóló egy év lejáratig hátralévő idővel rendelkező volatilitás mosoly ferdeségét meghatározó risk reversal

Forrás: Bloomberg rendszer OVDV volatilitás elemző felülete segítségével készített ábra

A 2.1.2 ábrán zölddel a volatilitás mosoly, piros szaggatott vonallal a 25-ös deltával rendelkező call illetve a -25-ös deltával rendelkező put opciókhoz tartozó volatilitás szintje látható. A risk reversal értékét megkapjuk, ha a -25-ös deltával rendelkező put

opcióhoz tartozó visszaszámított volatilitásból kivonjuk a 25-ös deltával rendelkező call opcióhoz tartozó implicit volatilitást, ami szintén piros színnel jelenik meg az ábrán.

Dumas *et al.* (1998) számos empirikus kutatás során megmutatta, hogy a részvény hozama és a volatilitás megváltozása között szignifikáns korreláció tapasztalható, azaz ha nő a részvény hozama, akkor a volatilitás csökken, illetve fordítva, és éppen ez az ami a grimaszt okozza, nem pedig a volatilitás sztochasztikus jellege. Ezt a jelenséget egy sztochasztikus volatilitás modellel lehetne megragadni, de ekkor az opcióárazáshoz a kockázat piaci árának meghatározására lenne szükség, amit nehéz megbecsülni. A determinisztikus modellek viszont megőrzik az arbitrázs alapú megközelítést. Így egy megoldást jelenthet az, ha a volatilitás az alaptermék árának és/vagy az időnek a determinisztikus függvényeként felírható. Ekkor az opcióárazáshoz továbbra is alapul szolgálhat a Black–Scholes-féle parciális differenciálegyenlet, habár a képlet már nem. Ilyen függvények lehetnek például:

0. Modell: $\sigma = \max(0.01, \alpha_0)$,

1. Modell: $\sigma = \max(0.01, \alpha_0 + \alpha_1 S + \alpha_2 S^2)$,

2. Modell: $\sigma = \max(0.01, \alpha_0 + \alpha_1 S + \alpha_2 S^2 + \alpha_3 T + \alpha_5 ST)$ és

3. Modell: $\sigma = \max(0.01, \alpha_0 + \alpha_1 S + \alpha_2 S^2 + \alpha_3 T + \alpha_4 T^2 + \alpha_5 ST)$.

A nullával jelölt modell a Black–Scholes-világ konstans volatilitását tartalmazó modell, míg ezután egyre inkább összetettebb modellek következnek. Az első modellben már megjelenik az árfolyam, a másodikban a lejáratig hátralévő idő, míg a harmadikban már ezek keresztszorzata is. A 0.01-re állított minimum értékre a negatív volatilitás elkerülése miatt van szükség, míg a négyzetes tagokkal az implicit volatilitás parabolikus alakját lehet megközelíteni.

A várható jövőbeli volatilitás meghatározása egy alapvető pénzügyi probléma. Ennek megoldását kutatták Dumas *et al.* (1998), akik rávilágítottak arra a tényre, hogy a legtöbben a múlt adatait vizsgálva akarnak a jövőre vonatkozó előrejelzéseket megfogalmazni. Egy alternatív megközelítés lehet azonban a piacon megfigyelhető opciós árfolyamok összegyűjtése, és az ezekből való következtetés. Mindennek alapja, hogy az opció értéke nagy mértékben függ a jövőben várható volatilitástól, a piaci szereplők volatilitást illető várakozásai pedig feltárhatóak az opció árának felhasználásával az árazó formula fordított alkalmazásában.

Jiang & Tian (2005) olyan implicit volatilitást vizsgáltak, amely egyik árazó modellre sem épül specifikusan, hanem teljes mértékben no-arbitrázs feltételekből van levezetve. Véleményük szerint ez a fajta visszaszámított volatilitás magában foglalja a Black–Scholes-féle implicit volatilitásban, illetve a múltbeli realizált volatilitásban lévő

információkat is, így hatékony előrejelzője a jövőben várható volatilitásnak. Ezzel szemben ők is megerősítették, hogy a Black–Scholes-féle visszaszámított volatilitás a historikus volatilitásnál több információt tartalmaz ugyan, de nem használható hatékonyan a jövőbeli volatilitás előrejelzésére.

Az implicit volatilitást illetően kritikusabb hozzáállást tanúsított Canina & Figlewski (1993), akik szerint a visszaszámított volatilitás gyakorlatilag nem korrelál a jövőbeli volatilitással, sőt még az aktuálisan megfigyelhető volatilitásban rejlő információkat sem tudja felölelni. Ezen felül még némileg ellentmondásos is az a folyamat, hogy egy konstans volatilitást feltételező modell segítségével akarjuk megjósolni az egyébként nyilvánvalóan sztochasztikus folyamatot, hiszen, ha a feltétel teljesülne, akkor nem lenne szükség a paraméter becslésére.

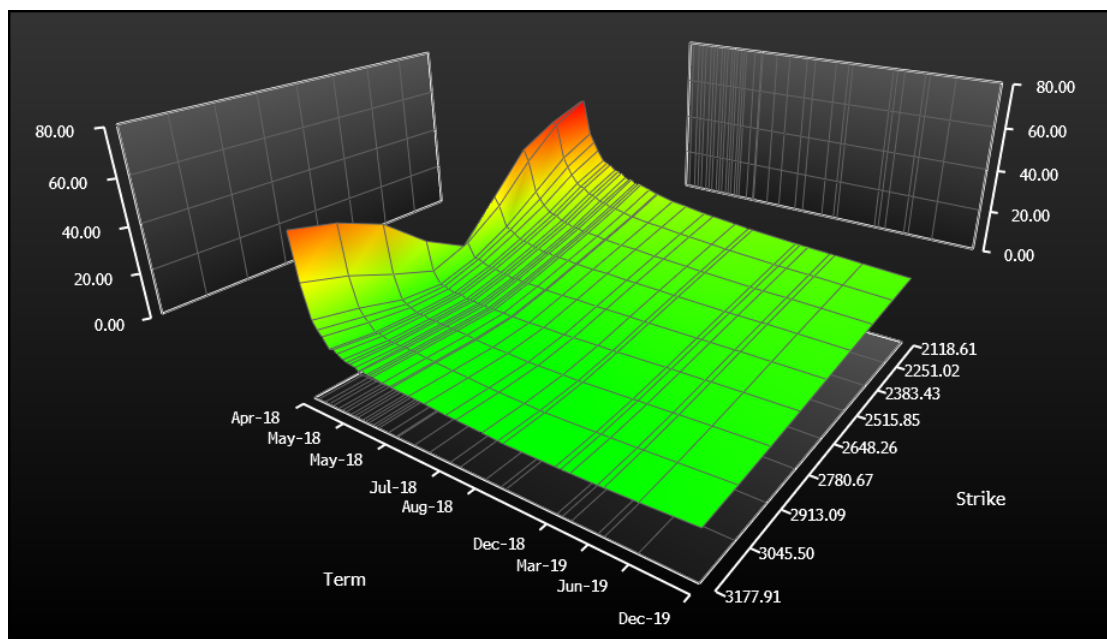
2.2. Implicit és lokális volatilitás felületek

A 2.1 alfejezetben bemutatott historikus és implicit volatilitás a háromdimenziós térben csak egy-egy pontot jelent. Esetleg egy görbét is ki tudunk rajzolni a volatilitás alakulásáról, ha egy paraméter különböző értékeire is megvizsgáljuk azoknak az értékét, és a megfigyelések összekötésével ábrázoljuk. Ilyen például ha a historikus volatilitásnak az időbeli fejlődését vizsgáljuk, vagy ha az implicit volatilitás különböző kötési árfolyamok mellett felvett értékét rajzoljuk ki. Azonban az előző fejezetben is láthattuk, hogy az implicit volatilitást például több paraméter is befolyásolja, és ezek együttes mozgásának ismerete is hasznosnak bizonyulhat. Így jutunk el a háromdimenziós ábráig, amikor a kötési árfolyam – lejáratig hátralévő idő – volatilitás alkotta térben ábrázoljuk a volatilitás értékét a paraméterek egy-egy adott értéktartománya mellett. Ezáltal a volatilitás egy felületet alkot, aminek két fajtáját különböztetjük meg: az implicit és a lokális volatilitás felületet.

2.2.1. Implicit volatilitás felület

Az implicit volatilitás felület a visszaszámított volatilitások értékéből kialakuló háromdimenziós felület. Az alábbi például az S&P 500 indexhez tartozó implicit volatilitásokat ábrázolja az opció kötési árfolyama és a lejáratig hátralévő ideje függvényében.

A 2.2.1 ábrán egy tipikus implicit volatilitás felület látható, amely a legkisebb hátralévő futamidő esetén V alakot formál. A V alak töréspontja az aktuális spot árfolyammal (amely a letöltés pillanatában 2648,26\$) egyenlő kötési árfolyamú opcióból visszaszámított volatilitás. Ettől kisebb, illetve nagyobb kötési árfolyamokhoz nagyobb vissza-



2.2.1. ábra. Az S&P 500 indexhez tartozó implicit volatilitás felület a kötési árfolyam és a lejáratig hátralévő idő függvényében

Forrás: Bloomberg rendszer OVDV volatilitás elemző felülete segítségével készített ábra

számított volatilitásértékek tartoznak, illetve megfigyelhető, hogy az alacsonyabb kötési árfolyamok felé haladva nagyobb mértékben növekszik az implicit volatilitás, mint az a magasabb kötési árfolyamok irányában tapasztalható. A lejáratig hátralévő idő növekedésével pedig a kezdeti V alak gyorsan kisimul, és egy mindinkább vízszinteshez közelítő felület látható.

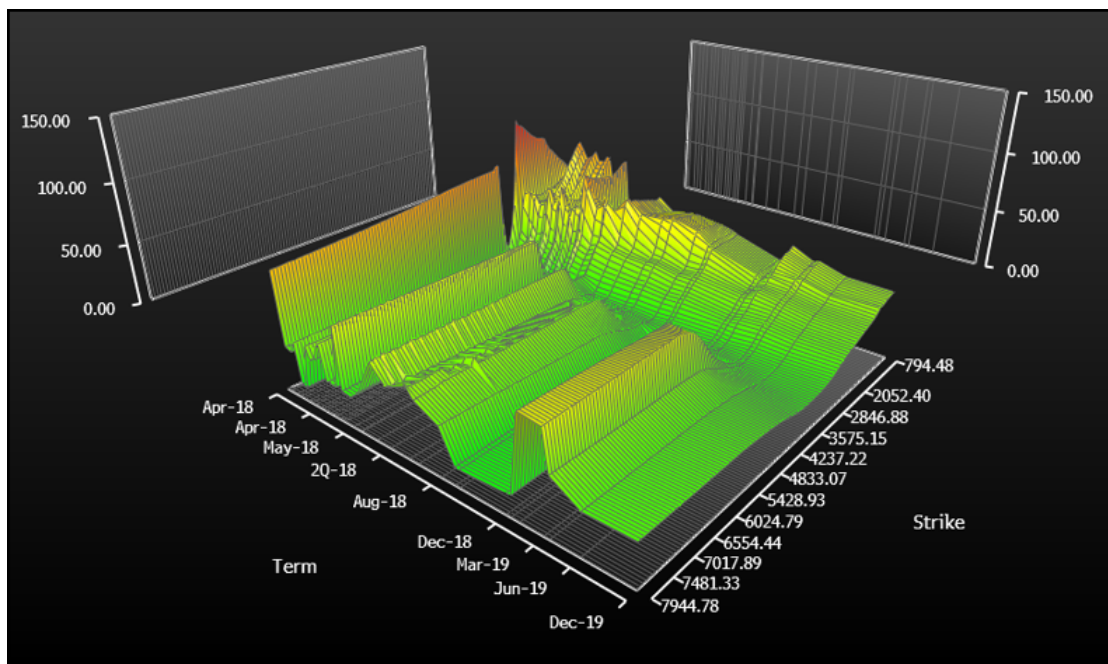
A jelenséget Kamal & Gatheral (2010) a következő piaci megfigyelésekkel magyarázta, melyek kisebb-nagyobb súllyal hozzájárulnak az implicit volatilitás fent leírt alakjának kialakulásához:

- a részvények alacsonyabb árfolyam esetén általában volatilisabbak mint magasabb árfolyamokat elérve (úgynevezett leverage-hatás)
- a spot árfolyam és a volatilitás negatívan korrelálnak egymással
- amennyiben a piacon nagy ugrások következnek be, az a megfigyelések szerint inkább lefelé elmozdulásokban nyilvánul meg
- a kibocsátó csődje, és ezzel a részvény teljes elértéktelenedése pozitív valószínűséggel következhet be
- a befektetők többnyire nettó long pozíciót vesznek fel a részvényekben, ennek következtében pedig alacsony eszközár esetén a put opciók nettó vásárlóivá, magas eszközár esetén pedig a call opciók nettó eladóivá válnak.

Ezen túlmenően a cikkben felsorakoztatott főkomponens-elemzések rávilágítanak, hogy az implicit volatilitás felületének alakját csupán pár faktor befolyásolja jelentősen. Pontosabban három emelhető ki, melyek a volatilitás szintje, lejárat szerkezete, és ferdesége. Továbbá a görbületi paraméter is feltűnik a modellek egy részében. Ehhez kapcsolódóan Derman *et al.* (1996) megfogalmaztak egy hüvelykujjszabályt is, mely szerint egy opció alaptermékének árfolyamában bekövetkezett változás körülbelül ugyanakkora megváltozást eredményez az opció implicit volatilitásában, mint a kötési árfolyamban bekövetkezett elmozdulás.

2.2.2. Lokális volatilitás felület

A lokális vagy más néven forward volatilitás a volatilitás azon értéke, amely egy adott T jövőbeli időpontban, adott S árfolyamérték esetén éppen azt a jövőbeli volatilitást adja, amely mellett a pillanatnyi opcióárak érvényesek. Ezt $\sigma(S, T)$ -vel jelöljük, amelynek az idő és a kötési árfolyam függvényében ábrázolt megjelenési formája a lokális volatilitás felület. Erre egy tipikus példa a 2.2.2 ábrán látható S&P 500 indexre szóló opciók által meghatározott felület.



2.2.2. ábra. Az S&P 500 indexhez tartozó lokális volatilitás felület a kötési árfolyam és a lejáratig hátralévő idő függvényében

Forrás: Bloomberg rendszer OVDV volatilitás elemző felülete segítségével készített ábra

Az implicit volatilitások mindegyikét egy adott időpontban véve meghatározhatjuk a lokális volatilitásokat, vagy más néven a forward implicit volatilitásokat. A kötvénypi-

acok forward kamatlábát idéző elnevezés nem véletlen, ugyanis a volatilitás és a kamatlábak között párhuzam vonható. Vegyük ehhez első lépésben az implicit volatilitás és a lejáratig számított hozam (YTM - yield to maturity) kapcsolatát. Ez utóbbira tekinthetünk úgy, mint a kötvény implicit kamata, amely mellett a kötvény árfolyama éppen a piacon megfigyelhető árfolyam. Majd a forward kamatláb tulajdonképpen az a jövőbeli kamatláb, amely az aktuális lejáratig számított hozamokkal konzisztensen alakul, ez pedig az implicit és lokális volatilitással analóg megfogalmazás.

Derman *et al.* (1996) munkássága alapján a lokális volatilitást leggyakrabban a volatilitás mosolyt tartalmazó piacon használják. Megmutatható vele a piacon uralkodó hangulat, illetve az implicit volatilitás időben történő fejlődése, kiszámolható az opció alaptermékben fennálló kitettsége, valamint segítségünkre lehet az egzotikus opciók fedezését és értékelését illetően is.

A lokális volatilitás az opciós piac résztvevőinek a jövőbeli volatilitásra való együttes vélekedését tartalmazza a piacon megfigyelhető opcióárakat fair árak tekintve. Azonban figyelembe kell venni, hogy a meghatározott lokális volatilitás értékek nem feltétlenül jó előrejelzések a jövőbeli volatilitásnak, minthogy a jövőbeli kamatlábak sem mindenképpen úgy alakulnak, mint azok a forward kamatlábakkal való előrejelzésekben szerepelnek. De ahogy a különböző lejáratú kötvényekkel fixálni tudjuk a forward kamatlábat egy adott időperiódusra, úgy opciós kereskedéssel is elérhető a jövőbeli lokális volatilitás rögzítése.

A forward implicit volatilitás tulajdonképpen két különböző lejáratú opció árából származtatott, t_1 és t_2 időpontok között fennálló volatilitás. Ennek kiszámításához először is tekintsük az időnek egy kereskedési időpontoknak megfelelő, átfedés nélküli felosztását. Legyen az első vizsgált időpont t_0 , és ha ez éppen a jelen, akkor $t_0 = 0$. Definiáljuk σ_{t_1, t_2} -vel a t_1 és t_2 időpontok közötti volatilitást. Ez alapján a piacon az n -edik időszak volatilitás a t_0 és t_n időpontok közötti volatilitást jelenti, amely σ_{t_0, t_n} .

Amennyiben az időnek egy ekvidisztáns felosztását tekintjük, azaz bármely két osztopont között eltelt idő azonos, a lokális volatilitása az alábbi négyzetösszeggel fejezhető ki:

$$\sigma_{t_0, t_n}^2 = \sigma_{t_0, t_1}^2 + \sigma_{t_1, t_2}^2 + \dots + \sigma_{t_{n-1}, t_n}^2.$$

Illetve nem egyenlő időközökben történő felosztás esetén:

$$(t_n - t_0)\sigma_{t_0, t_n}^2 = (t_1 - t_0)\sigma_{t_0, t_1}^2 + (t_2 - t_1)\sigma_{t_1, t_2}^2 + \dots + (t_n - t_{n-1})\sigma_{t_{n-1}, t_n}^2, \quad (2.2.1)$$

amelyben minden szórás a hozzá tartozó időperiódus hosszának megfelelő súllyal kerül az egyenletbe. Az egyenlő időközönkénti felosztás feltételének lazításával a valóságnak jobban megfelelő formulát kapunk, hiszen rövidtávú lejáratot tekintve kisebb időközökre

rendelkezünk adatokkal, azaz sok eltérő időpontú, rövid lejáratú opcióval kereskednek. Ezzel ellentétben a különböző hosszúságú lejáratú opciók lejáratú időpontjai között eltelt idő egyre inkább nagyobb lesz. A 2.2.1 egyenlet mindkét oldalát a bal oldali $(t_n - t_0)$ szorzótényezővel leosztva megkapjuk az egyes időszakokkal kifejezett, n -edik időszakra vonatkozó évesített varianciát.

$$\sigma_{t_0, t_n}^2 = \frac{1}{t_n - t_0} \left((t_1 - t_0) \sigma_{t_0, t_1}^2 + (t_2 - t_1) \sigma_{t_1, t_2}^2 + \dots + (t_n - t_{n-1}) \sigma_{t_{n-1}, t_n}^2 \right).$$

Ezzel levezethető a lokális volatilitás két tetszőleges t_1 és t_2 időpont között, amennyiben ismert a (t_0, t_1) illetve a (t_1, t_2) időszakok közötti variancia.

$$\sigma_{t_0, t_2}^2 = \frac{1}{t_2 - t_0} \left((t_1 - t_0) \sigma_{t_0, t_1}^2 + (t_2 - t_1) \sigma_{t_1, t_2}^2 \right).$$

A továbbiakban tekintsük csak az olyan $t_{n-\alpha}$ és t_n időpontok által meghatározott periódust, amely időpontokban létezik a piacon az adott időponttal megegyező lejáratú opció. Ekkor a $t_{n-\alpha}$ és t_n időpontok közötti forward volatilitás:

$$\sigma_{t_{n-\alpha}, t_n} = \sqrt{\frac{(t_n - t_0) \sigma_{t_0, t_n}^2 + (t_{n-\alpha} - t_0) \sigma_{t_0, t_{n-\alpha}}^2}{(t_n - t_{n-\alpha})}}.$$

2.2.3. Az implicit és a lokális volatilitás kapcsolata

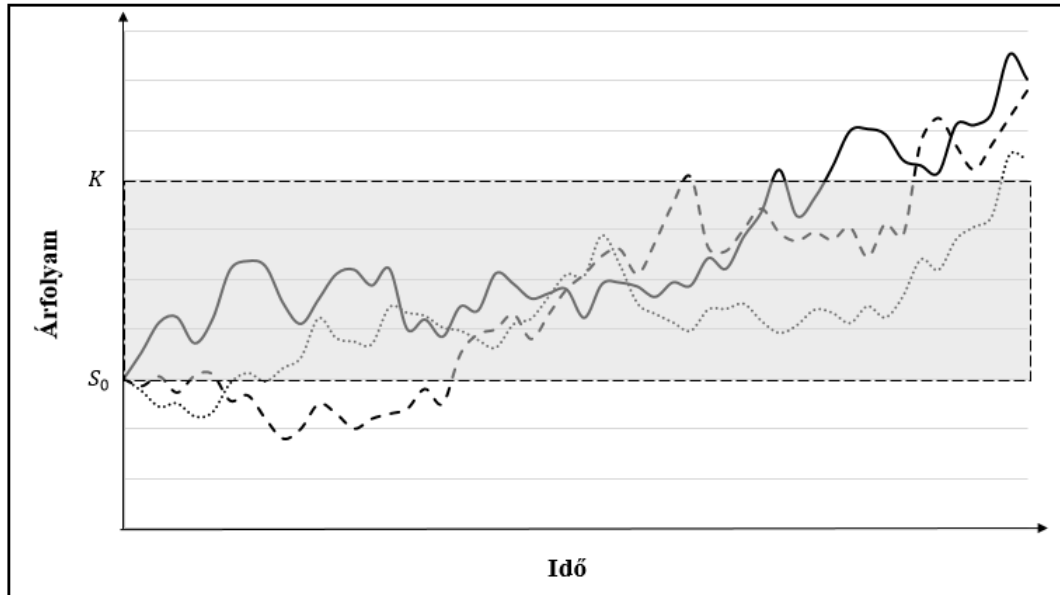
Ahogy az előző szakaszban bemutatott 2.2.2 ábrán is látszik, ugyanahhoz az alaptermékhez, jelen esetben az S&P 500 index értékéhez tartozó lokális volatilitás az implicit volatilitáshoz képest sokkal változékonyabb. Ehhez kapcsolódóan Derman *et al.* (1996) egy hüvelykujjszabályt is megfogalmaztak, amely szerint a lokális volatilitás kétszer jobban reagál az árfolyam szintjének megváltozására, mint az implicit volatilitás a kötési árfolyamban való elmozdulásokra. Ennek az összefüggésnek az intuitív belátásához a cikkben alkalmazott levezetést használom fel.

A levezetés során egy egyszerűbb esetre szorítkozunk. Ehhez tételezzük fel, hogy az indexhez tartozó lokális volatilitás és az index szintje között lineáris összefüggés áll fenn, de a lokális volatilitás független a jövőbeli időpontoktól. Mindez a következő formulával fejezhető ki:

$$\sigma_{lok}(S) = \sigma_0 + \beta S. \quad (2.2.2)$$

Vegyünk egy $\Sigma(S, K)$ implicit volatilitással rendelkező, K kötési árfolyamú, OTM call opciót, miközben az index szintje S . Az árfolyam minden olyan realizációja, amely

hozzájárul az adott opció értékéhez, át kell hogy haladjon az S és a K közötti területen. Mindez matematikailag a Bolzano-tétel egy kiterjesztéséből következően teljesülni fog². A szemlételesség kedvéért az említett útvonalak a 2.2.3 ábrán látható módon jelennek meg, ahol a trajektóriák volatilitásának nagy részét a szürkével körülhatárolt területen a lokális volatilitás adja.



2.2.3. ábra. A call opció értékét befolyásoló lokális volatilitás

Forrás: Saját szerkesztés Derman et al. (1996) alapján

Ebből az összefüggésből következik, hogy az S árfolyam mellett a K kötési árfolyammal rendelkező opció implicit volatilitása körülbelül a sötétebb háttérrel rendelkező szakasz alatti lokális volatilitás átlagával egyenlő.

$$\Sigma(S, K) \approx \frac{1}{K - S} \int_S^K \sigma_{lok}(s) ds. \quad (2.2.3)$$

Helyettesítsük a 2.2.2 egyenletet a 2.2.3 egyenletbe, valamint hajtsuk végre az integrálást.

$$\Sigma(S, K) \approx \sigma_0 + \frac{\beta}{2}(S + K). \quad (2.2.4)$$

²A Bolzano-tétel értelmében egy intervallumon értelmezett, negatív és pozitív értékeket is felvevő folytonos függvénynek van zérushelye. A kiterjesztés szerint pedig tetszőleges folytonos függvényre teljesül, hogy $\forall a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$ -re, amennyiben $f(a) \neq f(b)$ igaz, hogy $\forall c \in [f(a), f(b)] \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = c$. Mindehhez persze azzal a feltételezéssel kell élnünk, hogy az árfolyam fejlődése folytonos, nincsenek benne ugrások.

Ezzel egy másik hüvelykujjszabályhoz jutottunk, amely szerint, ha az implicit volatilitás lineáris kapcsolatban áll a K kötési árfolyammal egy adott S árfolyam esetén, akkor az implicit volatilitás és az árfolyam megváltozása között is lineáris összefüggés áll fenn. Továbbá a piaci árfolyam szintjének és a kötési árfolyamnak a megváltozása az implicit volatilitás közel azonos megváltozását eredményezi. Végül innen belátható az elsőként említett hüvelykujjszabály is. A 2.2.2-vel összevetve leolvasható, hogy a többi változó változatlansága mellett a lokális volatilitás kétszer annyira reagál az index szintjének megváltozására, mint az implicit volatilitás. Végül a 2.2.2 és a 2.2.4 egyenlet kombinációjával az implicit és a lokális volatilitás között fennálló, még inkább közvetlen összefüggéshez jutunk:

$$\Sigma(S, K) \approx \sigma_{lok}(S) + \frac{\beta}{2}(K - S).$$

3. fejezet

A volatilitás megjelenése a pénzügyi piacokon

A volatilitás nem csupán egy mutatószám vagy a termékeket jellemző érték, hanem különböző pénzügyi eszközök formájában önmaga is megjelenik a piacokon, és lehetőség nyílik a kereskedésére is. A befektetők elsősorban a volatilitásból eredő kockázat fedezésére, illetve a jövőbeli volatilitásra való spekuláció céljából használják ezeket a termékeket. A volatilitás vagy variancia derivatívák olyan származtatott pénzügyi termékek, amelyek kifizetése az alaptermék varianciájától vagy valamely típusú volatilitásától függ. Az előző fejezetben bemutatott volatilitások mindegyike, azaz a realizált, az implicit és a lokális volatilitás is kereskedhető a piacon. Mindennek bemutatása során elsősorban Derman *et al.* (1998) cikkét használom fel, amely gyakorlatiasabb szempontból is megragadja az eddigiekben leginkább elméleti szinten szereplő volatilitásokat.

3.1. A realizált, az implicit és a lokális volatilitást megragadó kontraktusok

3.1.1. A realizált volatilitás szintetikus előállítás

A realizált volatilitást egy szintetikus pozíció létrehozásával tudjuk megragadni, hiszen egy opció megvásárlásával a volatilitás mellett megjelenik az alaptermék árfolyamkockázata, az osztalékfizetésből eredő kockázat és a hozamkockázat is. Még ha az utóbbi két kockázati faktortól el is tekintünk (hiszen nagyságrendileg az első kettőtől jóval kisebbek) akkor is szükség van az alaptermék árfolyamának fedezésére annak érdekében, hogy csupán a volatilitásban fennálló kitettséget hozzunk létre. Ehhez először definiáljuk

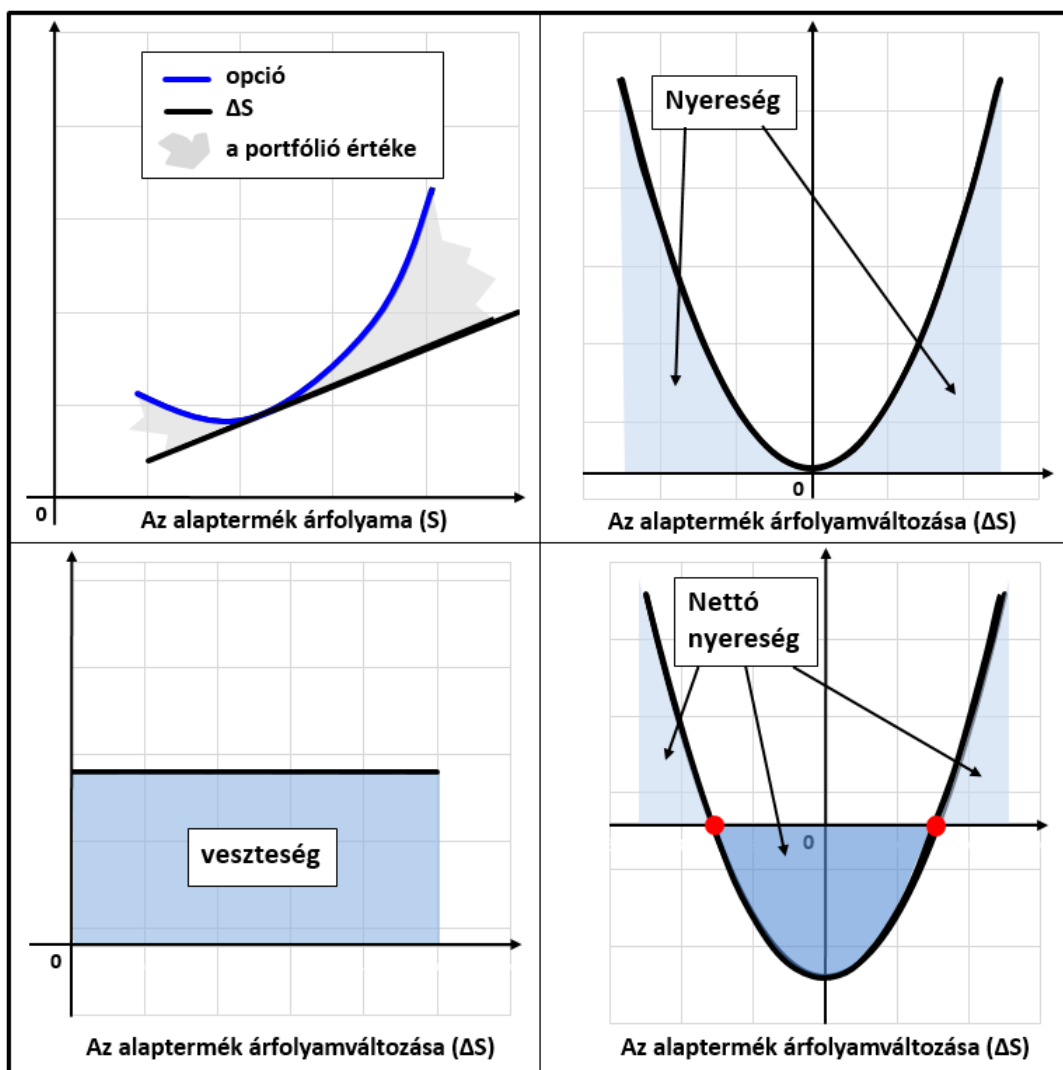
a realizált volatilitást az alábbi módon:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^2}{N-1}}, \quad (3.1.1)$$

ahol S_i az alaptermék i -edik napi záróárfolyama, $\Delta S_i = S_{i+1} - S_i$ az árfolyam egy időszak alatt történő elmozdulása, $\frac{\Delta S_i}{S_i}$ pedig a napi hozam, amelyeket egy N napból álló időperiódusban tekintünk. A volatilitás számításánál itt is alkalmazzuk a 2.1.1 alfejezetben bemutatott zéró-átlag feltételt, hiszen a véletlen bolyongással mozgó árfolyam napi várható hozamának átlaga az eszköz értékéhez viszonyítva elhanyagolhatóan kicsi.

A varianciát megragadó portfólió előállításához tehát egy olyan pozícióra van szükség, amely a 3.1.1 egyenletben lévő $\left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^2$ kifejezéssel arányos összegű kifizetést biztosít. Látható, hogy a hányadosban a ΔS_i négyzete szerepel, aminek következtében a kifizetés az alaptermék bármilyen irányú elmozdulása esetén pozitív lesz. Egyetlen, az alaptermékre szóló tetszőleges opcióban felvett pozíció nem megfelelő választás, hiszen annak napi megváltozásai ugyanúgy felvehetnek negatív, mint pozitív értéket. Azonban egy ilyen opciót, és vele együtt a delta fedezettjét is tartalmazó portfólió napi hozama már $(\Delta S_i)^2$ -tel arányos, tehát minden esetben pozitív lesz. Az eszközöket tartalmazó portfólió a 3.1.1 ábra bal felső grafikonján látható, ahol fekete vonal jelzi az alaptermékben felvett $(-\Delta S_0)$ pozíció értékváltozását az alaptermék árfolyamának függvényében, valamint kék színnel látható az opció értékváltozása. Az opciós pozíció egy konvex görbe, míg az alaptermékben felvett pozíció egy egyenes, ennek következtében a kettő különbségeként kapjuk meg a szürkével besatírozott területet, ami a portfólió értéke.

A 3.1.1 ábra jobb felső sarkában elhelyezkedő grafikon a portfólió nyereségét adja meg abban az esetben ha az alaptermék spot árfolyama egy kis mértékben elmozdulna. Ezt a késsel jelölt terület adja meg, ami a fekete színű nyereségfüggvény alatti terület. Látható, hogy az opció konvex alakjának köszönhetően a portfólió értéke pozitív lesz, függetlenül az alaptermék árfolyamának elmozdulásától. A képen látható függvényforma egy parabola, amely az $\frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2$ egyenlettel adható meg, ahol a Γ az opciónak az alaptermék árfolyama szerinti második deriváltja. Ez adja meg az opció görbületi értékét vagy más néven konvexitását is. Az $\frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2$ approximáció a opciós görbe Taylor-soros közelítéséből adódik. Mivel egy deltasemleges portfóliót hoztunk létre, így a Taylor-sor első tagja nulla lesz, a harmad- illetve magasabb rendű tagokat pedig viszonylag elhanyagolható értékük miatt már nem vesszük figyelembe.



3.1.1. ábra. Egy opciót és a delta fedezettjét tartalmazó portfólió értéke, valamint az idő és az alaptermék árfolyamának megváltozásával bekövetkező értékváltozása

Forrás: Saját szerkesztés Derman et al. (1998) munkássága alapján

Az eddigiekben tehát egy olyan portfóliót hoztunk létre, amelyben egy long opciós pozíció mellett delta mennyiségű short alaptermék szerepel, aminek következtében az alaptermék negatív illetve pozitív irányú megváltozása esetén egyaránt pozitív kifizetést eredményez. Ez alapján pedig jogosan merülhet fel az arbitrázs gondolata, hogy a portfólióval bármilyen jövőbeli kimenetel esetén nyereségre tudunk szert tenni. A látszólagos ellentmondás feloldását az opció időben bekövetkezett értékváltozása adja, amit eddig nem vettünk figyelembe. Amikor ugyanis elmozdul az árfolyam, továbbra már nem a $t = 0$ induló időpillanatban vagyunk, hanem előremozdulunk az időben is, ami negatív hatással van az opció árfolyamára. Amennyiben az alaptermék elmozdulásával megfigyelhető realizált volatilitás ugyanaz lesz, mint a portfólióba vásárolt opcióból visszaszámított volatilitás, azaz Σ , akkor az opcióban az idő múlásával bekövetkezett értékvesztés éppen kioltja az alaptermék árfolyamának kis mértékű elmozdulásából eredő nyereséget.

A veszteség nagyságát a 3.1.1 ábra bal alsó diagramján megjelenő kék terület mutatja, amely egy adott Δt időpillanatban $\frac{1}{2}\Gamma\Sigma^2S^2\Delta t$ nagyságú lesz. Végül a kapott nyereséget és veszteséget egyszerre számításba véve kapjuk a 3.1.1 ábra jobb alsó grafikóját, amely a portfólió által egy Δt időpillanat alatt elérhető nettósított nyereséget adja meg. Ez az imént használt formulákkal felírva:

$$\text{nettó nyereség} \sim \frac{1}{2}\Gamma [(\Delta S)^2 - \Sigma^2 S^2 \Delta t]. \quad (3.1.2)$$

A 3.1.2 egyenletből látható, hogy a hedge portfólióval elérhető nyereség $\Gamma(\Delta S)^2$ nagyságrendű, miközben a historikus volatilitás 3.1.1 képletéből kiolvashatjuk, hogy a napi realizált volatilitás $(\frac{\Delta S}{S})^2$ nagyságrendben mozog. Mivel a portfólió kialakításával a realizált volatilitásból elérhető nyereség/veszteség replikálása volt a célunk, ezt úgy tudjuk elérni, ha a portfólió Γ paraméterével meghatározott görbülete $\frac{1}{S^2}$ -tel, azaz az alaptermék inverzének négyzetével arányosan alakul. Amennyiben sikerül egy ilyen tulajdonságokkal rendelkező portfólió kialakítása, akkor a felvett pozíciókkal elérhető nyereség minden nap megegyezik a realizált volatilitás és a kiinduló időpillanatban adódó implicit volatilitás különbségével.

A $\Gamma \sim \frac{1}{S^2}$ görbülettel rendelkező opciós pozíció létrehozására alkalmazhatjuk a statikus és a dinamikus módszert is. Ez utóbbi lényege, hogy egy olyan portfóliót hozunk létre, amelyhez tartozó Δ nulla, Γ pedig állandó lesz, és $\frac{1}{S^2}$ darab opcióból áll. Ennek fenntartása az idő múlásával folyamatos kiigazítást igényel. A statikus módszerhez egy olyan opciós portfólióra és a delta fedezettjére van szükség, ahol az opciós portfólió gammája azonosan $\frac{1}{S^2}$ az alaptermék által felvett bármely piaci árfolyam esetén. Megmutatható, hogy ennek a portfóliónak olyan derivatívát kell tartalmazni, amely lejáratkori kifizetése az alaptermék természetes logaritmusával arányos. Ez az úgynevezett „log-kontraktus” azonban nem érhető el a piacon, hanem csupán más opciókból keverhető ki egy hasonló kifizetéssel rendelkező pozíció. Bármely módszert választjuk, figyelembe kell venni azt a tényt, hogy a realizált volatilitás megragadására törekvő portfóliók kialakítása közben a tökéletes fedezés szinte lehetetlen, ráadásul minél gyakrabban igazítjuk ki a replikáló portfóliókat, annál nagyobb lesz a fedezés költsége. A kereskedés során ráadásul előre nem látható kockázatok is felmerülhetnek, mint például az árfolyamokban bekövetkező ugrások, likviditással kapcsolatos problémák.

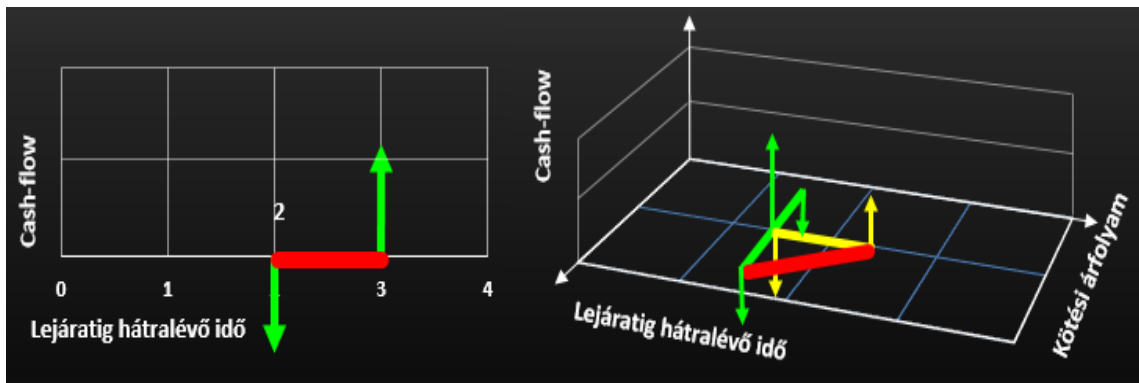
3.1.2. Kereskedés az implicit volatilitással

Egy adott időszakra szóló opció visszszámított volatilitása az az ár, amelyet ma fizet valaki azért, hogy az adott időszakra szóló jövőbeli realizált volatilitásban kitettséget szerezzen. Mindez az opció megvásárlásával érhető el, azonban ahogy azt a korábbiak-

ban, a realizált volatilitásnál is kifejtettem, ezen pozíció felvételével nem csak az implicit volatilitásban lesz kitétsége a befektetőnek, hanem további tényezők is közerejászanak. A nehézség annak a stratégiának a kialakításában rejlik, ami a nem kívánatos járulékos kockázatok mindegyikét megszüntetni úgy, hogy csupán a volatilitásból eredő kockázat maradjon meg.

3.1.3. Kereskedés a lokális volatilitással

A lokális vagy forward volatilitást illetően először gondoljunk át egy testhezállóbb hasonlatot, mégpedig a forward kamatok esetét. A forward kamatlábak gyakrabban előforduló, ismertebb fogalmak, ami szemléletesebbé teszi a stratégiát. A hozamok tekintetében tehát, ha például a mai naptól számítva a második és a harmadik év közötti forward kamatlábat szeretnénk fixálni, akkor ehhez a három éves lejáratú elemi kötvényben long pozíciót, valamint ezzel egyidejűleg a két éves lejáratú elemi kötvényben short pozíciót kell felvenni, olyan súlyokkal, hogy a kiinduláskor kialakított kötvényportfólió értéke éppen nulla legyen. Ezzel a stratégiával fixáltuk a mai naptól számolva két év múlva esedékes egy éves lejáratú hozamot, valamint a portfólió értékét kizárólag ennek a forward rátának a megváltozás befolyásolja. Az így előállított portfóliót szemlélteti a 3.1.2 ábra bal oldali része, ahol zöld színnel az elemi kötvények adás-vételéből származó cash flow iránya látható, míg a pirosa színnel kiemelt szakasz a portfólió forward rátában való kitétségének időszakát mutatja.



3.1.2. ábra. A forward hozam (bal) és a forward volatilitás (jobb) előállítása

Forrás: Saját szerkesztés Derman *et al.* (1998) alapján

A kamatlábakhoz hasonlóan állathatjuk elő, és rögzíthetjük előre egy adott időszakra, illetve árfolyamszintre vonatkozóan a lokális volatilitást is. Mindehhez egy olyan portfólió előállítása szükséges, amelyben opciós különbözetek szerepelnek. Pontosabban

long horizontális különbözet¹ és short pillangó különbözet² olyan arányú kombinációja, amivel a kialakított portfólió kiinduló időpontbeli értéke nulla. Ennek következtében a portfólió egy olyan „eszközt” hoz létre, amely a különbözetekben szereplő opciók által meghatározott jövőbeli időperiódushoz, illetve árfolyam-intervallumhoz tartozó forward volatilitást adja meg. Fontos megjegyezni azonban, hogy ebben az esetben az opciókból álló portfólió csak akkor állítja elő a kívánt forward volatilitást, ha a hozamgörbe a konstans nulla szinten áll, illetve ha az opciós különbözetekben lévő kötési árfolyamok infinitezimálisan közel vannak egymáshoz. A lokális volatilitást előállító opciós stratégia a 3.1.2 ábra jobb oldali részén jelenik meg, amely a bal oldalhoz hasonlóan pirossal jelöli azt a területet, ahol a portfóliónak a lokális volatilitásban kitétsége keletkezik. Továbbá a zöld szín a short pillangó, míg a sárga a long horizontális különbözetet mutatja.

3.2. Volatilitásindexek

A Chicago Board Options Exchange (2009) által 1993-ban bevezetett CBOE Volatility Index, azaz rövidebb, de szélesebb körben ismert nevén a VIX index, eredetileg a 30 napos implicit volatilitás piaci várakozások szerinti értékét mutatta azáltal, hogy alapjául az S&P 100 indexre szóló at-the-money put és call opciók ára szolgált. Ennek következtében a VIX index rövid időn belül az amerikai részvényt piac volatilitásának benchmarkjaként vált ismertté. Egy évtizeddel később, 2003-ban a CBOE (Chicago Board Options Exchange) és a Goldman Sachs továbbfejlesztette a VIX indexet, mely alapjául így már a nagyobb piaci kapitalizációval rendelkező, szélesebb körben használt S&P 500 index szolgált. Sőt még korábban csak ATM opciókat tartalmazott, addig mostmár az ITM és OTM opciókat is figyelembe veszik az árfolyamsúlyozású átlagolásba az értékének meghatározásakor.

A VIX indexre szóló határidős termékekkel 2004 márciusától lehetett a tőzsdén kereskedni, majd 2006-tól elérhetővé vált az indexre szóló opció is, ami a CBOE történelmének egyik legsikeresebbjei közé tartozik. Ezután 2014-ben egy újabb fejlesztés hatására a heti opciók (minden hét szerdáján lejárató opciók) szolgálták az index számításának alapjául, aminek következtében pontosabban tudták illeszteni a 30 napos várható volatilitást, ami az index célja.

A VIX index nem a jelenbeli volatilitás mérőszáma, hanem a piac által várható jövőbeli volatilitást mutatja. Ehhez intuitív magyarázatot a Chicago Board Options Exchange

¹Horizontális különbözet (Hull (2009)): egy adott eszközre szóló, azonos kötési árfolyammal, de eltérő lejáratúval rendelkező short és long pozíció felvétele.

²Short pillangó különbözet (Hull (2009)): ugyanarra az adott eszközre szóló, azonos T lejáratúval rendelkező opciók, amelyek három különböző kötési árfolyamhoz tartoznak. Ezek legyenek a $K_1 < K_2 < K_3$ -mal adottak. Ekkor a különbözet az alábbi opciós pozíciókkal állítható elő: $LC(K_1, T) + 2SC(K_2, T) + LC(K_3, T)$

(2009) kutatási részlegének tanulmányából merített elgondolás ad, amelynek alapján úgy tekintünk az opciókra, mint valamiféle biztosításra. Ez az opció természetéből fakadóan könnyen adódik. A biztosítás ára a kockázattal arányos, minél nagyobb a kockázat, annál többet kell érte fizetni. A VIX index értékét pedig a piacon megfigyelhető opcióárakból visszaszámított implicit volatilitás határozza meg.

Általánosságban elmondható, hogy a VIX az éppen aktuális, széles körben megfigyelhető piaci trendekkel ellenkezően mozog, azaz ha nőnek az árfolyamok, a piac pozitív irányba lendül, akkor a VIX csökken, és fordítva. Ez azonban nem azt jelenti, hogy a piac elmozdulásának irányát, vagy a részvényárak nagyságát lenne hivatott mutatni. Értékes tulajdonsága, hogy több, mint 20 évre visszamenőleg állnak rendelkezésre a historikus adatok, amelyek hasznos információkat nyújtanak a befektetőknek arról, hogyan viselkednek az opcióárak különböző piaci környezetben.

Érdemes még megjegyezni, hogy nem ez az egyetlen volatilitást mérő index a tőzsdéken, sőt magán a CBOE-n sem. Az évek hosszú sora alatt számos indexet hoztak létre, amelyek különböző rövidebb illetve hosszabb távú volatilitást mérnek, valamint vannak olyanok is, amelyek egy-egy szektor, nyersanyag vagy meghatározott részvény volatilitását adják meg. 2013 végén a CBOE bemutatta a rövid távú volatilitás indexét, azaz a CBOE Short-Term Volatility Indexet (VXST), amely a VIX 30 napos várható volatilitásával ellentétben a 9 napos várható volatilitáson alapul. Ennek a számítása a VIX-hez hasonlóan történik.

A S&P500 indexen kívül számos más index is alapjául szolgálhat volatilitás indexnek, ilyen például a Dow Jones Industrial Average, a Nasdaq-100, Russell 2000, de létezik árupiaci terméken (arany, ezüst, olaj), valutaárfolyamon (euró árfolyam) és gazdasági szektorokon (energiaipar, aranybányászat) alapuló volatilitás index is. A piacon találhatunk ezenkívül egyes részvényekre épülő VIX indexeket is. Ilyen részvények többek között az Apple, az Amazon vagy az IBM részvények. A számítás az előzőekhez hasonlóan itt is a sztenderd VIX formulával történik, annyi különbséggel, hogy jelen esetben csak a sztenderd, minden hónap harmadik hetének pénteki napján lejárató opciókat veszik alapul.

3.3. Variancia swapok

A variancia swapok alapvető tulajdonságait, illetve fogalmát Demeterfi *et al.* (1999), valamint Carr & Lee (2009) cikke alapján mutatom be. Eszerint a termék a varianciára szóló forward kontraktusként határozható meg. A variancia swap a legtöbb swappal ellentétben nem biztosít a futamidő során kifizetést, csak a lejárat időpontjában.

Ahhoz, hogy a kifizetésfüggvényt fel tudjuk írni, először is definiáljuk Broadie & Jain (2008) alapján annak egy fontos összetevőjét, mégpedig az alaptermék realizált varianciáját. Az AF évesítési faktor (*annualization factor*) segítségével a mutatószámot most évesítve adjuk meg. Legyen adott egy $[0, T]$ időintervallum, amit n db Δt hosszúságú részre osztunk, például $t_i = \frac{iT}{n}$, minden $i = 0, 1, \dots, n$ esetén. Ekkor a realizált variancia:

$$V_d(0, n, T) = \frac{AF}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \frac{S_{i+1}}{S_i} \right)^2,$$

ahol az S_i a korábbiakhoz hasonlóan az alaptermék t_i időpontban megfigyelt értéke. Az alsó indexben szereplő d betű a diszkrét esetre vonatkozik. Mindez felírható természetesen folytonos esetben is, amikor az n , mint az intervallum felosztását jelölő érték elveszíti jelentését, és az alsó indexbe az folytonosságot jelölő f betű kerül: $V_f(0, T)$.

Ekkor a variancia swap f_{var} kifizetésfüggvénye a következő:

$$f_{var} = (V_d - K_{var}) \cdot N,$$

amely a folytonos esetet tekintve természetesen V_f -fel is felírható. A függvényben szereplő N a swap névértéke, míg a K_{var} a kötési árfolyam vagy leszállítási árfolyam, amelyet az ügylet megkötésekor a vanilla opcióhoz hasonlóan előre lefixálnak. Lejáratkor a long pozícióban lévő félnek ezt a fix összeget kell kifizetnie a partnerének, aki az ellentétes oldalon száll be az ügyletbe. Ezzel párhuzamosan a long oldalon lévő befektető változó összegű kifizetést kap a partnertől, amely kifizetés az alapterméknek a swap ügylet futamideje alatti realizált volatilitásától függ. A kötési árfolyam általában százalékos értékben adott, míg a névérték például dollár/variancia pontban. A swapot megvásárló befektető tehát annyiszor N egységnyi pénzösszegre tesz szert, amennyivel az alaptermék realizált varianciája az előre meghatározott K_{var} szintet túllépi.

A J.P. Morgan munkatársai, Bossu *et al.* (2005) a K_{var} kötési árfolyamot az alaptermék kiinduló időpontbeli implicit volatilitásaként határozták meg. Ebben a kontextusban a variancia swap egy olyan termék, amellyel a befektetők a jövőbeli realizált volatilitás, és ugyanazon termékhez tartozó implicit volatilitás különbségével kereskedhetnek.

A variancia swap kifizetése egy konvex függvény, amelynek következtében a long ügylet fokozott nyereséget, illetve diszkontált veszteséget eredményez. Ez a torzítás azonban nem marad következmény nélkül, hiszen a fair árnál valamennyivel drágább lesz a termék, azaz magasabb implicit volatilitással vagy kötési árfolyammal kell számolni. Demeterfi *et al.* (1999) megadtak egy hülyekujjszabályt, amivel a fair kötési árfolyam kiszámolható. Ez akkor alkalmazható, ha a konvex görbe ferdesége a kötési árfolyam lineáris

függvénye.

$$K_{var} \approx \sigma_{ATMF} \sqrt{1 + 3T \cdot \text{ferdeség}}$$

Az közelítésben szereplő σ_{ATMF} az ATM forward volatilitást jelöli, T a swap ügylet lejáratára, a ferdeség pedig az előbbieken tárgyalt konvex görbe ferdesége.

A variancia swap egy egzotikus változatát kapjuk, ha egy bizonyos szinten maximalizáljuk a swap kifizetését. Ez az úgynevezett cap variancia swap, amelynek a kifizetésfüggvénye az alábbi módon írható fel, ha a maximum szintet M -nek választjuk:

$$f_{\bar{v}ar} = \min\{V_d, M\} - K_{var}$$

Látható tehát, hogy a kifizetésfüggvényben megjelenő minimum függvény ($M - K_{var}$)-ban maximalizálja a kifizetést.

A variancia swap tisztán a variancián alapuló kitettséget biztosít a befektetőknek, akik a termékkel a variancia jövőbeli elmozdulásának irányára fogadhatnak. Ha például a befektető a volatilitás emelkedésére számít a piacon, akkor egy long swap ügyletbe fektet. Ezzel mindaddig pozitív kifizetést tudhat magáénak, amíg a realizált volatilitás magasabb, mint az ügylet megkötésekor fennálló implicit volatilitás. A short swap esetén éppen ellentétes irány játszódik le. Továbbá széles körben alkalmazzák árazási problémákhoz is a terméket, hiszen replikálása könnyen megvalósítható.

3.4. Volatilitás swapok

A volatilitás swapokról Demeterfi *et al.* (1999) készítettek alapos tanulmányt, így dolgozatomban az ő munkájából merített információkat használom fel a termék bemutatására.

A volatilitással való kereskedés egyik legegyszerűbb formája a volatilitás swap adásvétele. Gyakran realizált forward volatilitás ügyleteknek is szokták nevezni, mert csak és kizárólag a volatilitásban nyújtanak kitettséget. A volatilitás swap kifizetésfüggvénye nagymértékben hasonlít az előző alfejezetben tárgyalt variancia swapéhoz:

$$f_{vol} = \left(\sqrt{V_d} - K_{vol} \right) \cdot N,$$

ahol K_{vol} a volatilitás swaphoz tartozó kötési árfolyam.

A volatilitás swapok tökéletesen alkalmasak a jövőbeli volatilitásra való spekulálásra. Ehhez a befektető long vagy short pozíciót vesz fel annak függvényében, hogy milyen várakozásokkal rendelkezik a volatilitást illetően. Megmutatható, hogy a kötési árfolyam fair értéke az alaptermék implicit volatilitásához közeli érték, így a swappal a realizált volatilitás és az implicit volatilitás közötti spread is kereskedhető.

3.5. Variancián és volatilitáson alapuló opciók

A fejezetben a teljesség igénye nélkül néhány relevánsabb terméket sorakoztatunk fel. A varianciára, illetve a volatilitásra épülő opciók közül elsőként tekintsünk egy egyszerűbb terméket, majd ennek működését megismerve lépünk tovább az összetettebb instrumentumok felé. Ahogyan azt Broadie & Jain (2008) is kifejtette, a variancia call opció arra jogosítja fel a tulajdonosát, hogy az ügylet lejáratának időpontjában egy előre meghatározott K kötési árfolyamért cserébe egy $V_f(0, T)$ nagyságú kifizetést kapjon. A call opció kifizetésfüggvénye tehát egy tetszőleges K kötési árfolyam esetén:

$$C_T = \max(V_f(0, T) - K, 0) \cdot N.$$

Ehhez hasonlóan felírhatjuk a put opció kifizetésfüggvényét is:

$$P_T = \max(K - V_f(0, T), 0) \cdot N.$$

Látható, hogy az opciók kifizetése a $V_f(0, T)$ realizált varianciától függ, amely tulajdonképpen nem egy piacon kereskedett termék.

Ezenkívül Sepp (2008) más olyan opciókról is említést tesz, amelyek kifizetése valamilyen formában a varianciától vagy a volatilitástól függ. Vegyük először például a forward-start opciót (Wilmott (2009)) amely egy jövőbeli időpontban aktivizálódó opció. Ebben az időpillanatban állapítják meg a kötési árfolyamot is, így az opció ATM-ként indul. Habár az opció csupán egy jövőbeli pillanatban aktivizálódik, az opciós díjat mégis a jelenben kell kifizetni. Az opciót kiírhatjuk úgy, hogy a volatilitás legyen az alaptermék, így a kifizetés az alaptermék jövőbeli realizált volatilitásától függ. Továbbá a piacon található még a VIX indexre szóló opciót is, ami szintén egy volatilitás derivátiva, hiszen a VIX az S&P 500 index volatilitásának várakozásait tükrözi.

3.6. Target volatility

A Target volatility opció (TVO) egy viszonylag újabb fajta volatilitás derivatíva, amely 2008 környékén jelent meg a pénzügyi piacokon. A TVO működésének elemzése, valamint tulajdonságainak bemutatása során három, az imént említett opció árazásával foglalkozó cikket használok fel, amelyek nevezetesen (a megjelenés éve szerinti sorrendben) Di Graziano & Torricelli (2012), Wang & Wang (2014), illetve Alos *et al.* (2018) szerzők művei. A TVO-k lehetőséget nyújtanak a befektetőknek, hogy egyetlen eszközzel az alaptermék árfolyamára és az opció élettartama alatt realizált volatilitására is spekulálhassanak, hiszen a termék kifizetésfüggvényét ezek a változók is befolyásolják. Például a target volatility call kifizetését megkapjuk, ha először vesszük a T lejáratú időpontban az alaptermék éppen aktuális árfolyamának, S_T -nek a K kötési árfolyammal csökkentett értékét, amennyiben ez nagyobb, mint nulla. Különben nem hívjuk le az opciót, így az értéktelenül lejár, és nulla kifizetést biztosít. Majd a kapott értéket megszorozzuk a célvolatilitás konstans értékének és az eszközkhöz tartozó, 0 és T közötti realizált volatilitásnak a hányadosával

$$\varphi(S_T, RV_T) = \frac{\bar{\sigma}}{RV_T} (S_T - K)^+, \quad (3.6.1)$$

ahol $\bar{\sigma}$ a célvolatilitás előre meghatározott szintje, RV_T pedig az alapterméknek az opció időtartama alatt realizált volatilitása. Azaz a TVO kifizetése a képletből leolvashatóan egy alap vanilla opciónak a $\frac{\bar{\sigma}}{RV_T}$ hányadossal arányos kifizetése.

A target volatility opciók a vanilla opciókhoz képesti olcsóságuk miatt lopták be magukat a befektetők és spekulánsok szívébe, hiszen ha a piacon megnő a volatilitás, az opciók árfolyamai erre reagálva erőteljes növekedésnek indulnak, de a kifizetésfüggvény nevezőjében lévő realizált volatilitás is növekszik. Ennek hatására a TVO kifizetése csökken, amely némileg csökkenőleg hat az opció árfolyamára.

A TVO megvásárlása során a befektető meghatározhatja a célvolatilitás paraméter nagyságát, amely egyben befolyásolja az opciós kifizetés nagyságát is. A kiválasztott célvolatilitás értéke általában a befektetőnek az alaptermék árfolyamához tartozó, az opció időtartama alatti, jövőbeli átlagos realizált volatilitásra vonatkozó várakozásait tükrözi. Ha a paraméter értékét épp az alaptermékhez tartozó, adott időszakra számolt implicit volatilitásával helyettesítjük, akkor a termék a volatilitás vagy variancia swapokhoz hasonló volatilitás derivatívává válik. Itt ki kell hangsúlyoznunk, hogy csupán hasonló, mivel nem konkrétan egy swap ügyletről beszélünk, hanem csupán két volatilitás típusának hányadosáról, amely növeli vagy éppen csökkenti az opció potenciális kifizetését.

A pénzügyi piacokon megfigyelhető tény, hogy amikor növekednek az árfolyamok,

csökken a volatilitás. Ugyanez igaz fordítva is: az árfolyamok csökkenése növekvő volatilitást idéz elő. Ezeket az elmozdulásokat a TVO esetén végiggondolva a lejáratkori kifizetések esetén a következő megállapításra juthatunk. Ha a piacon általános növekedés figyelhető meg, akkor a TVO call opció a vanilla opcióhoz hasonlóan egyre inkább ITM-be fordul, azaz nő a kifizetése, ahogy az alaptermék ára növekszik. Továbbá a felívelő trendet mutató piacon a realizált volatilitásban nagy valószínűséggel csökkenés figyelhető meg, ami a vanilla opcióhoz képest tovább növeli a TVO kifizetését, mivel az fordítottan arányos vele. Az ellenkező irányú elmozdulás vizsgálata a call esetén értelmét veszti, hiszen kifizetés nullában van minimalizálva, így a negatív kifizetés irreleváns, ahogy az is, milyen szinten lesz az negatív. Ellentétben a TVO put változatával, ahol a piac lefelé mutató elmozdulása épphogy negatívan hat a kifizetésre, hiszen ekkor a kiszámíthatatlan árfolyamcsökkenések megnövelik a termékek realizált volatilitását, ami a vanilla opció kifizetéséhez képest csökkenti a TVO put kifizetését. Erre egy megoldást jelenthet az úgynevezett put stílusú TVO, amikor a 3.6.1 kifizetésfüggvényben található hányados helyett a reciproka szerepel a formulában, azaz a realizált volatilitás lesz a számlálóban, a célvolatilitás pedig a nevezőben. Ezzel ugyanazt a hatást érjük el, mint a call opciónál: ha lefelé ívelő piaci trendek esetén csökkennek az árfolyamok, és növekszik a volatilitás, mindkét elmozdulás növelni fogja a put TVO kifizetését.

A piacon egyéb olyan eszközök is megtalálhatóak, amelyek a TVO logikáját követik, ilyen például a target volatility fund (TVF) és a target volatility index (TVI). Elsőként ez utóbbit szeretném röviden bemutatni a Morningstar Inc. (2016) módszertana alapján. A target volatility index célja az opcióhoz hasonlóan a volatilitás egy bizonyos szintjének a kitűzése, amelyet a futamidő során a befektetőnek biztosítani tudnak. Mindezt egy bázisindex (*Base Index*) és bizonyos mennyiségű készpénz alkotta portfólióval kívánják elérni, amely összetevők az előre meghatározott célvolatilitás (*target volatility*) szintjének fenntartása érdekében kapják a súlyokat. Az index alaptermékben való kitettséget a bázisindexhez viszonyítjuk, és a következő formulával tudjuk megadni

$$w_{target(t)} = \min \left(\max \text{ kitettség}; \frac{\text{célvolatilitás}}{\text{realizált volatilitás}} \right), \quad (3.6.2)$$

ahol jelen esetben a maximális kitettség a bázisindex 150%-a lehet, ennél nagyobb tőkeáttétellel nem vehetünk fel pozíciót az alaptermékben. A képletből egyszerűen kiolvasható a TVI összetétele, és az is, hogy mikor, milyen irányú elmozdulás szükséges annak érdekében, hogy az adott volatilitási célérték szintjét érje el az index. Amennyiben a következő időszakban a célvolatilitás alacsonyabb lesz, mint a bázisindex előre becsült realizált volatilitása, a hányados, ami megmutatja a bázisindexbe való befektetés súlyát is, 1-nél kisebb lesz. A TVI-ben ekkor csökkenteni kell a bázisindexbe való befektetés összegét. Ennek hatására nő a szabadon álló pénzösszeg, ami csökkenti a befektetés varianciáját.

Az ellenkező esetet vizsgálva, amikor a következő időszakra prognosztizált volatilitása a bázis indexnek a célvolatilitás szintje alatt van, akkor a tőkeáttételt meghatározó formulában a hányados értéke 1-nél nagyobb számot vesz fel. Ennek következtében teljes mértékben a bázisindexbe fektetünk, sőt $\frac{\text{célvolatilitás}}{\text{realizált volatilitás}} - 1$ arányban még hitelfelvétel is történik, amelyből befolyó pénzösszeget szintén a bázisindexbe való befektetés irányába csoportosítjuk. A kitétség azonban (jelen esetben) 150%-ban van maximalizálva, így a befektetés teljes összegének csupán 50%-ában történhet pénzfelvétel.

A tőkeáttétel meghatározásához szükséges volatilitáshoz a bázis index 20, illetve 60 napos historikus volatilitását számolják ki, és ezek közül a nagyobbat veszik figyelembe. Ezt a számítást minden nap elvégzik, és nagy valószínűséggel minden nap más-más érték adódik, aminek következtében az index tőkeáttételében napi kiigazítás lenne szükséges. Ez azonban nagymértékben megnöveli a tranzakciós költségeket. A problémát egy tőkeáttételi tolerancia szint felállításával oldották meg, ami azt jelenti, hogy a tényleges, és a következő időszakra kiszámolt tőkeáttételi szintek eltérése még elfogadott, ha ez az eltérés abszolút értékben kisebb, mint a meghatározott tolerancia szint. Mindez a $t = 0$ -tól nagyobb időpontokban érvényes, mivel a kezdő időpontban a TVI tőkeáttételének meg kell egyeznie a célvolatilitás elérése céljából meghatározott 3.6.2 egyenlettel adott súllyal, azaz $t = 0$ -ban:

$$w_0 = w_{target(0)}$$

minden további $t > 0$ esetben pedig:

$$w_t = \begin{cases} w_{target(t)} & \text{ha } w_{t-1} > (1+x) \cdot w_{target(t)} \\ w_{target(t)} & \text{ha } w_{t-1} < (1-x) \cdot w_{target(t)} \\ w_{t-1} & \text{különben} \end{cases}$$

ahol x a befektetés százalékos értékében előre meghatározott tolerancia szint, w_t a t -edik időszaki kitétség valós értéke, $w_{target(t)}$ pedig a t időpontra számolt, a volatilitás célkitűzésének megfelelő kitétsége értéke.

A Morningstar target volatility indexéhez nagyon hasonló instrumentumok a Moody's munkatársai, Morrison & Tadrowski (2013) által bemutatott TVF-ek. Ez szintén egy olyan eszközcsoportot tartalmaz, amelyet dinamikusan mindig kiigazítanak a volatilitás egy előre megadott célkitűzésének a fenntartása szempontjából. A TVF-ek elterjedésének oka, hogy a variable annuity³ termékekben előszeretettel alkalmazták, hiszen éppen a megfelelő védelmet biztosítják a portfólióban, miközben a lehetséges alternatívák közül ezek a legolcsóbbak.

³Olyan évente változó kifizetést biztosító megtakarítások, amely során az évenkénti kifizetések egy garantált minimumot, és egy ezen felüli, a portfólió teljesítményétől függően változó prémiumot biztosítanak.

4. fejezet

Target volatility opció árazása

„Go down deep enough into anything and you will find option. Then to value them you have to go even deeper.”¹

Egy opció kereskedő

A target volatility opciók árazásával csupán néhány cikk foglalkozott az évek folyamán, amelyek néhol hasonló, máskor pedig merőben eltérő szemszögből közelítették meg a problémát. Di Graziano & Torricelli (2012) cikke, amely a témában az első jelentősebb munkák közé tartozik, kétféle módszert is bemutatott a TVO-k árazására: egy Taylor-soros közelítést, valamint egy Laplace-transzformáción alapuló árazási formulát. A munkájuk során, a formulák megalkotását illetően azzal a feltételezéssel éltek, hogy a volatilitást és az árfolyamot meghajtó Brown-mozgás (Wiener-folyamat) függetlenek egymástól. Ez azonban eléggé korlátozó feltétel, amely a valóságban többnyire nem áll fenn. A későbbiekben születtek olyan cikkek, amelyek feloldják ezt a feltételt, és a függetlenség elhagyása mellett próbálkoznak meg a TVO opciók árazásával. A függetlenség feltételezésének van viszont előnye is, amelyet Di Graziano & Torricelli (2012) ki is emelt: a TVO árazása ennek köszönhetően a kvadratikus variációt tartalmazó követelésekkel rendelkező portfólió várakozásainak kiszámítására redukálható.

A következőkben az imént említett szerzőpáros munkássága alapján dolgozom fel a TVO-k árazását, amely során mindkét általuk bemutatott módszert kifejtem. Mindehhez először a levezetésekhez szükséges feltételeket részletezem, majd a két árazáshoz használt módszer, a Taylor-soros megközelítés, illetve a Laplace-transzformáció segítségével levezetett formula következik.

¹~ „Mélyedj bele eléggé valamibe, és opciókat fogsz találni. Ezután ahhoz, hogy meghatározd az értéket, még mélyebbre kell ásnod.” Haug (2007): 413. oldal

4.1. Az árazás során használt feltételezések

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ egy filtrált valószínűségi mező, amely kielégíti az alábbi feltételeket (Medvegyev (2014)):

- az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező teljes,
- az \mathcal{F}_t filtráció jobbról folytonos és
- az \mathcal{F}_t filtráció tartalmazza az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nulla halmazait.

Ez a filtrált valószínűségi mező a piacot reprezentálja. A tárgyalás során tegyük fel továbbá, hogy a piacon létezik egy zéró kamatot fizető B_t kockázatmentes eszköz, valamint azt, hogy létezik egy \mathbb{Q} valószínűségi mérték, amely alatt minden olyan kockázatos S_t eszköz, amely nem fizet osztalékot, kielégíti az alábbi sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$dS_t = \sigma_t S_t dW_t,$$

ahol W_t egy \mathbb{Q} -mérték szerinti Brown-mozgás. Továbbá az egyenletben szereplő σ_t egy olyan pozitív sztochasztikus volatilitás folyamat, amely kielégíti a

$$d\sigma_t = \mu_t(\sigma_t, t)dt + \nu_t(\sigma_t, t)dZ_t, \quad \sigma_0 > 0,$$

típusú diffúziós egyenletet, ahol Z_t a W_t -től független \mathbb{Q} -mérték szerinti Brown-mozgás.

Legyen $X_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ az árfolyamokból számított loghozam, amely folyamat kvadratikus variációjára²

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma_u^2 du.$$

A folyamatra feltesszük, hogy $\forall t > 0$ -ra alulról korlátos. Továbbá érdemes kihangsúlyozni, hogy az $\langle X \rangle_t$ kvadratikus variáció az X_t folyamat realizált varianciája. A későbbiekben minden várható értéket a kockázatmentes \mathbb{Q} mérték szerint veszünk, így ezt a várható értéknél külön nem jelöljük.

Legyen $\bar{\sigma} > 0$ egy tetszőleges konstans, amely az opcióhoz tartozó *target volatility*, azaz célvolatilitás értéke. Egy K kötési árfolyammal rendelkező target volatility call opció az S_T -re és $\langle X \rangle_T$ -re vonatkozó származtatott követelés. Az opció értéke egy tetszőleges t

²**Definíció.** Az X folyamat kvadratikus variációjára $\forall t \geq 0$ esetén a $[0, t]$ intervallum tetszőleges, végtelenül finomodó $t_i^{(n)}$ felosztássorozata mellett az $[X]_t := \text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i \left(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}} \right)^2$ folyamat.

időpontban az alábbi várható értékkel adható meg:

$$\bar{C}_t^{TV}(S_t, K, \langle X \rangle_t) = \mathbb{E}_t \left[\frac{\bar{\sigma} \sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} (S_T - K)^+ \right].$$

Ehhez hasonlóan a put TVO t időpontbeli értéke:

$$\bar{P}_t^{TV}(S_t, K, \langle X \rangle_t) = \mathbb{E}_t \left[\frac{\bar{\sigma} \sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} (K - S_T)^+ \right].$$

4.2. Taylor-soros közelítés $t = 0$ esetén

Az alábbi fejezetben a $t = 0$ időpontban vizsgáljuk a TVO árát. Ehhez tekintsünk először egy még egyszerűbb esetet, nevezetesen amikor a call TVO kötési árfolyama az alaptermék árfolyamával egyenlő, tehát egy ATM opció. Mindehhez Bachelier híres közelítő formulájára van szükségünk, amely egy európai típusú vanilla call opcióra levezetett közelítés. Így mielőtt ténylegesen rátérnénk a TVO árazására, vizsgáljuk meg először ezt az approximációs formulát.

4.2.1. A Bachelier-formula

Louis Bachelier 1900-ban alkotta meg a később róla elnevezett opcióárazási formuláját, amely a Black, Scholes és Merton által megalkotott világot jónéhány évvel megelőzte. Ekkor még Bachelier a maihoz képest eltérő fogalmakat használt, amiknek azonban könnyen megtalálhatjuk a manapság alkalmazott megfelelőjét, ahogyan azt Schachermayer & Teichmann (2008) cikkében is olvashatjuk. Bachelier a munkásságában az „igaz árak” („*true prices*”) elnevezést használja a diszkontált érték helyett, valamint a modern terminológiában létező martingálságot az *alapvető tulajdonság* („*fundamental principle*”) kifejezéssel fogalmazza meg. A Bachelier által alkalmazott formula ugyanazt a receptet használja az opciók árazására, mint amit manapság is használunk: diszkontált értékeket, azaz „igaz árakat” alkalmazva, majd a megfelelő várható értéket véve megkaphatjuk az opció árát. Ezt a várható értéket olyan valószínűségi mérték alatt kell venni, amely mellett az alaptermék diszkontált eszközár-folyamata teljesíti a *alapvető tulajdonságot*, azaz martingál. Azonban meg kell jegyeznünk, hogy habár Bachelier munkássága a saját korához képest rendkívül úttörő volt, az egyensúlyon alapuló érvelése elmarad a Black–Schole–Merton által létrehozott no-arbitrázs érveléshez képest.

Bachelier formulájának levezetéséhez először meg kell határoznunk a feltételeket, amelyekben a modellt fel szeretnénk írni. Ebben a szakaszban nem érvényesek a 4.1.

alfejezetben részletezett feltételezések és jelölések, helyüket az alábbiakban megfogalmazottak veszik át. A formula és az azt követő állítás, illetve annak bizonyítása Schachermayer & Teichmann (2008) cikke alapján történik.

Legyen egy fix $T > 0$ időpont. Az alaptermék árfolyama Brown-mozgást követ, amely az alábbi egyenlettel írható fel:

$$S_t^B = S_0(1 + \sigma W_t)$$

minden $0 \leq t \leq T$ esetén, ahol W_t egy sztenderd Brown-mozgás, az S_t^B -nél pedig a felső indexben található B betű Bachelier nevéből származó kezdőbetű, amivel az ő keretrendszerében felírt eszközár-folyamatot különböztetjük meg a másiktól.

A feltételek megadása után Bachelier feltételrendszerét alkalmazva meghatározhatjuk az opció árát. Ehhez vegyünk egy rögzített K kötési árfolyamot (természetesen „igazi” azaz diszkontált értelemben), és legyen T lejáratú idő. Ekkor a C -vel jelölt európai típusú call opció kifizetése a T időpontban:

$$C_T^B = (S_T^B - K)^+.$$

Az opció értéke az egyenlet jobb oldalának várható értékével lesz egyenlő. Ennek során kihasználjuk, hogy az $S_T^B \sim N(S_0; S_0\sigma\sqrt{T})$, azaz az árfolyam eloszlása a T időpontban S_0 várható érték, illetve $S_0^2\sigma^2T$ szórásnégyzet paraméterrel rendelkező normális eloszlást követ.

$$\begin{aligned} C_0^B &= \mathbb{E}[(S_T^B - K)^+] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF^+x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f^+(x) dx = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} x \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(x-(S_0-K))^2}{2S_0^2\sigma^2T}} dx = \\ &= \int_{K-S_0}^{+\infty} (S_0 - K + x) \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2S_0^2\sigma^2T}} dx = \\ &= \int_{K-S_0}^{+\infty} (S_0 - K) \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2S_0^2\sigma^2T}} dx + \underbrace{\int_{K-S_0}^{+\infty} x \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2S_0^2\sigma^2T}} dx}_{\mathbb{E}[X|X \geq K - S_0]} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (S_0 - K) \left(1 - \Phi \left(\frac{K - S_0}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \right) \right) + S_0 \sigma \sqrt{T} \int_{K - S_0}^{+\infty} x \phi \left(\frac{x}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \right) dx = \\
&= (S_0 - K) \Phi \left(\frac{S_0 - K}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \right) - S_0 \sigma \sqrt{T} \phi \left(\frac{K - S_0}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \right) = \\
&= (S_0 - K) \Phi \left(\frac{S_0 - K}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \right) - S_0 \sigma \sqrt{T} \phi \left(\frac{S_0 - K}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \right) \tag{4.2.1}
\end{aligned}$$

ahol $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Erre pedig teljesül, hogy $\phi'(x) = -x\phi(x)$, amelynek az átalakítás során a (-1) -szeresét használjuk. Továbbá alkalmazzuk még az $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$ azonosságot is. Ezzel megkaptuk a Bachelier nevéhez fűződő opcióárazási formulát.

Mivel az eredeti célunk egy ATM TVO árának a közelítése, így válasszuk meg Bachelier formulájában is a kötési árfolyamot ennek megfelelően $K = S_0$ -nak. Erre az esetre Bachelier 1900-ban az „egyszerű opció” („*simple option*”) terminológiát használta. A 4.2.1 formulába $K = S_0$ -t helyettesítve az összeg első tagja kinullázódik, míg a második tagból a 4.2.2 egyszerű kifejezés marad, amely az opció árát határozza meg. Ezt tovább alakítva kiemelhető a $H = \frac{S_0 \sigma}{\sqrt{2\pi}}$ szorzótényező, amelyet Bachelier az „*értékpapír idegességi együtthatójának*” („*coefficient of nervousness*”) nevezett.

$$C_0^B = S_0 \sigma \sqrt{\frac{T}{2\pi}} = \frac{S_0 \sigma}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{T} = H \sqrt{T} \tag{4.2.2}$$

4.2.2. A Bachelier és a Black–Scholes–Merton-modell kapcsolata

Mivel az ATM TVO árához a Black–Scholes-formulán keresztül vezet az út, a következő lépésben azt vizsgáljuk, hogy a Bachelier-formulával kapott ár hogyan viszonyul a Black–Scholes–Merton-moddellel kapott értékhez. Ez utóbbiban a diszkontált eszközár-folyamat az alábbi egyenlettel adott minden $0 \leq t \leq T$ időpontra, ahol az előzőhöz hasonlóan a felső indexben található BS a Black–Scholes-moddellre utal:

$$S_t^{BS} = S_0 \exp \left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right).$$

A két modell közötti különbség a lineáris és effektív kamatozással állítható párhuzamba, ami a következő differenciálegyenletekből is látható:

$$dS_t^B = S_t^B \sigma dW_t,$$

$$dS_t^{BS} = S_t^{BS} \sigma dW_t.$$

A párhuzam alapján várakozásaink szerint a két modell hasonló eredményeket produkál, amennyiben rövid lejáratú rendelkező opciókat veszünk figyelembe, hiszen 1-hez közeli x -ekre $\ln(1+x) \sim x$. Hosszabb lejáratok esetén azonban a különböző modellekkel számolt árfolyamok között jelentős különbség figyelhető meg. A loghozam mindig kisebb, mint az effektív hozam, így várakozásaink szerint a Black–Scholes-formula kisebb értéket ad, mint a Bachelier-formula.

A Bachelier-modell esetén alkalmazottakhoz hasonló átalakításokkal juthatunk el a Black–Scholes-formuláig, ahol az alaptermék árfolyama már lognormális eloszlást követ.

$$\begin{aligned} C_0^{BS} &= \mathbb{E} \left[(S_T^{BS} - K)^+ \right] = \\ &= S_0 \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + \frac{1}{2} \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - K \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} - \frac{1}{2} \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \end{aligned}$$

A következő állításban egy $\sigma > 0$ fix volatilitással és rögzített T lejáratú rendelkező ATM call opció Bachelier és Black–Scholes–Merton által levezetett formulával kapható árát hasonlítjuk össze, hogy látható legyen, mennyire tér el a kettő egymástól.

1. Állítás. Rögzítsük előre a $\sigma > 0$, és a $T > 0$ szórás, illetve lejáratú idő paramétereit, valamint legyen $K = S_0$, továbbá C^B , illetve C^{BS} a korábbiak alapján legyen a Bachelier, illetve a Black–Scholes–Merton-formulával kapott európai call opció értéke. Ekkor:

$$0 \leq C_0^B - C_0^{BS} \leq \frac{S_0}{12\sqrt{2\pi}} \sigma^3 T^{\frac{2}{3}} = \mathcal{O} \left((\sigma \sqrt{T})^3 \right).$$

Bizonyítás. $K = S_0$ esetén a Bachelier és a Black–Scholes–Merton-modellből kapott opcióárak:

$$\begin{aligned} C_0^B &= \frac{S_0 \sigma}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{T} \\ C_0^{BS} &= S_0 \Phi \left(\frac{1}{2} \sigma \sqrt{T} \right) - \Phi \left(-\frac{1}{2} \sigma \sqrt{T} \right). \end{aligned}$$

A call opcióra kapott kétféle árfolyamot egymásból kivonva:

$$\begin{aligned} 0 \leq C_0^B - C_0^{BS} &= \left(\frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} x - S_0 \left(\Phi \left(\frac{1}{2} x \right) - \Phi \left(-\frac{1}{2} x \right) \right) \right) \Big|_{x=\sigma \sqrt{T}} = \\ &= S_0 \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \Big|_{x=\sigma \sqrt{T}} = \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}} 1 - e^{-\frac{y^2}{2}} dy \Big|_{x=\sigma \sqrt{T}} \leq \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}} \frac{y^2}{2} dy \Big|_{x=\sigma\sqrt{T}} = \\
&= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{x^3}{12} \Big|_{x=\sigma\sqrt{T}} = \frac{S_0}{12\sqrt{2\pi}} \sigma^3 T^{\frac{3}{2}} = \mathcal{O}\left((\sigma\sqrt{T})^3\right),
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

ahol a 4.2.3 és 4.2.4 egyenlőtlenség között kihasználjuk, hogy az $1 + y \leq e^y$ összefüggés minden y -ra teljesül. Ezt pedig y helyett $-\frac{y^2}{2}$ -re alkalmazva éppen a levezetésben szereplő kifejezések közötti összefüggést kapjuk meg, amely: $1 - e^{-\frac{y^2}{2}} \leq \frac{y^2}{2}$. \square

4.2.3. Az at-the-money target volatility opció ára

A 4.2.1 alfejezetben megmutattuk egy ATM európai call opció Bachelier-modell szerinti árát, míg a 4.2.2 alfejezetben megnéztük, hogy ez az opcióár mennyire tér el a Black–Scholes–Merton-moddal számolt értéktől. Mindezt felhasználjuk az ATM TVO árának közelítésére is. A következőkben megmutatjuk, hogy az ATM TVO ára hozzávetőlegesen egy olyan, vele ekvivalens vanilla call opció árával egyezik meg, amelynek implicit volatilitása $\bar{\sigma}$.

$$\begin{aligned}
\bar{C}_0^{TV}(S_0, K = S_0, 0) &= \mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} (S_T - S_0)^+ \right] = \\
&= \mathbb{E}_0 \left[\mathbb{E} \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} (S_T - S_0)^+ \middle| \mathcal{F}_T^\sigma \right] \right] = \\
&= \mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} \mathbb{E} [(S_T - S_0)^+ | \mathcal{F}_T^\sigma] \right] = \\
&= \mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} C^{BS}(S_0, S_0, \langle X \rangle_T) \right] \approx \\
&\approx \mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} C^B(S_0, S_0, \langle X \rangle_T) \right] = \\
&= \mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} S_0 \sqrt{\frac{\langle X \rangle_T}{2\pi}} \right] = \\
&= S_0 \bar{\sigma} \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \approx C^{BS}(S_0, S_0, \bar{\sigma}^2 T).
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

A 4.2.5 kifejezésben az $(\mathcal{F}^\sigma)_{t \geq 0}$ a volatilitás folyamat által generált filtráció, továbbá a $\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}}$ mérhető az \mathcal{F}_T^σ σ -algebrára nézve, így kiemelhető a belső feltételes várható értékből. A $C^{BS}(S_0, K, x)$ pedig egy olyan S_0 spot árfolyammal és K kötési árfolyammal

rendelkező európai típusú vanilla call opció árát jelöli, amelynek kumulált varianciája (cumulative variance) x . Ez a Black-Scholes-formulával felírva:

$$C^{BS}(S_0, K, x) = S_0 \Phi(d_1(x)) - K \Phi(d_2(x)),$$

ahol

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{S_0}{K} \pm \frac{x}{2}}{\sqrt{x}}. \quad (4.2.6)$$

Az eddigiekben a TVO árát csak abban az esetben vizsgáltuk, amikor az opció ATM, azaz a kötési árfolyama egybeesik az alaptermék spot árfolyamával. A piacon azonban ezen kívül a kötési árfolyamoknak még széles sávja elérhető, így a TVO árát általánosabb esetben is megvizsgáljuk, amikor a kötési árfolyam a spot árfolyamtól különböző értékeket vesz fel. Az opció árát továbbra is a $t = 0$ időpontban keressük:

$$\bar{C}_0^{TV}(S_0, K, 0) = \mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma} \sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} C^{BS}(S_0, K, \langle X \rangle_T) \right]. \quad (4.2.7)$$

Mindezt kiszámolhatjuk úgy, hogy a 4.2.7 egyenlőség jobb oldalán látható Black-Scholes-árat az ATM szint, vagyis az S_0 körüli Taylor-sorba fejtésével közelítjük. Továbbá megmutatjuk, hogy az így kapott sorfejtés minden tagja kifejezhető az $\langle X \rangle_T$ kvadratikus variáció valamilyen exponenciális függvényének integráljaként. Ennek felírásához nyújt segítséget a 2. és a 3. segédétel, amely közül az előbbi a Black-Scholes-féle árfolyamnak a kumulált variancia súlyozott összegeként való felírását teszi lehetővé, míg az utóbbi a számolásokhoz ad egyszerűsítési lehetőségeket.

2. Segédétel. *Amennyiben az európai típusú call opció árát megadó Black-Scholes-formulára úgy tekintünk, mint a K kötési árfolyam függvényére, akkor annak az ATM pont, azaz az S_0 árfolyam körüli Taylor-sorfejtése a következő:*

$$C^{BS}(S, K, x) = S - (S + K) \Phi \left(-\frac{\sqrt{x}}{2} \right) + e^{-\frac{x}{8}} \sum_{j=0}^{f(n)} x^{-(\frac{1}{2}+j)} W^{n,j}(K) + \mathcal{O}((K-S)^{n+3}) \quad (4.2.8)$$

ahol

$$W^{n,j}(K) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=2j}^n (-1)^k c^{f(k)-j,k} \frac{(K-S)^{k+2}}{S^{k+1}(k+2)!}$$

és

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{ha } k \text{ páros} \\ \frac{k-1}{2}, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases} \quad (4.2.9)$$

A lemmában szereplő $c^{j,n}$ együtthatók explicit módon is megadhatóak egy egyszerű rekurzív egyenlet megoldásaként.

Bizonyítás. Tekintsük először a $C^{BS}(S, K, x) := C(K)$ formulával felírható Black–Scholes-formulának az ATM pont, azaz a $K = S_0$ pont körüli Taylor-sorfejtését. Ebben a $C^{(i)}(S)$ a K szerinti i -edik deriváltat jelöli, amelynek értékét a $K = S$ pontban vesszük

$$C(K) = C(S) + C^{(1)}(K - S) + \sum_{k=0}^{+\infty} C^{(k+2)}(S) \frac{(K - S)^{k+2}}{(k+2)!}. \quad (4.2.10)$$

Estrella (1995) munkássága alapján megállapíthatjuk, hogy a Taylor-sorfejtés konvergens, azaz amennyiben $n \rightarrow +\infty$, akkor 4.2.10 tart $C(K)$ -hoz, ha $0 < K < 2S$. A Taylor-sor divergens lesz, ha $0 < 2S < K$ áll fenn. Továbbá Estrella (1995) megmutatta, hogy $k \geq 0$ -ra a $C^{(k+2)}(S)$ az alábbi módon explicit módon felírható:

$$C^{(k+2)}(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\hat{\sigma}^2}{8}} \frac{P_k(d_1)}{S^{k+1} \hat{\sigma}^{k+1}} (-1)^k, \quad (4.2.11)$$

ahol $\hat{\sigma} := \sigma\sqrt{t} = \sqrt{x}$ az idő-skálázott volatilitás. Erre a skálázásra akkor van szükség, az opció lejáratát nem pont egy év, hiszen a volatilitást évesítve adjuk meg.

Megmutatható, hogy a $P_n(d_1)$ kielégíti a következő rekurzív egyenletet:

$$P_0(d_1) = 1, \quad \text{ha } k = 0$$

és

$$\begin{aligned} P_k(d_1) &= (d_1 + k\hat{\sigma})P_{k-1}(d_1) - P'_{k-1}(d_1) = \\ &= (d_1 + k\hat{\sigma})P_{k-1}(d_1) - \\ &\quad - \left[(k-1)P_{k-2} + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \hat{\sigma} P_{k-3} + \dots + \frac{(k-1)!}{k-1} \hat{\sigma}^{k-2} P_0 \right], \quad \text{ha } k \geq 1, \end{aligned}$$

ahol d_1 a 4.2.6 definíciót felhasználva $K = S$ és $\hat{\sigma} = \sqrt{x}$ esetén

$$d_1(S) = \frac{\ln \frac{S_0}{K} \pm \frac{x}{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\ln \frac{S}{S} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}}{\hat{\sigma}} = \frac{\hat{\sigma}}{2}. \quad (4.2.12)$$

A rekurzív egyenlet $n \leq 4$ esetén például a következőképp alakul:

$$P_0(d_1) = 1$$

$$P_1(d_1) = d_1 + \hat{\sigma}$$

$$P_2(d_1) = d_1^2 + 3\hat{\sigma}d_1 + 2\hat{\sigma}^2 - 1$$

$$P_3(d_1) = d_1^3 + 6\hat{\sigma}d_1^2 + (11\hat{\sigma}^2 - 3)d_1 + 6\hat{\sigma}^3 - 6\hat{\sigma}$$

$$P_4(d_1) = d_1^4 + 10\hat{\sigma}d_1^3 + (35\hat{\sigma}^2 - 6)d_1^2 + (50\hat{\sigma}^3 - 30\hat{\sigma})d_1 + 24\hat{\sigma}^4 - 35\hat{\sigma}^2 + 3.$$

Így a P_k a volatilitás különböző hatványainak összegeként általánosan is felírható:

$$P_k = \sum_{j=0}^{f(k)} c^{j,k} \hat{\sigma}^{\gamma(j,k)}, \quad (4.2.13)$$

ahol $c^{j,k}$ a P_k polinom j -edik együtthatója, $\gamma(j,k)$ pedig a P_k polinom j -edik tagjában szereplő $\hat{\sigma}$ kitevője, amely az alábbiak szerint alakul:

$$\gamma(j,k) = \begin{cases} 2j, & \text{ha } k \text{ páros} \\ 2j+1, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

A P_k egy olyan k -ad fokú polinom, amely páros/páratlan k esetén $\hat{\sigma}$ -nak a páros/páratlan hatványait tartalmazza.

Tekintsük most a 4.2.13 felhasználásával a következőképpen definiált, úgynevezett átskálázott polinomot:

$$\bar{P}_k := \frac{P_k}{\hat{\sigma}^{k+1}},$$

Ebben a $\hat{\sigma}$ -nak már csak a páratlan kitevői szerepelnek, és felírható a 4.2.14-ben látható alakban³.

$$\bar{P}_k = \sum_{j=0}^{f(k)} c^{f(k)-j,k} \hat{\sigma}^{-(1+2j)} \quad (4.2.14)$$

Helyettesítsük 4.2.14-et a 4.2.11 egyenletbe:

$$C^{(k+2)}(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\hat{\sigma}^2}{8}} \frac{(-1)^k}{S^{k+1}} \sum_{j=0}^{f(k)} c^{f(k)-j,k} \hat{\sigma}^{-(1+2j)}. \quad (4.2.15)$$

A Taylor-sorfejtést leíró 4.2.10 egyenlet első és második tagját ki tudjuk fejezni a Black–Scholes-formulával:

$$C^{(0)}(S) = C(S) = S \left(\Phi \left(\frac{\hat{\sigma}}{2} \right) - \Phi \left(-\frac{\hat{\sigma}}{2} \right) \right), \quad (4.2.16)$$

³Ez az alak a 4.2.13-ban látható alakhoz képest lényegében abban különbözik, hogy fordított sorrendben haladunk végig a szummában található elemeken: míg korábban $0, 1, 2, \dots, f(k)$ sorrendben vettük a tagokat, addig most fordított a rangsor, azaz $f(k), f(k) - 1, \dots, 1, 0$.

illetve a Black–Scholes-formula K szerinti első parciális deriváltjával, amelyhez felhasználjuk a d_1 -nek a 4.2.12-ben felírt alakját. Továbbá a deriválás során alkalmazzuk még az összetett függvényre, valamint két függvény szorzatára vonatkozó deriválási szabályokat is. A standard normális eloszlás deriválása pedig definícióból adódóan:

$$\phi(x) = (\Phi(x))' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$\frac{\partial C(K)}{\partial K} = S \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2(K)}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{K\hat{\sigma}} \right) + (-1)\Phi(d_2(K)) - K \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2(K)}{2}} \left(-\frac{1}{K\hat{\sigma}} \right),$$

ahol felhasználhatjuk, hogy $d_2^2(K) = d_1^2(K) - 2\ln\left(\frac{S}{K}\right)$. Ezzel az első, illetve az utolsó tag kiejti egymást. A kifejezést a $K = S$ pontban tekintve megkapjuk, hogy

$$C^{(1)}(S) = -\Phi\left(-\frac{\hat{\sigma}}{2}\right) \quad (4.2.17)$$

Helyettesítsük be az átalakítással kapott tagokat (4.2.15, 4.2.16, 4.2.17) a 4.2.10 Taylor-sorfejtésbe:

$$\begin{aligned} C(K) &= S \left(\Phi\left(\frac{\hat{\sigma}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\hat{\sigma}}{2}\right) \right) - \Phi\left(-\frac{\hat{\sigma}}{2}\right) (K - S) + \\ &+ \frac{e^{-\frac{\hat{\sigma}^2}{8}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(K - S)^{k+2}}{(k+2)! S^{k+1}} \sum_{j=0}^{f(k)} c^{f(k)-j,k} \hat{\sigma}^{-(1+2j)} + \mathcal{O}((K - S)^{n+3}) = \\ &= S \left(\Phi\left(\frac{\hat{\sigma}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\hat{\sigma}}{2}\right) \right) - \Phi\left(-\frac{\hat{\sigma}}{2}\right) (K - S) + \\ &+ \frac{e^{-\frac{\hat{\sigma}^2}{8}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{f(k)} \hat{\sigma}^{-(1+2j)} \sum_{k=2j}^n (-1)^k c^{f(k)-j,k} \frac{(K - S)^{k+2}}{(k+2)! S^{k+1}} + \mathcal{O}((K - S)^{n+3}). \end{aligned}$$

Ez utóbbi kifejezést a szummák felcserélésével, és a $\hat{\sigma}$ közös faktornak választásával kaptuk. \square

Ahhoz, hogy a TVO árat meghatározó formulát felírjuk, 4.2.8 egyenletet be kell helyettesíteni a 4.2.7 kifejezésbe. Ennek megvalósításához nyújt segítséget a 3. lemma, amelynek köszönhetően a behelyettesítésnél néhány kifejezés egyszerűbb alakra hozható.

3. Segédteétel. Bármely pozitív x és r esetén teljesül az alábbi két egyenlőség:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \Phi\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(z+\frac{1}{8})x}}{\sqrt{z+\frac{1}{8}}} dz, \quad (4.2.18)$$

és

$$x^{-r} = \frac{1}{r\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-z^{\frac{1}{r}}x} dz. \quad (4.2.19)$$

A 4.2.18 bizonyításához először pár forgalom ismerete szükséges:

4. Definíció. Egy $g(z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \geq 0$ intervallumon értelmezett függvény Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}_z[g(z)](x) = \int_0^{+\infty} g(z) e^{-xz} dz.$$

A Laplace-transzformált létezésének feltétele a formulában szereplő improprius integrál konvergenciája.

5. Definíció. (Greene (2012)) Az $erf(x)$ -szel jelölt hibafüggvény (error function) vagy más néven Gauss-féle hibafüggvény:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dz.$$

A komplementer hibafüggvényt $erfc(x)$ -szel jelöljük:

$$\begin{aligned} erfc(x) &= 1 - erf(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dz, \end{aligned}$$

Bizonyítás. A hibafüggvényeket illetően a bizonyítás során ez utóbbira lesz szükségünk, amelyre teljesül az $erfc(x) = 2\Phi(-x\sqrt{2})$ összefüggés.

Tekintsük a $g(z) := \frac{1}{\sqrt{\pi(z+a)}}$ függvény Laplace-transzformáltját egy tetszőleges $a > 0$ -ra, majd végezzünk el néhány átalakítást az integrálon az alábbiak szerint:

$$\mathcal{L}_z[g(z)](x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xz}}{\sqrt{\pi(z+a)}} dz =$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \frac{e^{-\left(\sqrt{x(z+a)}\right)^2}}{\sqrt{\pi(z+a)}} dz = \quad (4.2.20)$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{xa}}^{+\infty} \sqrt{x} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi(z+a)}} \underbrace{2\sqrt{x(z+a)} \frac{1}{x}}_{dz} dt = \quad (4.2.21)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{xa}}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}} \operatorname{erfc}(\sqrt{xa}) = \\ &= \frac{2e^{ax}}{\sqrt{x}} \Phi(-\sqrt{2xa}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{a=\frac{1}{8}} \frac{2e^{\frac{1}{8}x}}{\sqrt{x}} \Phi\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xz}}{\sqrt{\pi(z+\frac{1}{8})}} dz \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \Phi\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(z+\frac{1}{8})x}}{\sqrt{(z+\frac{1}{8})}} dz. \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy a 4.2.20-ból fel tudjuk írni a 4.2.21-ben látható alakot, a $t = \sqrt{x(z+a)}$ helyettesítést használtuk. Ennek következtében:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x(z+a)}\right)^{-1} x \implies dz = \frac{2\sqrt{x(z+a)}}{x} dt$$

$$z = 0 \implies t = \sqrt{ax}$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \sqrt{x(z+a)} = +\infty.$$

A 4.2.19 egyenlőséget Klaus Schürger bizonyította be Sandmann & Schönbucher (2002) könyvében. Ezt azonban jelen szakdolgozatban a bizonyítás komplexsége miatt nem vezettem le. \square

6. Következmény. A call TVO ára közelíthető a kvadratikus variáció valamely exponenciális függvényei integráljainak lineáris kombinációjával, azaz

$$C_0^{TV}(K) \approx \bar{\sigma}\sqrt{T} \left[\frac{2S_0}{\sqrt{\pi}} I_0^{\frac{1}{2},0} - \frac{S_0 + K}{2\sqrt{\pi}} \Psi_0^{1,\frac{1}{8}} + \sum_{j=0}^{f(n)} \tilde{W}^{n,j}(K) I_0^{j+1,\frac{1}{8}} \right], \quad (4.2.22)$$

ahol

$$I_0^{r,a} := \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_0 \left[e^{\lambda^{r,a}(z)\langle X \rangle_T} \right] dz,$$

$$\Psi_0^{1,\frac{1}{8}} := \int_0^{+\infty} \frac{\mathbb{E}_0 \left[e^{\lambda^{1,\frac{1}{8}}(z)\langle X \rangle_T} \right]}{\sqrt{z + \frac{1}{8}}} dz,$$

$$\lambda^{r,a}(z) := -(z^{\frac{1}{r}} + a)$$

és

$$\tilde{W}^{n,j} := \frac{W^{n,j}(K)}{(j+1)!}.$$

Bizonyítás. Helyettesítsük a 4.2.8 Black–Scholes-formula Taylor-sorfejtését a 4.2.7-ben felírt várható értékbe. A helyettesítés során, hogy a 4.2.8 kifejezés maradéktagját elhagyjuk, hiszen az K -ban $(n+3)$ -ad rendben kisrendű. Az így kapott formulát az alábbiakban jelöltek szerint három részre bontjuk és külön-külön alakítjuk.

$$\begin{aligned} C_0^{TV}(K) &\approx \mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} \left(S_0 - (S_0 + K) \Phi \left(-\frac{\sqrt{\langle X \rangle_T}}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\frac{\langle X \rangle_T}{8}} \sum_{j=0}^{f(n)} \langle X \rangle_T^{-(\frac{1}{2}+j)} W^{n,j}(K) \right) \right] = \quad (4.2.23) \\ &= \underbrace{\mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} S_0 \right]}_I - \underbrace{\mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} (S_0 + K) \Phi \left(-\frac{\sqrt{\langle X \rangle_T}}{2} \right) \right]}_{II} \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} e^{-\frac{\langle X \rangle_T}{8}} \sum_{j=0}^{f(n)} \langle X \rangle_T^{-(\frac{1}{2}+j)} W^{n,j}(K) \right]}_{III}. \end{aligned}$$

Az I. tag átalakítása során a 3. lemmában található 4.2.19 egyenlőséget alkalmazzuk az $a = 0$ és az $r = \frac{1}{2}$ paraméterekkel, kihasználjuk, hogy a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Továbbá a Fubini-tételnek köszönhetően felcserélhetjük az integrált a várható értékkel, ugyanis a tétel alkalmazhatóságának feltételei teljesülnek, vagyis az, hogy az $(\langle X \rangle)_{t>0}$ folyamat alulról korlátos.

$$I. \text{ tag: } \mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} S_0 \right] = \bar{\sigma}\sqrt{T} S_0 \mathbb{E}_0 \left[(\langle X \rangle_T)^{-\frac{1}{2}} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\sigma} \sqrt{T} S_0 \mathbb{E}_0 \left[\frac{1}{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-z^2 \langle X \rangle_T} dz \right] = \\
&= \bar{\sigma} \sqrt{T} S_0 \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_0 \left[e^{-z^2 \langle X \rangle_T} \right] dz = \\
&= \bar{\sigma} \sqrt{T} \frac{2S_0}{\sqrt{\pi}} I_0^{\frac{1}{2}, 0}
\end{aligned}$$

A II. tag alakításánál már a 3. lemma 4.2.18 egyenlőségét használjuk, melynek paraméterei jelenleg az $a = \frac{1}{8}$ és az $r = 1$ értéket veszik fel.

$$\begin{aligned}
II. \text{ tag} &:= \mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma} \sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} \left(-(S_0 + K) \Phi \left(-\frac{\sqrt{\langle X \rangle_T}}{2} \right) \right) \right] = \\
&= -\bar{\sigma} \sqrt{T} (S_0 + K) \mathbb{E}_0 \left[\frac{1}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} \Phi \left(-\frac{\sqrt{\langle X \rangle_T}}{2} \right) \right] = \\
&= -\bar{\sigma} \sqrt{T} (S_0 + K) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathbb{E}_0 \left[e^{-(z+\frac{1}{8}) \langle X \rangle_T} \right]}{\sqrt{z+\frac{1}{8}}} dz = \\
&= -\bar{\sigma} \sqrt{T} \frac{(S_0 + K)}{2\sqrt{\pi}} \Psi_0^{1, \frac{1}{8}}
\end{aligned}$$

Végül a III. tag esetén az I.-hez hasonlóan ismét a 4.2.19 egyenlőséget alkalmazzuk, de most a paraméterek értéke $r = j + 1$, illetve $a = \frac{1}{8}$ lesz. Továbbá kihasználjuk még a Gamma-függvénynek a faktoriális művelethez kapcsolódó tulajdonságát, amely szerint $\Gamma(n) = (n - 1)!$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
III. \text{ tag} &:= \mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma} \sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} e^{-\frac{\langle X \rangle_T}{8}} \sum_{j=0}^{f(n)} \langle X \rangle_T^{-(\frac{1}{2}+j)} W^{n,j}(K) \right] = \\
&= \bar{\sigma} \sqrt{T} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{j=0}^{f(n)} e^{-\frac{1}{8} \langle X \rangle_T} \langle X \rangle_T^{-(1+j)} W^{n,j}(K) \right] = \\
&= \bar{\sigma} \sqrt{T} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{j=0}^{f(n)} W^{n,j}(K) \frac{1}{(j+1)\Gamma(j+1)} e^{-\frac{1}{8} \langle X \rangle_T} \int_0^{+\infty} e^{-z^{\frac{1}{j+1}} \langle X \rangle_T} dz \right] = \\
&= \bar{\sigma} \sqrt{T} \sum_{j=0}^{f(n)} \frac{W^{n,j}(K)}{(j+1)j!} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_0 \left[e^{-\left(\frac{1}{8}+z^{\frac{1}{j+1}}\right) \langle X \rangle_T} \right] dz = \\
&= \bar{\sigma} \sqrt{T} \sum_{j=0}^{f(n)} \tilde{W}^{n,j}(K) I_0^{j+1, \frac{1}{8}}
\end{aligned}$$

Az így kapott kifejezéseket a 4.2.23-ba visszahelyettesítve, és a $\bar{\sigma}\sqrt{T}$ szorzatot, mint közös szorzótényezőt minden tagból kiemelve megkapjuk a call TVO árát a $t = 0$ időpontban. \square

A TVO árát meghatározó formulában szereplő $I_0^{r,a}$ és $\Psi_0^{1,\frac{1}{8}}$ integrálok számos olyan paramterikus modell esetén expliciten is kiszámolhatóak, amelyekben a kvadratikus variáció Laplace-transzformáltja zárt alakban felírható. Erre egy példa, ha a pillanatnyi szórásnégyzetet, σ_t^2 -et CIR-folyamattal (Cox-Ingersoll-Ross) modellezzük.

4.3. Taylor-soros közelítés $t > 0$ esetén

Az előző fejezetben egy olyan formulát vezettünk le, amely $t = 0$ időpontban megadja a call TVO árát. Ebben a fejezetben ezt továbbgondolva más időpontokra is megadjuk az opció árát meghatározó képletet. A változást az jelenti, hogy ahogyan folyamatosan haladunk előre az időben, úgy az opció futamideje alatt kumulálódik a variancia. Ennek következményeként, mint az látni fogjuk néhány helyen megváltozik az árazás kiinduló időponthoz képest, illetve a végső formula is összetettebbé válik, de alapvetően elmondható, hogy maga a megoldás lényegileg hasonló marad. Ez részben a részvényárfolyam és a volatilitás Markov-tulajdonságának köszönhető.

Az előző fejezethez hasonlóan írjuk fel először a TVO árát meghatározó várható értéket. Most azonban a $t > 0$ időpontra vonatkozó árat akarjuk meghatározni, így a formula némileg más lesz:

$$\begin{aligned} \bar{C}^{TV}(S_t, K, \langle X \rangle_t) &= \mathbb{E}_t \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} (S_T - K)^+ \right] = \\ &= \mathbb{E}_t \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\varepsilon_t + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}} C^{BS}(S_t, K, \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

A kifejezésben szereplő $\varepsilon_t := \langle X \rangle_t$ az árazás időpillanatáig, azaz a t -ig realizált kumulált varianciát jelöli. A 4.3.1 várható értékben a Black–Scholes-formulát a kötési árfolyam körüli Taylor-sorfejtésével helyettesítve ugyanis az alábbi törtek jelennek meg:

$$q_1(x) := \frac{\Phi\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon + x}}, \quad (4.3.2)$$

$$q_2(x) := \frac{x^{-(j+\frac{1}{2})}}{\sqrt{\varepsilon + x}}. \quad (4.3.3)$$

A 4.3.2 és 4.3.3-ban látható, hogy a behelyettesítés után kapott törtek számlálójában és nevezőjében az $x = \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t$ tag mellett feltűnik az ε is, aminek következtében már nem kezelhetők ugyanúgy az átalakítások, mint a $t = 0$ esetben. Azonban egy megoldás lehet, ha a $\Phi\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$ és a $x^{-(j+\frac{1}{2})}$ Taylor-sorfejtését tekintjük az $x + \varepsilon$ pont körül.

Ekkor a $q_1(x)$ -nek az $x + \varepsilon$ pont körüli Taylor-sora:

$$q_1(x) = \frac{\Phi\left(-\frac{\sqrt{\varepsilon+x}}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon+x}} + \frac{e^{-\frac{\varepsilon+x}{8}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=0}^m \omega^{i,m}(\varepsilon)(\varepsilon+x)^{-(i+1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+2}), \quad (4.3.4)$$

ahol

$$\omega^{i,m}(\varepsilon) := \sum_{k=i}^m (-1)^{k+1} \gamma^{i,k} \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)!},$$

és $\gamma^{i,k}$ az alábbi rekurzióval adható meg:

$$\gamma^{0,0} = -\frac{1}{4}$$

$$\gamma^{0,k} = \left(-\frac{1}{8}\right) \gamma^{0,k-1}, \quad k = 1, \dots, m$$

$$\gamma^{k,k} = \left(\frac{1}{2} - k\right) \gamma^{k-1,k-1}, \quad k = 1, \dots, m$$

$$\gamma^{i,k} = \left(-\frac{1}{8}\right) \gamma^{i,k-1} + \left(\frac{1}{2} - i\right) \gamma^{i-1,k-1}, \quad i = 1, \dots, m; \quad k = i+1, \dots, m.$$

A rekurzió zárt alakban is felírható:

$$\gamma^{i,k} = \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{8}\right)^{k-i} \binom{k}{i} \prod_{j=1}^i \frac{1-2j}{2} \quad i \geq 1 \text{ és } k \geq i.$$

Ehhez hasonlóan a $q_2(x)$ -nek az $x + \varepsilon$ pont körüli Taylor-sora:

$$q_2(x) = \sum_{k=0}^m \zeta^{k,j}(\varepsilon)(\varepsilon+x)^{-(j+k+1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1}), \quad (4.3.5)$$

ahol

$$\zeta^{0,j}(\varepsilon) = 1, \quad \text{ha } k = 0$$

$$\zeta^{k,j}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(j+i+\frac{1}{2}\right), \quad \text{ha } k \geq 1.$$

A $q_1(x)$ -re és a $q_2(x)$ -re kapott Taylor-sorfejtéseket helyettesítsük be a Black–Scholes-formulának a t időpontbeli Taylor-sorába. Ennek során (csakúgy, mint korábban) a maradéktagokat elhagyjuk, és a 4.3.4, illetve a 4.3.5 sorfejtésben látható módon csak az m -ig indexelt tagokat szummázzuk. A Taylor-soros közelítések behelyettesítése, és némi átala-

kítás után végül megkapjuk a TVO árát a t időpontban meghatározó formulát, amely az 7. következményben látható.

7. Következmény. A call TVO árát meghatározó formula, amikor $t > 0$:

$$C_t^{TV}(K) \approx \bar{\sigma} \sqrt{T} \left(\frac{2S_t}{\sqrt{\pi}} I_t^{\frac{1}{2},0,0} - \frac{S_t + K}{2\sqrt{\pi}} \Psi_t^{1,\frac{1}{8}} + \sum_{j=0}^{m+f(n)} \hat{W}_t^{n,m,j}(K, \langle X \rangle_t) I_t^{j+1,\frac{1}{8},0} \right), \quad (4.3.6)$$

ahol

$$I_t^{r,a,b} = \int_0^{+\infty} e^{-\left(z^{\frac{1}{r}} + b\right) \langle X \rangle_t} \mathbb{E}_t \left[e^{\lambda^{r,a}(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)} \right] dz, \quad (4.3.7)$$

$$\Psi_t^{1,a} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(z+a) \langle X \rangle_t}}{\sqrt{z+a}} \mathbb{E}_t \left[e^{\lambda^{1,a}(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)} \right] dz, \quad (4.3.8)$$

$$\lambda^{r,a}(z) := - \left(z^{\frac{1}{r}} + a \right), \quad (4.3.9)$$

valamint a lineáris kombinációban a súlyok, ahol χ az indikátorfüggvényt jelöli:

$$\begin{aligned} \hat{W}_t^{n,m,j}(K, \varepsilon) := & \frac{1}{(j+1)!} \left(-\frac{S_t + K}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon}{8}} \omega^{j,m}(\varepsilon) + \right. \\ & + \sum_{k=0}^{\min(j,f(n))} W^{n,k}(K) \zeta^{j-k,k}(\varepsilon) \chi_{\{j \leq m\}} + \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\min(m,f(n)-j+m)} W^{n,j-m+k}(K) \zeta^{m-k,j-m+k}(\varepsilon) \chi_{\{j > m\}} \right). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Határozzuk meg először az alábbi hányadost:

$$\tilde{C}^{BS}(S, K, x, \varepsilon) := \frac{C^{BS}(S, K, x)}{\sqrt{\varepsilon + x}}$$

Ehhez a kifejezés jobb oldalán helyettesítsük 4.2.8 sorfejtést a $C^{BS}(S, K, x)$ helyére, majd alkalmazzuk a $q_1(x)$, valamint a $q_2(x)$ Taylor-soros felírását.

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{BS}(S, K, x, \varepsilon) \approx & \frac{S}{\sqrt{\varepsilon + x}} - \left[\frac{(S+K)}{\sqrt{\varepsilon + x}} \Phi \left(-\frac{\sqrt{\varepsilon + x}}{2} \right) + \right. \\ & \left. + (S+K) e^{-\frac{(x+\varepsilon)}{8}} \sum_{j=0}^m \omega^{j,m}(\varepsilon + x)^{-(1+j)} \right] + \\ & + \left[e^{-\frac{x}{8}} \sum_{j=0}^{f(n)} W^{n,j}(K) \sum_{k=0}^m \zeta^{k,j}(\varepsilon + x)^{-(1+k+j)} \right]. \quad (4.3.10) \end{aligned}$$

Az egyenletben szereplő szumma kiterjesztésével, valamint minden elemből a $(\varepsilon + x)^{-(1+j)}$ tényező kiemelésével, néhány algebrai átalakítás után a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{BS}(S, K, x, \varepsilon) &\approx \frac{S}{\sqrt{\varepsilon + x}} - \frac{(S + K)}{\sqrt{\varepsilon + x}} \Phi\left(-\frac{\sqrt{\varepsilon + x}}{2}\right) - \\ &- (S + K)e^{-\frac{x}{8}} \sum_{j=0}^m (j + 1)! \hat{W}^{n,m,j}(K, \varepsilon) (\varepsilon + x)^{-(1+j)}. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

A következő lépésként helyettesítsük 4.3.11-at a TVO árát a t időpontban megadó 4.3.1 várható értékbe.

$$\begin{aligned} \bar{C}^{TV}(S_t, K, \langle X \rangle_t) &= \mathbb{E}_t \left[\bar{\sigma} \sqrt{T} \tilde{C}^{BS}(S, K, \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t, \varepsilon) \right] \approx \\ &\approx \mathbb{E}_t \left[\bar{\sigma} \sqrt{T} \left(\frac{S}{\sqrt{\varepsilon + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}} - \right. \right. \\ &- \frac{(S + K)}{\sqrt{\varepsilon + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}} \Phi\left(-\frac{\sqrt{\varepsilon + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}}{2}\right) - \\ &\left. \left. - (S + K)e^{-\frac{\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}{8}} \sum_{j=0}^m (j + 1)! \hat{W}^{n,m,j}(K, \varepsilon) (\varepsilon + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)^{-(1+j)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Az átalakításoknak köszönhetően a jobb oldalon szereplő kifejezés olyan alakban került felírásra, amelyre már használni tudjuk a 3. lemma 4.2.18 és 4.2.19 egyenleteit. Továbbá a várható érték és az integrál felcserélésére alkalmazhatjuk a Fubini-tételt is. A szükséges átalakításokat a 6. következmény bizonyításához hasonlóan kell elvégezni, így azok itt nem kerülnek külön kifejtésre. \square

4.4. Árazás Laplace-transzformált segítségével

A TVO árának meghatározására egy másik opciót kínál egy Laplace-transzformálton alapuló megközelítés. Ehhez vegyük a put opció kifizetéseinek a kötési árfolyam logaritmus szerinti Laplace-transzformáltját.

Írjuk fel először a put TVO értékét, amelynél a kifizetési függvényben az opció kötési árfolyamát fejezzük ki a logaritmusának segítségével, azaz $k := \ln(K)$:

$$\bar{P}_t(S_t, e^k, \langle X \rangle_t) = \mathbb{E}_t \left[\frac{\bar{\sigma} \sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} (e^k - S_T)^+ \right] := P_t(k).$$

Mindez azért kedvező, mert az opció árának k szerinti Laplace-transzformáltjával kiküszöbölhetjük a TVO kifizetésében megjelenő maximum függvényt. Ehhez Schachermayer & Teichmann (2008) cikkéből merített ötlet alapján az integrálás határait megfelelően megválasztva úgy alakítható a kifejezés, hogy abban az említett maximum függvény már ne jelenjen meg. TVO árazási problémája egy lejáratkori árfolyam és egy kvadratikus variációra szóló összetett követelés. A Laplace-transzformációnak köszönhetően azonban egyszerűsödik az árazás, hiszen az már csak a kvadratikus variációra szóló követeléssé válik. A $P_t(k)$ Laplace-transzformáltja minden olyan komplex α -ra, amelyre $Re(\alpha) > 1$:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_t(\alpha) &:= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha k} P_t(k) dk \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha k} \mathbb{E}_t \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} (e^k - S_T)^+ \right] dk = \\
&= \bar{\sigma}\sqrt{T} \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha k} (e^k - S_T)^+ dk \right] = \\
&= \bar{\sigma}\sqrt{T} \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{\sqrt{\langle X \rangle_T}} \int_{\ln(S_T)}^{+\infty} (e^{k(1-\alpha)} - e^{-\alpha k} S_T) dk \right] = \\
&= \bar{\sigma}\sqrt{T} S_t^{1-\alpha} \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}} S_t^{-(1-\alpha)} \left[\frac{e^{k(1-\alpha)} - e^{-\alpha k} S_T}{1-\alpha} \right]_{\ln(S_T)}^{+\infty} \right] = \\
&= \bar{\sigma}\sqrt{T} S_t^{1-\alpha} \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}} e^{X_t^{-(1-\alpha)}} \left(-\frac{e^{\ln(S_T)(1-\alpha)}}{1-\alpha} - \frac{e^{-\alpha \ln(S_T)} S_T}{\alpha} \right) \right] = \\
&= \bar{\sigma}\sqrt{T} S_t^{1-\alpha} \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}} e^{-(1-\alpha)X_t} \frac{\alpha e^{(1-\alpha)X_T} + (1-\alpha)e^{-\alpha X_T} e^{X_T}}{\alpha(\alpha-1)} \right] = \\
&= \bar{\sigma}\sqrt{T} S_t^{1-\alpha} \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}} \frac{e^{(1-\alpha)(X_T - X_t)}}{\alpha(\alpha-1)} \right]. \tag{4.4.1}
\end{aligned}$$

Ekkor használhatjuk a 3. lemmában felírt 4.2.19 egyenlőséget ($r = \frac{1}{2}$ paraméterrel), aminek köszönhetően a 4.4.1 formula nevezetjében szereplő kifejezést egy integrál alakra írhatjuk át:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2(\varepsilon + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)} dz.$$

A következő lépésben a Fubini-tételt, illetve Carr & Lee (2008) eredményét használjuk fel. A szerzőpáros megmutatta, hogy a kvadratikus variáció exponenciális függvénye-

inek a várható értéke egyenlő az alaptermék lejáratkori értékének valamely függvényének a várható értékével. Ennek köszönhetően az útvonalfüggő követelések egy speciális osztályának árazása egy velük ekvivalens európai típusú opcióárazási problémává alakítható. A formulát a szerzőpáros a volatilitást és az árfolyamot meghajtó Wiener-folyamatok függetlenségének feltételezése mellett bizonyította. Ezáltal jelen esetben is alkalmazhatjuk az eredményüket, hiszen ezt a függetlenséget az árazás során mindvégig feltételeztük. Carr & Lee (2008) formulája tehát egy tetszőleges λ komplex számra:

$$\mathbb{E}_t \left[e^{\lambda(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)} \right] = \mathbb{E}_t \left[e^{(X_T - X_t) p(\lambda)} \right] = \mathbb{E}_t \left(\frac{S_T}{S_t} \right)^{p(\lambda)}, \quad (4.4.2)$$

ahol

$$p(\lambda) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2\lambda} \implies \lambda = \frac{p^2 - p}{2}. \quad (4.4.3)$$

Ennek következtében a $\hat{P}_t(\alpha)$ tehát:

$$\begin{aligned} \hat{P}_t(\alpha) &= \bar{\sigma} \sqrt{T} S_t^{1-\alpha} \mathbb{E}_t \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{(1-\alpha)(X_T - X_t)}}{\alpha(\alpha-1)} \int_0^{+\infty} e^{-z^2(\varepsilon + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)} dz \right] = \\ &= 2\bar{\sigma} \sqrt{\frac{T}{\pi}} S_t^{1-\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-z^2 \langle X \rangle_t} \mathbb{E}_t \left[\frac{e^{-z^2(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t) + (1-\alpha)(X_T - X_t)}}{\alpha(\alpha-1)} \right] dz = \\ &= 2\bar{\sigma} \sqrt{\frac{T}{\pi}} S_t^{1-\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z^2 \langle X \rangle_t} \mathbb{E}_t \left[e^{-z^2(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)} \right]}{\alpha(\alpha-1)} dz = \\ &= 2\bar{\sigma} \sqrt{\frac{T}{\pi}} S_t^{1-\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z^2 \langle X \rangle_t} \mathbb{E}_t \left[e^{\lambda_{z,a}(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)} \right]}{\alpha(\alpha-1)} dz, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

ahol

$$\lambda_{z,a} = - \left(z^2 + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \right).$$

Ez utóbbi formában való felírással a Laplace-transzformált számos sztochasztikus modell esetén már expliciten is megadható.

A Laplace-transzformáltra eredetileg a TVO árának meghatározása miatt volt szükségünk. Így, hogy ezt megkapjuk, a 4.4.4 kifejezés numerikus integrálása szükséges, aminek következtében visszakapjuk a TVO árat megadó $P_t(k)$ függvényt. Mindez az alábbi kettős integrállal egyenlő:

$$P_t(k) = \frac{4e^{ak} \bar{\sigma} \sqrt{T}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-z^2 \langle X \rangle_t} \operatorname{Re} \left(\frac{S_t^{1-\alpha-iu} \mathbb{E}_t \left[e^{\lambda_{z,a+iu}(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)} \right]}{(a+iu)(a+iu-1)} \right) \cos(uk) dz du.$$

A numerikus integrálás például az Abate & Whitt (1995) által kidolgozott módszerrel hajtható végre.

4.5. Robusztus árazás

A modellfüggőség sokszor okoz problémát az opciók árazásánál, illetve fedezésénél. Vannak olyan opciók, amelyeknek az ára másképp alakul ha lokális volatilitás modellt vagy éppen sztochasztikus volatilitás modellt választunk az árazáshoz. Sőt, az útvonalfüggő opciók esetén még akkor is eltérő eredményeket kaphatunk, ha ugyanahhoz a volatilitás felülethez kalibrált két különböző, de mindkét esetben a sztochasztikus volatilitás modellek családjába tartozó modellel kísérjük meg az árazást.

A problémát részben Breeden & Litzenberger (1978) munkássága oldotta meg, akik európai típusú követelésekre mutattak be modellfüggetlen árazást. Ennek megvalósításához megfelelő „simaságú” második deriváltakra van szükség, amelyet a piacon kereskedett call és put opcióknak egy portfóliójával lehet kialakítani. Ez a módszer azonban nem alkalmazható ilyen formában a volatilitás derivatívák árazására, mivel azok általában nem kifejezhetőek egyszerű európai típusú opciók kombinációjaként. A probléma azonban bizonyos feltételek teljesülése mellett megoldható, amennyiben a 4.4 alfejezetben már bemutatott, Carr & Lee (2008) nevéhez fűződő formulát hívjuk segítségül.

Az eddigiekben a TVO árát olyan integrálok lineáris kombinációival közelítettük, amelyek 4.4.2 alakú kifejezéseket tartalmaztak. Most a Breeden–Litzenberger-formulával mutatom meg, hogyan lehetséges a TVO modellfüggetlen árazását megadni. Ehhez vegyünk egy olyan $f(S)$ kifizetésfüggvényt, amely kétszer differenciálható, valamint legyen η egy tetszőleges konstans. Ekkor a Breeden–Litzenberger-formula:

$$f(S) = f(\eta) + f'(\eta)[S - \eta] + \int_{\eta}^{+\infty} f''(x)(S - x)^+ dx + \int_0^{\eta} f''(x)(x - S)^+ dx. \quad (4.5.1)$$

Ennek levezetését megkapjuk, ha az S és az η közötti megváltozást vesszük, majd elvégezzük a megfelelő átalakításokat.

$$\begin{aligned} f(S) - f(\eta) &= \int_{\eta}^S f'(x) dx = \int_{\eta}^S \left(f'(\eta) + \int_{\eta}^x f''(u) du \right) dx = \\ &= f'(\eta)(S - \eta) + \int_{\eta}^S \int_{\eta}^x f''(u) du dx \end{aligned}$$

Ekkor két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az S és az η hogyan viszonyul egymáshoz.

1. eset : $\eta \leq S \implies \eta \leq u \leq x \leq S$

$$\begin{aligned} f(S) - f(\eta) &= f'(\eta)(S - \eta) + \int_{\eta}^S \int_u^S f''(u) dx du = \\ &= f'(\eta)(S - \eta) + \int_{\eta}^S f''(u)(S - u) du = \\ &= f'(\eta)(S - \eta) + \int_{\eta}^{+\infty} f''(u)(S - u)^+ du \end{aligned}$$

2. eset : $\eta > S \implies S \leq x \leq u \leq \eta$

$$\begin{aligned} f(S) - f(\eta) &= f'(\eta)(S - \eta) + \int_S^{\eta} \int_S^u f''(u) dx du = \\ &= f'(\eta)(S - \eta) + \int_S^{\eta} f''(u)(u - S) du = \\ &= f'(\eta)(S - \eta) + \int_0^{\eta} f''(u)(u - S)^+ du \end{aligned}$$

A két esetet megvizsgálva láthatjuk, hogy a 4.5.1 formula minden η esetén teljesül.

Ezután nézzük a 4.5.1-nek a t -ben vett feltételes várható értékét. Ekkor a 4.5.2 egyenletben látható, hogy azért éppen a 4.5.1 alakban írtuk fel a két pont közötti megváltozást, mert így az integrandusban szereplő egyes tényezők t -beli feltételes várható értéke pont az x kötési árfolyamú vanilla call, illetve put opciók árát adja meg. (A diszkontálás az $r = 0$ kamatláb feltételezése miatt marad el.)

$$\mathbb{E}_t[f(S)] = f(\eta) + f'(\eta)[S - \eta] + \int_{\eta}^{+\infty} f''(x) C_t^M(S_t, x) dx + \int_0^{\eta} f''(x) P_t^M(S_t, x) dx, \quad (4.5.2)$$

ahol $C_t^M(S_t, x)$ és $P_t^M(S_t, x)$ az x kötési árfolyamú vanilla call, illetve put opciók árát jelöli.

4.5.1. Robusztus árazás Taylor-soros approximációval

Ahhoz, hogy a 4.5.2 formulát a TVO árazásához fel tudjuk használni, egy olyan $f(S)$ függvényre van szükségünk, amelynek a t időpontbeli feltételes várható értéke megegyezik a TVO árával. Korábban a Taylor-sor segítségével történő árazásnál, a 4.3.6 felírásban megmutattuk, hogy az opció ára az $I_t^{r,a,b}$ és a $\Psi_t^{1,a}$ integrálok lineáris kombinációjával közelíthető. A modellfüggetlen árazás megvalósításához elegendő ezekre használnia a Breeden–Litzenberger-formulát.

Ennek megvalósításához első lépésben a Carr–Lee-formulát alkalmazzuk, amelynek segítségével az az $I_t^{r,a,b}$ és a $\Psi_t^{1,a}$ felírásában szereplő, útvonalfüggő kvadratikus variációk különbségét kiküszöbölhetjük. A formula használata után már csak az alaptermék árfolyamának lejáratkori értéke fog szerepelni a várható értékben

$$\begin{aligned} I_t^{r,a,b} &= \int_0^{+\infty} e^{-(z^{\frac{1}{r}}+b)\langle X \rangle_t} \mathbb{E}_t \left[e^{\lambda^{r,a}(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)} \right] dz = \\ &= \mathbb{E}_t \left[\int_0^{+\infty} e^{-(z^{\frac{1}{r}}+b)\langle X \rangle_t} \operatorname{Re} \left(\frac{S_T}{S_t} \right)^{p^{r,a}(z)} dz \right] \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

A képletben megjelenő $p^{r,a}(z)$ a 4.3.9 és a 4.4.3 segítségével az következőként adható meg:

$$p^{r,a}(z) := \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2z^{\frac{1}{r}} - 2a}.$$

Az $I_t^{r,a,b}$ -vel analóg módon a $\Psi_t^{1,a}$ esetén is alkalmazzuk a Carr–Lee-formulát:

$$\begin{aligned} \Psi_t^{1,a} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(z+a)\langle X \rangle_t}}{\sqrt{z+a}} \mathbb{E}_t \left[e^{\lambda^{1,a}(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)} \right] dz = \\ &= \mathbb{E}_t \left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(z+a)\langle X \rangle_t}}{\sqrt{z+a}} \operatorname{Re} \left(\frac{S_T}{S_t} \right)^{p^{1,a}(z)} dz \right]. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Definiáljuk az $\tilde{I}_t^{r,a,b}(S)$ -et és a $\tilde{\Psi}_t^{1,a}(S)$ -et a 4.5.3, illetve a 4.5.4 kifejezésekből a várható érték elhagyásával. Az így kapott alakot pedig értelmezzük úgy, mint egy-egy speciális $I_t^{r,a,b}$ és $\Psi_t^{1,a}$ termék kifizetésfüggvényét.⁴

⁴Ez természetesen nem (feltétlenül) egy ténylegesen piacon kereskedett derivatíva kifizetésfüggvénye.

$$\tilde{I}_t^{r,a,b}(S) := \int_0^{+\infty} e^{-(z^{\frac{1}{r}}+b)\langle X \rangle_t} \operatorname{Re} \left(\frac{S_T}{S_t} \right)^{p^{r,a}(z)} dz \quad (4.5.5)$$

$$\tilde{\Psi}_t^{1,a}(S) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(z+a)\langle X \rangle_t}}{\sqrt{z+a}} \operatorname{Re} \left(\frac{S_T}{S_t} \right)^{p^{1,a}(z)} dz. \quad (4.5.6)$$

Az eredeti cél az volt, hogy a Breeden–Litzenberger-formula alkalmazásával egy modelfüggetlen értékelést adjunk meg. Ehhez tekintsünk az $\tilde{I}_t^{r,a,b}(S)$ -re és a $\tilde{\Psi}_t^{1,a}(S)$ -re úgy, mint a 4.5.1-ben szereplő $f(S)$ kifizetésfüggvényre. Mindez lehetséges, hiszen az $\tilde{I}_t^{r,a,b}(S)$ és a $\tilde{\Psi}_t^{1,a}(S)$ S szerinti második deriváltja $t > 0$ esetén jól definiált, mivel $\langle X \rangle_t$ szigorúan pozitív. Továbbá a kifejezések t -ben vett feltételes várható értéke pontosan a $I_t^{r,a,b}$ és a $\Psi_t^{1,a}$ lesz.

Alkalmazzuk tehát az $\tilde{I}_t^{r,a,b}(S)$ és a $\tilde{\Psi}_t^{1,a}(S)$ függvényekre a 4.5.2 formulát $\eta = S_t$ helyettesítéssel, amellyel éppen az ITM put és call opciók jelennek meg a felírásban. Ezután az eredményt a 4.3.6-ba helyettesítve megkapjuk a TVO árát. Ez már egy modelfüggetlen értékelés, amely a piacon kereskedett call és put opciókkal fejezi ki az opcióárat.

A módszer egyetlen hátránya, hogy $t = 0$ esetén nem alkalmazható. Ekkor ugyanis a 4.5.5 és a 4.5.6 kifejezésben szereplő integrálok nem végesek, és nem használható a Fubini-tétel sem az integrálok felcserélésénél. Egy nem túl elegáns ötlet esetleg megoldást jelenthet a problémára. Ehhez definiáljuk újra a TVO-t egy nagyon kicsi c konstans segítségével a 4.5.7 alakban, aminek következtében az integrálok már a kiinduló időpontban is végesek lesznek, és $t = 0$ -ban megadható a modelfüggetlen értékelés.

$$\bar{C}_0^{TV}(S_0, K, 0) = \mathbb{E}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\sqrt{c + \langle X \rangle_T}} (S_T - K)^+ \right] \quad (4.5.7)$$

4.5.2. Robusztus árazás Laplace-transzformált segítségével

A Taylor-soros approximáció után vizsgáljuk most meg a Laplace-transzformált esetén is a robusztus árazás lehetőségét. Ekkor az előzőekhez hasonlóan a Laplace-transzformációval kapott formulára szintén alkalmazhatjuk a 4.4.2 Carr–Lee-formulát. Ennek következtében a put TVO értéke már felírható az alaptermékhez tartozó árfolyam lejáratkori értékének a segítségével.

$$P_t(k) = \frac{4e^{ak}\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \mathbb{E}_t \left[\int_0^{+\infty} e^{-z^2\langle X \rangle_t} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{S_t^{1-\alpha-iu} \left(\frac{S_T}{S_t} \right)^{p_{z,a}^\pm}}{(a+iu)(a+iu-1)} \right) \cos(uk) du dz \right] \quad (4.5.8)$$

$$\alpha := a + iu$$

$$p_{z,a}^\pm := \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2z^2 - \alpha(1-\alpha)}$$

Továbbá itt is egy olyan kifizetésfüggvényt definiálunk, amelyet a 4.5.8-ből a várható érték elhagyásával kapunk.

$$f(S) = \frac{4e^{aS}\bar{\sigma}\sqrt{T}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2\langle X \rangle_t} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{S_t^{1-\alpha-iu} \left(\frac{S_T}{S_t} \right)^{p_{z,a}^\pm}}{(a+iu)(a+iu-1)} \right) \cos(uS) du dz$$

Azonban ekkor az $f(S)$ függvény második deriváltja nem létezik, így nem használható a Breeden–Litzenberger-formula sem, hiszen abban megjelentek a második deriváltak. Kijelenthetjük tehát, hogy a Laplace-transzformáció esetén nem tudunk modelfüggetlen árazást levezetni.

5. fejezet

Összefoglalás

A szakdolgozat első részében széleskörű leírást adtam a volatilitásról, illetve annak a pénzügyekben megjelenő különböző típusairól. Ennek során számos olyan fogalmat, valamint piaci jelenséget sorakoztattam fel, amelyek a későbbi fejezetekben hasznos előismerettként szolgáltak.

Az ezt követő szakaszban először a korábban már ismertetett volatilitás típusok szintetikus előállítását mutattam be. A volatilitás és a variancia derivatívák megjelenése előtt ugyanis csak az így előállított pozíciókkal tudtak a befektetők a volatilitással kereskedni. Az így kialakított struktúrák értéke azonban az alaptermékek árfolyamától is függ, nem csupán a varianciától vagy éppen a volatilitástól. A befektetők tisztán volatilitásra való fogadásának igénye miatt születtek meg a továbbiakban bemutatott variancia, illetve volatilitás derivatívák. Ez a folyamat azonban nem ért itt véget, az évek során számos új instrumentum jelent meg a pénzügyi piacokon, amelyekből néhány jelentősebb a működését részletesebben is kifejtettem. A VIX indexet tanulmányozva pedig láthattuk, hogy a régebbi eszközök népszerűsége is felfelé ível.

Ezután a target volatility opció (TVO) árazásának problémakörét vizsgáltam meg kétféle módszerrel, amelynek során először a Black–Scholes-modell keretei között tekintetem a feladatot. Az ATM opció esetén az árazás egyszerűnek bizonyult, ugyanis ekkor Bachelier híres approximációs formuláját felhasználva az opció ára kifejezhető egy olyan vele ekvivalens vanilla opció Black–Scholes-árának segítségével, amelynek implicit volatilitása éppen a TVO célvolatilitás paraméterével egyezik meg. Amennyiben más kötési árfolyamokra is ki szeretnénk terjeszteni a feladatot, az árazás bonyolultabbá válik. Ekkor egyrészt a Taylor-soros approximáció vezetett megoldásra, amellyel a TVO árának egy közelítését kaphatjuk meg. A sorfejtést először a $t = 0$ időpontban tekintetem, amivel az opció ára csak a kiinduláskor adható meg, de ezután a $t = 0$ -hoz hasonló módon leveztettem $t > 0$ időpontokra is az formulát. Másrészt a Laplace-transzformált segítségével

fejttem ki egy alternatív árazási formulát, amely szintén minden $t \geq 0$ esetén teljesült.

Az útvonalfüggő opciók árazásánál az eredményt nagymértékben befolyásolhatja a modellválasztás, ami nem szerencsés jelenség. Így megpróbálkoztam az imént ismertetett kétféle árazási módszert illetően egy-egy modelfüggetlen formula levezetésére. Ezt csak a Taylor-soros közelítés esetén sikerült megvalósítani, a Laplace-transzformálttal történő árazás során sajnos nem lehet modelfüggetlen értékelést megadni.

A szakdolgozatban a TVO árazásánál azzal a feltételezéssel éltünk, hogy az alapterméket és a volatilitásának a folyamatát meghajtó két Brown-mozgás független egymástól. Ez azonban egy túl erős feltétel, amely a piacon többnyire nem teljesül, így érdemes ebben az irányban további vizsgálódásokat folytatni. Azon tanulmány óta, amelyre a szakdolgozatban levezetett árazás is épül, született néhány cikk, amely már nem feltételezi a Wiener-folyamatok függetlenségét. Ezekben látható, hogy a függetlenség feltételének az elhagyása következtében jóval komplexebb matematikai eszköztár ismerete szükséges az árazás megvalósításához.

Irodalomjegyzék

- ABATE, JOSEPH, & WHITT, WARD. 1995. Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions. *ORSA Journal on Computing*, **7**(1), 36–43. DOI: 10.1287/ijoc.7.1.36.
- ALOS, ELISA, CHATTERJEE, RUPAK, TUDOR, SEBASTIAN, & WANG, TAI-HO. 2018. *Target Volatility Option Pricing in Lognormal Fractional SABR Model*. Letöltés ideje: 2018. március 19. URL: <https://arxiv.org/pdf/1801.08215.pdf>.
- BENNETT, COLIN, & GIL, MIGUEL A. 2012. Measuring Historical Volatility. *Santander Equity Derivatives Report*. Letöltés ideje: 2018. április 2. URL: http://www.todaysgroep.nl/media/236846/measuring_historic_volatility.pdf.
- BLACK, FISCHER, & SCHOLES, MYRON. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**(3), 637–654. Letöltés ideje: 2018. április 10. URL: <https://www.journals.uchicago.edu/doi/pdfplus/10.1086/260062>.
- BODIE, ZVI, KANE, ALEX, & MARCUS, ALAN J. 2014. *Investments, 10th Edition*. 10th edn. McGraw-Hill Education. ISBN: 978-0-07-786167-4.
- BOSSU, SEBASTIEN, STRASSER, EVA, & GUICHARD, REGIS. 2005. *Just What You Need to Know About Variance Swaps*. Research Report.
- BREEDEN, DOUGLAS T., & LITZENBERGER, ROBERT H. 1978. Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *The Journal of Business*, **51**(4), 621–651. Letöltés ideje: 2017. december 8. URL: <http://www.jstor.org/stable/2352653>.
- BROADIE, MARK, & JAIN, ASHISH. 2008. Pricing and Hedging Volatility Derivatives. *Journal of Derivatives*, **15**(3), 7–24. Letöltés ideje: 2018. február 17. [http://quantlabs.net/academy/download/free_quant_institutional_books_/\[Journal](http://quantlabs.net/academy/download/free_quant_institutional_books_/[Journal)
- CANINA, LINDA, & FIGLEWSKI, STEPHEN. 1993. The Informational Content of Implied Volatility. *The Review of Financial Studies*, **6**(3), 659–681. DOI: 10.1093/rfs/5.3.659.

- CARR, PETER, & LEE, ROGER. 2008. *Robust Replication of Volatility Derivatives*. Working Paper 2008-3. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences. Master of Science Program, Mathematics in Finance Working Paper Series. Letöltés ideje: 2017. december 8. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.378.189&rep=rep1&type=pdf>.
- CARR, PETER, & LEE, ROGER. 2009. Volatility Derivatives. *Annual Review of Financial Economics*, **1**(1), 319–339. DOI: 10.1146/annurev.financial.050808.114304.
- CARR, PETER, & WU, LIUREN. 2003. The Finite Moment Log Stable Process and Option Pricing. *The Journal of Finance*, **58**(2), 753–777. DOI: 10.1111/1540-6261.00544.
- CHICAGO BOARD OPTIONS EXCHANGE. 2009. *The CBOE Volatility Index – VIX*. White paper. Chicago Board Options Exchange. Letöltés ideje: 2017. december 8. URL: <https://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf>.
- CHICAGO BOARD OPTIONS EXCHANGE, RESEARCH DEPARTMENT. 2009. *VIX - Fact & Fiction*. Research report 2. Letöltés ideje: 2017. december 8. URL: http://www.cboe.com/publish/researchnotes/research_notes_5-1-09_issue_2.pdf.
- DEMETERFI, KRESIMIR, DERMAN, EMANUEL, KAMAL, MICHAEL, & ZOU, JOSEPH. 1999. More Than You Ever Wanted to Know About Volatility Swaps. *The Journal of Derivatives, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes*, **41**. Letöltés ideje: 2018. április 3. URL: <http://www.emanuelderman.com/writing/entry/more-than-you-ever-wanted-to-know-about-volatility-swaps-the-journal-of-der>.
- DERMAN, EMANUEL, KANI, IRAJ, & ZOU, JOSEPH Z. 1996. The Local Volatility Surface: Unlocking the Information in Index Option Prices. *Financial Analysts Journal*, **52**(4), 25–36. DOI: 10.2469/faj.v52.n4.2008.
- DERMAN, EMANUEL, KAMAL, MICHAEL, KANI, IRAJ, MCCLURE, JOHN, PIRASTEH, CYRUS, & ZOU, JOSEPH Z. 1998. Investing in Volatility. *Futures and Options World*. Letöltés ideje: 2018. március 18. URL: http://www.emanuelderman.com/media/fow-investing_in_volatility.pdf.
- DI GRAZIANO, GIUSEPPE, & TORRICELLI, LORENZO. 2012. Target Volatility Option Pricing. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **15**(01), 1250005.
- DUMAS, BERNARD, FLEMING, JEFF, & WHALEY, ROBERT E. 1998. Implied Volatility Functions: Empirical Tests. *The Journal of Finance*, **53**(6), 2059–2106. DOI: 10.1111/0022-1082.00083.

- ESTRELLA, ARTURO. 1995. *Taylor, Black and Scholes: Series Approximations and Risk Management Pitfalls*. Research Paper 9501. Federal Reserve Bank of New York. Letöltés ideje: 2017. december 8. URL: https://www.newyorkfed.org/medialibrary/media/research/staff_reports/research_papers/9501.html.
- GARMAN, MARK B, & KLASS, MICHAEL J. 1980. On the estimation of security price volatilities from historical data. *The Journal of Business*, **53**(1), 67–78. Letöltés ideje: 2018. május 5. URL: <http://www.jstor.org/stable/2352358>.
- GREENE, WILLIAM H. 2012. *Econometric Analysis*. 7th edn. Pearson Education Limited. ISBN 13: 978-0-273-75356-8.
- HAUG, ESPEN GAARDER. 2007. *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. 2nd edn. McGraw-Hill Education. ISBN: 978-0071389976.
- HULL, JOHN C. 2009. *Options, Futures and Other Derivatives*. 7th edn. Pearson Education International. ISBN: 978-0-13-500994-9.
- JIANG, GEORGE J, & TIAN, YISONG S. 2005. The Model-free Implied Volatility and its Information Content. *The Review of Financial Studies*, **18**(4), 1305–1342. DOI: 10.1093/rfs/hhi027.
- KAMAL, MICHAEL, & GATHERAL, JIM. 2010. Implied Volatility Surface. *Encyclopedia of Quantitative Finance*. DOI: 10.1002/9780470061602.eqf08004.
- MEDVEGYEV, PÉTER. 2014. *Pénzügyi Matematika*. Typotex Kiadó. ISBN: 978 963 279 255 2.
- MORNINGSTAR INC. 2016. *Morningstar Target Volatility Methodology Paper*. techreport. Morningstar Inc. Letöltés ideje: 2018. április 3. URL: <https://corporate.morningstar.com/US/documents/Indexes/MorningstarTargetVolatility.pdf>.
- MORRISON, S, & TADROWSKI, L. 2013. Guarantees and Target Volatility Funds. *Moody's Analytics B&H Research Series*. Letöltés ideje: 2017. december 8. URL: http://www.barrhibb.com/documents/downloads/Guarantees_and_target_volatility_funds.pdf.
- REISWICH, DIMITRI, & UWE, WYSTUP. 2012. FX volatility smile construction. *Wilmott*, **2012**(60), 58–69. DOI: 10.1002/wilm.10132.
- SANDMANN, KLAUS, & SCHÖNBUCHER, PHILIPP J. 2002. *Advances in Finance and Stochastics: Essays in Honour of Dieter Sondermann*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH. ISBN: 978-3-662-04790-3.

- SCHACHERMAYER, WALTER, & TEICHMANN, JOSEF. 2008. How Close Are the Option Pricing Formulas of Bachelier and Black–Merton–Scholes? *Mathematical Finance*, **18**(1), 155–170.
- SEPP, ARTUR. 2008. Pricing Options on Realized Variance in the Heston Model with Jumps in Returns and Volatility. *Journal of Computational Finance*, **11**(4), 33–70. Letöltés ideje: 201. február 18. URL: <https://ssrn.com/abstract=1408005>.
- TALEB, NASSIM. 1997. *Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options*. 2nd edn. John Wiley & Sons. ISBN: 978-0-471-15280-4.
- WANG, XINGCHUN, & WANG, YONGJIN. 2014. Variance-optimal Hedging for Target Volatility Options. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **10**, 207–218.
- WILMOTT, PAUL. 2009. *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*. 2nd edn. John Wiley and Sons Limited. ISBN: 978-0-470-74875-6.