

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar



Nagy sokkok hatása pénzügyi és gazdasági rendszerekben

Készítette: Ungár Anikó

Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak

Kvantitatív pénzügyek szakirány

2019

Szakszemináriumvezető: Bihary Zsolt

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Bihary Zsoltnak a témajavaslatért, számos hasznos tanácsáért és a sok eredményes konzultációért. Szakértelme és javaslatai rendkívül nagy segítséget nyújtottak a szakdolgozat megírása során.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Felhasznált játékelméleti fogalmak	3
3. Evolúciós pénzügyek	7
3.1. Általános jellemzők	7
3.2. Evolúciós pénzügyi modellek	9
4. Nagy sokkok hatása - Morris és Yildiz modelljének bemutatása	17
4.1. A játék leírása	17
4.2. Az önbesorolási függvény	20
4.3. Egy- és többlépéses játék	24
4.4. Többségi viselkedés vizsgálata	27
4.5. Összegzés, eredmények és továbblépés	28
5. A modell további vizsgálata	30
5.1. A paraméterek megválasztásának szempontjai	30
5.2. A játék ábrázolása	32

6. Szimuláció	36
6.1. Versengő stratégiák	36
6.2. Összehasonlítás és az eredmények értékelése	38
7. Összegzés	56
Függelék	
A. R kódok	60

Ábrák jegyzéke

4.1. Különböző szabadsági fokú t-eloszlások önbesorolási függvényei	24
4.2. Példa a normalizált kifizetés extrém egyensúlyi értékeire	26
5.1. 1 és 3 szabadsági fokú t-eloszlás sűrűségfüggvényeinek összehasonlítása	31
5.2. A játék ábrázolása: generált közös sokkok	33
5.3. A játék ábrázolása: a fundamentumok értékváltozása	34
5.4. A játék ábrázolása: α változása a kiválasztott kísérletben	34
6.1. Stratégiák definiálása: a befektetés választásának valószínűsége a tí- pus függvényében	38
6.2. A fundamentumok értékének alakulása az első négy körben	40
6.3. A befektetési arány alakulása a negyedik körben, homogén esetben a különböző stratégiák szerint	41
6.4. Az összes befektetési arány alakulása a negyedik körben, heterogén esetben	43
6.5. A játékosok összes nyereségének alakulása az idő függvényében (ne- gyedik kör, heterogén egyenlő arányú stratégiák esetén)	43
6.6. A játékosok összes nyereségének alakulása az idő függvényében (má- sodik kör, heterogén egyenlő arányú stratégiák esetén)	44

6.7. Optimisták és pesszimisták átlagos nyereségének alakulása az optimisták arányának függvényében	45
6.8. Optimisták és az interpolált stratégiát követők átlagos nyereségének alakulása az interpolált stratégiát követők arányának függvényében .	47
6.9. Pesszimisták és az interpolált stratégiát követők átlagos nyereségének alakulása az interpolált stratégiát követők arányának függvényében .	47
6.10. Optimisták és a fundamentális stratégiát követők átlagos nyereségének alakulása a fundamentális stratégiát követők arányának függvényében	50
6.11. Pesszimisták és a fundamentális stratégiát követők átlagos nyereségének alakulása a fundamentális stratégiát követők arányának függvényében	51
6.12. A tiszta optimista kísérlet átlagos nyereségeinek hisztogramja	53
6.13. A tiszta optimista kísérlet átlagos nyereségei különböző véletlenszámgenerálások mellett	54

Táblázatok jegyzéke

1.	A definiált stratégiák átlagos nyeresége homogén esetben	39
2.	A definiált stratégiák átlagos nyeresége heterogén esetben	42
3.	Optimisták és pesszimisták versenye különböző arányok mellett . . .	45
4.	Stratégiák átlagos nyeresége az interpolált stratégiát követők arányának változtatásával	46
5.	A definiált stratégiák átlagos nyeresége homogén esetben, a fundamentális stratégiát is figyelembevéve	49
6.	A definiált stratégiák átlagos nyeresége heterogén esetben, a fundamentális stratégiát is figyelembevéve	49
7.	A definiált stratégiák átlagos nyeresége homogén esetben, a fundamentális stratégiát és az egyéni típust mint határt is figyelembevéve .	52
8.	A definiált stratégiák átlagos nyeresége heterogén esetben, a fundamentális stratégiát és az egyéni típust mint határt is figyelembevéve .	52

1. fejezet

Bevezetés

A pénzügyi modellezési problémák megoldásának klasszikus kiindulópontja a hatékony piacok elmélete, mely szerint a piac számára lényeges összes információ megjelenik az eszközök egyensúlyi árában. A piaci szereplők racionalitását feltételezve az egyensúlyi ártól való minden eltérés csak véletlen zaj hatása lehet. Ezt az elméletet Fama (1970) [8] alkotta meg először és azóta is általában a pénzügyi és közgazdasági modellek legfontosabb feltételezései között szerepel. Az utóbbi években azonban egyre inkább elterjedtek azok a kutatások, melyek heterogén szereplőkből álló eszközpiacokat vizsgálnak. Ennek motivációja empirikus alapokon nyugszik. Bacchetta és van Wincoop (2003) [4] érvelése szerint például a devizapiacokon történő kereskedés óriási volumene a szereplők várakozásainak különbözőségével magyarázható. Érdeemes továbbá olyan munkákat is figyelembe venni, amelyek az összes piaci szereplő teljes racionalitásának kérdését vizsgálják. Klinger, Levy és Sonisino (2003) [12] például megmutatják, hogy a befektetők nagyobb valószínűséggel választanak olyan befektetési alapokat, melyek múltbeli teljesítménye jobb volt – még akkor is, ha ez a múltbeli jó teljesítmény bizonyíthatóan véletlen eredménye és nem tartalmaz semmiféle releváns információt az alap kockázatosságára vonatkozóan. Egy másik példa De Long, Shleifer, Summers és Waldmann (1990) [6] munkája. A szerzők olyan eszközpiacot modelleznek, ahol a racionális befektetők mellett irracionális szereplők, úgynevezett zaj kereskedők is jelen vannak. Megmu-

tatják, hogy a zaj kereskedők jövőbeli várakozásai hibásak ugyan, mégis nagyobb nyereséget tudnak elérni, mint a racionális befektetők, ennek oka pedig éppen az a bizonytalanság, amelyet ők maguk okoztak irracionális viselkedésükkel. A pénzügyi és gazdasági rendszerekben jelenlévő szereplők különbözősége, továbbá a racionális viselkedéstől való eltérés lehetősége és kockázata tehát mind olyan kérdések, amiket érdemes megvizsgálni a pénzügyi modellezés során. Ez azonban sokszor nehéz: heterogén piacokon, ahol minden szereplő eredménye függ a jelenlévő többi szereplő döntéseitől is, nem mindig lehet egyértelműen legjobb stratégiát találni. Továbbá a várakozások, és így a stratégiák fejlődhetnek is az időben. A kutatásokat ezért sokszor kísérletek, szimulációk segítik. Az olyan típusú modelleket, amelyekben heterogén piaci szereplőket és fejlődő stratégiákat vizsgálnak, az evolúciós pénzügyek területe foglalja össze.

Szakedolgozatom célja, hogy bemutassa az evolúciós pénzügyek területét általánosan, összegyűjtve az ilyen típusú modellek közös jellemzőit, továbbá, hogy betekintést adjon a terület konkrét kutatási témáiba, végül pedig részletesen ismertessen és szimulációval is megvizsgáljon egy kiválasztott modellt. A következő, 2. fejezetben a szükséges játékelméleti fogalmakat definiálom. A 3. fejezet tartalmazza a bevezetést az evolúciós pénzügyek világába. Az általános jellemzőkön túl számos modell is bemutatásra kerül, konkrét kutatási témákat felvetve. A 4. fejezetben részletesen bemutatom a kiválasztott modellt, melyet implementáltam és a szakedolgozatom további részében vizsgálom. Az 5. fejezet előkészíti a szimulációt, továbbá a játék szemléletes bemutatását tartalmazza. A 6. fejezetben a szimulációs eredményeimet ismertetem. Végül a 7. fejezetben összegzem a munkámat.

2. fejezet

Felhasznált játékelméleti fogalmak

Az evolúciós pénzügyi modellek matematikai leírására a játékelmélet jól használható eszköztárat biztosít, hiszen a játékelmélet célja olyan helyzetek modellezése, amelyben különböző döntéshozók kölcsönösen hatnak egymásra. A döntéshozókat játékosoknak nevezzük, és kölcsönhatás alatt azt értjük, hogy minden játékost befolyásolják a többi játékos döntései is, nem kizárólag a sajátja.

Végh, Király és Pap (2018) [15] jegyzete alapján egy stratégiai játék az alábbi formális modellként adható meg:

- Adott n játékos.
- Minden i játékoshoz tartozik egy S_i véges halmaz, amely halmaz elemeit a játékos stratégiáinak nevezzük.
- A játék egy lehetséges kimenetelének azt nevezzük, amikor minden játékos választ egyszerre egy stratégiát. A kimenetek halmaza $S := S_1 \times \dots \times S_n$ alakban írható fel.
- Feltesszük, hogy a játékosok minden kimenetelhez hozzá tudnak rendelni egy valós számot, amely megadja, hogy mekkora a nyereségük az adott helyzetben.

Formálisan az i . játékos nyereségét az $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ nyereségfüggvény adja meg. Az egyes játékosok célja a saját nyereségük maximalizálása.

- Feltesszük továbbá, hogy a játékosok egyszerre választják ki a stratégiájukat, a többiek döntésétől függetlenül. Ezt egy lépéses szinkronnak nevezzük.
- A játékot teljes információsnak nevezzük, ha minden játékos számára ismert az összes S_i halmaz és az összes u_i nyereségfüggvény.
- Fontos feltételezés továbbá a játékosok racionalitása, ami alatt azt értjük, hogy a játékosok a saját nyereségüket maximalizálni szeretnék, és az ehhez vezető legjobb döntéseket hozzák meg a rendelkezésükre álló információ alapján.

A következő definíciókat szintén Végh, Király és Pap (2018) [15] jegyzete alapján adom meg.

2.0.1. Definíció. Az i . játékos kevert stratégiája egy valószínűségeloszlás az S_i stratégiához tartozó halmazon. Véges S_i esetén ezt egy olyan $\sigma : S_i \rightarrow \mathbb{R}_+$ vektorral írhatjuk le, amelyre $\sum_{z \in S_i} \sigma(z) = 1$.

2.0.2. Definíció. A z stratégia az i . játékos tiszta stratégiája, $\sigma(z) = 1$ és $\sigma(z') = 0$, ha $z' \neq z$.

2.0.3. Definíció. Legyen z és z' az i . játékos két stratégiája, továbbá $\mathbf{s} \in S$. Azt mondjuk, hogy z gyengén dominálja z' -t, ha

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \dots, s_n) \geq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, z', s_{i+1}, \dots, s_n)$$

a többi játékos összes stratégiaválasztása esetén. Továbbá z erősen dominálja z' -t, ha a fenti kifejezésben szigorú egyenlőtlenség áll.

2.0.4. Definíció. Egy stratégia gyengén (illetve erősen) domináns, ha a játékos összes többi stratégiáját gyengén (illetve erősen) dominálja.

Teljes információs játékban a leggyakrabban vizsgált egyensúlyi helyzet a Nash-egyensúly, melyet a következőképpen definiálhatunk.

2.0.5. Definíció. Egy $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ stratégiaválasztás tiszta Nash-egyensúly, ha

$$u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(z, \mathbf{s}_{-i})$$

tetszőleges $z \in S_i$ esetén, ahol \mathbf{s}_{-i} jelöli az i . játékos kivételével mindenki számára kijelölt stratégiák vektorát. Tehát egyik játékos sem járhat jobban a stratégiájának megváltoztatásával, feltéve, hogy a többiek sem változtatják meg a stratégiájukat.

A Nash-egyensúly fogalma mögött meghúzódik az a feltételezés, hogy az egyes játékosok ismerik a többiek szándékát, preferenciáit is. Ez a feltétel azonban sokszor nem állja meg a helyét. Azokat a stratégiai játékokat, amelyekben a játékosok környezetükről nem-teljes (másképpen: hiányos) információval rendelkeznek, Bayes-típusú játéknak nevezzük. Ordóñez (2006) [14] jegyzetét felhasználva egy Bayes-típusú játék az alábbi formális modellként adható meg:

- Adott n játékos.
- Minden játékoshoz adott egy A_i akcióhalmaz.
- Minden játékoshoz tartozik egy úgynevezett típus, $x_i \in \Theta_i$, amely az adott játékosra vonatkozó egyedi információt tartalmazza. Ez az x_i típus csak az i . játékos számára figyelhető meg, aki döntéseit mind a saját típusát, mind pedig a mások típusáról alkotott véleményét figyelembe véve hozza meg a $p(\mathbf{x}_{-i}|x_i)$ feltételes valószínűség alapján.
- Feltételezzük, hogy mindenki számára ismert a típusokra vonatkozó valószínűségeloszlás.
- Adottak továbbá az akcióktól és a típusoktól egyaránt függő nyereségfüggvények: $u_i : A_1 \times \dots \times A_n \times \Theta_1 \times \dots \times \Theta_n \rightarrow \mathbb{R}$.
- A stratégiák az $s_i : \Theta_i \rightarrow A_i$ leképezés szerint adottak. Vagyis egy stratégia különböző típusokhoz különböző döntéseket rendelhet. A stratégiák halmazát S_i jelöli.

A Nash-egyensúly analógiájára egy Bayes-típusú játékban a következő definíció adható.

2.0.6. Definíció. A Bayes-Nash egyensúly egy Bayes-típusú játék Nash-egyensúlya, azaz

$$Eu_i(s_i | \mathbf{s}_{-i}, x_i) \geq Eu_i(z | \mathbf{s}_{-i}, x_i)$$

minden $z(x_i) \in S_i$ esetén minden x_i mellett.

3. fejezet

Evolúciós pénzügyek

Az evolúciós pénzügyek az utóbbi évek egyre szélesebb körben kutatott témája: 2005-ben a *Journal of Mathematical Economics* különszámot is jelentetett meg ennek a tudományterületnek szentelve. Azóta – vagyis az elmúlt közel másfél évtizedben – is számos eredmény látott napvilágot ebben a témában. A következőkben röviden bemutatom az evolúciós pénzügyi kutatások legfontosabb általános jellemzőit, továbbá konkrét modellek leírásával ismertetem néhány irányát az evolúciós pénzügyi vizsgálatoknak.

3.1. Általános jellemzők

Az összefoglalót Hens és Schenk-Hoppé (2005) [10], valamint Evstigneev, Hens és Schenk-Hoppé (2008) [7] munkái alapján írtam.

Az evolúciós pénzügy a pénzügyi közgazdaságtan egyik ága, amely összeköti a hagyományos közgazdasági elméletet és a viselkedési közgazdaságtani és pénzügyi szempontokat. Az új megközelítés viselkedési modelleken keresztül vizsgálja az egyes szereplők kockázatos, illetve bizonytalan helyzetekben hozott döntéseit, szemben a hagyományos megközelítéssel, amely az összes piaci szereplő teljes racionalitásán

alapul.

Az evolúciós pénzügyekben olyan portfólió-kiválasztást és árdinamikát vizsgálnak, amelyben a szereplők különbözőek. Mivel egyetlen szereplőnek a súlya nagyon kicsi, vagy akár elhanyagolható, ezért a pénzügyi piacokat nem szereplők, hanem stratégiák szempontjából vizsgálják. A piac számára nem az a fontos, hogy ki fektet be, hanem csak az, hogy összesen mennyi pénz van befektetve valamilyen feltétel szerint. A befektetők a stratégiájukról dönthetnek valamilyen intertemporális hasznossági függvény racionális maximalizálási szándéka alapján, de akár egyszerű véletlen alapján is. Az ilyen modellekben nem az a lényeges kérdés, hogy mi alapján választják a szereplők a stratégiát, hanem az, hogy milyen eredményt érnek el a piacon az adott stratégiával.

Az evolúciós pénzügyekben egyszerre keresik a választ arra, hogy milyen stratégiák várhatóak egy adott piacon, illetve arra, hogy hogyan lehet a legjobb választ megtalálni egy ilyen piacon. Az egyik legfontosabb megállapítás az, hogy nem létezik 'legjobb stratégia'. Ennek oka, hogy minden stratégia eredménye függ a piacon jelenlévő többi stratégiától is. Ennélfogva a racionalitást úgy értelmezhetjük, mint egy feltételes tulajdonság a piac összetételére mint feltételre nézve.

Maga az evolúció egyfajta dinamikát, fejlődést jelent az ilyen jellegű pénzügyi modellekben. Hens és Schenk-Hoppé (2005) [10] interpretációját felhasználva könnyen értelmezhetjük a pénzügyi evolúciót a jól ismert biológiai evolúcióval párhuzamba állítva: míg a biológiában az egyedek például élelemért harcolnak, addig a pénzpiaci szereplők harca a piaci kapitalizációért zajlik; ugyanakkor a különböző fajok esetleges kihalását azzal azonosíthatjuk, hogy a nem elég hatékony stratégiákat egyre kevesebben követik és idővel eltűnnek.

Az evolúciós pénzügyi modellek azt is igyekeznek megmagyarázni, hogy hogyan fejlődik magának a piacnak az összetétele, hiszen idővel változik az összes vagyon aránya a különböző stratégiák között, de maguk a stratégiák is fejlődhetnek. Ezeknek a változásoknak a megértése és megfelelő modellezése hozzájárulhat a különböző eszközárak pontosabb modellezéséhez is.

3.2. Evolúciós pénzügyi modellek

Nagy számú különböző szereplővel adott piacok. A konkrét kutatási irányok közül elsőként Brock, Hommes és Wagener (2005) [5] munkáját szeretném megemlíteni. A szerzők cikkükben elméleti keretbe foglalnak egy olyan evolúciós piacot, ahol nagyon sok különböző típusú befektető van jelen. Bevezetnek egyfajta egyensúlyi határ dinamikát, az úgynevezett *Large Type Limit (LTL)* fogalmát, amely tulajdonképpen egy eszköz arra, hogy a nagy számú különböző befektetővel adott piacon jelenlévő dinamikákat alacsony számú paraméterrel írják le. Kiindulópontnak a kereslet és kínálat által meghatározott piaci egyensúlyt tekintik:

$$\sum_{i=1}^I d_i(q) D_i(p, q) = \sum_{j=1}^J s_j(q) S_j(p, q), \quad (3.1)$$

ahol $D_i(p, q)$ -k a keresleti, $S_j(p, q)$ -k a kínálati függvényeket jelölik. Mindkét függvény az aktuális $p = p_t$ piaci ártól és egy másik, q változótól is függ, amely a rendelkezésre álló információt reprezentálja. d_i és s_j a különböző típusú szereplők arányát adják meg. Tehát $\sum_{i=1}^I = \sum_{j=1}^J = 1$.

A szerzők a következő feltételezéseket teszik:

1. Léteznek Θ^d és Θ^s vektor valószínűségi változók és ν^d, ν^s valószínűségi mértékek úgy, hogy

$$\begin{aligned} D_i(p, q) &= D(p, q, \vartheta_i^d), & d_i(q) &= d(q, \vartheta_i^d), \\ S_j(p, q) &= S(p, q, \vartheta_j^s), & s_j(q) &= s(q, \vartheta_j^s), \end{aligned}$$

ahol ϑ_i^d és ϑ_j^s rendre a Θ^d és Θ^s realizációi.

2. Léteznek a következő $w^d(q, \vartheta_i^d)$ és $w^s(q, \vartheta_j^s)$ súlyfüggvények:

$$d(q, \vartheta_i^d) = \frac{w^d(q, \vartheta_i^d)}{\sum_k w^d(q, \vartheta_k^d)}, \quad s(q, \vartheta_j^s) = \frac{w^s(q, \vartheta_j^s)}{\sum_l w^s(q, \vartheta_l^s)}.$$

3. Jelölje $F(p, q, \vartheta) = F(p, q, \vartheta^d, \vartheta^s)$ a következő függvényt:

$$F(p, q, \vartheta) = D(p, q, \vartheta^d) - S(p, q, \vartheta^s).$$

Feltételezzük, hogy minden $\vartheta = (\vartheta^d, \vartheta^s)$ esetén

$$F(0, q, \vartheta) > 0, \quad F(+\infty, q, \vartheta) < 0,$$

továbbá létezik $c < 0$, amelyre

$$\frac{\partial F}{\partial p}(p, q, \vartheta) \leq c < 0.$$

A feltételezés közgazdasági jelentése, hogy minden eladó és vevő találkozása esetén létezik egy egyértelmű egyensúlyi ár.

4. Minden függvény a p és q változóknban végtelenszer folytonosan differenciálható, tovább folytonos ϑ^d -ben és ϑ^s -ben.

Az 1. és 2. feltételek alapján a (3.1) egyenlet az alábbi formába írható:

$$\sum_{i=1}^I \frac{w^d(q, \vartheta_i^d)}{\sum_{k=1}^I w^d(q, \vartheta_k^d)} D(p, q, \vartheta_i^d) = \sum_{j=1}^J \frac{w^s(q, \vartheta_j^s)}{\sum_{l=1}^J w^s(q, \vartheta_l^s)} S(p, q, \vartheta_j^s).$$

Ez ekvivalens a következő egyenlettel:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w^d(q, \vartheta_i^d) w^s(q, \vartheta_j^s) D(p, q, \vartheta_i^d) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w^d(q, \vartheta_i^d) w^s(q, \vartheta_j^s) S(p, q, \vartheta_j^s).$$

Továbbá, felhasználva a 3. feltételből $F(p, q, \vartheta)$ definícióját és bevezetve a $w(q, \vartheta) = w^d(q, \vartheta^d) w^s(q, \vartheta^s)$ jelölést, a kereslet és kínálat által meghatározott piaci egyensúlyt a

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w(q, \vartheta_i^d, \vartheta_j^s) F(p, q, \vartheta_i^d, \vartheta_j^s) = 0 \quad (3.2)$$

egyenlet írja le. Vezessük be a $G_{IJ}(p, q)$ jelölést a következő kifejezésre:

$$G_{IJ}(p, q) = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w(q, \vartheta_i^d, \vartheta_j^s) F(p, q, \vartheta_i^d, \vartheta_j^s), \quad (3.3)$$

és vegyük észre, hogy $G_{IJ} = 0$ ekvivalens azzal, hogy a piac egyensúlyban van. Ekkor a G_{IJ} -hez tartozó egyensúlyi határ (*Large Type Limit, vagy LTL*), amelyet $G(p, q)$ jelöl, az alábbi módon definiálható:

$$G(p, q) = \int \int w(q, \vartheta) F(p, q, \vartheta) d\nu^d(\vartheta^d) d\nu^s(\vartheta^s). \quad (3.4)$$

A fenti feltételezések mellett a $G_{IJ}(p, q) = 0$ egyenlet meghatároz egy jól definiált heterogén piaci fejlődést, melyet $p = \varphi_{IJ}(q)$ alakban írhatunk fel. Hasonlóan $G(p, q) = 0$ meghatározza az LTL fejlődést, amit $p = \varphi(q)$ alakban írhatunk fel. Belátható, hogy a fenti feltételezések mellett φ_{IJ} tart φ -hez 1 valószínűséggel, ha $I \rightarrow \infty, J \rightarrow \infty$. A szerzők bemutatnak egy alkalmazást, melyben egy sztenderd eszközárzási modellt vizsgálnak heterogén szereplőkből álló piacon.

Portfólió-kiválasztási stratégiák versenye nem-teljes piacokon. Hens és Schenk-Hoppé (2005) [11] egy nem-teljes eszközpiacot vizsgálnak, ahol különböző, véges számú portfólió-kiválasztási stratégiák versenyeznek a piacon lévő teljes vagyoneért. A piacon rövid lejáratú eszközök vannak, és a játék minden lépésben a vagyon újrabefektetéséből áll. Egy portfólió-kiválasztási stratégia eredményességét a többi stratégiához képest az határozza meg, hogy az összes vagyon mekkora hányadát sikerült megszereznie.

A modell matematikai formában a következőképpen írható fel. Adottak diszkrét t időpontok. A lehetséges világállapotokat minden t -ben egy stacionárius folyamat realizációi adják, amely folyamat valamilyen (S, \mathcal{S}) mérhető téren értelmezett. Legyen továbbá $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező. Ω a lehetséges trajektóriák halmaza, melynek egy reprezentatív eleme $\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots)$, $\mathcal{F} = \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$, valamint \mathbb{P} valószínűségi mérték. A világ állapotát t -ben ω_t jelöli. Adott véges sok

játékos, $i = 1, \dots, I$, akik $w_0^i > 0$ kezdeti vagyonnal rendelkeznek. Az eszközök, $k = 1, \dots, K$, ahol $K \geq 2$ egy periódus alatt lejárnak, de a következő periódus elején újra ugyanazok az eszközök választhatók. A szerzők az alábbi feltételezéseket teszik:

1. Az eszközök kifizetése, $A_t^k(\omega)$ adaptált az F_t filtrációhoz.
2. Minden t -re $A_t^k(\omega) \geq 0$ minden k és minden ω esetén. Továbbá minden k -hoz létezik olyan $\Omega_k \in F_t$ halmaz, amire $\mathbb{P}(\Omega_k) > 0$ és $A_t^k(\omega) > 0$ minden $\omega \in \Omega_k$ esetén. Valamint $\sum_{k=1}^K A_t^k(\omega) > 0$ teljesül minden ω -ra.

Minden t időpontban a befektetők kiválasztanak egy portfóliót: $\mathbf{a}_t^i = (a_{1,t}^i, \dots, a_{K,t}^i)$. Feltesszük, hogy $\mathbf{a}_t^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^K$ adaptált az \mathcal{F}_t filtrációhoz. Az \mathbf{a}_t^i portfólió-kiválasztás mellett a befektető vagyona a $t + 1$ időpontban

$$w_{t+1}^i = \sum_{k=1}^K A_{t+1}^k(\omega) a_{k,t}^i.$$

formában írható fel. Ha $p_{k,t}$ jelöli a k eszköz árát a t időpontban, akkor egy befektető vagyonának egy felosztása:

$$\lambda_{k,t}^i = \frac{p_{k,t} a_{k,t}^i}{w_t^i}.$$

Az i befektető kereskedési stratégiája vagyonfelosztások sorozataként definiálható: $\lambda_t^i = (\lambda_{1,t}^i, \dots, \lambda_{K,t}^i)_{t \geq 0}$. A piactisztító árakat a

$$p_{k,t} = \frac{1}{S_t^k} \sum_{i=1}^I \lambda_{k,t}^i w_t^i \quad (3.5)$$

egyenlet adja meg, ahol $S_t^k > 0$ jelöli az összes kínálatot a t időpontban. Ez a folyamat szintén adaptált az \mathcal{F}_t filtrációhoz. Az egyensúlyi árakra vonatkozó (3.5) egyenlet figyelembevételével az i . befektető vagyona a $t + 1$ időpontban a következő formulával adható meg:

$$w_{t+1}^i = \sum_{k=1}^K A_{t+1}^k(\omega) S_t^k \frac{\lambda_{k,t}^i w_t^i}{\sum_{j=1}^I \lambda_{k,t}^j w_t^j}, \quad (3.6)$$

továbbá a $t + 1$. periódusban az összes vagyon, $W_{t+1} = \sum_i w_{t+1}^i$ felírható, mint

$$W_{t+1} = \sum_{i=1}^I w_{t+1}^i = \sum_{k=1}^K A_{t+1}^k(\omega) S_t^k. \quad (3.7)$$

A következő időszakai vagyon fenti felírásában feltételezzük, hogy a befektetők az összes vagyonukat újrabefektetik. A piaci vagyon szerint normalizált eszközárakat az alábbi formula adja meg:

$$q_{k,t} = \frac{p_{k,t}}{W_t} = \frac{1}{S_t^k} \sum_{i=1}^I \lambda_{k,t}^i \frac{w_t^i}{W_t}.$$

$q_{k,t}$ szintén adaptált. A (3.6) és (3.7) egyenletek alapján az i . befektetőnek az összes vagyonhoz képesti vagyonhányadának: $r_t^i = w_t^i / W_t$ fejlődése a

$$r_{t+1}^i = \sum_{k=1}^K \frac{A_{t+1}^k(\omega) S_t^k}{\sum_{l=1}^K A_{t+1}^l(\omega) S_t^l} \frac{\lambda_{k,t}^i r_t^i}{\sum_{j=1}^I \lambda_{k,t}^j r_t^j}$$

formulával írható le. Végül a k eszköz relatív kifizetése az alábbi módon definiálható:

$$R_{t+1}^k(\omega) = \frac{A_{t+1}^k(\omega) S_t^k}{\sum_{l=1}^K A_{t+1}^l(\omega) S_t^l}.$$

A piackiválasztási folyamatot a szerzők véletlen dinamikai rendszerek keretein belül értelmezik. Főként arra keresik a választ, hogy milyen feltételek mellett lesz a vagyon felosztása a különböző stratégiák között stabil. Stabilitás alatt – hétköznapi nyelven fogalmazva – azt értjük, hogy egy kis mértékű változtatás a vagyon kezdeti felosztásában nem okoz hosszútávú hatást, ugyanannak az aszimptotikus vagyoneloszlásnak felel meg. Megmutatják, hogy minden nem-teljes piacon létezik egyértelmű evolúciósan stabil stratégia.

Befektetési stratégiák összehasonlítása a túlélési esélyeik alapján. Az előzőhöz nagyon hasonló modellt ír le Amir, Evstigneev, Hens és Schenk-Hoppé (2005) [2], akik szintén a különböző befektetési stratégiák piackiválasztási folyamatát vizs-

gálják nem-teljes piacokon. Az egyéni hasznosság-maximalizálás helyett azonban a befektetési stratégiákat a túlélési esélyeik alapján hasonlítják össze.

Az előbbi modell jelöléseit használva az r_t^i vagyonyhányadok fejlődését vizsgálják a λ_t^i , $i = 1, \dots, I$ felosztás választások mellett. Amir, Evstigneev, Hens és Schenk-Hoppé (2005) [2] definíciója alapján azt mondjuk, hogy egy stratégia túlél, ha határértékben pozitív vagyonyhányadot ér el. Továbbá egy stratégia az egyetlen túlélő, ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_t^i = 1 \quad (3.8)$$

majdnem mindenütt. A (3.8) feltételből az is is következik, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} r_t^j = 0$ minden $j \neq i$ esetén, vagyis az i . játékos birtokolja az összes vagyont.

Ahhoz, hogy az előbbi modell jelölései szerint ω_t -vel jelölhessem a világ t időpontbeli állapotát, legyen most Ω egy véges halmaz és ω_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ egy homogén Markov-lánc $p(\sigma|\omega)$ átmenetvalószínűséggel, amely a $P(\omega_{t+1} = \sigma | \omega_t = \omega)$ feltételes valószínűséget jelöli. A szerzők a következő feltételezéseket teszik:

1. Az

$$R_k^*(\omega) := \sum_{\sigma \in \Omega} p(\sigma|\omega) R_k(\sigma, \omega), \quad k = 1, \dots, K$$

függvények szigorúan pozitívak minden $\omega \in \Omega$ esetén. Innen

$$R_k^*(\omega) = E(R_k(\omega_{t+1}, \omega_t) | \omega_t = \omega),$$

vagyis minden k -ra a k eszköz relatív kifizetésének feltételes várható értéke is szigorúan pozitív minden ω világállapot esetén.

2. Minden $\omega \in \Omega$ esetén a

$$\Pi(\omega) = \{\sigma \in \Omega : p(\sigma|\omega) > 0\}$$

halmazra megszorított $R_1(\cdot, \omega), \dots, R_K(\cdot, \omega)$ függvények lineárisan függetlenek.

3. A $\lambda_t(\omega_t)$ vektorok $\lambda_{k,t}(\omega_t)$ koordinátái nem érik el 0-t. Formálisan:

$$\inf_{i,k,t,\omega_t} \lambda_{k,t}^i(\omega_t) > \rho > 0,$$

ahol ρ egy determinisztikus konstans, mely függhet a stratégiától, a többi változótól pedig csak a stratégián keresztül.

Definiáljuk a $\lambda^* = (\lambda_{k,t}^*(\omega_t))$ stratégiát a $\lambda_{k,t}^*(\omega_t) = R_k^*(s_t)$ formula szerint, azaz a befektetők a vagyont az eszközök várható relatív kifizetésének arányában osztják fel. A cikk fő eredménye annak az igazolása, hogy a definiált modellben és a megadott feltételek mellett a λ^* stratégiát követők fogják végül a piacon lévő összes vagyont birtokolni, feltéve, hogy a λ^* stratégia aszimptotikusan különbözik a CAPM stratégiától. A CAPM stratégia a piaci portfólió arányában történő befektetést jelenti.

Fejlődő stratégiák és exogén zaj hatása. Alós-Ferrer és Ania (2005) [1] szintén az előbbiekhöz hasonló modellt vizsgálnak: játékelméleti formában modellezik az eszközpiacokat, ahol az egyes eszközök hozama véletlen és a befektetők arról döntenek, hogy hogyan osztják fel a vagyont a különböző eszközök között. Megmutatják, hogy Nash-egyensúlyban akkor van a piac, ha a vagyont az eszközök várható hozamának arányában fektetik be. Fontos azonban megjegyezni, hogy ez a stratégia különbözik az előbbieken definiált várható relatív kifizetések szerinti stratégiától. Az eredmény azt is jelenti, hogy egyensúly esetén több vagyont fektetnek a magasabb várható hozammal rendelkező eszközökbe, ami miatt ezek ára is magasabb lesz. Az egyensúlyi stratégia ez alapján úgy értelmezhető, mint a fundamentumok szerinti befektetés. Továbbá olyan evolúciós dinamikát is vizsgálnak, amelyben a stratégiák is fejlődnek abban az értelemben, hogy a befektetők nagyobb arányú vagyont allokálnak a sikeresebben teljesítő stratégiákhoz. A modell része továbbá egy zaj paraméter, mely a rendszert érő további exogén információt ragadja meg. A szerzők megmutatják, hogy ezen zaj mellett is a befektetők többsége az egyensúlyi stratégiát követi és így az eszközárak közel vannak a fundamentális értékeikhez.

Néhány további modell. Föllmer, Horst és Kirman (2005) [9] valószínűségelméleti szempontból vizsgálják meg az olyan piacok egyensúlyát, ahol a befektetők különbözőek. Modelljükben a szereplők várakozásai változhatnak, amely változások megjelennek az ár- és nyereségfolyamatokban is. Megmutatják, hogy a változó várakozások hatására az árak bizonyos periódusokban jelentősen eltérhetnek a fundamentumok szintjéből következőtől, buborékokat okozva a rendszerben, de oda vissza is fognak térni mindig. Fő eredményük annak igazolása, hogy az árfolyamat határeloszlása létezik és egyértelmű a definiált modellben. Érdekes továbbá az evolúciós pénzügyek általános jellemzése után még egyszer kiemelni Evstigneev, Hens és Schenk-Hoppé (2008) [7] munkáját. A szerzők azon túl, hogy alapos áttekintést adnak az evolúciós pénzügyek elméletéről, beleértve ezen modellek közös elemeinek és feltételezéseinek leírását, valós alkalmazásokat is bemutatnak. Ezen alkalmazások között a befektetők portfólió-kiválasztásának vizsgálata és eszközárarázásra vonatkozó lehetőségek is szerepet kapnak. Angletos és Werning (2006) [3] cikkének célja a kifejezetten válságok idején jelentkező endogén információ szerepének megértése. A válságokat olyan időszakokként értelmezik, amelyekben a nem-fundamentális volatilitás magas. A nem-fundamentális volatilitás az a többlet volatilitás, amely nem magyarázható meg egyértelműen a fundamentumok változékonyságával.

4. fejezet

Nagy sokkok hatása - Morris és Yildiz modelljének bemutatása

Ebben a fejezetben részletesen bemutatom Morris és Yildiz (2016) modelljét [13], melyet szimulációval is vizsgáltam a szakdolgozatom megírása során. A modell egy Bayes-típusú játék, melyben az egyes játékosok típusai két tényezőből tevődnek össze: függnek egyrészt a piac egészét leíró fundamentális állapottól, másrészt az adott játékoshoz tartozó egyedi hatástól. A játékosok a saját kifizetési típusukat megfigyelik, de a fundamentumok és az egyedi sokkok hatását nem tudják szétbontani. A végső nyereség a kifizetési típustól és az összes játékos befektetési arányától függ.

4.1. A játék leírása

A játék a következőképpen zajlik. Adott játékosok egy kontinuum számosságú halmaza: $i \in N = [0, 1]$ és diszkrét időpontok: $t = 0, 1, 2, \dots$. Adottak továbbá θ_{-1} és $\sigma > 0$ rögzített valós számok. Minden t időpontban az alábbi események következnek be a megadott sorrendben:

1. kialakul egy új θ_t fundamentális állapot a

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \sigma\eta_t \quad (4.1)$$

egyenlet szerint;

2. minden játékos megfigyeli a saját kifizetési típusát, amely

$$x_{it} = \theta_t + \sigma\varepsilon_{it} \quad (4.2)$$

alakban írható fel;

3. minden játékos egyszerre, egymástól függetlenül hoz egy a_{it} döntést, ahol $a_{it} \in A \equiv \{\text{befektet; nem fektet be}\}$, az i . játékosnak a befektetők α_t arányától függő nyeresége pedig

$$u(\alpha_t, x_{it}) = x_{it} + \alpha_t - 1 \quad (4.3)$$

ha az i . játékos befektetett, és 0 egyébként;

4. végül θ_t és α_t mindenki számára megfigyelhető.

Azaz induláskor adott a világnak egy fundamentális állapota, amelyet θ_{-1} jelöl. Adott egy σ szórás, továbbá η_t és ε_{it} valószínűségi változók. A világ állapotát a későbbi időpontokban θ_t jelöli.

Minden játékoshoz minden időpontban tartozik egy x_{it} kifizetési típus, amely a világ adott időpontbeli állapotától és egy, kifejezetten a játékosra vonatkozó egyedi zajtól függ. Így a $t - 1$. időpontban megfigyelt fundamentális állapot és az i . játékos t . időpontbeli kifizetése közötti különbség, $x_{it} - \theta_{t-1}$ két komponensből áll: $\sigma\eta_t$ közös hatásként, $\sigma\varepsilon_{it}$ pedig valamilyen egyedi hatásként értelmezhető. Az i . játékos kifizetése normalizált formában is felírható a

$$z_{it} = \eta_t + \varepsilon_{it} = (x_{it} - \theta_{t-1})/\sigma \quad (4.4)$$

egyenlet szerint.

A modell fontos feltételezése, hogy ε_{it} és η_t függetlenek (időben és a játékosok között is) és rendre egy F illetve G eloszlásból származnak. A megfelelő sűrűségfüggvények, f és g minden valós értékre pozitívak, folytonos, páros függvények, továbbá a közös hatások, vagy sokkok vastagabb szélű eloszlásból származnak az egyedi hatásokhoz képest. Formálisan felírva a következőket tesszük fel.

4.1.1. Feltétel. A közös sokkok eloszlása a széleken regulárisan változó:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{g(\lambda\eta)}{g(\lambda\eta')} \in (0, \infty) \quad \forall \eta, \eta' \in \mathbb{R}_+, \quad (4.5)$$

az egyedi sokkok eloszlása a széleken keskenyebb:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda\varepsilon)}{g(\lambda\eta)} = 0 \quad \forall \varepsilon, \eta \in \mathbb{R}_+. \quad (4.6)$$

Jelölje a θ_t feltételes eloszlásfüggvényét $F_{\theta|x}(\theta_t|x_{it}, \theta_{t-1})$, ha x_{it} és θ_{t-1} ismert.

4.1.2. Feltétel. $F_{\theta|x}(\theta_t|x_{it}, \theta_{t-1})$ csökkenő függvény x_{it} -ben.

Egy további fontos feltétel az, hogy θ_t mindenki számára közvetlenül megfigyelhető a t . periódus végén. Emiatt az összes korábbi saját információ érdektelenné válik és a játékosok egy egylépéses döntést fognak hozni (*egylépéses játék*).

A lehetséges stratégiák vizsgálatakor az első fontos megállapítás az, hogy az i . játékosnak erősen domináns stratégia a befektetés, ha $x_{it} > 1$; erősen domináns stratégia a nem befektetés, ha $x_{it} < 0$; egyébként pedig nincs erősen domináns stratégia. Ez a megállapítás a (4.3) egyenlet alapján könnyen értelmezhető. Ugyanis ha egy játékos nem fektet be, akkor nyeresége biztosan 0. Ezzel szemben, ha $x_{it} > 1$, akkor

$$u(\alpha_t, x_{it}) = x_{it} + \alpha_t - 1 > 0$$

hiszen $\alpha_t \geq 0$ is fennáll. Tehát a többi játékos döntésétől függetlenül biztosan pozitív a nyereség, ezért érdemes befektetni. Ugyanakkor, ha $x_{it} < 0$, akkor

$$u(\alpha_t, x_{it}) = x_{it} + \alpha_t - 1 < 0$$

hiszen $\alpha_t \leq 1$. Így még a lehető legnagyobb α_t mellett sem éri meg befektetni.

A fentiek alapján a $[0, 1]$ intervallumot nevezhetjük a nem dominált szakasznak. Az érdekes kérdés annak a vizsgálata, hogy mi történik ezen az intervallumon. Erre keressük a választ a továbbiakban.

4.2. Az önbesorolási függvény

A modell kulcsfontosságú eleme az önbesorolás (*rank belief*), ami a játékosoknak a mások típusáról alkotott véleményét fejezi ki. A megválaszolendő kérdés a következő: mit gondol egy játékos arról, ahogy a saját kifizetési paraméterei a többi játékoséhoz viszonyulnak? Morris és Yildiz (2016) [13] formálisan a következő definíciót adják:

4.2.1. Definíció. Az i . játékos önbesorolási függvénye

$$R(z) = Pr(x_j \leq x_i | x_i = \theta_{-1} + \sigma z) = \frac{\int F(\varepsilon) f(\varepsilon) g(z - \varepsilon) d\varepsilon}{\int f(\varepsilon) g(z - \varepsilon) d\varepsilon} \quad (4.7)$$

azaz annak a valószínűsége, hogy egy másik játékos x_j kifizetési típusát a sajátjánál kisebbnek gondolja.

Az önbesorolási függvényt a normalizált kifizetési típus, z_i függvényeként írtuk fel. Az önbesorolás valóban csak a normalizált kifizetéstől függ, hiszen a θ_{-1} és σ változásai az $R(z)$ függvényt csak a normalizált kifizetéseken keresztül érintik. Szintén Morris és Yildiz (2016) [13] alapján igazolhatók az önbesorolási függvény következő fontos tulajdonságai.

4.2.2. Állítás. R differenciálható és kielégíti a következő tulajdonságokat:

$$\text{Szimmetria. } R(-z) = 1 - R(z); \quad \text{speciálisan } R(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.8)$$

$$\text{Egyetlen metszéspont. } R(z) > \frac{1}{2} > R(-z) \quad \forall z > 0. \quad (4.9)$$

$$\text{Határ besorolás. } R(z) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{ha } z \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz sűrűségfüggvények konvolúciójának tulajdonságait használjuk fel. Jelölje h_1 és h_2 két folytonos eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Ekkor h_1 és h_2 konvolúcióját $h_1 * h_2$ jelöli és a következőképpen definiáljuk:

$$h_1 * h_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\varepsilon)h_2(z - \varepsilon)d\varepsilon. \quad (4.11)$$

Észrevehetjük, hogy

$$R(z) = \frac{Ff * g(z)}{f * g(z)}. \quad (4.12)$$

Mivel $F(-\varepsilon) = 1 - F(\varepsilon)$ és f -et és g -t páros függvényeknek választottuk, a következő tulajdonságok teljesülnek:

$$f * g(z) = f * g(-z); \quad (4.13)$$

$$R(-z) = \frac{(1 - F)f * g(z)}{f * g(z)}, \quad (4.14)$$

ahol $(1-F)$ a komplementer eloszlásfüggvény. A (4.13) egyenletben meghatározott tulajdonság azt jelenti, hogy f és g konvolúciója is páros függvény, a (4.14) egyenlet pedig azt mondja, hogy $R(-z)$ a komplementer eloszlásfüggvény segítségével számolható. Így

$$\begin{aligned} R(z) - R(-z) &= \frac{(2F - 1)f * g(z)}{f * g(z)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (2F(\varepsilon)f(\varepsilon)g(z - \varepsilon)d\varepsilon}{f * g(z)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (2F(\varepsilon) - 1)f(\varepsilon)(g(z - \varepsilon) - g(z + \varepsilon))d\varepsilon}{f * g(z)}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

ahol az első egyenlőség (4.12), (4.13) és (4.14) egyenletek miatt teljesül, a második egyenlőség a konvolúció definíciója alapján áll fenn, a harmadik egyenlőség pedig abból következik, hogy $2F - 1$ páratlan függvény, míg f páros.

Az állítás első, (4.8) egyenlete azt mondja, hogy az önbesorolási függvény szim-

metrikus. Ez a (4.12) egyenletből látszódik:

$$R(-z) = \frac{(1-F)f * g(z)}{f * g(z)} = \frac{f * g(z) - Ff * g(z)}{f * g(z)} = 1 - R(z).$$

A második, (4.9) egyenlet szerint $R(z) = \frac{1}{2}$ csak akkor, ha $z = 0$. Észrevehetjük, hogy $\forall z > 0$ esetén $g(z - \varepsilon) - g(z + \varepsilon) \geq 0$ és pozitív valószínűséggel szigorú egyenlőtlenség teljesül. Egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha g konstans a vizsgált intervallumon. Így a (4.15) egyenlet alapján $R(z) - R(-z) > 0$. Mivel $R(-z) = 1 - R(z)$, abból az is következik, hogy $R(z) > \frac{1}{2} > R(-z)$.

Nézzük végül a (4.10) formulában megfogalmazott állítást. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon \in (0, 1)$ számot. A g közös sokkok eloszlására tett (4.5) feltétel alapján létezik olyan $\beta > 0$ és η_0 , hogy minden $\eta' > \eta \geq \eta_0$ esetén

$$\frac{g(\eta)}{g(\eta')} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{-\beta}. \quad (4.16)$$

Rögzítsünk továbbá egy $\gamma > 0$ értéket úgy, hogy

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{-\beta} < 1 + \varepsilon. \quad (4.17)$$

Ekkor definíció szerint minden $z > 0$ esetén

$$R(z) \leq (I_1 + I_2)/I_3,$$

ahol

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\gamma z}^{\gamma z} f(\varepsilon)F(\varepsilon)g(z - \varepsilon)d\varepsilon \leq \frac{1}{2}(F(\gamma z) - F(-\gamma z))g(z - \gamma z), \\ I_2 &= \int_{\varepsilon \notin (-\gamma z, \gamma z)} f(\varepsilon)F(\varepsilon)g(z - \varepsilon)d\varepsilon \leq f(\gamma z), \\ I_3 &= \int_{-\gamma z}^{\gamma z} f(\varepsilon)g(z - \varepsilon)d\varepsilon \geq (F(\gamma z) - F(-\gamma z))g(z + \gamma z). \end{aligned}$$

A fenti egyenlőtlenségeket kombinálva kapjuk, hogy

$$R(z) \leq \frac{1}{2} \frac{g(z - \gamma z)}{g(z + \gamma z)} + \frac{f(\gamma z)}{(F(\gamma z) - F(-\gamma z))g(z + \gamma z)}. \quad (4.18)$$

Ekkor a (4.16) és (4.17) egyenlőségek alapján

$$\frac{g(z - \gamma z)}{g(z + \gamma z)} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}\right)^{-\beta} < \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

minden $z > \eta_0/(1 - \gamma)$ esetén. Továbbá az egyedi sokkok eloszlására tett (4.6) feltétel alapján létezik olyan $\bar{z} > \eta_0/(1 - \gamma)$, hogy minden $z > \bar{z}$ esetén

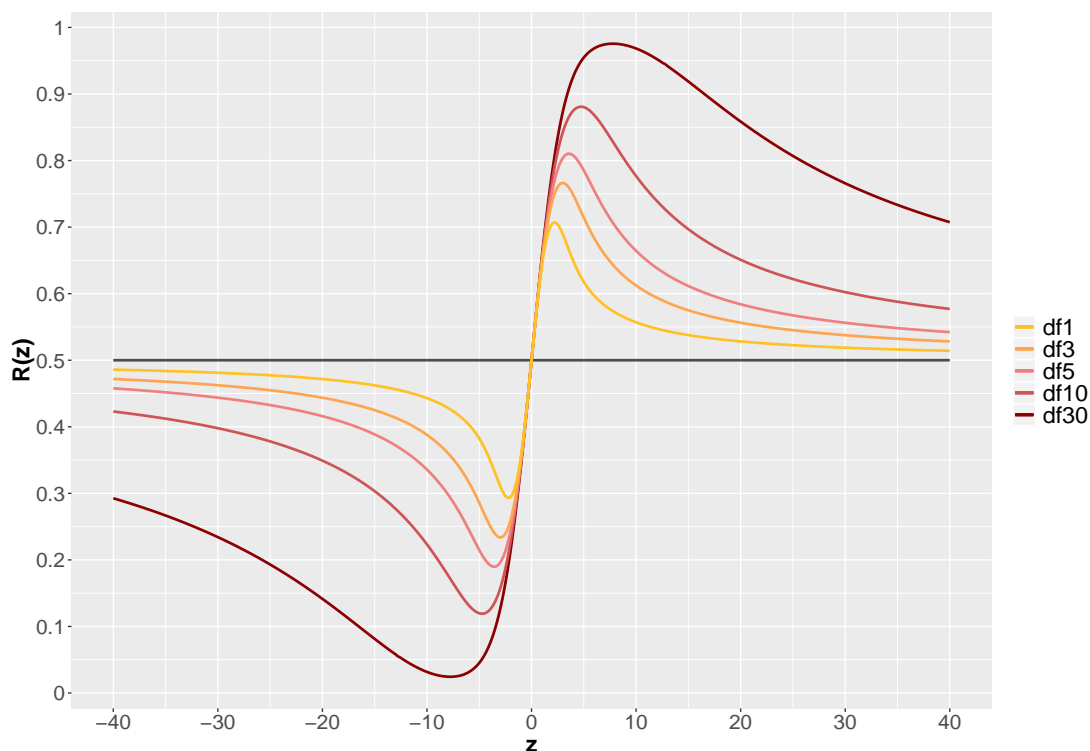
$$\frac{f(\gamma z)}{(F(\gamma z) - F(-\gamma z))g(z + \gamma z)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az utolsó két egyenlőtlenséget a (4.18) egyenlőtlenségbe helyettesítve kapjuk, hogy $R(z) < 1/2 + \varepsilon$ minden $z > \bar{z}$ esetén, ami éppen a bizonyítandó állítás. ■

Példaként tekinthető egy olyan önbesorolási függvény, amelynél a közös sokkok Student t-eloszlást, az egyedi sokkok pedig normális eloszlást követnek. Különböző szabadsági fokú t-eloszlásokhoz tartozó önbesorolási függvények a 4.1 ábrán láthatók.

Az ábrán megfigyelhetőek az önbesorolási függvénynek a 4.2.2 állításban megfogalmazott tulajdonságai. Látható, hogy $R(-z) = 1 - R(z)$ teljesül, illetve az önbesorolás értéke $\frac{1}{2}$, ha a kifizetés paraméter megegyezik az előző időszak fundamentális állapottal (nincs sokk hatás). A függvény az $\frac{1}{2}$ értéket valóban csak egyszer lépi át minden ábrázolt szabadsági fok mellett. Továbbá, ha egy játékos kifizetési paramétere abszolútértékben nő, akkor az önbesorolása is jelentősen megváltozik, z előjelétől függően nő vagy csökken, mert először ezt a magasabb kifizetést a saját egyedi sokkjának tulajdonítja. Ha azonban a kifizetési paraméter abszolútértéke nagyon nagy, akkor a játékos ezt egyre inkább a vastagabb szélű eloszlásból származó közös sokk hatásának tudja be, és az önbesorolási értéke a (4.10) egyenlet szerint $\frac{1}{2}$ -hez tart. Tovább azt is láthatjuk, hogy a szabadsági fok növelésével az átlaghoz

4.1. ábra. Különböző szabadsági fokú t-eloszlások önbesorolási függvényei



húzó hatás egyre kevésbé érvényesül. Ennek oka, hogy a t-eloszlás a normális eloszláshoz tart a szabadsági fok növelésével, így egyre kevésbé lesz elkülöníthető az egyedi és a közös sokkok hatása.

4.3. Egy- és többlépéses játék

Jelölje az egylépéses játékot $G(\theta_{-1})$. A már leírtak alapján a fundamentális állapot $\theta = \theta_{-1} + \sigma\eta$, az i . játékos kifizetési paramétere $x_i = \theta + \sigma\varepsilon_i$ és a döntése $a_i \in A$. Az i . játékos stratégiájának az $s_i : \mathbb{R} \rightarrow A$ hozzárendelést nevezzük, ahol $s_i(x_i) \in A$ az i . játékos döntése x_i kifizetési paraméter mellett. A Bayes-Nash egyensúly definíciója alapján minden játékostól a lehetséges legjobb választ várjuk.

Tegyük fel, hogy minden játékos csak akkor fektetett be, ha a normalizált kifi-

zetés paramétere, z_i egy \hat{z} határ felett volt. Tekintsünk egy olyan játékost, akinek a kifizetés paramétere éppen ez a \hat{z} határ - nevezzük kritikus értéknek - volt. Ekkor az ő befektetés melletti nyeresége

$$\underbrace{\theta_{-1} + \sigma \hat{z}}_{\text{saját típus}} + \underbrace{1 - R(\hat{z})}_{\text{várható befektetési arány}} - 1. \quad (4.19)$$

Ez a befektető csak akkor közömbös, ha a (4.19) egyenletben megadott nyereség értéke 0, azaz

$$R(\hat{z}) = \theta_1 + \sigma \hat{z}. \quad (4.20)$$

A (4.20) egyenlet tehát szükséges feltétel ahhoz, hogy létezzen egy ilyen \hat{z} melletti egyensúly. A következő érvelésből kiderül, hogy ez a feltétel elégséges is. Tegyük fel, hogy egy játékos előrejelezte, hogy mindenki a \hat{z} -határ stratégia szerint játszik. Ennélfogva neki mindegy, hogy befektet, vagy nem, ha az ő normalizált típusa éppen \hat{z} . Ha a normalizált típusa $z_i > \hat{z}$, akkor a 4.1.2 feltétel alapján nagyobb valószínűséggel befektetne, hiszen mind a típusa, mind a mások befektetésének várható aránya nagyobb lenne.

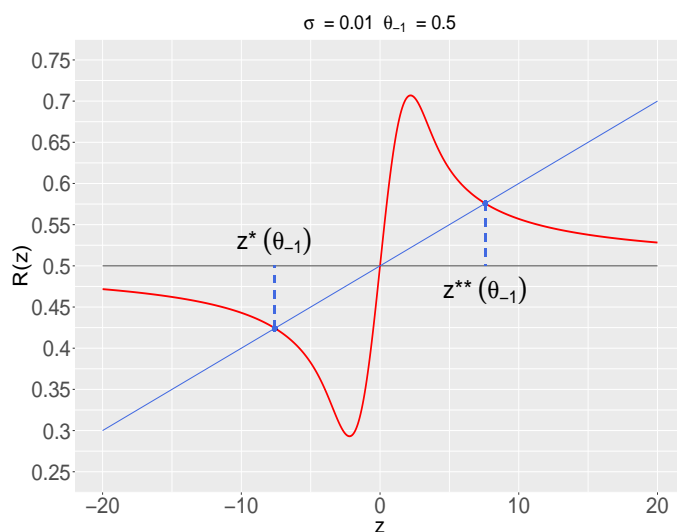
Legyen $z^*(\theta_{-1})$ és $z^{**}(\theta_{-1})$ a (4.20) egyenlet legkisebb, illetve a legnagyobb megoldása. Egy példa a 4.2 ábrán látható. Ekkor

$$x^*(\theta_{-1}) = \sigma z^*(\theta_{-1}) + \theta_{-1}$$

$$x^{**}(\theta_{-1}) = \sigma z^{**}(\theta_{-1}) + \theta_{-1}$$

a megfelelő, nem normalizált típusok. Az egy lépéses játékban minden racionális stratégia monoton egyensúlyi korlátok között van a $x^*(\theta_{-1})$ és $x^{**}(\theta_{-1})$ értékekkel összefüggésben: a nem befektetés az egyedüli racionális döntés, ha $x_i < x^*(\theta_{-1})$, a befektetés az egyedüli racionális döntés, ha $x_i > x^{**}(\theta_{-1})$ és mindkét döntés lehetséges $x^*(\theta_{-1})$ és $x^{**}(\theta_{-1})$ közötti értékek esetén. A nem dominált szakasz tehát most az $[x^*(\theta_{-1}), x^{**}(\theta_{-1})]$ intervallum. Ez azonban már szűkebb, mint a korábbi érvelésben szerepelt $[0, 1]$ intervallum. Konkrétan a 4.2 ábrán a metszéspontok $z^*(\theta_{-1}) = -7.60$ és $z^{**}(\theta_{-1}) = 7.60$ körül vannak, ahonnan $x^*(\theta_{-1}) \approx 0.424$ és $x^{**}(\theta_{-1}) \approx 0.576$.

4.2. ábra. Példa a normalizált kifizetés extrém egyensúlyi értékeire



A Bayes-Nash egyensúlyokat a megfelelő extrém egyensúlyok határozzák meg:

$$s_i^*(x_i) = \begin{cases} \text{befektetés,} & \text{ha } x_i \geq x^*(\theta_1) \\ \text{nem befektetés,} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$s_i^{**}(x_i) = \begin{cases} \text{befektetés,} & \text{ha } x_i \geq x^{**}(\theta_1) \\ \text{nem befektetés,} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A fentiekben s_i^* a legtöbb, s_i^{**} a legkevesebb befektetés melletti egyensúly. Ez a karakterizáció meghatározza az extrém egyensúlyokat, így a racionális döntéseket minden játékos számára.

A többlépéses játék úgy zajlik, hogy a játékosok minden lépésben egy egylépéses döntést hoznak, hiszen θ_t és α_t a t . időszak végén megfigyelhető, ezzel pedig a korábbi saját információ érdektelenné válik. Ugyanakkor a fundamentumok (és így a típusok) értéke nem független időben, többlépéses játék esetén sztochasztikus folyamatot követ. Ezáltal egy nagy sokk hatás a fundamentumok értékében hosszú időn keresztül megfigyelhető marad.

4.4. Többségi viselkedés vizsgálata

A fentiekben azokat a stratégiákat határoztuk meg, amelyek valamilyen extrém érték mellett egyensúlyt adnak, azaz minden játékos számára racionálisak. Ez az eredmény az extrém értékek közötti tartományon még nem határozza meg a domináns stratégiát. Morris és Yildiz (2016) [13] cikkükben ezért a többség számára racionális döntéseket vizsgálják a mindenkori számára racionális döntések helyett. Érvelésük szerint ez két szempontból is hasznos: egyrészt vizsgálhatók a játéknak olyan statisztikai, amelyek csak a fundamentális állapottól függenek, másrészt kis σ érték esetén közel az összes játékos a többségi stratégiát követi.

4.4.1. Definíció. Egy 'a' döntést többségi egyértelmű racionális döntésnek nevezünk θ -ban θ_{-1} mellett, ha 'a' az egyetlen racionális döntés a $G(\theta_{-1})$ játékban a kifizetési típusok többségére, amikor a fundamentális állapot θ .

Konkrétan a befektetés a többségi egyértelmű racionális döntés θ -ban θ_{-1} mellett akkor és csak akkor, ha $\theta > x^{**}(\theta_{-1})$, és a nem befektetés a többségi egyértelmű racionális döntés akkor és csak akkor, ha $\theta < x^*(\theta_{-1})$. Ennek a belátásához azt kell észrevennünk, hogy egy döntés egyértelmű racionális a többségnek, ha ez az egyetlen racionális döntés az önbesorolás alapján középső játékosnak, akinek az egyedi sokkja 0. Morris és Yildiz (2016) [13] megvizsgálják, hogy mikor létezik ilyen döntés, továbbá, hogy hogyan függ a létezése a θ fundamentális állapot szintjétől, az előző időszaki fundamentális állapot, θ_{-1} értéktől, valamint a fundamentális sokk nagyságától, azaz $\theta - \theta_{-1}$ -től.

Jelölje $\bar{\theta} \in (1/2, \bar{R})$ azt a legnagyobb θ értéket, amihez létezik $z > 0$, hogy

$$R(z) \geq \sigma z + \theta, \quad (4.21)$$

ahol $\bar{R} = \sup_z R(z)$. $\bar{\theta}$ -t az $R(z)$ függvény $\sigma z + \theta$ érintőjének metszéspontja határozza meg. Legyen továbbá $\underline{\theta} = 1 - \bar{\theta}$, és $\bar{\theta}$ -t nevezzük a fundamentális befektetési határnak, $\underline{\theta}$ -t a fundamentális nem befektetési határnak. A fundamentális befektetési határ \bar{R} , ha $\sigma \rightarrow 0$, és $1/2$ -hez tart, ha σ növekszik. Definiáljunk továbbá

minden $\theta > 1/2$ -hez egy \bar{z} határt a

$$\bar{z}(\theta) = \max R^{-1}(\theta) \quad (4.22)$$

egyenlet szerint. $\theta \leq \bar{R}$ esetén $\bar{z}(\theta)$ a legnagyobb normalizált sokk érték, ami mellett egy játékos önbesorolása θ . Morris és Yildiz (2016) [13] meghatározzák, hogy $\bar{z}(\theta)$ az a normalizált sokk méret, ami meghatározza a többség számára racionális stratégiát. A cikk fő eredménye a következő állítás.

4.4.2. Állítás. A befektetés többségi egyértelmű racionális, ha $\theta > \frac{1}{2}$ és

$$\theta - \theta_{-1} > \sigma \bar{z}(\theta), \quad (4.23)$$

illetve megfordítva, feltéve, hogy R -nek egy maximuma van \mathbb{R}_+ -ban és $\theta_{-1} \leq \bar{R} - \sigma \bar{z}(\bar{R})$, a befektetés nem többségi egyértelmű racionális, ha $\theta > \frac{1}{2}$ nem teljesül vagy $\theta - \theta_{-1} \leq \sigma \bar{z}(\theta)$.

Szimmetria okokból a nem befektetés a többségi egyértelmű racionális döntés, ha $\theta < \frac{1}{2}$ és egy jelentős negatív sokk következik be, melynek nagysága legalább $\sigma \bar{z}(1 - \theta)$. Ugyanakkor az állítás második fele szerint nincs minden esetben többségi egyértelmű racionális stratégia.

4.5. Összegzés, eredmények és továbblépés

A cikk fő eredménye a többségi viselkedés karakterizálása. A szerzők az egyértelmű racionális döntések határait keresték a leírt játékban. Határok alatt az egyedi kifizetés típus extrém értékeit értjük.

A legegyszerűbb, minden játékosra érvényes érvelés az volt, mely szerint $x_{it} > 1$ mellett mindig érdemes befektetni, ugyanakkor $x_{it} < 0$ mellett soha nem érdemes befektetni. Nevezzük ezt 0. szintű megválasztásnak. Az önbesorolás figyelembevételével ezek a határok szűkültek, $x^*(\theta_{-1})$ és $x^{**}(\theta_{-1})$ határozta meg őket, melyben jelentős szerepe volt az önbesorolási függvénynek. Legyen ez az 1. szintű megvá-

lasztás. A köztes értékekre azonban továbbra is mindkét döntés racionális lehetett. 2. szintű megválasztásnak nevezhetjük a 4.4.2 állítást, amikor a többség számára racionális döntés egy, az önbesorolási függvény segítségével meghatározott kritikus normalizált sokk értéktől és a fundamentális sokk értéktől függ. Azonban még a 2. szintű érvelés mellett is előfordulnak olyan világállapotok, amikor nem létezik többségi egyértelmű racionális döntés.

Térjünk át tehát egy másik kérdés vizsgálatára. Ahogyan azt az evolúciós pénzügyek általános jellemzőinek összefoglalásakor írtam, nem kell minden szereplőnek ugyanazokkal a várakozásokkal rendelkeznie, ahogy a valóságban is különböző típusú befektetők vannak jelen a piacon. Azokban a világállapotokban, amikor nem létezik domináns stratégia, a játékosok különbözőféleképpen dönthetnek egyéni jellemzőik alapján, ami akár véletlenszerű is lehet. Ezeket a helyzeteket vizsgáltam szimulációval a szakdolgozatom megírása során és eredményeimet a következő fejezetekben mutatom be.

5. fejezet

A modell további vizsgálata

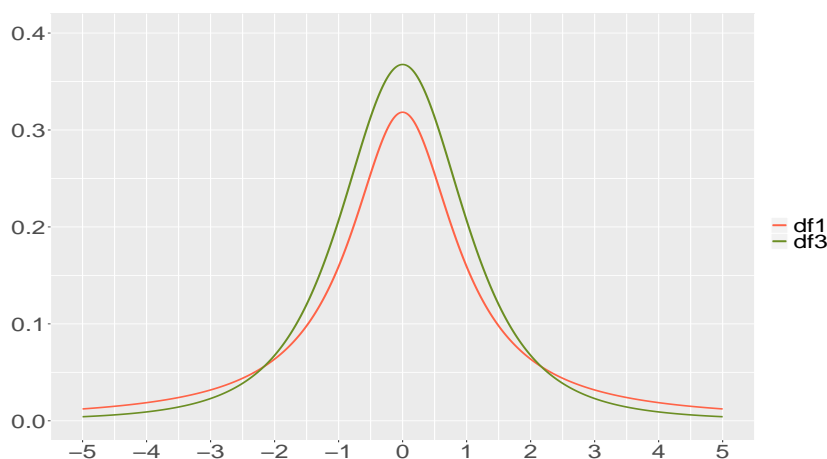
Ez a fejezet az 6. fejezetben bemutatott szimulációs eredményeket készíti elő. Különböző stratégiák eredményeit fogom összehasonlítani a modell keretein belül, ahol stratégia alatt azt értem, hogy a dominált szakaszokon a racionális döntést választja minden befektető, a nem dominált szakaszon viszont más és más szabály alapján döntenek. Ehhez először is megvizsgálom, hogy milyen paraméterek mellett érdemes szimulációkat futtatni a stratégiák jó összehasonlíthatósága érdekében. Továbbá meghatározom, hogy mit nevezek a szimulációban kísérletnek, és ábrázolom, hogy hogyan néz ki egy tipikus kísérletben a változók fejlődése.

5.1. A paraméterek megválasztásának szempontjai

Eloszlások megválasztása. Vizsgáljuk meg először a közös és egyedi sokkok feltételezett eloszlásait. Az egyedi sokkokat Morris és Yildiz (2016) [13] példájával megegyezően sztenderd normálisnak választottam: a centrális határeloszlás tétel alapján ez jól jellemzi a sok különböző játékoshoz tartozó egyedi zajt. A 4.1 ábrán láttuk, hogy a közös sokkok hatása az önbesorolásra a t-eloszlás szabadsági fokának növelése esetén egyre kisebb abban az értelemben, hogy egyre kevésbé húz vissza a függvény értéke az $1/2$ -hez. Legnagyobb hatása az 1 szabadsági fok esetén

van, a szimulációban érdemes mégis magasabb szabadsági fokú t-eloszlást választani, ugyanis 1 szabadsági fok mellett túl sok lenne az extrém érték a fundamentumok alakulásában. Ez egyrészt nem tükrözné a valóságot, másrészt nem lenne értelme a stratégiák összehasonlításának a modell keretei között, mert szinte sosem lennének a nem dominált tartományban. Így mindenki számára mindig csak az egyik döntés lenne racionális, függetlenül attól, hogy milyen stratégiát követ a játékos.

5.1. ábra. 1 és 3 szabadsági fokú t-eloszlás sűrűségfüggvényeinek összehasonlítása



Az 5.1 ábrán láthatók az 1, illetve 3 szabadsági fokú t-eloszlás sűrűségfüggvényei. Összehasonlításképpen elmondható, hogy a 3 szabadsági fokú t-eloszlás értékeinek 98.46%-a a $[-5, 5]$ intervallumon belül van, míg az 1 szabadsági fokú t-eloszlás esetén ez az arány csupán 87.43%. A $[-3, 3]$ intervallumot tekintve a 3 szabadsági fokú t-eloszlás értékeinek 94.23%-a, 1 szabadsági fok esetén csak 79.52%-a esik ide. Továbbá közismert, hogy normális eloszlás esetén az értékek körülbelül 99.73%-a esik a várható értéktől három szórásnyi intervallumba, tehát sztenderd normális eloszlás esetén a $[-3, 3]$ intervallumba. A fentiek alapján tehát az várható, hogy a közös sokkok hatása megfigyelhető, ugyanakkor realiztikus is lesz 3 szabadsági fokú t-eloszlás választása esetén.

Kezdeti értékek és skála. A fundamentumok kiinduló értékét úgy érdemes megválasztani, hogy az a piac átlagos szintjét – mondhatjuk, hogy a várható értékét – tükrözze. Ugyanis a döntést a játékosok x_{it} értéke alapján hozzák meg, ami a (4.1)

és a (4.2) egyenlet kombinálásával $x_{it} = \theta_{t-1} + \sigma\eta_t + \sigma\varepsilon_{it}$ alakban is felírható. Mivel η és ε feltételezésünk szerint függetlenek egymástól és időben is, így

$$E(x_{it}) = E(\theta_{t-1} + \sigma\eta_t + \sigma\varepsilon_{it}) = E(\theta_{t-1}) + E(\sigma\eta_t) + E(\sigma\varepsilon_{it})$$

teljesül, ahol a második és a harmadik tag 0, mert a feltételezett eloszlások alapján η és ε is 0 várható értékű. Továbbá

$$\theta_{t-1} = \theta_{t-2} + \sigma\eta_{t-1} = \theta_{t-3} + \sigma\eta_{t-2} + \sigma\eta_{t-1} = \dots = \theta_0 + \sigma(\eta_1 + \dots + \eta_{t-1}),$$

vagyis a várható érték első tagja θ_0 -val egyenlő, így összességében $E(x_{it}) = \theta_0$. Ebben az értelemben a vizsgálat a nem dominált tartomány közepére szimmetrikus. A $\theta = 0.5$ körüli szimmetria egyébként az előző fejezetben, a 4.2 ábrán is látható volt.

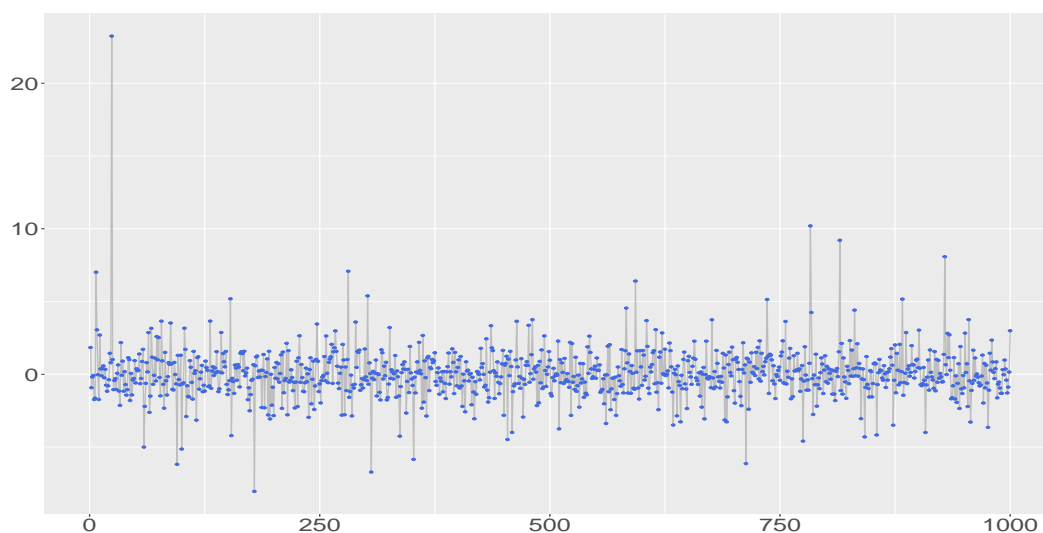
A $\sigma > 0$ paraméter csak a skálát változtatja. A szimulációban úgy választottam meg, hogy a vizsgált befektetési határokhoz képest értelmesek legyenek a sokkok méretei. Mivel a fundamentumok értéke mindig az előző időszakból generálódik az új időponthoz tartozó véletlenszám hozzáadásával, egy extrém nagy véletlen érték sokáig jelen lesz a fundamentumok állapotában. Emiatt, ha a skálázás nem megfelelő, előfordulhat például, hogy néhány körön belül mindenkinek többszörösére nő a nyeresége egy nagy pozitív η miatt, vagy egy t időpont után senki nem fektet be egyetlen nagy negatív η miatt. A stratégiák összehasonlíthatósága szempontjából a $\sigma = 0.1$ választás bizonyult megfelelőnek.

5.2. A játék ábrázolása

A stratégiákat úgy hasonlítom össze, hogy a kísérletek során különböző összetételű populációk versenyét vizsgálom. A bemutatott kísérletekben száz játékos játszik húsz kört (vagyis húsz diszkrét időpont van). A stabilitás ellenőrzésére minden kísérletet ezerszer elvégeztem különböző véletlenszám generálás mellett. A kérdés, hogy melyik stratégiának lesz az összesített átlagos nyeresége a legnagyobb a húsz

kör alatt. Ezért minden játékos 0 nyereséggel indul, és a továbbiakban a nyereség-folyamat pozitív és negatív értékeket is felvehet. A diszkrét időpontok számát azért választottam ilyen alacsonynak, mert a fundamentumok értéke nagyon nagy mértékben befolyásolja a tényleges nyereséget. Ha például a fundamentumok értékében egy nagy véletlen sokk generálódik, akkor az a (4.1) egyenlet miatt hosszú távon megmarad a folyamat értékében. A játékosok nyeresége így hosszú időn keresztül minden körben egy nagy értékkel nő és így nem érdekes a stratégiák összehasonlítása. Az érvelés fordítva is elmondható nagy negatív véletlen és a nem befektetési döntés mellett. A robotosság szempontjából tehát sokkal fontosabb, hogy ugyanazt a (keves lépéses) kísérletet vizsgáljuk meg sokszor egymás után. A szemléltetés kedvéért azonban a következő ábrákon egy olyan tipikus kísérlet eredményét jelenítem meg, amelyben ezer játékos ezer körön keresztül játszott.

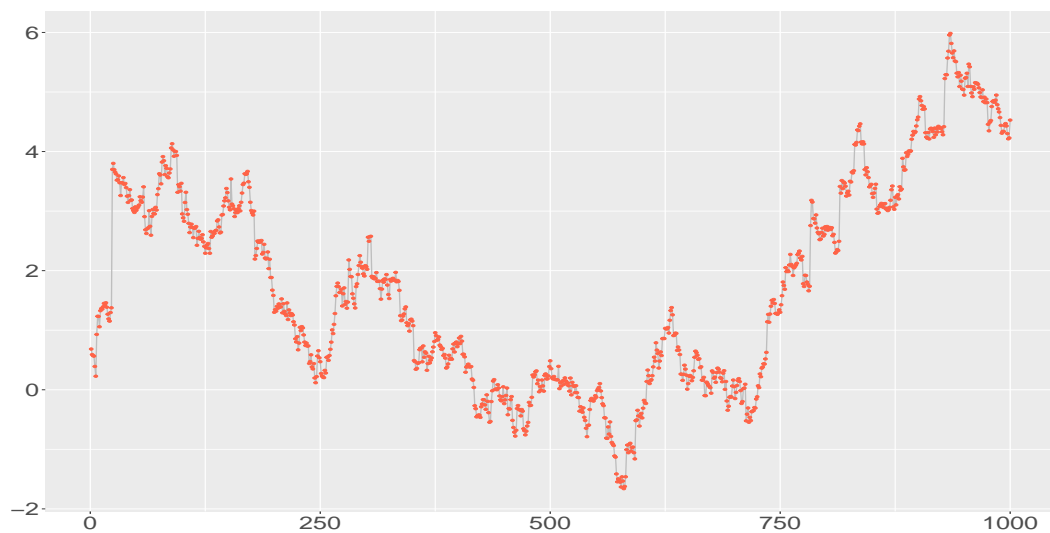
5.2. ábra. A játék ábrázolása: generált közös sokkok



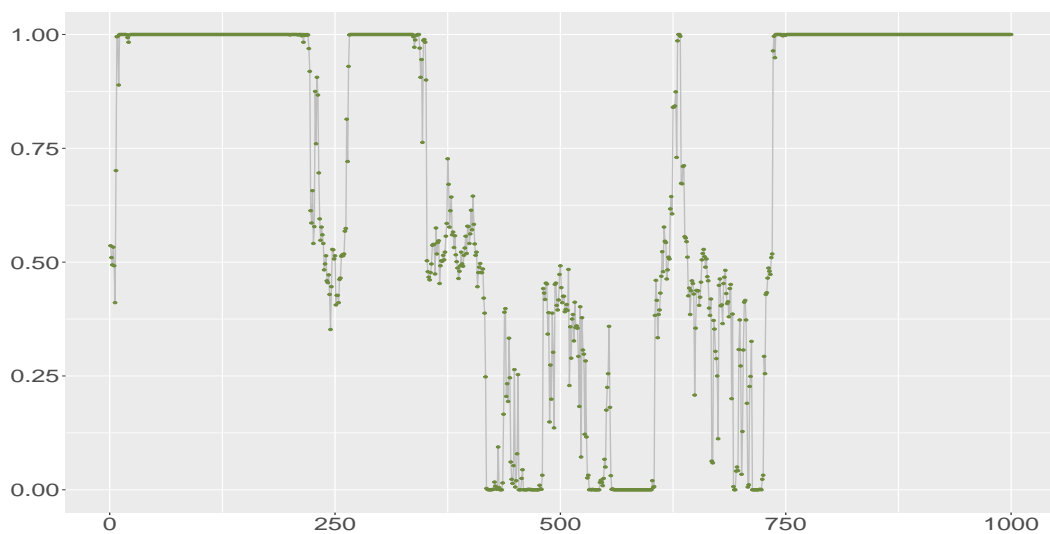
A 5.2 ábrán illusztrálom, hogy hogyan néznek ki egy ezer lépéses játékban a generált közös sokkok, a 5.3 ábrán pedig az látható, hogy ezen sokkok alapján $\sigma = 0.1$ mellett hogyan változik a fundamentumok értéke. A kísérlet során a populációban minden (0. szinten definiált) stratégia egyenlő arányban van jelen. Látható, hogy a példában rövid időben belül egy nagy pozitív közös sokk érte a rendszert, amely miatt a fundamentumok állapota jelentősen felfelé mozdult. Ezután körülbelül az időhorizont háromnegyedéig a nagy negatív sokkok voltak túlsúlyban, csökkenő trendet

okozva a fundamentumok értékében. Az utolsó egynegyed szakaszon ez megfordul és a fundamentumok értéke ismét növekvő trendet mutat.

5.3. ábra. A játék ábrázolása: a fundamentumok értékváltozása



5.4. ábra. A játék ábrázolása: α változása a kiválasztott kísérletben



A 5.4 ábra az α befektetési arányt mutatja szintén az idő függvényében. Az α alakulása is összhangban van az előzőekkel: a befektetési arány 0.5 körül van az első néhány lépésben (hiszen innen indul a fundamentálisok állapota és egyenlő arányban vannak jelen a különböző stratégiákat követő befektetők), de gyorsan eléri az 1-et a

növekvő fundamentálisok hatására. Ekkor hosszú ideig mindenki befektet. Jól látható a játék második és harmadik negyedében, hogy a fundamentumok szintjének emelkedésével a befektetési arány is jellemzően emelkedik és fordítva: a fundamentális állapot csökkenésével a befektetési arány is csökken. Az utolsó egynegyed szakaszon az emelkedés a jellemzőbb és a befektetési arány végig 1 marad. Ha egyetlen kör alatt 0-ról 1-re vagy 1-ről 0-ra változik az α , akkor mondja Morris és Yildiz (2016) [13], hogy egyensúlyváltozás történt. Az ábrázolt kísérletben nem fordult elő ilyen, de arra látunk példát, konkrétan a $t = 750$ előtti néhány periódusban, hogy gyorsan, néhány körön belül változik meg az egyensúly.

6. fejezet

Szimuláció

A következőkben tehát szimulációs módszerekkel vizsgálom tovább a 4. fejezetben bemutatott modellt. A játék menete és feltételei is a 4. fejezetben leírtak szerint alakulnak, a szimuláció beállításait pedig az 5. fejezet alapján végeztem. A fő kérdés, amelyet megválaszolni szeretnék az, hogy hogyan teljesítenek különböző, a nem dominált szakaszban lehetséges stratégiák egy ilyen játékban.

6.1. Versengő stratégiák

A stratégiákat két típusú paraméter határozza meg: egyrészt az x^* és x^{**} határok megválasztásának szintje, másrészt az, hogy mi történik a két határ között. Nevezük az x^* és x^{**} közötti tartományt a továbbiakban szürke tartománynak.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen egyszerű stratégiák összehasonlítása lehet érdekes. A játékelméleti pénzügyi modellekben, melyekben általában különböző módon definiált egyensúlyi helyzeteket keresnek, gyakran beszélnek 'jó' és 'rossz' egyensúlyról. Ez igaz például a már sokat idézett Morris és Yildiz (2016) [13] bevezetőjére is. A 'jó' egyensúly azt jelenti, hogy a piac általános várakozásai pozitívak: a kamatok alacsonyok, a fiskális politika fenntartható. Ilyen egyensúlyban a befektetés lenne a

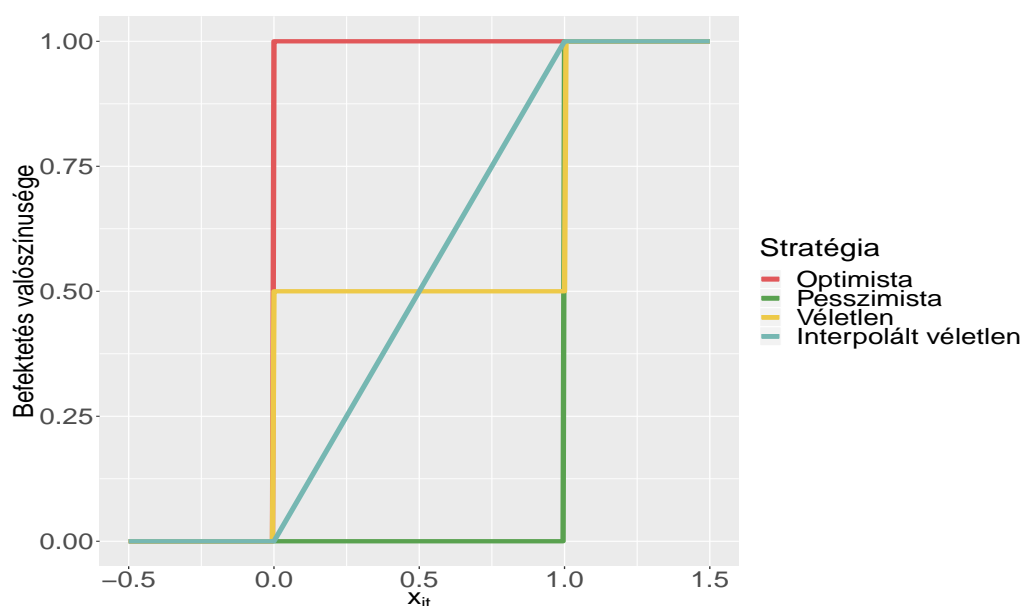
jellemzőbb stratégia. A 'rossz' egyensúly ennek ellentéte, negatív várakozások és öngeneráló módon általánosan rossz piaci helyzet jellemzi. Ekkor a nem befektetés lenne a jellemzőbb stratégia. Érdekes tehát megnézni, hogy mi történik, ha egy populációban többféle várakozással rendelkező játékos van jelen: nevezzük őket optimistáknak, illetve pesszimistáknak. Megvizsgálhatjuk, hogy milyen eredményeket érnek el azok a játékosok, akik valóban egyszerű véletlen alapján döntenek. Végül legyenek olyan játékosok is a populációban, akik bizonyos értelemben a fundamentumok szintjét követik, és ez alapján hozzák meg döntésüket. A következő stratégiákat definiáljuk a 0. szinten:

1. Optimista stratégia: a szürke tartományban mindig befektet.
2. Pesszimista stratégia: a szürke tartományban soha nem fektet be.
3. Véletlen stratégia: a szürke tartományban $p = \frac{1}{2}$ valószínűséggel fektet be.
4. Interpolált véletlen stratégia: a szürke tartományban véletlen döntés szerint fektet be, azonban nem mindenhol ugyanakkora valószínűséggel. A befektetés valószínűségét interpoláció határozza meg: mindig akkora valószínűséggel fektet be, amekkora a típusának értéke az adott t -ben. Ez a stratégia követi leginkább a fundamentumok szintjét abban az értelemben, hogy mivel a játékosok közötti szórás kicsi, x_{it} általában közel van a fundamentumok értékéhez. Így ha a befektetés valószínűségét x_{it} nagysága határozza meg, akkor jó közelítéssel a fundamentumok állapota határozza meg.

A 6.1 ábra szemlélteti a különböző (0. szintű) stratégiák definícióját: azt mutatja meg, hogy az egyes stratégiák követői mekkora valószínűséggel döntenek a befektetés mellett, az egyéni típusuk függvényében.

A fundamentális állapot pontosabb figyelembevétele érdekében meghatároztam egy újabb stratégiát (5.), amely szerint akkor választják a befektetést, ha $x_{it} > 0$ mellett $\theta_{t-1} > 1/2$ is teljesül. Nevezzük ezt fundamentális stratégiának. Ez a stratégia az optimistákhoz képest kevesebbszer, a pesszimistákhoz képest többször eredményez befektetést, a véletlen stratégiához képest pedig megfontoltabban dönt.

6.1. ábra. Stratégiák definiálása: a befektetés választásának valószínűsége a típus függvényében



Az interpolált stratégiához képest a fundamentális stratégia nem véletlenül dönt a fundamentumok állapota szerint, hanem egy jól definiált határ alapján hoz egy egyértelmű döntést. A kísérleteket úgy végeztem, hogy az interpolált véletlen stratégiát cseréltem le a fundamentálisra. Végül azt is megvizsgáltam, hogy mekkora különbséget eredményez, ha a fundamentumok értékét nem az előző időszaki, θ_{t-1} érték szerint vesszük figyelembe, hanem az x_{it} alapján. Kis σ értékek esetén ugyanis a játékosok közötti szórás kicsi és az x_{it} -k értékét nagyrészt a fundamentumok szintje határozza meg. Legyen tehát az utolsó (6.) stratégia szerint $x_{it} > 1/2$ esetén a döntés a befektetés, egyébként pedig nem befektetés.

6.2. Összehasonlítás és az eredmények értékelése

A következő bekezdésekben olyan kísérleteket írok le, amelyekben x_{it} -re a 0. szintű megválasztás, vagyis a 0 és 1 befektetési határok érvényesek, stratégiák alatt pedig a felsorolásban szereplő 1-4. stratégiákat értem.

Összehasonlítás homogén stratégiák esetén. Bár alapvetően stratégiák versenyét szeretnénk vizsgálni egy heterogén piacon, első lépésként érdemes az eredményeket úgy is összehasonlítani, hogy egy kísérletben csak egyféle stratégia van jelen. (Vagyis a száz játékos közül mindenki ugyanazt a stratégiát követi, és négy különböző kísérletet végzünk a négy stratégia szerint.) A korrekt összehasonlíthatóság érdekében a kísérleteket minden esetben ugyanazzal a véletlen mag beállítással végeztem.

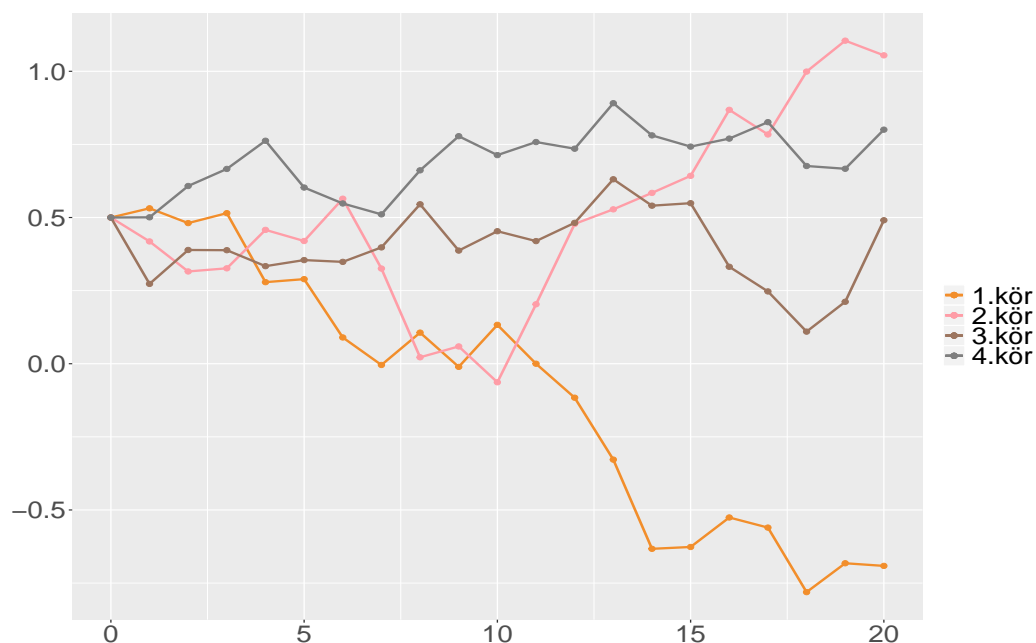
Az 1. táblázatban összegyűjtöttem négy különböző véletlenszám generálás mellett kapott eredményeket, illetve az ezer különböző véletlen kör átlagát, legkisebb - és legnagyobb értékét, továbbá szórását és a Monte Carlo hibát. A szórás itt valójában a fundamentumok különbözőségéből származik: nagyon más összesített nyereségek várhatók, ha a fundamentumok értéke végig magas, mint ha változékony vagy alacsony. Emiatt volt érdemes a diszkrét időpontok számát alacsonynak, a kísérletek ismétlésszámát pedig magasnak választani. Továbbá érdemes figyelembe venni a kísérlethez tartozó Monte Carlo hibát, amiből arra a kérdésre kaphatunk választ, hogy az átlagok értéke jól elkülön-e egymástól.

1. táblázat. A definiált stratégiák átlagos nyeresége homogén esetben

	Optimista	Pesszimista	Véletlen	Interpolált véletlen
1. kör	1.42	0.00	-1.16	-0.39
2. kör	9.62	1.75	2.07	3.88
3. kör	7.68	0.00	-0.84	-0.75
4. kör	14.03	0.04	2.31	6.23
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Átlag	10.42	3.40	3.60	5.42
Minimum	-1.78	0.00	-3.27	-2.04
Maximum	42.02	42.02	42.02	42.02
Szórás	7.73	6.86	7.56	8.02
MC hiba	0.24	0.22	0.24	0.25

A fentiek alapján a táblázat eredményeit az 6.2 ábrával együtt érdemes értelmezni. Az 1. körben például a fundamentumok változása csökkenő trendet mutat és több perióduson keresztül negatív értéket is felvesz, míg a 4. körben végig a 0.5-ös kiinduló szint felett marad. Ennek megfelelően minden stratégia nyeresége nagyobb a

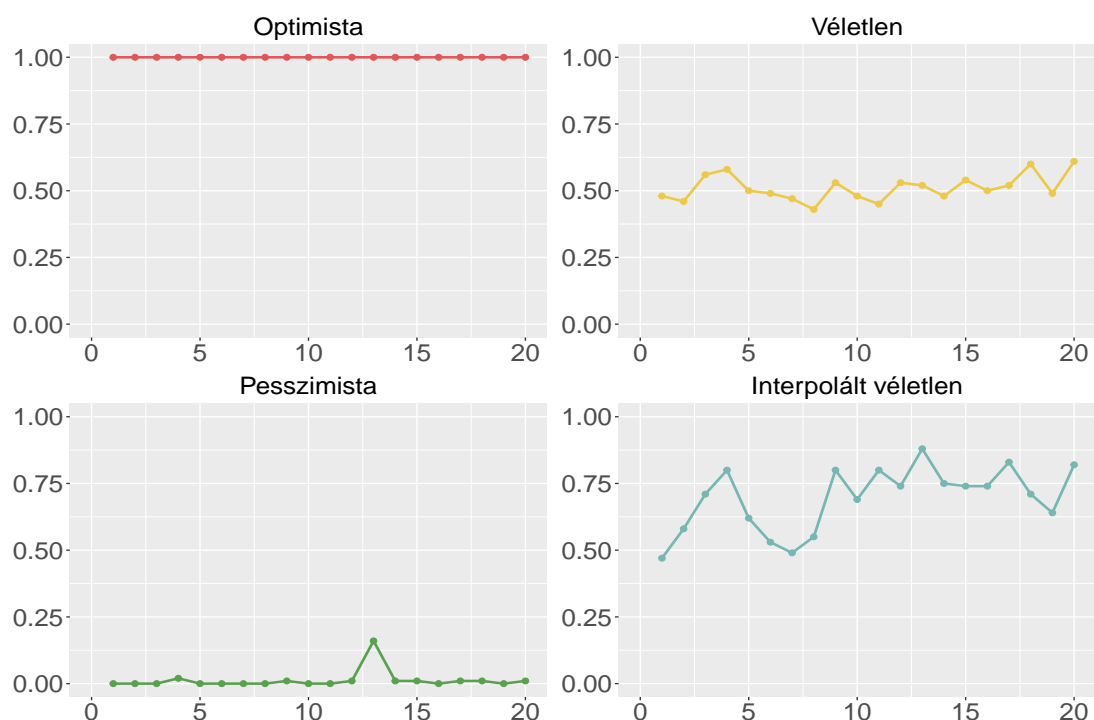
6.2. ábra. A fundamentumok értékének alakulása az első négy körben



4. körben, mint az elsőben. Továbbá mind az ábrázolt körökben, mind az ezer kör átlagában az optimista stratégia nyeresége a legnagyobb. Ez megfelel a várakozásoknak, hiszen optimista esetben a legnagyobb a várható befektetési arány. Érdekes még észrevenni, hogy a pesszimista és a véletlen stratégiát játszó játékosok átlagos nyeresége körülbelül ugyanannyi, viszont a pesszimista játékosok sosem veszítenek, míg a véletlen stratégiát követők jelentős negatív eredményt is elérhetnek. Továbbá észrevehetjük azt is, hogy az ezer kör alatt elért maximális nyereség megegyezik minden stratégiára: ennek pedig az az oka, hogy ha a fundamentumok értéke nagyon nagy (nagy pozitív sokk érte a rendszert), akkor onnantól mindenkinek megéri befektetni, a szürke tartománybeli stratégiájától függetlenül.

A 6.3 ábrán az α befektetési arány alakulása jelenik meg a homogén stratégiák esetében. A 4. kör eredményeit jelenítettem meg: ekkor a fundamentumok értéke végig a kiinduló szint felett van, azonban az 1-et nem éri el, így a különböző stratégiák szerint a befektetők végig különböző döntéseket hoznak egyedi kifizetés típusuk függvényében. A várakozásoknak megfelelően: az optimisták mindig befektettek, a pesszimisták befektetési aránya alig tért el a 0-tól, a véletlen stratégia

6.3. ábra. A befektetési arány alakulása a negyedik körben, homogén esetben a különböző stratégiák szerint



esetében a 0.5 körül mozog, az interpolált véletlen stratégia esetében pedig jól követi a fundamentumok értékének változását. Ez abból látszik, hogy 6.2 ábrán a 4. körbeli fundamentális folyamat az első négy lépésben felfelé mozdult, majd az ötödik időpontban kissé csökkent az értéke, majd két további csökkenés után ismét felfelé indul, és így tovább. A fundamentális folyamat ábrájáról leolvasott növekedéseket és csökkenéseket figyelhetjük meg a 6.3 ábra interpolált véletlen stratégiát mutató részábráján is.

Egyenlő arányban jelenlévő befektetők. A stratégiák homogén esetben történő összehasonlításához képest itt az a különbség, hogy az α befektetési arány más lesz a szereplők különbözősége miatt. Ez természetesen a stratégiák nyereségeit is befolyásolja. A 2. táblázat ezt a különbséget jeleníti meg az 1. táblázat eredménye-
ihez képest.

2. táblázat. A definiált stratégiák átlagos nyeresége heterogén esetben

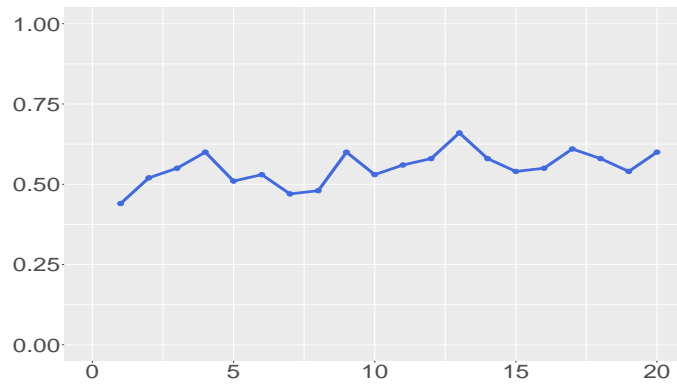
	Optimista	Pesszimista	Véletlen	Interpolált véletlen
1. kör	-2.70	0.00	-1.47	-0.38
2. kör	1.97	1.95	2.15	3.41
3. kör	-2.40	0.00	-1.28	-0.37
4. kör	5.14	0.29	2.67	3.97
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Átlag	3.56	3.65	3.64	4.85
Minimum	-7.83	0.00	-3.85	-1.38
Maximum	41.99	42.07	42.02	41.99
Szórás	8.71	6.97	7.72	7.57
MC hiba	0.28	0.22	0.24	0.24

Amit az összehasonlításból érdemes kiemelni az az, hogy az optimisták nyeresége jelentősen lecsökkent a befektetők különbözősége, és így a befektetési arány csökkenése miatt. A pesszimisták és a véletlen stratégiát követők eredménye lényegében nem változott az egyenlő arányú összetétel mellett. Az interpolált véletlen stratégia, amely a négy definiált stratégia közül a legjobban követi a fundamentumok értékváltozását, a legjobb átlagos eredményt érte el ebben a kísérletben (bár a homogén interpolált véletlen kísérlethez képest alacsonyabb az átlagos nyereség).

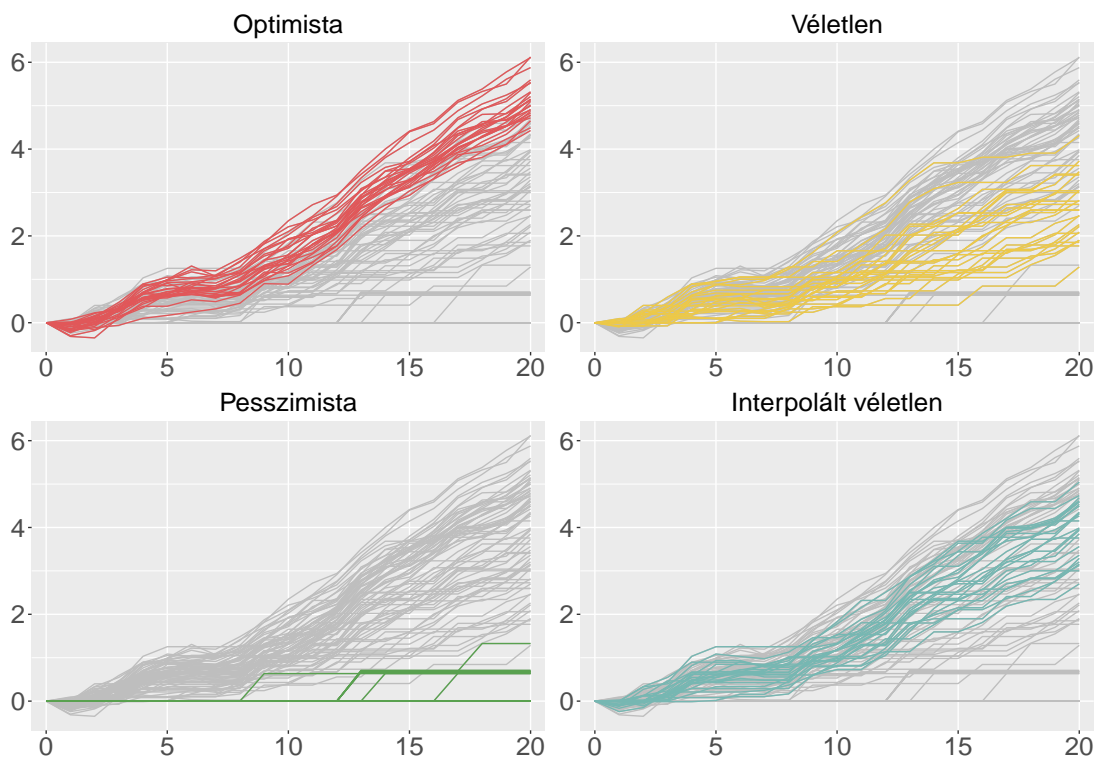
Az 6.4 ábrán az látható, hogy hogyan alakult a befektetési arány a heterogén, egyenlő arányú befektetők esetében. Az ábrázolt eredmény ugyanúgy a 4. kör eredménye, ahogyan az 6.3 ábra esetében volt. Továbbá a 6.5 ábra azt mutatja, hogy hogyan változott a száz játékos összes nyeresége együttesen, a különböző rész-ábrákon stratégiák szerint kiemelve a kiválasztott 4. körben a heterogén esetben. Látható, hogy a felfelé törekvő fundamentumok mellett szinte minden periódusban az optimisták kumulált nyeresége a legnagyobb. Érdemes azonban ezt összehasonlítani az 6.6 ábrával, ahol a 2. kör eredményeit jelenítettem meg. A 2. körben a fundamentumok változékonyabbak voltak, több körön keresztül lefelé irányuló trendet is mutattak. Ekkor az optimisták kumulált nyeresége hosszú ideig a leginkább veszteséges tartományban volt. A legnagyobb kumulált nyereségeket pedig végig az interpoláló stratégiát követő játékosok érték el. Az ábrák azért is érdekesek, mert jól szemléltetik, hogy az azonos stratégiát követő játékosok nyeresége hasonlóan alakul,

ugyanakkor a különböző stratégiák közötti eredmények jelentősen elkülönülnek.

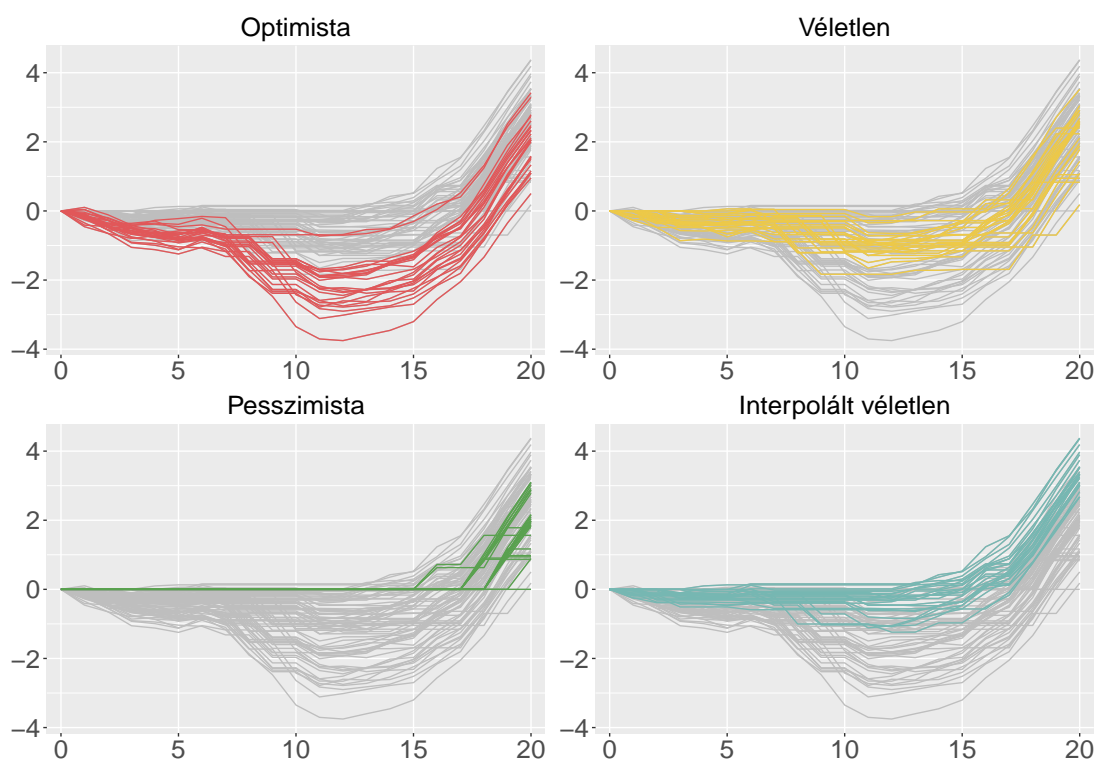
6.4. ábra. Az összes befektetési arány alakulása a negyedik körben, heterogén esetben



6.5. ábra. A játékosok összes nyereságának alakulása az idő függvényében (negyedik kör, heterogén egyenlő arányú stratégiák esetén)



6.6. ábra. A játékosok összes nyereségének alakulása az idő függvényében (második kör, heterogén egyenlő arányú stratégiák esetén)

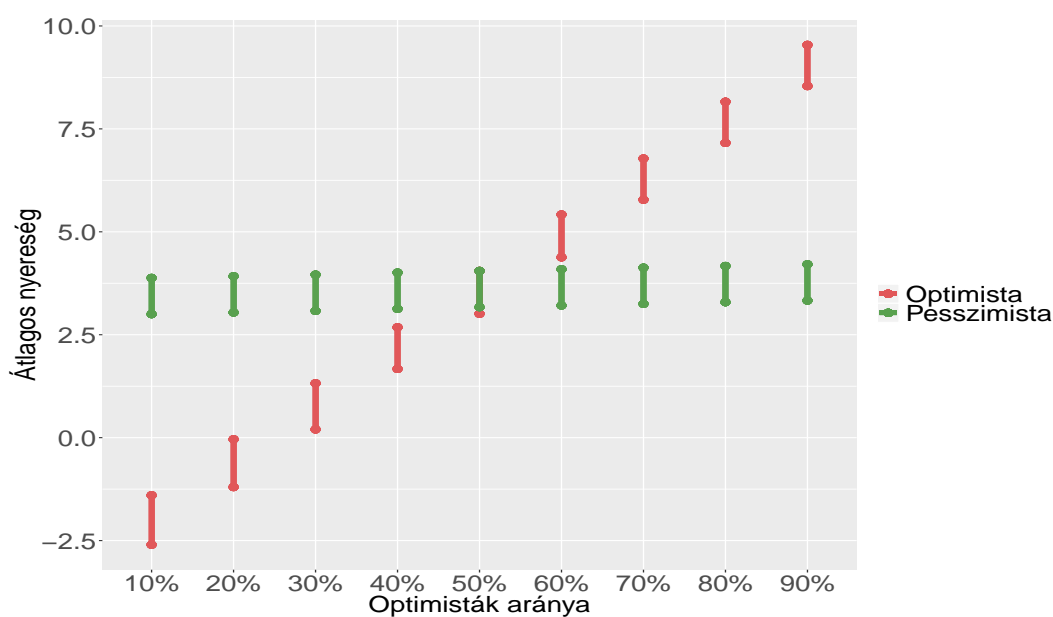


Optimisták és pesszimisták versenye. Most vizsgáljuk meg szimulációval részletesebben, hogy hogyan befolyásolja az eredményeket az optimizmus a modellben. A fejezet első szakaszában definiált stratégiák szerint az optimista játékos gyakorlatilag egyetlen határ alapján dönt: mindig befektet, hacsak nem biztos, hogy veszíteni fog. A pesszimista szintén egyetlen határ alapján dönt, de ő csak akkor fektet be, ha biztosan nem fog veszíteni. A homogén stratégiák összehasonlítása esetén azt láttuk, hogy az optimisták jelentősen jobb eredményeket érnek el a pesszimistáknál, heterogén piacon azonban a befektetési arány változása miatt az eredmény már nem ilyen egyértelmű. A 3. táblázatban összegyűjtöttem, hogy milyen eredményeket kapunk olyan kísérletekben, ahol a piacon csak optimisták és pesszimisták vannak, különböző arányban. A 6.7 ábra ugyanennek a táblázatnak az adatait jeleníti meg szemléletesen. A függőleges pálcikák minden esetben az átlag \pm a Monte Carlo hiba kétszerese értékeket jelölik.

3. táblázat. Optimisták és pesszimisták versenye különböző arányok mellett

Stratégiák aránya (O% - P%)	Optimista átlag	Optimista szórás	MC hiba	Pesszista átlag	Pesszista szórás	MC hiba
10% - 90%	-2.00	9.43	0.30	3.44	6.88	0.22
20% - 80%	-0.62	9.12	0.29	3.48	6.90	0.22
30% - 70%	0.76	8.84	0.28	3.52	6.92	0.22
40% - 60%	2.14	8.59	0.27	3.57	6.94	0.22
50% - 50%	3.53	8.36	0.26	3.61	6.95	0.22
60% - 40%	4.90	8.17	0.26	3.65	6.97	0.22
70% - 30%	6.28	8.01	0.25	3.69	6.99	0.22
80% - 20%	7.66	7.88	0.25	3.73	7.01	0.22
90% - 10%	9.04	7.77	0.25	3.77	7.03	0.22

6.7. ábra. Optimisták és pesszimisták átlagos nyereségének alakulása az optimisták arányának függvényében



Az eredményekből az látszik, hogy egy többségében pesszimista környezetben nem éri meg optimistának lenni: 50%-50% arány mellett még mindig a közel azonos az átlag, ráadásul a pesszimisták sosem veszíthetnek. Azonban ha többségben vannak az optimisták, azzal a saját nyereségüket jelentősen növelni tudják. A pesszimisták nyeresége is nő, ha nagyobb a befektetési arány a több optimista játékosnak

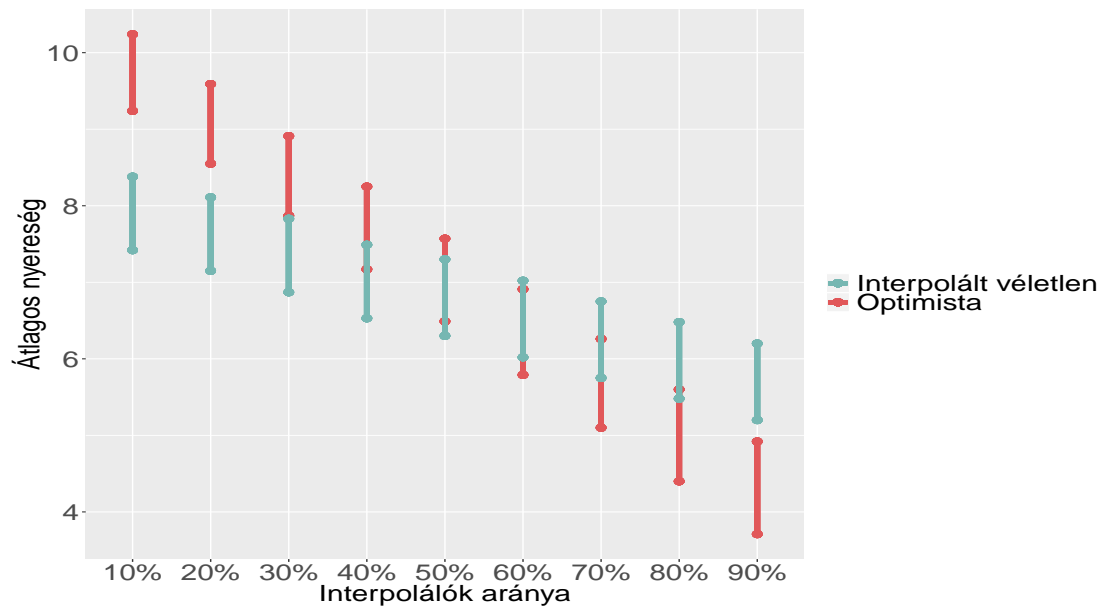
köszönhetően, azonban az ő nyereségükben sokkal kisebb, igazából nem szignifikáns eltérések figyelhetők meg az arányok változtatásával. Ez megfelel az előzetes várakozásoknak, hiszen a pesszimisták passzív játékosok: csak akkor fektetnek be, ha biztosan nem veszíthetnek. Ezzel kiküszöbölik a veszteség kockázatát, de nagy nyereségeket sem tudnak elérni átlagosnak mondható piaci körülmények között.

Interpoláló stratégiák részletesebb vizsgálata. Az eddig vizsgált kísérletekben azt láttuk, hogy az interpolált véletlen stratégia szerint döntő játékosok követték legjobban a fundamentumok értékének alakulását. Ez persze a stratégia definíciójából adódott. Érdekes megvizsgálni, hogy az ő nyereségüket mennyire befolyásolják az arányok: többet nyerhetnek-e, ha többen vannak, illetve változik-e a nyereségük más és más típusú játékosokkal szemben? Az előzetes várakozásunk az lehet, hogy ha a többi játékos egyenlő arányban van jelen, csak az interpolált véletlen stratégia arányát változtatjuk, akkor az interpolált stratégiát követők átlagos nyeresége nem különbözik szignifikánsan a kísérletekben. Ugyanakkor, ha nem azonos a többi szereplő aránya, akkor az α befektetési arány különbözősége miatt az interpolálók nyeresége is különböző lehet. A szimuláció az előzetes várakozásokat igazolta, az eredményeket a 4. táblázatban foglaltam össze, továbbá a 6.8 és 6.9 ábrákon jelenítettem meg.

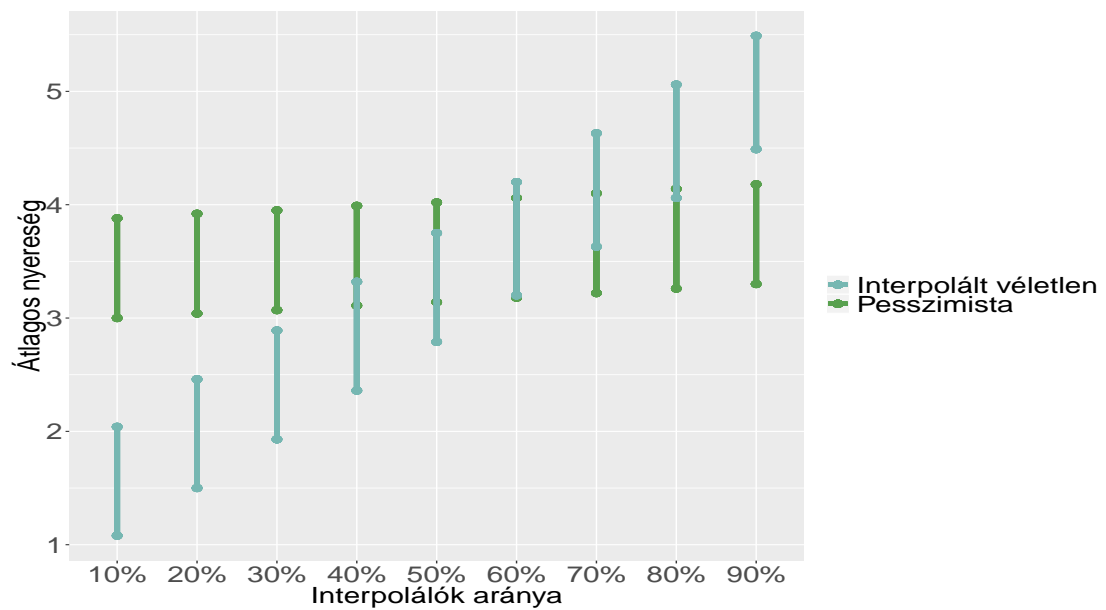
4. táblázat. Stratégiák átlagos nyeresége az interpolált stratégiát követők arányának változtatásával

Arány	Optimista	Pesszimista	Véletlen	Interpolált véletlen
1%	3.53	3.61	3.60	4.64
4%	3.53	3.61	3.61	4.68
7%	3.53	3.62	3.61	4.71
10%	3.54	3.62	3.62	4.73
13%	3.54	3.63	3.62	4.76
16%	3.54	3.63	3.63	4.78
19%	3.55	3.64	3.63	4.80
22%	3.55	3.64	3.63	4.82
25%	3.56	3.65	3.64	4.85
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100%	0.00	0.00	0.00	5.42

6.8. ábra. Optimisták és az interpolált stratégiát követők átlagos nyereségének alakulása az interpolált stratégiát követők arányának függvényében



6.9. ábra. Pesszimisták és az interpolált stratégiát követők átlagos nyereségének alakulása az interpolált stratégiát követők arányának függvényében



A 6.8 ábráról azt olvashatjuk le, hogy több optimista esetén a nagyobb befektetési arány miatt mind az optimisták, mind az interpolált stratégiát követők többet nyernek átlagosan. A 6.7 ábrával összehasonlítva azt is látjuk, hogy az optimisták nem veszítenek olyan sokat az interpolálók környezetében, mint a pesszimisták környezetében, amikor kisebbségben vannak. A 6.9 ábra alapján a pesszimisták ugyanannyit nyernek mind optimista környezetben, mind az interpoláló stratégiát játszóknak között. Az előzőek alapján nem meglepő, hogy az interpoláló stratégiát követők átlagosan nyereségesebbek optimista környezetben, mint pesszimista környezetben.

Nézzünk mostantól olyan kísérleteket, amelyekben az interpolált véletlen stratégiát (4.) a fundamentális stratégiára (5.) cseréltem.

Homogén fundamentális befektetők. Elsőként azt néztem meg, hogy milyen eredmények adódnának, ha minden játékos a fundamentális stratégiát követné. Az 5. táblázatot úgy kaptam, hogy az 1. táblázat eredményeihez hozzáfűztem az új stratégia eredményét. Látható, hogy a várható nyereséget (vagyis az átlagot) tekintve a fundamentális stratégia a második legjobb a tiszta optimista stratégia után. Ugyanakkor a fundamentális stratégiát követők legnagyobb átlagos vesztesége jelentősen kisebb, mint a többi stratégiáé, a pesszimistákat kivéve, akik definíció szerint nem veszíthetnek. Ebben az értelemben a fundamentális stratégiát nevezhetjük a legjobbnak az eddig vizsgáltak közül.

Egyenlő arányban jelenlévő befektetők ismét. Ebben a kísérletben az interpolált véletlen stratégiát követő játékosokat a fundamentális stratégiát követőkre cseréltem és így vizsgáltam egy négy stratégiából álló, egyenlő arányú populációt. A 6. táblázat ennek a kísérletnek az eredményeit foglalja össze. Ha az itt látott értékeket összehasonlítjuk a 2. táblázat eredményeivel, akkor ismét arra a következtetésre juthatunk, hogy a fundamentális stratégia a legjobb. A többi három stratégia eredményét ugyanis lényegében nem befolyásolta a negyedik stratégia megváltoztatása, ugyanakkor a fundamentális stratégiát követők jelentősen jobb eredményeket értek

5. táblázat. A definiált stratégiák átlagos nyeresége homogén esetben, a fundamentális stratégiát is figyelembevéve

	Optimista	Pesszimista	Véletlen	Interpolált véletlen	Fundamentális
1. kör	1.42	0.00	-1.16	-0.39	0.75
2. kör	9.62	1.75	2.07	3.88	6.39
3. kör	7.68	0.00	-0.84	-0.75	1.80
4. kör	14.03	0.04	2.31	6.23	13.54
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Átlag	10.42	3.40	3.60	5.42	8.20
Minimum	-1.78	0.00	-3.27	-2.04	-0.13
Maximum	42.02	42.02	42.02	42.02	42.02
Szórás	7.73	6.86	7.56	8.02	8.07
MC hiba	0.24	0.22	0.24	0.25	0.26

el az interpolált stratégiát követőknél.

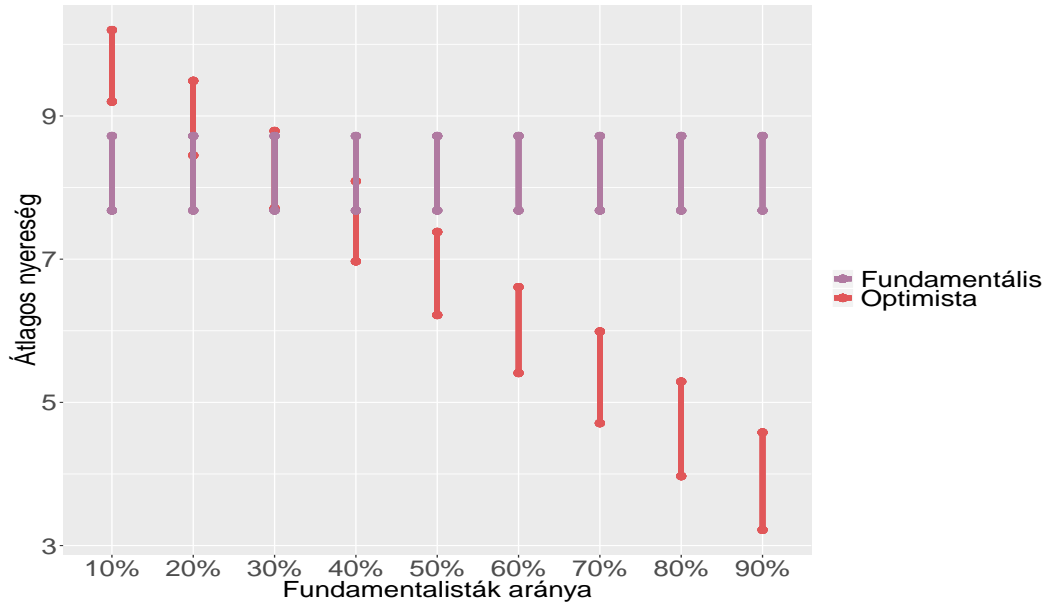
6. táblázat. A definiált stratégiák átlagos nyeresége heterogén esetben, a fundamentális stratégiát is figyelembevéve

	Optimista	Pesszimista	Véletlen	Fundamentális
1. kör	-2.86	0.00	-1.56	0.06
2. kör	1.36	1.95	1.85	4.09
3. kör	-3.35	0.00	-1.85	0.26
4. kör	6.46	0.31	3.37	6.42
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Átlag	3.44	3.66	3.58	5.74
Minimum	-8.60	0.00	-4.22	-0.27
Maximum	41.98	42.07	42.02	41.99
Szórás	8.96	6.98	7.81	7.48
MC hiba	0.28	0.22	0.25	0.24

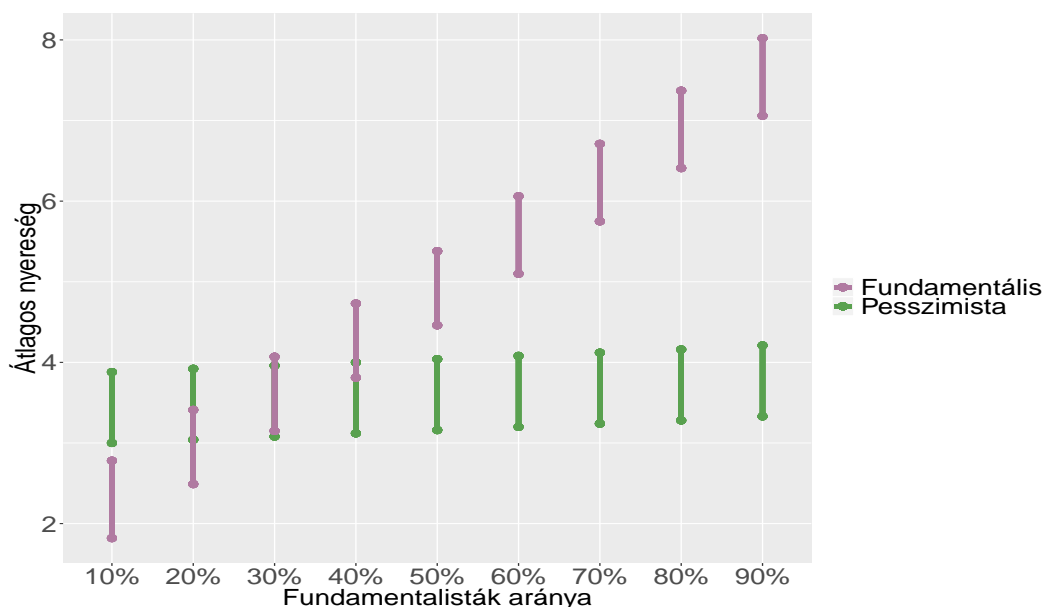
Fundamentálisok optimista illetve pesszimista környezetben. A fentiekben megvizsgáltam, hogy az akkor legjobbnak gondolt interpolált véletlen stratégiák eredményét hogyan befolyásolja az optimista, illetve pesszimista környezet. Most ugyanezt a kérdést szeretném megvizsgálni, az interpoláló véletlen stratégiát a fundamentálisra cserélve. A 6.10 ábrát a 6.8 ábrával, 6.11 ábrát pedig a 6.9 ábrával

érdekes összehasonlítani. Az optimistákkal való összehasonlításban az látszik, hogy a fundamentális stratégiát követők a populáció minden összetétele mellett ugyanannyit nyernek. Ez az eredmény azzal magyarázható, hogy ők döntésüket egy a fundamentumok szintjétől függő egyértelmű, jól definiált határ alapján hozzák meg. Mivel kis σ érték esetén az egyéni eredmények közel vannak a fundamentumok szintjéhez, így a fundamentalisták nagy többsége számára ugyanaz a döntés racionális. Emiatt a befektetési arány nem igazán játszik szerepet: ha a nem befektetés racionális a fundamentalistáknak, akkor úgyszólván 0 a nyereségük, függetlenül attól, hogy a többiek befektetnek-e; ha a befektetés racionális, akkor pedig ők is, és az optimisták is befektetnek, ez sem befolyásolja az eredményt bármi legyen is a populáció aránya. A pesszimistákkal való összehasonlításban, tehát egy más összetételű piacon viszont már nem tudnak mindig ugyanolyan jó eredményt elérni, hiszen a fenti érvelés itt már nem igaz, és a pesszimisták okozta alacsonyabb befektetési arány ronthat a fundamentalisták eredményein. Ugyanakkor a fundamentalisták átlagosan jobb eredményeket érnek el, mint az interpolálók.

6.10. ábra. Optimisták és a fundamentális stratégiát követők átlagos nyereségének alakulása a fundamentális stratégiát követők arányának függvényében



6.11. ábra. Pesszimisták és a fundamentális stratégiát követők átlagos nyereségének alakulása a fundamentális stratégiát követők arányának függvényében



Utolsó kísérletként azt szeretném bemutatni, hogy mi történik akkor, ha egy újabb, egyetlen határ alapján döntő stratégiát definiálunk, mely szerint a befektetést választja a játékos, ha $x_{it} > 1/2$ és nem fektet be, ha $x_{it} \leq 1/2$ (6. stratégia).

Egyéni típus mint határ, a fundamentális stratégiával összehasonlítva. A többségi viselkedés vizsgálatokor Morris és Yildiz (2016) [13] azzal érveltek, hogy kis σ érték esetén közel az összes játékos a többség számára racionális stratégiát követi. Ez azért van így, mert kis σ esetén a játékosok közötti szórás kicsi és az x_{it} típusok közel vannak a fundamentumok értékéhez. A kísérlet eredménye is igazolta ezt az érvelést: valóban nem látszik lényeges különbség az $x_{it} > 1/2$ alapján befektető és a $\theta_{t-1} > 1/2$ alapján befektető játékosok között. Elvileg ugyan van különbség, hiszen az egyik esetben t -beli, a másik esetben $t - 1$ -beli információ alapján döntünk, melyek között – éppen egy nagy fundamentális sokk bekövetkezése esetén – jelentős különbség lehet. Ez azonban csak egyetlen t -ben okozhat problémát. A 7. táblázatban a homogén esetben kapott eredmények szerepelnek. Ezt a táblázatot úgy kaptam, hogy a 5. táblázathoz hozzáfűztem az új stratégia eredményét. To-

vábbbá ismét elvégeztem a heterogén, egyenlő arányú kísérletet, ezúttal optimista, pesszimista, véletlen és az $x_{it} > 1/2$ (1., 2., 3. és 6.) stratégiát követő játékosokkal. Ennek a kísérletnek az eredményeit a 8. táblázat tartalmazza.

7. táblázat. A definiált stratégiák átlagos nyeresége homogén esetben, a fundamentális stratégiát és az egyéni típust mint határt is figyelembevéve

	Optimista	Pesszimista	Véletlen	Interpolált véletlen	Fundamentális	Egyéni határ
1. kör	1.42	0.00	-1.16	-0.39	0.75	0.22
2. kör	9.62	1.75	2.07	3.88	6.39	5.86
3. kör	7.68	0.00	-0.84	-0.75	1.80	0.57
4. kör	14.03	0.04	2.31	6.23	13.54	12.17
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Átlag	10.42	3.40	3.60	5.42	8.20	7.65
Minimum	-1.78	0.00	-3.27	-2.04	-0.13	-0.36
Maximum	42.02	42.02	42.02	42.02	42.02	42.02
Szórás	7.73	6.86	7.56	8.02	8.07	8.26
MC hiba	0.24	0.22	0.24	0.25	0.26	0.26

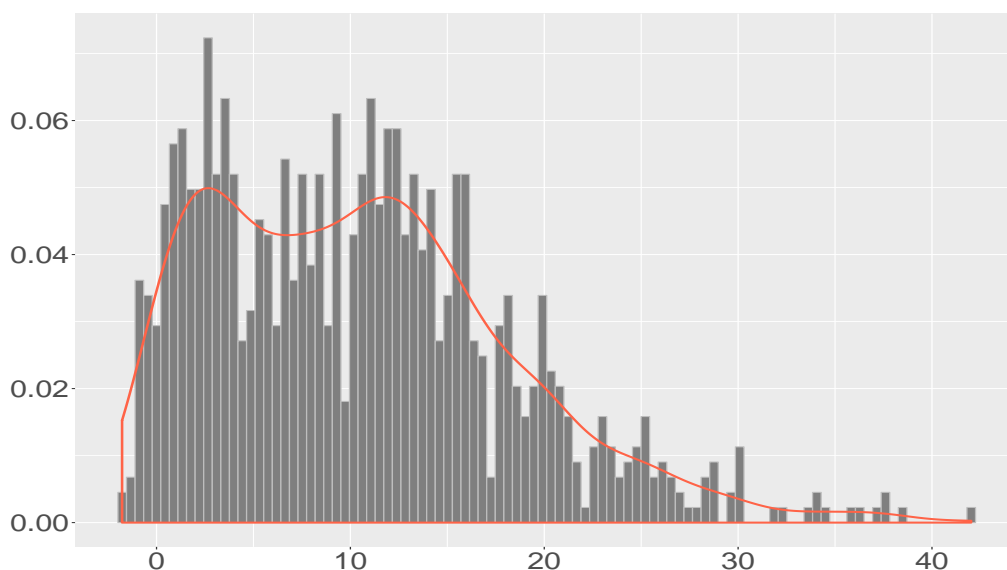
8. táblázat. A definiált stratégiák átlagos nyeresége heterogén esetben, a fundamentális stratégiát és az egyéni típust mint határt is figyelembevéve

	Optimista	Pesszimista	Véletlen	Fundamentális
1. kör	-2.98	0.00	-1.64	0.12
2. kör	1.69	1.95	2.01	4.29
3. kör	-3.08	0.00	-1.66	0.54
4. kör	6.22	0.31	3.24	6.12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Átlag	3.56	3.66	3.64	5.87
Minimum	-8.52	0.00	-4.21	-0.06
Maximum	41.98	42.07	42.02	41.99
Szórás	8.97	6.98	7.82	7.51
MC hiba	0.28	0.22	0.25	0.24

Egy empirikus teszt az átlagos nyereségek robusztusságára. A fent bemutatott kísérletekben – a korábban már ismertetett választások alapján – az átlagos nyereségek a következőképpen adódtak. Először a száz játékos közül az azonos stratégiát követők nyereségét kiátlagoltam: ez egy kör eredménye. Ezután kiátlagoltam

ezer ilyen véletlen kör átlagos eredményeit is. Erre azért volt szükség, mert a körök közötti szórás a fundamentumokban megjelenő nagy sokkok miatt magas, egy ezer fordulás szimuláció átlaga azonban már általában jó közelítést szokott adni a várható értékekre, például Monte Carlo szimuláció esetén. Most azonban a nyereség eloszlására vonatkozóan nem tudunk egzakt matematikai formulákat felírni. Az $E(u(\alpha_t, x_{it})\alpha_t)$ várható értéket keresnénk, ha egy kör várható nyereségét szeretnénk meghatározni, ennek a stratégiák szerint kiszámolása és összehasonlítása lenne a feladat. Ebben egyrészt problémás az, hogy az x_{it} folyamat minden körben normális eloszlású és t-eloszlású valószínűségi változók hozzáadásával fejlődik, másrészt az is, hogy az α_t várható értéke a populáció összetételétől és az x_{it} -k várható értékétől is függ. Mennyire jók tehát a kapott átlagok a stratégiák tényleges összehasonlítására? Ezt szintén szimulációval vizsgáltam meg.

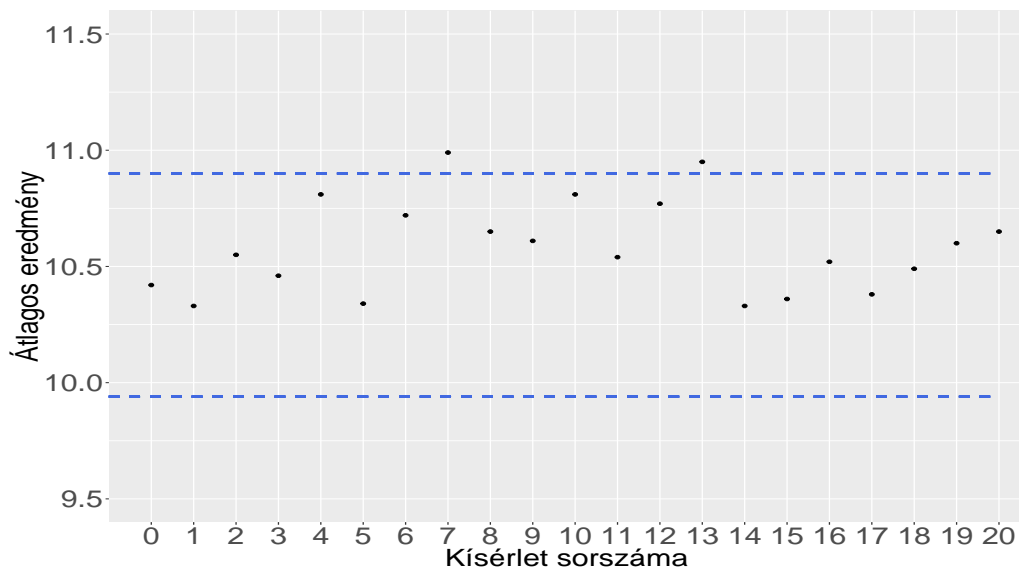
6.12. ábra. A tiszta optimista kísérlet átlagos nyereségeinek hisztogramja



A 6.12 ábrán a fentiekben bemutatott homogén optimista kísérlet eredményeinek hisztogramja látható (az eredményeket az 1. táblázat tartalmazza). Annak ellenére azonban, hogy az elméleti eloszlást nem tudjuk megadni, az átlag elég jó mérőszám a stratégia eredményességének becslésére. Ezt szemlélteti a 6.13 ábra, melyen ugyanennek a kísérletnek más véletlenszám-generálások mellett kapott átlagai láthatók. A \pm a Monte Carlo hiba (azaz a tapasztalati szórás / mintaelemszám gyöke) kétszerese

intervallum normális eloszlású minta esetén azt mutatná meg, hogy milyen intervallumba esik az átlag 95% valószínűséggel. Ez a minta nem normális eloszlású ugyan, de a 6.13 ábrán látható, hogy az ezer megfigyelés átlaga valóban jó közelítéssel ebbe az intervallumba esik különböző független kísérletek elvégzése esetén.

6.13. ábra. A tiszta optimista kísérlet átlagos nyereségei különböző véletlenszám-generálások mellett



Az eredmények értékelése. A bemutatott kísérletekben jól megfigyelhetőek voltak mindazok a jellemzők, amelyeket a 3. fejezetben az evolúciós pénzügyi modellekre vonatkozóan ismertettem. Speciálisan igaz, hogy nem sikerült egy egyértelmű 'legjobb stratégia' meghatározása, hanem a racionalitást egy feltételes tulajdonságként értelmezhetjük a piac összetételére, mint feltételre nézve. A fentiekben leírt összes kísérlet közül a legnagyobb átlagos nyereséget a homogén összetételű, optimista stratégiát követő populáció érte el. Azonban láttuk, hogy más összetételek esetén nem mindig jobbak az optimisták az átlagnál, sőt, egy többségében pesszimista környezetben kifejezetten nagy veszteséget is elszenvedhetnek. Ezzel szemben a pesszimisták sosem veszteségesek, viszont még jónak mondható piaci körülmények között sem tudnak kiemelkedő eredményeket elérni: az ő átlagos nyereségük minden kísérletben, mindenféle populáció mellett lényegében ugyanannyi volt. Negatívumként tudható be továbbá, hogy passzív stratégiájjukkal más játékosok nyereségét is

csökkentik. Ez jól látható összhangban a valósággal: optimista várakozások esetén, a már korábban idézett 'jó egyensúlyban' általános pozitív várakozások jellemzőek, a hitelek kamatai alacsonyak, a fiskális politika fenntartható, a befektetési kedv magas, és a befektetett vagyon jól megtérül. Ha azonban az általános várakozásokra ennek ellentéte jellemző, vagyis 'rossz egyensúlyban' van a gazdaság, akkor kevesebben fektetnek be, félve attól, hogy pénzük nem térül meg. Aki mégis befektet, annak eredményei – öngeneráló módon – sokkal rosszabbak. A kísérletekben látott teljesen véletlen stratégiát nem volt érdemes követni, inkább csak a szemléltetést szolgálta. Az interpolált véletlen stratégiáról láttuk, hogy átlagban jól követi a fundamentumok értékváltozását, így az első három definiált stratégiához képest (optimista, pesszimista, véletlen) 'okosabbnak' mondható. Azonban a véletlen faktor miatt nem teljesített olyan jól, mint az $x_{it} > 1/2$ vagy $\theta_{t-1} > 1/2$ esetén befektetők, azonos körülmények (vagyis azonos véletlenszám generálások) mellett. A leginkább stabilnak az $x_{it} > 1/2$ vagy $\theta_{t-1} > 1/2$ esetén befektető stratégiát nevezhetjük abban az értelemben, hogy ők azok, akik jó piaci körülmények között a leginkább megközelítik az optimistákat (homogén esetben), azonban rossz piaci körülmények között vagy heterogén esetben sem veszítettek túl sokat a bemutatott kísérletekben. Nem véletlenül, hiszen Morris és Yildiz (2016) [13] eredményében is hasonló feltétel jelenik meg, ott azonban $\theta_t > 1/2$ szerepel, ami viszont közvetlenül nem megfigyelhető.

Fontos hangsúlyozni, hogy a fent ismertetett eredmények általam meghatározott kísérletek szimulációs eredményei, melyek azt a célt szolgálták, hogy a bemutatott modell meg nem válaszolt kérdéseit közelebbről megvizsgálják, továbbá, hogy a modellen keresztül az evolúciós pénzügyek területéről szemléletesebb képet adjanak. Konkrétan arra a kérdésre szerettem volna választ kapni, hogy milyen döntéseket érdemes hozni azokban a helyzetekben, amikor nem létezik a modellben domináns stratégia. Természetesen a felsoroltakon túl más stratégiák is elképzelhetők, más piaci összetételek is definiálhatók és más kezdeti paraméterek is megadhatók, melyek végeredményként más és más számértékeket (átlagos nyereséget) rendelnének a kísérletekhez. Szakdolgozatomban azonban azokra az esetekre igyekeztem koncentrálni, amikor a stratégiák különbözősége jól megfigyelhető – tehát az esetek nagy részében valóban a nem dominált szakaszon mozog a fundamentumok értéke –, továbbá a kapott eredményeknek közgazdasági tartalma is van.

7. fejezet

Összegzés

Szakedolgozatom egyik célja az volt, hogy bemutassa az evolúciós pénzügyek témakörének jellemzőit: az 1., bevezető fejezetben ismertettem az ezen szándék mögött meghúzódó motivációt. Következő lépésként a 2. fejezetben definiáltam a szükséges játékelméleti fogalmakat, hiszen a játékelmélet fontos és jól használható eszköztárat biztosít az evolúciós pénzügyi modellek leírásához. Az evolúciós pénzügyek tényleges bemutatására ezek után a 3. fejezetben került sor. A közös jellemzők mellett konkrét modelleket és eredményeket is ismertettem annak érdekében, hogy pontosabb képet adhassak erről a kutatási területről és a felmerülő kérdésekről. Külön, a 4. fejezetben mutattam be Morris és Yildiz (2016) [13] modelljét, hiszen szakedolgozatom másik célja az volt, hogy ezt a kiválasztott modellt alaposabban megvizsgálja. A modellben a szerzők arra keresték a választ, hogy a különböző típusú szereplők befektetési szándékát hogyan befolyásolják a rendszert érő nagy sokkok és a saját eredményükről alkotott elképzelésük egy Bayes-típusú játékban. Azt a kérdést igyekeztek megválaszolni, hogy milyen kifizetési típusok mellett létezik domináns stratégia a modellben. Azonban – az evolúciós pénzügyekre és a heterogén szereplős piacokat leíró modellekre jellemzően – vannak a modellben úgynevezett nem dominált szakaszok, amelyekben mindkét döntés racionális lehet. Ezeket a szakaszokat vizsgáltam a dolgozat további részében szimulációval. Az 5. fejezet a szimuláció előkészítését tartalmazza: a paraméterek megválasztásának és

a kísérletek beállításának szempontjait gyűjtöttem itt össze, továbbá a paraméterek fejlődését szemléltető ábrákkal igyekeztem a modellt még alaposabban bemutatni. A 6. fejezet a szimulációs eredményeket tartalmazza. Arra kerestem a választ, hogy milyen egyszerű stratégiákat lehet definiálni a nem dominált szakaszokon, illetve ezek a stratégiák hogyan teljesítenek egymáshoz képest a kiválasztott modellben. Munkámat a kapott eredmények értékelésével zártam.

Irodalomjegyzék

- [1] Alos-Ferrer, C., Ania, A. B., 2005. *The asset market game*. Journal of Mathematical Economics 41, pp. 67-90.
- [2] Amir, R., Evstigneev, I. V., Hens, T., Schenk-Hoppe, K. R., 2005. *Market selection and survival of investment strategies*. Journal of Mathematical Economics 41, pp. 105-122.
- [3] Angletos, G.-M., Werning, I., 2006. *Crises and Prices - Information Aggregation, Multiplicity and Volatility*. The American Economic Review 96. No. 5, pp. 1720-1736.
- [4] Bacchetta, P., van Wincoop, E., 2003. *Can Information Heterogeneity Explain the Exchange Rate Determination Puzzle?* NBER Working Paper No. 9498
- [5] Brock, W. A., Hommes, C. H., Wagener, F. O. O., 2005. *Evolutionary dynamics in markets with many trader types*. Journal of Mathematical Economics 41, pp. 7-42.
- [6] De Long, J. B., Shleifer, A., Summers, L. H., Waldmann, R. J., 1990. *Noise trader risk in financial markets*. Journal of Political Economy 98, pp. 703-738.
- [7] Evstigneev, I. V., Hens T., Schenk-Hoppé, K. R., 2008. *Evolutionary Finance*. Swiss Finance Institute Research Paper Series N° 08-14.
- [8] Fama, E. F., 1970. *Efficient capital markets: a review of theory and empirical work*. Journal of Finance 25, pp. 383-417.

- [9] Föllmer, H., Horst, U., Kirman, A. P., 2005. *Equilibria in financial markets with heterogeneous agents: a probabilistic perspective*. Journal of Mathematical Economics 41, pp. 123-155.
- [10] Hens, T., Schenk-Hoppé, K. R., 2005. *Evolutionary Finance: introduction to the special issue*. Journal of Mathematical Economics 41, pp. 1-5.
- [11] Hens, T., Schenk-Hoppé, K. R., 2005. *Evolutionary stability of portfolio rules in incomplete markets*. Journal of Mathematical Economics 41, pp. 43-66.
- [12] Klinger, D., Levy, O., Sonsino, D., 2003. *On absolute and relative performance and the demand for mutual funds – experimental evidence*. Journal of Economic Behavior and Organization 52, pp. 341-363.
- [13] Morris, S., Yildiz, M., 2016. *Crises: Equilibrium Shifts and Large Shocks*. MIT Department of Economics Working Paper No. 16-13
- [14] Ordóñez, G., 2006. február 1. *Notes on Bayesian Games*.
<https://www.sas.upenn.edu/~ordonez/pdfs/ECON%20201/NoteBAYES.pdf>
- [15] Király, T., Pap, J., Végh, L., 2018. november 28. *Játékelmélet jegyzet*.
http://tkiraly.web.elte.hu//students/jatekelmelet_jegyzet.pdf

A. függelék

R kódok

```
library("ggplot2")
library("Rmisc")
library("reshape")
library("gghighlight")
library("gridExtra")

#####      Jatek szimulalasa kiserletenkent      #####

players_no = 100; rounds_no = 20; kmax = 1000

### Kiserletek osszetetelenek meghatarozasa
# c(optimista, pesszimista, veletlen, interpolalt veletlen)
allOpt <- c(100, 0, 0, 0); allPes <- c(0, 100, 0, 0)
allRnd <- c(0, 0, 100, 0); allIntRnd <- c(0, 0, 0, 100)
equal <- c(25, 25, 25, 25); IntRndMinor <- c(33, 33, 33, 1)
IntRndMinor2 <- c(32, 32, 32, 4); IntRndMinor3 <- c(31, 31, 31, 7)
OptPes1 <- c(10, 90, 0, 0); OptPes2 <- c(20, 80, 0, 0)
OptPes3 <- c(30, 70, 0, 0); OptPes4 <- c(40, 60, 0, 0)
OptPes5 <- c(50, 50, 0, 0); OptPes6 <- c(60, 40, 0, 0)
OptPes7 <- c(70, 30, 0, 0); OptPes8 <- c(80, 20, 0, 0)
OptPes9 <- c(90, 10, 0, 0); IntRndMinor4 <- c(30, 30, 30, 10);
```

```

IntRndMinor5 <- c(29, 29, 29, 13); IntRndMinor6 <- c(28, 28, 28, 16);
IntRndMinor7 <- c(27, 27, 27, 19); IntRndMinor8 <- c(26, 26, 26, 22);
OptInt1<-c(90,0,0,10); OptInt2<-c(80,0,0,20); OptInt3<-c(70,0,0,30);
OptInt4<-c(60,0,0,40); OptInt5<-c(50,0,0,50); OptInt6<-c(40,0,0,60);
OptInt7<-c(30,0,0,70); OptInt8<-c(20,0,0,80); OptInt9<-c(10,0,0,90);
PesInt1<-c(0,90,0,10); PesInt2<-c(0,80,0,20); PesInt3<-c(0,70,0,30);
PesInt4<-c(0,60,0,40); PesInt5<-c(0,50,0,50); PesInt6<-c(0,40,0,60);
PesInt7<-c(0,30,0,70); PesInt8<-c(0,20,0,80); PesInt9<-c(0,10,0,90);
trialDef <- list(allOpt, allPes, allRnd, allIntRnd, equal, IntRndMinor,
                IntRndMinor2, IntRndMinor3, OptPes1, OptPes2, OptPes3,
                OptPes4, OptPes5, OptPes6, OptPes7, OptPes8, OptPes9,
                IntRndMinor4, IntRndMinor5, IntRndMinor6, IntRndMinor7,
                IntRndMinor8, OptInt1,OptInt2, OptInt3, OptInt4, OptInt5,
                OptInt6,OptInt7,OptInt8,OptInt9,PesInt1,PesInt2,PesInt3,
                PesInt4, PesInt5, PesInt6, PesInt7, PesInt8, PesInt9)

settingAvgResult <- list(); settingStdResult <- list()
settingOptAvg <- list(); settingPesAvg <- list()
settingRndAvg <- list(); settingIntRndAvg <- list()

for (def in 1:length(trialDef)){
  trial <- list()
  trialAvgResult <- c(); trialStdResult <- c()
  trialOptAvg <- c(); trialPesAvg <- c()
  trialRndAvg <- c(); trialIntRndAvg <- c()

  n = 123
  set.seed(n)

  # k-szor futtatunk minden beallitassal
  # A beallitas jelent esetben a strategiak osszetetele
  # A seedet a minden osszetetel valasztas elejen beallitjuk
  for (k in 1:kmax){

    ### Strategiak hozzarendeles a jatekosokhoz kiserletenkent

```

```

playerDef <- c()
for (i in 1:players_no){
  playerDef[i] <- runif(1, 0, 1)
}
randomSort <- sort(playerDef, decreasing = FALSE)
boundaryOpt <- randomSort[trialDef[[def]][1]]
boundaryPes <- randomSort[trialDef[[def]][1] + trialDef[[def]][2]]
boundaryRnd <- randomSort[trialDef[[def]][1] + trialDef[[def]][2]
  + trialDef[[def]][3]]
boundaryRndInt <- randomSort[trialDef[[def]][1] + trialDef[[def]][2]
  + trialDef[[def]][3] + trialDef[[def]][4]]

### Parameterek: kozos
theta0 <- 0.5
sigma <- 0.1

# A veletleneket vektorban taroljuk
eta <- c(); theta <- c(); alpha <- c()

# Elso fordulo manualisan, tovabbiak ciklusban
eta[1] <- rt(n = 1, df = 3)
theta[1] <- theta0 + sigma*eta[1]

### Parameterek: egyedi
### 1000 jatekos

eps <- rnorm(n = players_no, mean = 0, sd = 1)
type <- theta[1] + sigma*eps
z <- (type - theta0)/sigma
collectData=data.frame("strategy"=playerDef, "start"=0, "eps"= eps,
  "type" = type, "z" = z)

if (length(boundaryOpt) == 0){
  boundaryOpt = 0
}

```

```

if (length(boundaryPes) == 0){
  boundaryPes = 0
}
if (length(boundaryRnd) == 0){
  boundaryRnd = 0
}
if (length(boundaryRndInt) == 0){
  boundaryRndInt = 0
}

for (i in 1:players_no){
  if (collectData[i, "strategy"] <= boundaryOpt){
    collectData[i, "strategy"] = "optimista"
  }
  else if (collectData[i, "strategy"] > boundaryOpt &
    collectData[i, "strategy"] <= boundaryPes){
    collectData[i, "strategy"] = "pesszimista"
  }
  else if (collectData[i, "strategy"] > boundaryPes &
    collectData[i, "strategy"] <= boundaryRnd){
    collectData[i, "strategy"] = "veletlen"
  }
  else if (collectData[i, "strategy"] > boundaryRnd){
    collectData[i, "strategy"] = "intVeletlen"
  }
}

# A strategiákat elmentjük, mert időben nem változnak
strategy <- unlist(collectData["strategy"], use.names = FALSE)

# Egyenletes eloszlású véletlen szám generálása
for (i in 1:players_no){
  collectData[i, "rndNum"] = runif(1,0,1)
}

### 0. szint: x* = 0, x** = 1

```

```

x_star = 0; x_2star = 1
collectData["action"] = -1
collectData$action = ifelse(collectData$type < x_star, "nembef",
                           ifelse(collectData$type>x_2star,"bef",-1))

# Akciok megvalasztasa strategiak szerint
for (i in 1:players_no){
  if (collectData[i,"action"] == -1 &
      collectData[i,"strategy"]=="optimista"){
    collectData[i, "action"] = "bef"
  }
  else if (collectData[i,"action"] == -1 &
           collectData[i,"strategy"]=="pesszimista"){
    collectData[i, "action"] = "nembef"
  }
  else if (collectData[i,"action"] == -1 &
           collectData[i,"strategy"]=="veletlen"){
    if (collectData[i, "rndNum"] < 0.5){
      collectData[i, "action"] = "bef"
    }
    else {collectData[i, "action"] = "nembef"}
  }
  else if (collectData[i,"action"] == -1 &
           collectData[i,"strategy"]=="intVeletlen"){
    if (collectData[i, "rndNum"] < collectData[i, "type"]){
      collectData[i, "action"] = "bef"
    }
    else {collectData[i, "action"] = "nembef"}
  }
}

alpha[1] <- sum(collectData$action == "bef") / nrow(collectData)
collectData$payoff = ifelse(collectData$action == "bef",
                           collectData$type + alpha[1] - 1, 0)
collectData$result = collectData$start + collectData$payoff

```

```

### Fordulok tarolasara szolgalo lista
allRounds <- list()
allRounds[[1]] <- collectData

### Innentol ciklusban megy a jatek
for (t in 2:rounds_no){
  eta[t] <- rt(n = 1, df = 3)
  theta[t] <- theta[t-1] + sigma*eta[t]

  eps <- rnorm(n = players_no, mean = 0, sd = 1)
  type <- theta[t] + sigma*eps
  z <- (type - theta[t-1])/sigma
  start <- unlist(allRounds[[t-1]]["result"], use.names = FALSE)

  collectData = data.frame("strategy" = strategy, "start" = start,
                           "eps" = eps, "type" = type, "z" = z)

  # Egyenletes elozlasu veletlen szam generalasa
  for (i in 1:players_no){
    collectData[i, "rndNum"] = runif(1,0,1)
  }

  collectData["action"] = -1
  collectData$action = ifelse(collectData$type < x_star, "nembef",
                              ifelse(collectData$type > x_2star,
                                      "bef", -1))

  # Akciok megvalasztasa strategiak szerint
  for (i in 1:players_no){
    if (collectData[i,"action"] == -1 &
        collectData[i,"strategy"]=="optimista"){
      collectData[i, "action"] = "bef"
    }
    else if (collectData[i,"action"] == -1 &

```



```

        collectData[i,"strategy"]=="pesszimista"){
    collectData[i, "action"] = "nembef"
}
else if (collectData[i,"action"] == -1 &
        collectData[i,"strategy"]=="veletlen"){
    if (collectData[i, "rndNum"] < 0.5){
        collectData[i, "action"] = "bef"
    }
    else {collectData[i, "action"] = "nembef"}
}
else if (collectData[i,"action"] == -1 &
        collectData[i,"strategy"]=="intVeletlen"){
    if (collectData[i, "rndNum"] < collectData[i, "type"]){
        collectData[i, "action"] = "bef"
    }
    else {collectData[i, "action"] = "nembef"}
}
}

alpha[t] <- sum(collectData$action == "bef") / nrow(collectData)
collectData$payoff = ifelse(collectData$action == "bef",
                            collectData$type + alpha[t] - 1, 0)
collectData$result = collectData$start + collectData$payoff

allRounds[[t]] <- collectData
}

trial[[k]] <- allRounds
trialAvgResult[k]<-mean(trial[[k]][[rounds_no]][,ncol(trial[[k]][[rounds_no]])])
trialStdResult[k]<-sd(trial[[k]][[rounds_no]][,ncol(trial[[k]][[rounds_no]])])
trialOpt <- subset(trial[[k]][[rounds_no]],
                  trial[[k]][[rounds_no]]$strategy == "optimista")
trialOptAvg[k] <- mean(trialOpt$result)
trialPes <- subset(trial[[k]][[rounds_no]],
                  trial[[k]][[rounds_no]]$strategy == "pesszimista")
trialPesAvg[k] <- mean(trialPes$result)

```

```

trialRnd <- subset(trial[[k]][[rounds_no]],
                  trial[[k]][[rounds_no]]$strategy == "veletlen")
trialRndAvg[k] <- mean(trialRnd$result)
trialIntRnd <- subset(trial[[k]][[rounds_no]],
                    trial[[k]][[rounds_no]]$strategy == "intVeletlen")
trialIntRndAvg[k] <- mean(trialIntRnd$result)
}
settingAvgResult[[def]] <- data.frame("AvgResult" = trialAvgResult)
settingStdResult[[def]] <- data.frame("StdResult" = trialStdResult)
settingOptAvg[[def]] <- data.frame("OptAvgResult" = trialOptAvg)
settingPesAvg[[def]] <- data.frame("PesAvgResult" = trialPesAvg)
settingRndAvg[[def]] <- data.frame("RndAvgResult" = trialRndAvg)
settingIntRndAvg[[def]]<-data.frame("IntRndAvgResult"=trialIntRndAvg)

resultMatrix <- matrix(unlist(settingAvgResult, use.names = FALSE),
                      ncol = 1, byrow = FALSE)
colnames(resultMatrix) <- c("AvgResult")
resultMatrix<-cbind(resultMatrix, unlist(settingOptAvg, use.names=FALSE))
resultMatrix<-cbind(resultMatrix, unlist(settingPesAvg, use.names=FALSE))
resultMatrix<-cbind(resultMatrix, unlist(settingRndAvg, use.names=FALSE))
resultMatrix<-cbind(resultMatrix, unlist(settingIntRndAvg, use.names=FALSE))
colnames(resultMatrix)<-c("AvgResult", "AvgOpt", "AvgPes", "AvgRnd", "AvgIntRnd")
write.csv(resultMatrix,
          file = paste('resultMatrix', def, trialDef[def], 'csv', sep='.'))

### Csere: dontes theta[t-1] alapjan
#else if (collectData[i,"action"] == -1 &
         #collectData[i,"strategy"]=="fundamentalis"){
  #if (theta[t-1] > 0.5){
    #collectData[i, "action"] = "bef"
  #}
  #else {collectData[i, "action"] = "nembef"}

### Csere: dontes x_it alapjan
#else if (collectData[i,"action"] == -1 &

```

```
#collectData[i,"strategy"]=="fundamentalis"){  
  #if (type[t] > 0.5){  
    #collectData[i, "action"] = "bef"  
  #}  
  #else {collectData[i, "action"] = "nembef"}  
}  
}
```