Budapesti Corvinus Egyetem

Közgazdaságtudományi Kar

És

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Derivatívák árazása LP modellek segítségével

MSC SZAKDOLGOZAT

Írta:

Kis-Benedek Réka

Témavezető:

Ágoston Kolos Csaba

Budapest, 2020

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

NYILATKOZAT

Név: KIS-BENEDEK RÉKA
ELTE Természettudományi Kar, szak: Biztosítási és pénzügyi matematika MSc
NEPTUN azonosító: AXGE4F
Szakdolgozat címe: Derivatívák árazása LP modellek segítségével

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020. 12. 28.

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Ágoston Kolosnak, hogy megismertette velem ezt a témát és a rengeteg segítséget, időt és türelmet, amit rám szánt.

1. Bevezetés

Dolgozatomban derivatívák szcenárió fával történő árazásával fogok foglalkozni, az ebben rejlő lehetőségeknek szeretnék utána járni, mire adhat lehetőséget, amit más modell nem vagy csak nehézkesen tud kezelni. Ez a diszkrét modellek egy fajtája, ahol az árazás egy lineáris programozási feladatként írható fel. A fa topológiáját illetően fontos kérdés lesz az elágazások és az időszakok száma.

A dolgozatban először az elméleti hátterét fogom ismertetni a modellnek, valamint a későbbiekben összehasonlítási alapként használt Black-Scholes modellt is felvázolom röviden. Ezután a szimulációim eredményét fogom ismertetni, először a Black-Scholes árral való összehasonlításként a különböző fa topológiájával és árfolyamfolyamattal kapcsolatos paraméterek változtatása mellett. Ezután bemutatom, hogyan lehet a modellt kibővíteni fix, illetve arányos tranzakciós költségekkel, amelyek árra és átrendezések számára gyakorolt hatásának vizsgálatához szintén szimulációkat végeztem. A dolgozat végén pedig kitekintésként a modell biztosítási piacon való alkalmazási lehetőségére fogok kitérni.

2. Elméleti áttekintés

A derivatív árazási modelleket két nagy csoportra bonthatjuk aszerint, hogy időben folytonosak vagy diszkrétek. Az előbbi azt feltételezi, hogy bármelyik időpontban és akármilyen gyakran tudunk kereskedni, és végtelen sok kimenetel lehetséges, míg az utóbbiban mindkettőre csak véges sok lehetőség áll fenn. A következőkben röviden szeretném ismertetni a folytonos modellek közül a Black-Scholes modellt, illetve a diszkrét modellek közül a szcenáriófákat. A későbbiekben a két modell által adott opcióárakat szimulációk segítségével is össze fogom hasonlítani.

2.1. Black-Scholes modell

Az opcióárazás elméletének egyik fontos mérföldköve Fischer Black és Myron Scholes 1973-as modellje, mely sok szempontból nem fedi le a valóságot, de azóta is kiindulópontul szolgálhat az ilyen jellegű kutatásokban.

A modell feltevései:

- a rövidtávú kamatláb ismert és időben konstans
- a részvényárfolyam geometriai Brown-mozgást követ, konstans volatilitással
- a részvény nem fizet osztalékot
- az opció európai típusú (csak a lejáratkor lehet lehívni)
- nincsenek tranzakciós költségek
- korlátlanul van lehetőség hitelfelvételre vagy betét elhelyezésére a rövidtávú kamatlábon
- van rövidre eladás

(Black és Scholes, 1973, 640. o.)

A feltételezések egy része tényleg elvárható egy normálisan működő pénzügyi piacon vagy legalábbis nem túlzottan elrugaszkodott a valóságtól, azonban tartalmaz több erős megkötést, amik biztosan nem teljesülnek. A dolgozatban a Black-Scholes modellel való összehasonlítás mellett a tranzakciós költségek jelenlétével fogok foglalkozni, ugyanis ez a feltétel egyértelműen nem teljesül a valóságban. A tranzakciós költségek jelenléte azt is jelenti, hogy nem tudjuk folyamatosan átrendezni a portfóliónkat, mert ennek súlyos anyagi vonzata lenne, amit a Black-Scholes modell figyelmen kívül hagy. Ezt a hiányosságot többféle modellel is lehet kezelni, ezek egyike a szcenárió fával történő árazás, amit vizsgáltam a szakdolgozatban. A diszkrét modellekben eleve biztosított, hogy csak véges sok időpontban tudjuk átrendezni a portfóliónkat, azonban tranzakciós költségek beépítésével az átrendezések száma ehhez képest is lecsökkenhet optimális esetben, ahogy azt a dolgozat későbbi részében látni fogjuk.

A fenti nem teljesen valószerű feltételezések mellett kiszámolható egy opció ára a Black-Scholes képlet segítségével. Habár a feltételezések nem írják le pontosan a valóságot, ennek ellenére az így kiszámítható ár kiindulópontul szolgálhat. A képletet az Itô-lemma alkalmazásával kapott differenciálegyenlet megoldásaként kapjuk.

$$G = max(S_T - K; 0)$$

és az ehhez tartozó árazási képlet:

$$G = c = SN(d_1) - PKN(d_2)$$

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

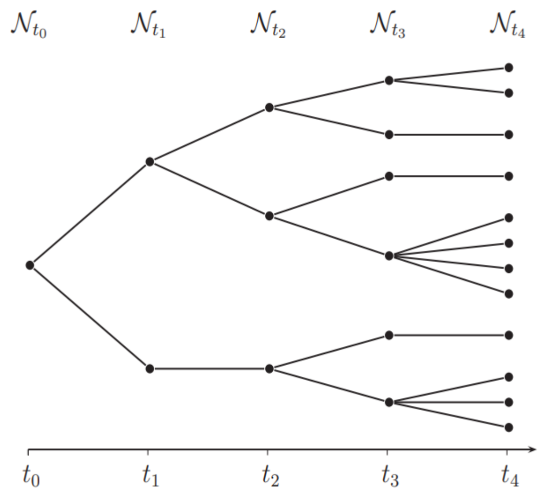
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

ahol S jelöli a mögöttes termék árfolyamát, K a kötési árfolyam,r a kockázatmentes kamatláb, σ a termék szórása, T pedig az opció futamideje.

2.2. Szcenárió fák

Az előbb láthattuk a Black-Scholes modellt, mely egy folytonos modell, ami explicit formulát biztosít az opció árának meghatározására, különböző feltételezések mellett. A folytonos modellek feltételezései azonban sokszor túl szigorúak, nem írják le jól a valóságot, valamint egzotikusabb opciókat nem feltétlenül tudnak kezelni.

A szcenárió fákkal való árazás a diszkrét modellek közé tartozik. Alkalmas több eszköz együttes kezelésére, nem teljes piacokon is lehet használni, valamint alkalmas mind európai, mind amerikai típusú opciók árazására is. Az opcióárazást egy lineáris programozási feladatként fogjuk tudni felírni. Fontos megjegyezni, hogy ez a modell nem az opcióárazásban szintén használt binomiális modellel megegyező topológiával rendelkezik, hanem itt nem összeölelkező fákról van szó.



1. ábra. Nem összeölelkező fa

Forrás: Consiglio, A., & De Giovanni, D. (2010). Pricing the option to surrender in incomplete markets. Journal of Risk and Insurance, 77(4), p. 938.

A következőkben Alan J. King 2002-es cikke alapján ismertetni fogom a szcenárió fával történő árazás főbb paramétereit, az arbitrázsmentesség értelmezését és az ellenőrzéséhez szükséges egyenletrendszert, végül pedig az opció árazáshoz megoldandó LP feladatot.

Paraméterek:

- $t = 0, \ldots, T$ – a vizsgált időpontok
- N_t – a t. időpontban lehetséges világállapotok (csúcsok) halmaza, ahol N_0 az úgynevezett gyökér, N_T a végpontok halmaza, N pedig az összes csúcsot tartalmazó halmaz
- $a(n)$ – az n-edik csúcspont elődje (minden csúcsnak egy elődje van, kivéve a gyökér, aminek nincs egy sem)
- $C(n)$ –az $n \epsilon N_t$ csúcspontok leszármazottai, az elágazások számától függ, hogy mennyi van (a végpontokat, kivéve minden csúcsnak vannak leszármazottai)
- p_n – az n-edik csúcspontba való érkezés valószínűsége a(n)-ből, ahol a következők teljesülnek

$$\forall t - re \sum_{n \varepsilon N_t} p_n = 1 \text{ és } \sum_{m \varepsilon C_n} p_m = p_n$$

- S_n^j – a j-edik értékpapír értéke az n csúcsban, ahol $j = 0, \ldots, J$

Tegyük fel, hogy a 0. értékpapírnak minden csúcspontban pozitív az értéke, ekkor ezzel leosztva kaphatunk egy ármércejószágot, ez azonban nem szükséges a feladat megoldáshoz, inkább egy kényelmi átalakítás. Ha a kiválasztott eszköz például egy kockázatmentes eszköz értéke, akkor gyakorlatilag diszkontáltuk ezzel a lépéssel az értékpapírok árfolyamát.

- $Z_n^j = S_n^j / S_n^0$ - a j-edik értékpapír fenti módon leírt diszkontált értéke
- θ_n^j – a j-edik értékpapírból birtokolt mennyiség az n csúcsban, ezekre nem alkalmazunk semmilyen megkötést, tört és negatív értékek is lehetnek

A portfólió értéke n-ben: $Z_n \theta_n = \sum_{j=0}^{J} Z_n^j \theta_n^j$

2.2.1 Arbitrázs

A pénzügyi piacokon az egyik legalapvetőbbnek tekintett elv az arbitrázsmentesség megkövetelése, ugyan előfordulhat arbitrázs a valóságban, de likvid piacok esetén ezek gyorsan eltűnnek, lekereskedik őket. Az arbitrázs ebben a modellstruktúrában egy olyan kereskedési stratégiát jelent, ami minden időpontban 0 ésT között egy szigorúan nemnegatív cash flow-t generál és legalább egy végpontban pozitív a valószínűsége a 0-nál nagyobb kifizetésnek úgy, hogy semelyik pontban nem igényel addicionális tőkét, azaz a semmiből csinálunk valamit. Azaz egy olyan önfinanszírozó stratégiát kell mutatni, ami induláskor és később sem igényel tőkét, és soha nem áll fenn a veszteség esélye, de a várható érték pozitív. Belátható, hogy a nemnegativitást elegendő a végpontokban megkövetelni.

Célfüggvény: $\max\limits_{\theta} \sum\limits_{n\varepsilon N_T} p_n Z_n \theta_n$

Korlátok:

1. $Z_0\theta_0 = 0$

2. $Z_n(\theta_n - \theta_{a(n)}) = 0 \quad \forall_n \varepsilon N_t, t \geq 1$

3. $Z_n\theta_n \geq 0 \quad \forall_n \varepsilon N_t$

Az első korlát fejezi ki, hogy induláskor nem igényel pénzt a portfólió. A második számú korlátok garantálják, hogy bármilyen ág mentén is mozdulunk el önfinanszírozó lesz a stratégia. A harmadik pedig a nemnegativitást írja elő minden pont esetén, azaz semelyik világállapotban sem veszíthetünk.

Ha nincs arbitrázslehetőség, akkor a célfüggvény optimális értéke 0, ami pont azt jelenti, hogy a semmiből nem tudunk valamit csinálni, ha van arbitrázslehetőség a piacon, akkor pedig nem korlátos. Mivel a nemnegativitási korlátok miatt a célfüggvényben szereplő minden tagtól megköveteljük a nemnegativitást, ezért a P statisztikai valószínűségeknek nincs jelentősége a feladat megoldása szempontjából.

A fenti primál feladatnak felírható a duál párja is és az erős dualitási tétel miatt, ha van lehetséges megoldásuk, akkor mindkettőnek van optimális megoldása is és a célfüggvény értékek megegyeznek.

2.2.2 Opció árazás

A pénzügyi elméletekben Black és Scholes óta alkalmazott módszertan a replikáló portfólió használata. Ez az opciók árazásának egy lehetséges módja, amit a szcenárió fák esetén is alkalmazni lehet, azaz olyan stratégiát keresünk, aminek a cash flow-ja leképezi egy adott kötelezettség kifizetéseit. A piaci ára az opciónak meg kell, hogy egyezzen a replikáló portfólió költségével ellenkező esetben arbitrázs állna fenn az olcsóbb lehetőség megvásárlásával és szimultán a drágább eladásával. Megkülönböztethetünk statikus és dinamikus replikálást is az alapján, hogy kell-e időközben változtatni a portfólió összetételén, a továbbiakban csak a dinamikus esettel fogok foglalkozni, amiben van értelme tranzakciós költségekről beszélni.

Legyen F_n az opció diszkontált kifizetése n-ben, azaz például egy 100-as kötési árfolyamú j-edik részvényre vonatkozó long call opció esetén

$$F_n = max(0, (S_n^j - 100)S_n^0) \quad \forall\ n\ \epsilon\ N_t$$

és minden közbenső pont esetén 0 az értéke.

Az opció árát meghatározó LP feladat hasonló struktúrát követ, mint a korábban látott arbitrázsmentességi feladaté.

Célfüggvény: $\min_\theta Z_0\theta_0$

Korlátok:

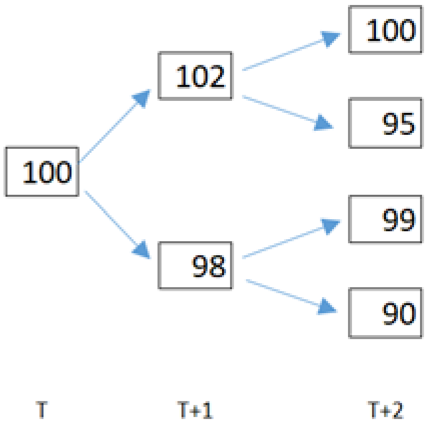
1. $Z_n(\theta_n - \theta_{a(n)}) = -F_n \quad \forall_n \varepsilon N_t, t \geq 1$
2. $Z_n\theta_n \geq 0 \quad \forall_n \varepsilon N_t$

2.2.3 A fa felépítése

A szcenárió fa megalkotása sok kérdést vet fel. Azzal, hogy konkrét, meghatározott kimenetel lehetőségeket társítunk egy-egy időponthoz erősen korlátozzuk például egy részvényárfolyam lehetséges alakulását, egy időben és nagyságban folytonos modellhez képest. A fa megalkotásakor erre tekintettel fontos választható paraméter, a mélység, illetve az elágazások száma egy pontban, ezek növelése azonban nagy mértékben növeli a számításigényt is.

Miután eldöntöttük a fa felépítését fel kell töltenünk árfolyamokkal. Ennek a meghatározása nyilván nagyban befolyásolja az arbitrázsmentesség meglétét és az opció árának nagyságát is.

Például a 2.ábrán látható nagyon leegyszerűsített példa esetén, ha a terméket két időszakra shortoljuk, akkor ezen semmiképp sem tudunk veszíteni, 4 lehetséges világállapotból háromszor pedig még nyerünk is rajta.



2. ábra. Szcenárió fa felépítése példa

Ez a nagyon egyszerű példa könnyen javítható lenne például azzal, ha megkövetelnénk, hogy minden elágazásnál legyen egy emelkedő és egy csökkenő ág is, illetve az elágazások számának növelésével csökken az esélye, hogy ilyen szerencsétlen sikerül generálnunk az árfolyamértékeket.

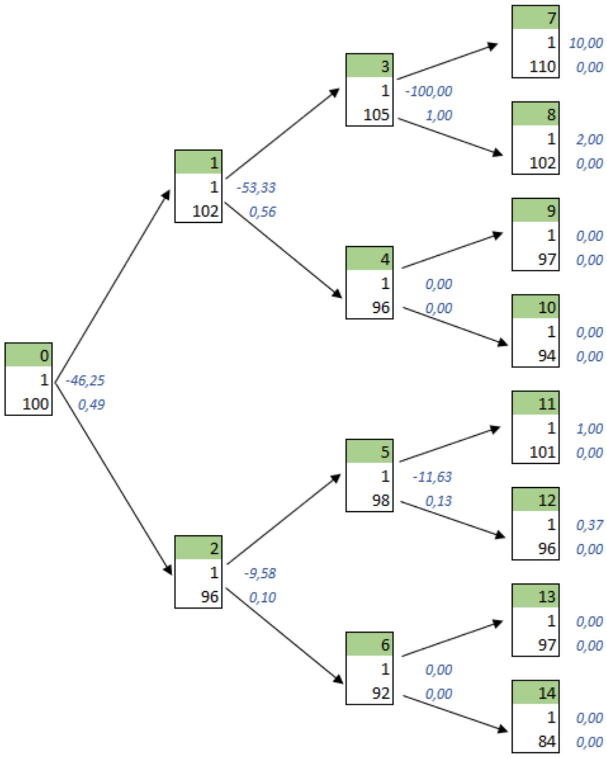
Az árfolyamértékeket meghatározhatjuk egy egzakt képlet segítségével, mint amikor azt feltételezzük, hogy geometriai Brown-mozgást követ az árfolyam, akkor ez könnyen felírható, a szimulációk során én is ezt fogom alkalmazni. Úgy is feltölthetjük a fát például, hogy meghatározzuk egy időpontban az adott árfolyam minimumát és maximumát, a többi csúcshoz pedig valamilyen metódus szerint, például egyenletesen felosztjuk az intervallumot. Élhetünk olyan megkötéssel is, hogy mindig legyen egy felfelé és egy lefelé elmozduló ág is. Mivel az értékpapírok számát és fajtáját is mi határozzuk meg, ezek között lehet különböző korrelációt is feltételezni akár. Tekintettel lehetünk arra is, hogy a feltételezett vagy ismert tulajdonságok, mint például a momentumok értéke a diszkrét modell esetén is közel legyenek az elvárt értékekhez. Az egyes statisztikai jellemzőket időben változó módon is megadhatjuk. Erre egy érdekes példa Hoyland, Kaut és Wallace 2001-es cikke.

Hoyland, Kaut és Wallace (2001) először egy egyperiódusú fát generálnak, majd ezt bővítik tovább. Az első periódus esetén a kívánt eloszlás percentiliseit adják meg bemenetként, erre illesztenek egy eloszlást, aminek kiszámolják az első négy centrális momentumát, és az ezektől való négyzetes eltérést minimalizálják. Emellett még előre megadják a legrosszabb kimenetelt, amit tartalmaznia kell a fának. A további rétegekhez két paramétert változtatnak, a többi nem függ az időtől. Ez a két statisztikai jellemző pedig a várható érték és a variancia esetükben, A várható érték esetén külön meghatározzák a kötvények és a részvények hozamának fejlődését. A variancia esetében olyan intertemporális kapcsolatot is figyelembe vettek, hogy empirikus kutatások szerint a volatilitásban azután figyelhető meg növekedés, hogy az árak nagymértékben lecsökkentek.

Tehát az ilyen szekvenciális módon meghatározott fa alkalmas kifinomultabb jelenségek megragadására is, azonban meg vannak a maga megkötései, kritikái is. Például, egy szerteágazó, nagy fa esetén, lehet, hogy a megkövetelt statisztikai jellemzők ugyan teljesülnek, de emellett lehetnek még nem kívánt tulajdonságai is a fának. Ha növeljük a feltételezések számát, akkor ahhoz, hogy ezek megfelelően teljesülni tudjanak, egyre nagyobb fákat fogunk kapni. Erre adnak egy példát is, ha az első momentumot definiáljuk, valamint az összes korrelációt egy 5 dimenziós fa esetén, akkor összesen 30 specifikációnk lesz. Ahhoz, hogy ezeket teljesíteni tudjuk, minden időpontban legalább 6 elágazásra van szükség. Ekkor $6^5 = 7776$ csúcspontunk lenne a lejárat időpontjában. Az, hogy milyen statisztikai jellemzőket határozzunk meg a generálás során a feladattól függ, hogy mit akarunk modellezni, azonban előzetesen még sokszor nem egyértelmű, hogy mik a legfontosabb paraméterek. (Høyland, K., Kaut, M., & Wallace, S. W., 2001)

3. Eredmények

Első lépésben egy nagyon leegyszerűsített példán mutatom be az árazást. Itt kevésbé az eredmények, mintsem a módszer mibenlétének bemutatása volt a célom. Egy részvény és egy ármérce jószág áll rendelkezésre, például készpénz. Egy egyszerű Long Call opciót áraztam be, ahol az árfolyamértékeket nem valamilyen sztochasztikus folyamatként definiáltam, hanem pusztán egy egyszerű ökölszabályt követve manuálisan adtam meg, mégpedig minden csúcsban kétfelé ágazik el a fa, az egyik mentén lefelé mozdul el az árfolyam, a másik mentén felfelé.



3. ábra. Példa szcenáriófával történő árazásra

Kékkel a kapott súlyok látszanak, amekkora értékben tartanunk kell a két eszközt a portfóliónkban, a kezdeti portfólióból látszik az opció ára, ami ebben a példában 2,36. Az is látszik ebből a példából, hogy a replikáció nem feltétlenül sikerül tökéletesen, abból a szempontból, hogy például itt a 12-es csúcsban is pozitív értékű lesz a portfóliónk, pedig itt nem éri meg lehívni az opciót. Ez a tulajdonság a szcenárió fás modellezésből következik, azonban szofisztikáltabb felépítés, kisebb árfolyamkülönbségek és magasabb elágazásszám esetén egyre kisebb mértékű ez a jelenség.

3.1. Összevetés a Black-Scholes modellel

Ebben a fejezetben szcenárió fa segítségével kapott opcióárat szeretném összevetni a Black-Scholes képlet alapján kapott árral. Egy egyszerű long call opciót vizsgáltam és néztem meg a kapott árak viselkedését a különböző paraméterek függvényében.

A diszkrét és a folyamatos modellek között sok különbség van, az egyik, ami nem feltétlen triviális, hogy a diszkrét modellel kapott opcióárat nem feltétlen befolyásolja az alaptermék volatilitásnak változása, míg ez a folytonos modellben teljesül. Vegyünk egy olyan képzeletbeli esetet, hogy egy részvényről tudjuk, hogy milyen határok között változhat az értéke mondjuk, hogy 0 alá biztos nem csökken és tegyük fel, hogy egy felső korlátot is tudunk mondani például 500 ezer Ft. A tőzsdei kereskedésben nem jegyeznek végtelen tizedespontossággal árakat, tegyük fel, hogy 100 Ft-os pontossággal határozzák meg az árfolyamot. Ilyen feltételek mellett véges sok eset lehetséges, ami felírható egy fával. Ezesetben, ha növeljük a volatilitást nem fog változni a fával kapott opcióár, mivel a fa topológiája nem változik meg, ha a határok továbbra is fennállnak és így ugyanaz a fedezeti stratégia továbbra is működni fog, mint korábban, hiába nő meg a szélsőségesebb esetek valószínűsége. A valóságban nem tudjuk az összes lehetséges kimenetelt felsorolni és megoldani a feladatot, de ez a gondolatkísérlet rávilágít a két modellfelfogás közötti különbségre és részben magyarázatot adhat a különbségekre.

3.1.1 Árfolyamgenerálás

Gyakori feltételezés a részvényárfolyamok tekintetében, hogy a loghozamok normális eloszlásúak, a részvényárfolyam pedig geometriai Brown mozgást követ. Ahhoz, hogy ez utóbbi igaz legyen az $(S_t)_{t\geq 0}$ árfolyamfolyamatnak az alábbi sztochasztikus differenciálegyenletnek kell eleget tennie:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma dW_t$$

ahol μ az árfolyam driftje, σ pedig a volatilitása. Amikor a szcenárió fa feltöltésekor GBM-et akarunk szimulálni fontos figyelni arra, hogy a diszkretizálás miatt nem használhatjuk az alábbi képletet

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W$$

Helyette a loghozam várható értéke $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) * \Delta t$, a szórás pedig $\sigma * \sqrt{\Delta t}$ használandó.lesz. (Hull, J. C. (2012), 292-300.old.)

Ennek megfelelően az árfolyamokat az alábbi módon generáltam:

$$S_{t+1} = S_t * exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2}) * \Delta t + \sigma * \sqrt{\Delta t} * \xi_t)$$

ahol $\xi_t \sim N(0, 1)$.

A véletlen értékek generálásához minden esetben egy (0,1)-en egyenletes eloszlású véletlen változót generáltam, majd ezt behelyettesítettem a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének inverzébe.

3.1.2 Lp feladat

Az árfolyamgenerálást, majd a megoldáshoz szükséges LP feladat felírását Matlab-ban készítettem el, a feladat megoldásához pedig Gurobi-t használtam. A Matlab kódok segítségével akár a feladatnak megfelelő lp fájlok is könnyen legenerálhatók, ezek előnye, hogy sokkal szemléletesebben látszanak a megfelelő korlátok, könnyebben ellenőrizhető, hogy a feladat helyesen lett e felírva. A fa megalkotásakor fontos paraméter a mélység és az elágazások száma, azonban ezek növelésével nagyon megnövekszik a számításigény is. A Gurobi-val 3 időszakos modell esetén nagyjából 100 elágazás az, amit még lehet oldani, efölött már túl nagy lesz a feladat.

3.1.3 Paraméterek

Ahhoz, hogy össze tudjam hasonlítani a szcenárió fa által kapott opcióárakat a Black-Scholes képlet által meghatározottal a különböző paraméterek értékét változtatva végeztem el a szimulációkat.

Először szeretném összefoglalni, hogy milyen paraméterekről lehet szó ebben az esetben.

A fa felépítését és a replikálást meghatározó paraméterek:

- időszakok száma – az időszakok számának növelésével a fa mérete exponenciálisan növekszik
- elágazások száma – ezt konstans értékként határoztam meg, azaz nem változik az

értéke attól függően, hogy hol helyezkedünk el a fában

- eszközök száma

  részvények: Minden esetben az elsőnek titulált részvényre vonatkozó európai long call opciót áraztam be, azonban mivel a szcenárió fával történő árazás lényege, egy replikáló portfólió előállítása - amihez menetközben nem kell pénzt adni, a végén pedig legalább az opció kifizetésének megfelelő értéket garantálja – ezért, fontos tudni, hogy milyen eszközök állnak még rendelkezésre a portfólió kialakításakor. Minden részvényt ugyanolyan paraméterű GBM folyamatként generáltam. Nem meglepő, hogy azt tapasztaljuk, hogy minél több eszközből válogathatunk, annál olcsóbban fogjuk tudni replikálni az opciót.

  készpénz: A részvények mellett készpénz is rendelkezésre áll a rendszerben, aminek az értékét végig konstans 1-en tartottam. Ez egy kényelmi feltételezés, de érdemben nem változtat a modellen, ha lenne valamekkora kockázatmentes kamatláb, hiszen ebben az esetben végig lehetne normálni az árfolyamértékeket a készpénz értékével és így megint egy ármérce jószágot kapnánk.

Az árfolyamfolyamatot meghatározó paraméterek:

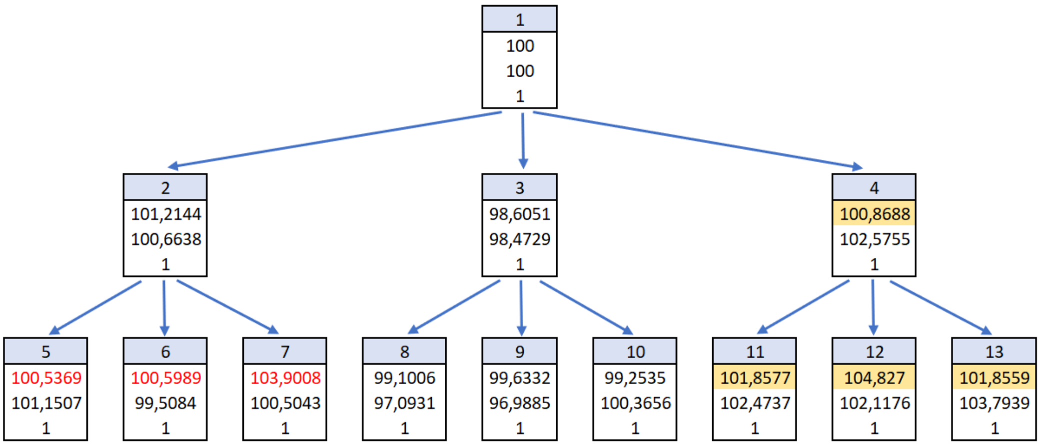
- μ - az árfolyamfolyamat drifjte
- σ – az árfolyamfolyamat volatilitása
- Δt- az elágazások között eltelt idő nagysága, gyakorlatilag ez határozza meg, hogy a diszkrét modellben milyen gyakran tudjuk átrendezni a portfóliónkat, mértékegysége év
- kötési árfolyam – az opció kifizetését határozza meg
- S_0 – a kiindulópontban az árfolyam értéke. Ezt végig 100-nak vettem, hasonló okok miatt, mint a készpénz esetén.

3.1.4 Arbitrázsmentesség

A szimulációk esetén az árazás előtt külön lefuttattam azt az LP feladatot is, ami a fa arbitrázsmentességét határozza meg és azt az elsőre meglepő összefüggést tapasztaltam, hogy sokszor annak ellenére, hogy nem arbitrázsmentes a fa mégis pozitív értéket kapok az opció árára. Ez a jelenség 25 elágazásszámtól eltűnik, azonban 7 elágazás alatt az összes futtatás alkalmával volt arbitrázsra lehetőség. Az eredmények részletezésénél külön fel fogom tüntetni azt, hogy hány esetben kaptam nem 0 értéket az opció árára, illetve hány esetben volt arbitrázsmentes a fa.

Ennek a furcsaságnak a magyarázata abban rejlik, hogy míg ahhoz, hogy arbitrázs legyen annyi kell, hogy sehol se veszítsek és legalább egy kimenetel esetén pozitív legyen a kifizetés, addig az opció esetén szintén mindenhol legalább 0-t el kell érnem, azonban nem elég akárhol pozitív kifizetést produkálni, ezeket megadott csúcsokban kell tudni elérni. A kifizetés nagysága nem fontos, mivel a részvények és a készpénz számát teljesen szabadon megválaszthatjuk mindegyik csúcspontban, azaz lehet shortolni és bármekkora tőkeáttétel megvalósítható a modellben. Tehát a megoldás abban rejlik, hogy azok a csúcsok, ahol a semmiből tudok valamit csinálni, azaz arbitrázs van nem feltétlen fednek át teljesen azokkal a csúcsokkal, ahol pozitív az opció kifizetése. Amikor átfednek, akkor 0 lesz az opció ára.

A 4. ábrán arra látható egy példa, amikor van arbitrázsra lehetőség, azonban az opció ára nem 0. A 4-es csúcspontban, ha hitelből veszünk az első részvényből akármekkora mennyiséget, akkor azon csak nyerni tudunk, mivel a részvény árfolyama mindhárom elágazás esetén fölfelé mozdul el, a készpénz értékét pedig ahogy korábban említettem végig 1-nek vettem, tehát arbitrázsra van lehetőség. Ez hasonlóan a 3-as csúcspontra is igaz, azonban a 2-es csúcspont elágazásai esetén (5-7) nem tudunk elérni pozitív kifizetést anélkül, hogy ugyanezen csúcsok közül valamelyik másik értéke ne legyen negatív. Az opciónak viszont pozitív kifizetése van ezeknél a csúcspontoknál, ezért lesz az opció ára pozitív (0,4789) annak ellenére, hogy nem arbitrázsmentes a fa.



4. ábra. Példa opcióárazásra arbitrázs mellett

3.1.5 Eredmények

Ebben a részben a különböző szimulációk eredményeit szeretném bemutatni. Ahogy korábban írtam elég sok változtatható paraméter van a modellben, amiket egyesével változtatva végeztem szimulációkat, hogy jobban látható legyen az árazás viselkedése a különböző dimenziók mentén.

Elágazások száma

Először az elágazások számának hatását vizsgáltam meg. A többi paraméter értékét az 1. táblázatban láthatóak szerint állítottam be.

mű	sigma	Kötési árfolyam	Δt	időszakok száma	részvények száma
0,2	0,25	100	1/250	3	2

1. táblázat. Fixált paraméterek értéke elágazások számának vizsgálatához

A Δt értéke évben van megadva, a kereskedési napok gyakran használt 250 nap/év-es értéke miatt választottam meg így.

Ilyen paraméterek mellett a Black-Scholes képlet szerint a call ára 1,0925.

A 2. táblázatban láthatóak a különböző futtatások eredményei. Ahogy növeltem az elágazásszámot egyre nagyobb lett a feladat, ezért ahogy ez az összefoglaló táblázatban is látható egyre kevesebbszer futtattam le a szimulációt. Amellett, hogy a számításigény miatt szükségszerű is volt ez a csökkentés a logikus elvárásoknak megfelelően nagyobb elágazásszám mellett egyre stabilabb lesz az árazás, abban a tekintetben, hogy csökken a variancia, illetve egyre kevésbé okoz problémát az, hogy 0 lenne az opció ára arbitrázslehetőségek miatt.

elágazások	**futtatásszám**	**nem 0 db**	**átlag**	**min**	**max**	**arbmentes db**
3	5000	408	0,1922	0,0000	1,6014	0
4	2500	1136	0,4422	0,0001	2,0215	0
5	2500	1651	0,8328	0,0024	1,8839	0
6	1000	812	**1,1663**	0,1027	2,0398	0
7	500	459	1,3714	0,3652	1,9671	0
8	500	475	1,5254	0,5337	2,1546	5
10	250	247	1,7273	1,3373	2,1580	35
15	100	100	2,0402	1,7997	2,5702	78
25	50	50	2,3159	2,0919	2,5717	50
35	50	50	2,4842	2,2551	2,6633	50
50	25	25	2,6811	2,4617	2,9546	25
75	25	25	2,8670	2,7042	3,1618	25

2. táblázat. Opcióárazási eredmények az elágazások számának változtatása mellett

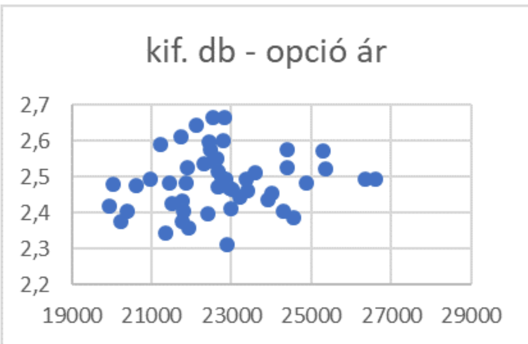
A várakozásoknak megfelelően az elágazásszám növelésével együtt növekszik az opció átlagos ára, ami érdekesebb az ennek a mértéke. A két szélső esetet nézve közel 15-szörösére emelkedik az opció átlagos ára, ahogy az elágazások számát 3-ról 75-re emelem. Azonban, ha a maximumokat megnézzük, ott már sokkal kisebb a különbség az egyes esetek között, illetve 3 elágazás esetén az esetek mindössze 8,2%-ában sikerült beárazni az opciót.

Egy 25 elágazásos esetben legeneráltam magát az lp fájlt és azt teszteltem, hogy ha az output fájl alapján azokat a korlátokat, ahol abszolút értékben a legmagasabb az árnyékár relaxálom mennyivel csökkenthető az opció ára. A relaxált korlátok minden esetben önfinanszírozási korlátok voltak, amiből összesen egy ekkora feladatban 16 275 db van. Az eredmények a 2. táblázatban láthatók. Ezzel a módszerrel ugyan csökkenthető az opció ára, azonban nem határozható meg egyértelműen, hogy mennyi korlátot iktassunk így ki, valamint így teljes ágak szűnnek meg gyakorlatilag, ugyanis, ha egy csúcsban elhagyjuk az önfinanszírozási korlátot, akkor ott bármekkora plusz pénz bevonható, ami nem jelenik meg az opció árában. Ebben a kiragadott példában amit vizsgáltam is az a helyzet állt elő, hogy 14 korlát relaxálása után az opció ára 0-ra csökkent.

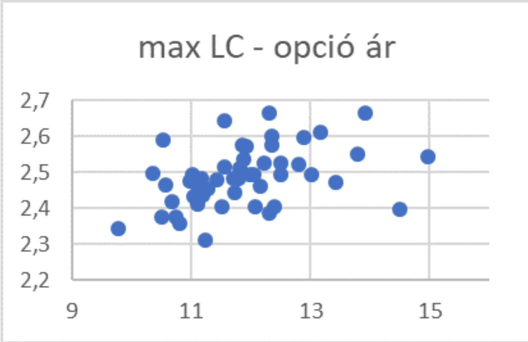
relaxált korlátok száma	opció ára	%-os árváltozás az eredetihez képest
0	2,2897	0,0%
2	2,1684	-5,3%
3	2,1233	-7,3%
4	2,0716	-9,5%
5	2,0562	-10,2%
6	2,0497	-10,5%
7	2,0375	-11,0%
9	2,0155	-12,0%
10	1,9311	-15,7%
12	1,9179	-16,2%

3. táblázat. Opcióár változása korlátok relaxálása esetén

Az 5. és a 6. ábrán az látható, hogy egy a fejezet elején felírt paraméterekkel egyező 35 elágazásos szcenárió fa esetén kapott árakat vizsgáltam annak függvényében, hogy a végső csúcspontok közül hány esetben volt pozitív az opció kifizetése, illetve a maximális kifizetés viszonyában. 50 futtatást végeztem és ez alapján nincs egyértelmű összefüggés a változók között, alacsonyabb elágazásszám mellett megnéztem ugyanazt 1000 futtatás esetén is, de hasonló ábrákat kaptam.



5. ábra. Opció ára a 0-nál nagyobb kifizetések darabszámának függvényében



6. ábra. Opció ára a maximális kifizetés függvényében

A 4. és az 5. táblázatban az látható, hogy ha ceteris paribus a részvények számát megváltoztatom mi történik az opció árával. A Black-Scholes ár 1,0925 Az első négy esetet 1000-szer futtatam le, majd sorra 500, 250 és 100 darab futtatást végeztem. A részvények számának növelésével drasztikusan csökken a feladat megoldhatósága, olyan szempontból, hogy 0-tól különböző árat kapjunk. Míg 2 részvény és 4 elágazás esetén az esetek nagyjából felében be lehetett árazni az opciót, ez 3 részvény esetén már csak az esetek negyede, 4 részvény esetén pedig 1000 futtatásból egyszersem kaptam 0-tól eltérő árat. 1 részvény esetén mindegyik érték fölötte marad a Black-Scholes árnak, 3 részvény esetén a 8, 4-nél pedig a 10 elágazásos modell eredményei illeszkedtek a legjobban.

elágazások száma	4 részvény	3 részvény	1 részvény
4	0,0000	0,1513	1,2119
5	0,0499	0,2198	1,4594
6	0,1213	0,4807	1,6198
7	0,2583	0,8329	1,7397
8	0,4975	**1,1368**	1,8519
10	**1,0738**	1,4501	1,9968
15	1,6550	1,7999	2,2480

4. táblázat. Átlagárak az elágazások és a részvények számának változtatása mellett

elágazások	**4 részvény**		**3 részvény**		**1 részvény**	
száma	**nem 0**	**arbmentes**	**nem 0**	**arbmentes**	**nem 0**	**arbmentes**
4	0	0	18	0	865	56
5	4	0	235	0	936	138
6	98	0	506	0	963	255
7	295	0	674	0	986	409
8	254	0	384	0	995	559
10	190	0	230	0	997	791
15	99	0	100	17	1000	987

5. táblázat. Nullától különböző és arbitrázsmentes darabszámok

Az 6. táblázatban a sigma értékét emeltem fel 0,5-re, így a B-S ár 2,1848 lesz és ismét a 6 elágazásos átlagár lesz legközelebb hozzá.

elágazások	**futtatásszám**	**nem 0 db**	**átlag**	**min**	**max**	**arbmentes db**
4	2500	1098	0,8951	0,0002	3,1165	0
5	1500	1020	1,6532	0,0253	3,6818	0
6	1000	793	**2,3141**	0,0022	4,1135	1
7	500	436	2,8111	0,4485	4,1718	2
8	250	237	3,0749	2,2229	4,1767	1
10	150	149	3,4099	1,7907	4,2863	20
15	100	100	4,0426	3,5526	4,7281	84
75	5	5	5,7549	5,5713	5,9944	5

6. táblázat. Opcióárazási eredmények az elágazások számának változtatása mellett megemelt $\sigma = 0.5$ esetén

Utolsóként az elágazásszám tekintetében a Δt értéket változtattam meg, 1/52-re, azaz ebben az esetben hetente tudjuk átrendezni a portfóliónkat a korábbi esethez képest, ahol naponta volt rá lehetőség. Ekkor a B-S ár 2,3952 és szintén a 6 elágazásos modell bizonyult a legjobbnak.

elágazások száma	**futtatásszám**	**nem 0 db**	**átlag**	**min**	**max**	**arbmentes db**
4	2500	1086	0,9260	0,0004	3,8069	0
5	1500	1025	1,8141	0,0035	4,2075	0
6	1000	826	**2,4993**	0,0421	4,0724	0
7	500	438	3,0499	0,5469	4,3062	0
8	250	229	3,3151	1,3646	4,6581	0
10	150	148	3,7919	2,3366	5,6143	13
15	100	100	4,3711	3,9027	5,3160	72
75	5	5	6,3427	6,0534	6,6599	5

7. táblázat. Opcióárazási eredmények az elágazások számának változtatása mellett megemelt $\Delta t = 1/52$ esetén

A Black-Scholes árhoz a 6 elágazásos átlag áll a legközelebb az esetek nagy részében, ezért a későbbiekben más paraméterek változtatása esetén ezt az esetet fogom vizsgálni.

Időszakok száma

Ebben a részben az időszakok számának növelése mellett vizsgáltam az árazást, kétféle Δt érték mellett. A fix paraméterek a 8.táblázatban láthatók.

mű	**sigma**	**Kötési árfolyam**	**időszakok száma**	**részvények száma**	**elágazások**
0,2	0,25	100	3	2	6

8. táblázat. Fixált paraméterek értéke időszakok számának vizsgálatához

$\Delta t = \frac{1}{52}$ esetén:

időszakok száma	**futtatások száma**	**call**	**nem 0**	**átlag**	**min**	**max**	**arbmentes**	**Eltérés**
1	1000	1,3830	799	1,6913	0,1165	4,3266	799	22,3%
2	1000	1,9558	807	2,1374	0,0477	4,4029	223	9,3%
3	1000	2,3952	808	2,5329	0,0404	4,4031	0	5,7%
4	1000	2,7656	821	2,8104	0,0374	4,6177	0	1,6%
5	1000	3,0919	802	3,0756	0,0854	4,7456	0	-0,5%
6	100	3,3868	80	3,2427	0,2504	4,4938	0	-4,3%

9. táblázat. Opcióárak az időszakok számának változtatása mellett $\Delta t = 1/52$ esetén

$\Delta t = \frac{1}{250}$ esetén:

időszakok száma	**futtatások száma**	**call**	**nem 0**	**átlag**	**min**	**max**	**arbmentes**	**Eltérés**
1	1000	0,6308	802	0,7524	0,0406	1,8531	802	19,3%
2	1000	0,8920	811	1,0011	0,0054	1,8871	227	12,2%
3	1000	1,0925	824	1,1685	0,0281	1,9320	0	7,0%
4	1000	1,2615	800	1,3166	0,0665	2,1620	0	4,4%
5	1000	1,4104	834	1,4233	0,1286	2,3094	0	0,9%
6	100	1,5450	74	1,5240	0,3597	2,1438	0	-1,4%

10. táblázat. Opcióárak az időszakok számának változtatása mellett $\Delta t = 1/250$ esetén

Mindkét esetben 1 időszak esetén még közel 20%-kal nagyobb a szcenáriófa által adott árak átlaga, mint a B-S, azonban az időszakok növelésével csökken a különbség, 4-5 elágazás után pedig átfordul és már a B-S ár a magasabb, de itt még nem túl nagy a különbség.

Az átrendezések gyakoriságát egy másik aspektusból vizsgálva a következőkben egy 6 időszakos modellt vizsgáltam, annak függvényében, hogy a 6 időszakból hányszor lehet átrendezni a részvények súlyát a portfóliónkban. A 11.táblázatban látható 4 esetet vizsgáltam.

	időpont						
	0	1	2	3	4	5	6
a)	x						x
b)	x			x			x
c)	x		x		x		x
d)	x	x	x	x	x	x	x

11. táblázat. Átrendezések számának vizsgálatakor tesztelt esetek

Az a) esetben az elején kialakított portfólión nem lehet időközben változtatni, a b) esetben a 3. időszakban van lehetőség változtatásra, a c) esetben a 2. és a 4. időszakban, a d) esetben pedig bármikor. Mind a 4 eset során ugyanazt a fát használtam, hogy megfelelően összehasonlíthatóak legyenek az eredmények. Ez azt jelenti, hogy az a) modell egy 1 időszakos, $\Delta t = 1$ hónap időtávú és $6^6 = 46656$ elágazásszámú modellnek felel meg, a b) modell esetén az időszakok száma 2, $\Delta t = 0,5$ hónap és az elágazások száma $6^3 = 216$. Mindkét fenti modell esetén a végső árfolyamértékek megegyeznek, a c és d modellek hasonló módon értelmezhetők.

A paraméterek, amelyek mentén az árfolyamokat generáltam:

mű	**sigma**	**Kötési árfolyam**	Δt	**időszakok száma**	**részvények száma**	**elágazások száma**
0,2	0,25	100	1/(12*6)	6	2	6

12. táblázat. Fixált paraméterek értéke átrendezések számának vizsgálatához

A Δt értéke a táblázatban évben van kifejezve, tehát azt jelenti, hogy egy 1 hónapos időszakot vizsgáltam, amit 6 részre osztottam fel, ennek megfelelően például a b) opció azt jelenti, hogy a hónap közepén, van lehetőség az átrendezésre, azaz nagyjából 2 hét után, míg a d) opció esetén 5 naponta tudjuk átrendezni a portfóliónkat. A B-S ár a fenti paraméterek mellett 2,8785. A modellt összesen 1000-szer futtattam le, amiből 201 esetben a d) modellel kapott ár 0 volt arbitrázs lehetőségek miatt, ezért ezeket kiszűrtem, és a 13. táblázatban a maradék 799 eset eredményeit foglaltam össze.

	átlag	**min**	**max**	**medián**
a)	13,7653	11,5613	17,0172	13,7008
b)	8,4941	7,5647	10,4820	8,4503
c)	6,2827	5,5383	7,7669	6,2570
d)	2,7758	0,1119	4,1049	2,9273

13. táblázat. Opcióárazási eredmények az átrendezések számának változtatása mellett

Nem túl meglepő, hogy minél többször van lehetőségünk időközben átrendezni a portfóliónkat, annál olcsóbban tudunk replikáló portfóliót előállítani. Egy közbenső átrendezési lehetőség beiktatásával 38%-kal csökkent az opció átlagára (a-¿b eset), majd további 16% és 25%-kal csökkent az eredeti állapothoz képest. Így ahhoz képest, ha az 1 hónap alatt egyszer sem lehet átrendezni a portfóliónkat, ha ezt akár ötször is megtehetjük összesen közel 80%-kal csökkent le a replikáló portfólió ára.

Mű és sigma értéke

A következő vizsgált paraméterek az árfolyamfolyamatot meghatározó drift és volatilitás, amiket együtt változtattam. Egy esetet kivéve, amikor a drift 30% volt, a volatilitás pedig csak 5% a különbség 10%-nál kevesebb volt. Egyértelmű tendenciát nem lehet megfigyelni, ami szembeötlő, hogy majdnem az összes esetben a szcenárió fával kapott ár volt a magasabb ezen fix paraméterek mellett.

Kötési árfolyam	időszakok száma	részvények száma	elágazások száma	Δt	futtatások száma
100	3	2	6	1/250	1000

14. táblázat. Fixált paraméterek értéke a mű és sigma értékének vizsgálatához

sigma\rate	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	B-S ár
0,05	0,2368	0,2294	0,2202	0,2102	0,1822	0,2185
0,1	0,4680	0,4614	0,4586	0,4589	0,4414	0,4370
0,2	0,9318	0,9283	0,9181	0,9347	0,9137	0,8740
0,3	1,3911	1,4325	1,3952	1,4046	1,4074	1,3110
0,45	2,1028	2,0961	2,1454	2,1032	2,0841	1,9664
0,5	2,3402	2,3147	2,3250	2,3493	2,3454	2,1848

15. táblázat. Opcióárazási eredmények különböző mű és sigma értékékek mellett

Eltérések:

sigma\rate	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3
0,05	8,4%	5,0%	0,8%	- 3,8%	-16,6%
0,1	7,1%	5,6%	4,9%	5,0%	1,0%
0,2	6,6%	6,2%	5,0%	6,9%	4,5%
0,3	6,1%	9,3%	6,4%	7,1%	7,4%
0,45	6,9%	6,6%	9,1%	7,0%	6,0%
0,5	7,1%	5,9%	6,4%	7,5%	7,3%

16. táblázat. Opcióárak eltérése a különböző mű és sigma értékékek mellett

Kötési árfolyam

Az utolsó paraméter, aminek a változtatását vizsgáltam a kötési árfolyam, a már megszokott fix paraméterek mellett. Az alacsonyabb kötési árfolyamok esetén viszonylag jó eredményeket mutatott a modell, az eltérés 10% alatt maradt, azonban az első emelésnél rögtön elromlott a modell és a végső 120-as kötési árfolyam esetén több mint 10-szerese lett az átlagár a B-S árnak.

mű	sigma	Δt	időszakok száma	elágazások száma	részvények száma	futtatásszám
0,2	0,25	1/250	3	6	2	1000

17. táblázat. Fixált paraméterek értéke különböző kötési árfolyamok vizsgálatához

kötési árfolyam	futtatások száma	call	nem 0	átlag	min	max	Eltérés
80	1000	20,0001	799	18,1240	0,0555	20,0716	-9,4%
85	1000	15,0057	779	13,8118	2,4240	15,2219	-8,0%
95	1000	5,6386	817	5,3495	0,5653	7,4226	-5,1%
100	1000	2,3952	826	2,4993	0,0421	4,0724	4,3%
105	1000	0,7233	786	0,9686	0,0078	2,7230	33,9%
110	1000	0,1508	760	0,2745	0,0001	1,3720	82,1%
115	1000	0,0217	519	0,0908	0,0000	0,7398	317,8%
120	1000	0,0022	123	0,0292	0,0000	0,2468	1222,4%

18. táblázat. Opcióárazási eredmények különböző kötési árfolyam értékékek mellett

Összességében a modell teljesítménye és pontossága legalábbis a Black-Scholes ár leképezésének tekintetében nagyon változó a paraméterek függvényében, ami miatt ilyen módon nehezen használható önmagában opció árazásra valamiféle támpont nélkül. Az itt alkalmazott konstans drift és volatilitás értékek helyett szofisztikáltabb sztochasztikus modellek használatát is érdemes lehet vizsgálni, mint későbbi kutatási kérdés, azonban a szakdolgozatban ezekre nem fogok kitérni. Mindenképp érdemes szerintem a modell további vizsgálata, mivel nagyon hasznos lehet útvonalfüggő opciók esetén, valamint szerintem akár olyan kérdések megválaszolásában is segíthet, minthogy hogyan változik egy opció ára, ha hirtelen megváltozik az általános piaci környezet, például egy recessziós időszak kezdődik. Illetve arra is alkalmas lehet a modell, hogyha tudjuk az opció árát, akkor visszafelé ehhez megkeressük az azt az árat legjobban leképező szcenáriófa struktúrát.

3.2. Az opció ára különböző paraméterek mellett

Ebben a fejezetben az Operációkutatás c. tárgy keretében készített egyik házi feladat eredményeit szeretném röviden bemutatni, ahol szintén a szcenárió fákkal való opcióárazást alkalmaztuk, azonban egy másfajta opcióra, mint amit eddig bemutattam, ebből látszani fog, hogy milyen speciális esetekre is alkalmazható ez a modell. Összesen 3 részvény áll rendelkezésre, mindegyik árfolyam induláskor 100, utána pedig az alábbi folyamat szerint alakul.

$$S_{t+1}^i = 0,5 * 100 + 0,5 * S_t^i + \xi^i - exp(2,5)$$

ahol ξ egy (2,1) paraméterű lognormális eloszlás. A részvények mellett ebben az esetben is rendelkezésre áll még készpénz, aminek az értéke most is végig konstans. Az exp(2,5) értéke pont ξ lognormális véletlen változó várható értéke, így az érték, amivel eltérítjük a 100-as értéktől az árfolyamot 0 várható értékű. Az alábbi táblázatban 1 időszak esetén különböző elágazásszám mellett vizsgáltam annak az opciónak az árát, hogy lejáratkor becserélhet az opció megvásárlója egy 1-es részvényt egy 2-es részvényre. Az első három esetben 100-szor futtattam le az árfolyamgenerálást és árazást. A 10 000-es elágazásszám esetén is lefutott 4 perc alatt, az utolsó, 100 000 elágazásos eset azonban már jóval nagyobb, itt 25-ször futtattam le az árazást, ez 6,5 perc alatt futott le. A futtatások eredmények a 19. táblázatban láthatók.

Elágazások száma	100	1000	10 000	100 000
Átlag	**11.1231**	**11.7726**	**11.983**	**12.0682**
Minimum	10.0447	11.5219	11.8822	12.0315
Maximum	11.7042	11.9443	12.0819	12.0963

19. táblázat. A csereopció árának jellemzői 1 időszak esetén

Látható, hogy a derivatíva ára folyamatosan növekszik az elágazások számának növelésével, valamint egyre kisebb a szimulált árakat magába foglaló intervallum. Két időszak és 100x100 felé ágaztatás esetén az alábbi eredményeket kaptam, itt is 100-szor hajtottam végre az árazást. A várakozásaimnak megfelelően tovább emelkedett az opció ára.

Átlag	15.8279
Minimum	15.1357
Maximum	16.4001

20. táblázat. A vsereopció árának jellemzői 2 időszak és 100 elágazás esetén

Ha a ξ változót kicseréljük egy másik lognormális eloszlású változóra, akkor az alábbiak szerint alakulnak az átlagárak 100 elágazás, 1 időszak és 100 futtatás eredményeként.

- ξ (3,1) paraméterű lognormális, Átlagár: 9.8012
- ξ (1.5, 1) paraméterű lognormális, Átlagár: 11.0857
- ξ (2,2) paraméterű lognormális, Átlagár: 12.0908
- ξ (2, 0.5) paraméterű lognormális, Átlagár: 7.4374

Az átlag növelésével ellentétesen mozog együtt az opció ára, ami elsőre meglepő lehet, hiszen ξ pozitív együtthatóval szerepel az árfolyamfolyamatban, azonban nem szabad elfelejteni, hogy itt nem egy long call opcióról van szó, hanem csereopcióról, tehát ha mindkét részvény árfolyama ugyanannyival fölfelé elmozdul, akkor nem kapunk nagyobb kifizetést. A variancia változtatásánál már sokkal egyértelműbb a kapcsolat, ahogy növekszik a szórás növekszik az opció ára is.

3.3. Tranzakciós költségek

A következőkben tranzakciós költségekkel fogom kibővíteni a modellt, ehhez először az operációkutatás tárgy keretében tanultak alapján külön-külön bemutatom, hogy milyen plusz megkötésekre és változókra van szükség fix összegű tranzakciós költség és milyenekre arányos költség esetén.

3.3.1 Fix tranzakciós költség

A modellbe beépíthetünk fix tranzakciós költséget, ami egy konstans érték lesz, amit meg kell fizetnünk, ha bármilyen mértékben is átrendezzük a portfóliónkat. Azt, hogy mikor kell ezt a költséget megfizetnünk, két eltérő módon is lehet értelmezni. Az egyik, hogy minden egyes részvény átrendezése után külön-külön kell megfizetnünk ezt az összeget, vagy a másik pedig, hogy a portfólió átrendezése jár ekkora költséggel, azon belül pedig már nem számít, hogy csak 1, 2 vagy az összes portfóliónkban szereplő részvény mennyiségét megváltoztattuk. Én az első esetet vizsgáltam a szimulációk során, azonban plusz korlátok bevezetésével könnyen átalakítható a modell a második esetté is.

Ahhoz, hogy tudjuk mikor kell kifizetni a fix költséget és ezt be tudjuk építeni a célfüggvénybe bináris változók bevezetésére van szükség és úgynevezett 'big M'-es korlátokra.

Legyen θ_n^j a j-edik értékpapírból birtokolt mennyiség az n-edik csúcsban és θ_{n+1}^j az ugyanebből az értékpapírból birtokolt mennyiség az $(n+1)$-edik csúcsban, aminek legyen n az elődje. A következő korlátokat vezetjük be minden csúcshoz és minden részvényhez külön-külön.

$$\theta_n^j - \theta_{n+1}^j - M * B_{n+1}^j \leq 0$$
$$\theta_n^j - \theta_{n+1}^j + M * B_{n+1}^j \geq 0$$

, ahol B_{n+1}^j egy bináris változó, ami azt fejezi ki, hogy az $(n+1)$-edik csúcsban változik e a j-edik részvényből tartott mennyiség. M pedig egy kellően nagy szám, hiszen ez korlátozza a részvényekből maximálisan tartható mennyiséget is, azonban nem lehet túl nagy szám sem, mert az problémát okozhat a megoldás során. A programozás során én is szembesültem ezzel a problémával, ugyanis, amikor először M értékének 10000-et állítottam be. Ekkor hiába bináris változóként kerültek beállításra a B változók sokszor 0-től és 1-től eltérő értéket kaptam, aminek magyarázata abban rejlik, hogy a számítógépek csak egy bizonyos pontosságig tárolják el a számokat. Például a matlab esetében alapértelemzésben ez $2 * 10^{-6}$, ennél kisebb érték esetén nem tud a program különbséget tenni az adott szám és 0 között. Ez okozza azt, hogy túl nagy M esetén hiába változik a részvény mennyisége kaphatunk B értékére 1-től különböző értéket. Én végül a számítások során M értékét 200-ra állítottam, így már nem tapasztaltam a fenti hibát.

A fenti két korlát együttesen azt fogja biztosítani, hogy ha $\theta_n^j \neq \theta_{n+1}^j$, akkor $B_{n+1}^j = 1$. A korlátok azt nem zárják ki, hogy akkor is 1 legyen a megfelelő bináris változó értéke, ha $\theta_n^j = \theta_{n+1}^j$, teljesül, azonban, mivel minimalizáljuk a célfüggvényt, ezért ez nem lenne optimális.

A célfüggvény annyiban módosul, hogy egy plusz tagot adunk hozzá:

$$\sum_{n\varepsilon N_t, t\geq 1} \sum_{j=1}^{J} fix_{ktg} * B_n^j$$

Amennyiben a portfólió átalakításáért szeretnénk csak a fix tranzakciós költséget felszámolni, ahogy a fejezet elején említettem, akkor az alábbi plusz korlátot kell bevezetni, $a_{rv} * D_n \geq \sum_{j=1}^{a_{rv}} B_n^j$, valamint a B_i^j értékek helyett a D_i szintén bináris változókat kell tartalmaznia a célfüggvénynek.

3.3.2 Arányos tranzakciós költség

Az előző rész konstans költsége mellett, arra is lehetőség van, hogy a kereskedett értékkel arányos költségeket is beépítsünk a modellbe. Ehhez szintén plusz korlátok bevezetésére lesz szükség, azonban nincs szükség bináris változókra. Az alábbi új korlátot kell bevezetnünk minden részvény és csúcspont esetén:

$$\theta_n^j - \theta_{n+1}^j - X_{n+1}^j + Y_{n+1}^j = 0, \text{ ahol}$$
$$X_n^j, Y_n^j > 0 \quad \forall n\epsilon N_t, t \geq 1 \text{ és } j = 0, ..., J \text{ esetén}$$

Az arányos költséget úgy értelmezem, hogy mindegy, hogy eladok vagy veszek az adott értékpapírból, mindkét esetben a kereskedett érték adott százalékát kell addicionálisan megfizetni. A célfüggvény az alábbi taggal bővül:

$$aranyos_{ktg} * \sum_{n\varepsilon N_t, t\geq 1} \sum_{j=1}^{J} (X_n^j + Y_n^j) * Z_n^j$$

Azért van szükség két változóra minden pont esetén, mert nem tudjuk előre, hogy növekedni vagy csökkeni fog az értékpapírból tartott mennyiség és mivel minden esetben az X és az Y változók növekedése is növelni fogja a minimalizálandó célfüggvényt, ezért egyszerre maximum az egyik fog felvenni 0-tól különböző értéket.

3.3.3 Eredmények

A fix tranzakciós költség bevezetése rendkívül megnöveli a feladat számításigényét. Egy 3 időszakos 2 részvényt tartalmazó modell esetén > 6 elágazásszám esetén órák alatt sem fut le egyetlen szimuláció, ezért külön vizsgáltam azokat az eseteket, amikor van fix költség és amikor csak arányos tranzakciós költség van, mert az utóbbiból sokkal nagyobb méretű feladatok is megoldhatóak. A szimulációk során csak a részvényekre állítottam be tranzakciós költséget a készpénzre nem.

Két szempontot vizsgáltam mindkét esetben, hogy mennyivel növekszik a tranzakciós költségek bevezetésével az opció ára, ami itt szintén egy egyszerű long call az első számúnak titulált részvényre és hogy mennyivel csökken le az átrendezések száma.

Arányos költség

A 21. táblázatban láthatói paraméterek mellett végeztem szimulációkat különböző mértékű arányos költség mellett.

mű	**sigma**	Δt	**időszakok száma**	**elágazások száma**	**részvények száma**
0,2	0,25	1/250	3	6	2

21. táblázat. Fixált paraméterek értéke arányos tranzakciós költség vizsgálatához

Minden esetben 1000 futtatást végeztem, ebből a nem 0 árak száma 800 es 821 darab között alakult, ezek összefoglaló adatait tartalmazza a 22. táblázat.

arányos ktg	átlagár		átrendezés db átlagosan		ár %-os változás alap->tranz			
	alap	**tranz**	**alap**	**tranz**	**átlag**	**medián**	**min**	**max**
0,005%	117078	129417	84	46	0.2	0.06	0.01	8.22
0,01%	116908	136759	84	43	0.28	0.11	0.03	32.23
0,1%	116242	193183	84	23	1.36	0.59	0.1	214.91
0,5%	116948	265634	84	7	1.67	1.17	0.45	25.01
1%	117108	295592	84	3	1.81	1.42	0.67	30.5
5%	116915	330110	84	0	2.17	1.72	0.74	31.97

22. táblázat. Opcióárazási eredmények különböző arányos trazakciós költségek mellett

Az alap értékek mindig a tranzakció költségektől mentes sima opció árazást jelentik, ami teljesen megegyezik a Black-Scholes részben bemutatottal. Az átrendezések darabszáma a belsőpontokat tartalmazza, mert ezek azok, amik igazán számítanak. A tranzakciós költségektől mentes szimulációk során kivétel nélkül mindegyik esetben az összes csúcsban átrendeztük valamilyen mértékben a portfóliónkat, míg arányos tranzakciós költség mellett már az általam vizsgált legkisebb 0,005%-os értéknél is majdnem felére csökken átlagosan ez az érték, körülbelül minden második csúcsban változtatunk az eszközök darabszámán. A vizsgált legmagasabb, 5%-os arányos költség mellett már egyik csúcsban sem érti meg változtatni a portfóliónkon, túl nagy a költsége.

A táblázat jobb szélső szekciójában a szimulációk százalékos ár növekedésének átlaga, mediánja, minimuma és maximuma látható az arányos költségek bevezetésével. A Black-Scholes összehasonlítás során, nem volt jelentős eltérés a medián és az átlag között, itt azonban már gondot okoznak a szélsőségesen kiugró értékek, ezért nem érdemes az átlagra hagyatkozni.

Fix és arányos költség

Ebben a részben 4 állapotot fogok összehasonlítani, az alap opcióárazás mellett megnézem, ha csak fix költség, csak arányos költség vagy mindkettő szerepel a modellben.

mű	**sigma**	**Kötési árfolyam**	Δt	**időszakok száma**	**elágazások száma**	**részvények száma**	**fix ktg.**	**arányos ktg.**
0,2	0,25	100	1/52	3	6	2	0,01	0,1%

23. táblázat. Fixált paraméterek értéke fix és arányos tranzakciós költségek vizsgálatához

100 futtatásból 81 esetben kaptam pozitív opcióárat az alap feladat megoldása esetén, ezek eredményét foglaltam össze a 24. táblázatban.

			árnövekedés alap esethez képest			
	átlagár	**átrendezés db átlagosan**	**átlag**	**medián**	**min**	**max**
alap	24.744	84				
fix ktg	28.269	32	20%	15%	6%	278%
arányos ktg	36.260	32	100%	40%	15%	3077%
fix + arányos ktg	38.742	22	115%	52%	20%	3358%

24. táblázat. Opcióárazási eredmények fix és arányos trazakciós költségek mellett

Az átlagárat ilyen paraméterek mellett csak az arányos költség jobban felemelte, mint csak a fix költség, és ez nem csak átlagosan volt igaz, hanem az összes szimulált esetben is. Az átrendezések átlagos száma ugyanannyi lett a két különálló költség esetén, itt azonban már nem igaz, hogy ez minden szimuláció esetén is így alakulna. Az előző szimulációhoz hasonlóan a kiugró adatok itt is nagyon torzítják az átlagot, a medián ilyen esetben jobb mutatószám.

4. Tranzakciós költség és a Black-Scholes modell

Korábban láttuk, hogy a Black-Scholes modell egyik feltevései között szerepel, hogy nincsenek tranzakciós költségek, azonban ez nem jelenti azt, hogy ne lehetne ezt a modellstruktúrát kombinálni valahogyan tranzakciós költségekkel.

Egy megközelítés a Black-Scholes modell esetén a tranzakciós költségek kezelésére, hogy a formulából kapott árat növeljük meg egy kezdeti költséggel, és ez a többlet hivatott reprezentálni a kereskedési költségeket. Több probléma is felmerül ezzel kapcsolatban. Egyrészt a várható tranzakciós költség kiszámítására nincs egy zárt formula, másrészt korreláltak az árfolyamok mennyiségének változásával, emiatt a piaccal is, illetve a tranzakciós költségek nagysága útvonalfüggő. Egy másik probléma, hogy a revíziós időszak csökkentésével tranzakciós költségek mellett nem fog növekedni a replikálás pontossága, az ilyen költségek nélküli esethez képest. (Leland H. E., 1985)

Leland 1985-ös cikkében egy saját replikáló stratégiát vezet be, amely függ a tranzakciós költségek szintjétől, valamint a két átrendezés között eltelt revíziós intervallumtól is. Az általa bevezetett stratégia nem feltétlen lesz önfinanszírozó, ΔH jelöli azt az addicionális pénzt, amit pluszban időközben kell betenni.

Bebizonyítja, hogy ezen alternatív stratégiával a tranzakciós költségek korlátosak maradnak, a revíziós intervallumok csökkenése esetén is. A hiba 0-hoz tart, a revíziós intervallum csökkenése esetén, valamint ez a hiba független a piactól is. A Leland-féle replikáló stratégiában a portfólió összetétele függ a tranzakciós költségek nagyságától. A portfólióátrendezés meghatározására - hiába nem alkalmas tranzakciós költségek kezelésére alapvetően – felhasználja a Black-Scholes által levezetett call opció árának képletét, azonban a formulába az alábbi módosított volatilitás helyettesíti be.

$$\hat{\sigma^2}(\sigma^2, k, \Delta t) = \sigma^2[1 + \frac{\sqrt{(2/\pi)^k}}{\sigma\sqrt{\Delta t}}]$$

Ahol k az arányos tranzackiós költségeket jelöli.

A 25. táblázatban a replikáló portfólió teljesítménye látható, ha nincs tranzakciós költség, a 26.táblázatban pedig, ha 0,25%-os tranzakciós költséget kell megfizetni. Azt láthatjuk, hogy a hiba alig növekszik az első esethez képest.

		Lejáratig hátralévő idő		
Revíziós intervallum		12 hónap	6 hónap	3 hónap
1 hét	E[ΔH]	0	0	0
	$\sigma[\Delta H]$	0.091	0.099	0.115
4 hét	E[ΔH]	-0.003	-0.002	-0.002
	$\sigma[\Delta H]$	0.368	0.402	0.471
8 hét	E[ΔH]	-0.009	-0.008	-0.008
	$\sigma[\Delta H]$	0.744	0.821	0.981

25. táblázat. Replikáló portfólió eredménye 1 éves ATM call esetén, ha nincsenek tranzakciós költségek

Forrás: Leland, H. E. (1985). Option pricing and replication with transactions costs. The journal of finance, 40(5), p. 1288 – Table1

			Lejáratig hátralévő idó		
Tranzakciós költség	Revíziós intervallum		12 hónap	6 hónap	3 hónap
0.25%	1 hét	E[ΔH]	0	0	0
		$\sigma[\Delta H]$	0.092	0.101	0.117
	4 hét	E[ΔH]	-0.003	-0.002	-0.003
		$\sigma[\Delta H]$	0.37	0.406	0.475
	8 hét	E[ΔH]	-0.01	-0.009	-0.01
		$\sigma[\Delta H]$	0.748	0.826	0.988

26. táblázat. Replikáló portfólió eredménye 1 éves ATM call esetén, ha vannaktranzakciós költségek

Forrás: Leland, H. E. (1985). Option pricing and replication with transactions costs. The journal of finance, 40(5), p. 1293 – Table2

A cikkben azt is bebizonyítják, hogy a tranzakciós költségek fordítottan arányosak a felülvizsgálati időszak négyzetgyökével.

A kifejlesztett módszer helyességének intuitív értelmet is ad a szerző, mégpedig, hogy a tranzakciós költségek jelenléte, úgyis felfogható, mintha eladáskor valamivel alacsonyabb, míg vételkor valamivel magasabb áron tudnánk végrehajtani az adásvételt, ez pedig logikusan modellezhető egy magasabb volatilitással. Ebből a modellből leginkább azt hiányoltam, hogy miért pont a megadott módon változtatják meg a volatilitást, nem e lenne esetleg ennek valamilyen jobb módja. (Leland H. E., 1985)

5. Biztosítási szerződésekbe ágyazott opciók

Ebben a fejezetben egy kitekintést szeretnék nyújtani a biztosítások piacára és a modell alkalmazhatóságára ebben a szektorban.

A biztosítások piacán többféle beágyazott opciót is megfigyelhetünk, amelyek a piac legtöbb termékénél megjelennek valamilyen formában. Ezek az opciók jellemzően az ügyfeleknek nyújtanak plusz garanciákat, lehetőségeket, ezért a biztosítótársaság számára kötelezettségeket generálhatnak. Emiatt rendkívül fontos, hogy a termékek árazása során ezek az extra kitettségek is megfelelően figyelembe legyenek véve, különben a biztosító szolvenciájára is kihatással lehet. Régebben ezek nem kaptak nagy szerepet az árazásban, elhanyagolható tényezőnek tekintették. Az 1980-as években csökkenni kezdtek a hozamok, sok biztosító emiatt nem tudta, kitermelni a garantált hozamszintet, így inszolvenssé váltak. 1991-re Amerikában rekord számú, 58 biztosítótársaság vált inszolvenssé. Európában is megfigyelhető volt egy ilyen zuhanórepülés, például sok skandináv céget leértékeltek ebben az időben. 1997-ben Japánban a II. világháború után először ment tönkre egy életbiztosító cég a Nissan Mutual Life Insurance Co., mivel nem tudott eleget tenni a hozamgaranciákban vállaltaknak. Ezeknek a kudarcoknak a folyományaként az '90-es években több szabályozás is életbe lépett a hozamgaranciák maximalizálására vonatkozóan.

A biztosításokba beépített különböző opciók és garanciák egyre gyakoribbak, ennek több oka is van. Egyrészt fokozott versenyképességet jelenthetnek a többi biztosítóval szemben, mivel további bizonyosságot nyújt a biztosítási kötvénytulajdonosok számára. Például egy befektetési egységekhez kötött biztosítás esetén az ügyfelek előnyben részesíthetik azokat a termékeket, ahol garantált, hogy legalább semmit se bukjanak. Másrészt megkönnyítheti különböző szabályozói kritériumok teljesítését. (Grosen, A., & Jørgensen, P. L., 2000)

Vegyünk egy put opciót, ami jogot ad arra, hogy eladjuk egy cég részvényét 10 dolláros áron 2 év múlva. A legtöbb esetben az opció nettó nyeresége van elszámolva fizikai teljesítés helyett. Ebben az esetben a nyereség a 10 dollár feletti rész értéke lenne a lejárat időpontjában. Ez nagyon hasonló egy biztosítási garanciához, ami a biztosítás díját az adott részvénybe fekteti, és garantálja a kötvénytulajdonosnak, hogy ha veszítene például a Unit-linked egységeinek értéke 2 év múlva, akkor az eredeti értéket írja jóvá és a veszteséget gyakorlatilag a biztosító realizálja. Ha 2 év múlva a részvényárfolyam 10 dollár alá esik, akkor a garancia alapján a biztosító társaságnak továbbra is a 10 dolláros részvény árfolyam alapján kell biztosítania a megegyezés szerinti kifizetést a saját forrásaiból, ha azonban a biztosítótársaság felismerve ezt a veszélyt, a szerződéskötéskor a díjat annyival megemeli, hogy abból a fent említett put opciót megkösse, akkor ezzel fedezte a kockázatait. (Finkelstein, G., McWilliam, E., Nagle, S., de Beus, P., Van Leijenhorst, R., Maas, L., & Cui, J., 2003)

5.1. Visszavásárlási opció árazása

A következőkben Consiglio, A., & De Giovanni, D. (2010) cikkének módszertanát fogom feldolgozni, akik a 2 évvel korábbi módszerüket fejlesztették tovább.

A nemzetközi számviteli sztenderd megköveteli, hogy a biztosítási termékek árai tükrözzék a bennük rejlő opciókat és garanciákat. Ezen a piacon a beágyazott opciók sokszor nem diverzifikálhatóak, azonban fontos, hogy a biztosítók a szerződésállományt, eszközöket és kötelezettségeket olyan módon kezeljék, hogy az kisimítsa a kitettségeket. Ilyen lehetőség lehet a viszontbiztosítás, a termékek árazásának, célközönségének és értékesítési csatornáinak folyamatos felülvizsgálata és igazítása, szélsőségesen esetben pedig meg is lehet szüntetni a termék további értékesítését, de ilyenkor is fontos, hogy a már megkötött szerződéseket és az általuk jelentett kitettségek számításba legyenek véve.

A biztosítási opciók árazását és fedezését az IFRS 4 és a Szolvencia II szabályozza. A piaccal való konzisztencia miatt az ajánlás, hogy az értékelés során bontsuk ezeket az opciókat és garanciákat két részre, fedezhető és nem fedezhető komponensekre, bár azt meg kell jegyezni, hogy nem feltétlen létezik egyértelmű határvonal. Egy tökéletesen fedezhető vagy replikálható kitettség árát konkrétan meg tudjuk figyelni a piacon, ha ismert a replikálás módja. A nem fedezhető rész esetén nehezebb dolgunk van, itt olyan elveket használhatunk például, mint az arbitrázsmentesség.

Ebben a környezetben az alábbi módon definiáljak az európai és az amerikai opciókat.

Európai opció (European Contingent Claim = ECC): olyan opció, ami az $F = (F_t)_{t=0}^T$ sztochasztikus cash flow-t biztosítja a tulajdonosának

Amerikai opció (American Contingent Claim = ACC): az $E = (E_t)_{t=0}^T$ sztochasztikus folyamatnak megfelelően a kötvénytulajdonos bármikor dönthet úgy, hogy lehívja az E_t összeget és ezután megszűnik az ezehetőség van mindig a valós érték lehívására, ami után véget ér az opció

Általában az európai opció alatt azt értjük, amikor csak a lejáratkor lehet lehívni az opciót és máskor nem nyújt kifizetést, ehhez képest itt közben is lehet, hogy van valamekkora kifizetés, de ez nem az opció megvásárlójának döntésétől függ és nem szünteti meg az opciót. Így lényegében nincs hatalmas különbség a két definíció között a modellezés szempontjából.

A piaci tökéletlenség egyik oka lehet, ha több kockázati faktor van, mint elérhető eszköz.

Nem minden kockázatot, opciót lehet piaci eszközökkel replikálni, ilyen például a halálozási kockázat vagy a törlési dinamika.

5.1.1 Törlés modelezése

A törlési ráta egy nem kereskedhető kockázati faktor, így nem is lehet fedezni, illetve tipikusan egy ACC probléma.

Két fő megközelítés az irodalomban:

- a törlési viselkedést gazdasági, vagy szociális tényezőkhöz köti, mint például a munkanélküliség, kor, iskolázottság, kamatkörnyezet
- a törlési választás egy belső döntési folyamat eredménye, ahol a befektető/biztosított racionálisan él a törlési jogával

Az első lehetőség enged egyfajta irracionalitást a döntéshozó viselkedésében, lehetséges egy minimális törlési valószínűség minden világállapotban, az utóbbi egy határt azonosít, ami mentén két részre oszlanak a világállapotok, amikor megéri törölni és amikor nem.

Többféle megoldás található az irodalomban:

- Albizatti és Geman (1994) – a sztochasztikus hozam szintjétől függ a törlés, így nem indikál új kockázati faktort, könnyen hozzárendelhető a fához, így egy komplex ACC feladatot egy egyszerűbb ECC-vé redukál, azonban ez túl nagy egyszerűsítés lehet a törlési folyamatot illetően

- Kuo et al. (2003) – error correction modellel írja le a törlési rátát, két kointegráló vektor segítségével (hozam és munkanélküliség). Ebben az esetben is ECC-ként lehet árazni az opciót, azonban itt egy új kockázati faktor keletkezett, ezáltal már nem teljes a piac.

Consiglio, A., és De Giovanni, D. (2010) Grosen és Jorgensen (1997) alapján egy olyan biztosítótársaságból indulnak ki, aki olyan szerződéseket kínál, aminek minden $t\epsilon[0, T]$ van valamilyen kifizetése, ami egy referencia alaptól függ (I_t). I_t dinamikájára semmilyen megkötést nem alkalmaznak. A szerződésben egy garanciavállalás is van, minden időpontban garantált L_t kifizetés:

$$L_t = L_0 e^{r_G t},$$

ahol $L_0 = I_0$ a kezdeti befizetés. Egy adott időpontban a követelés értéke:

$$C(t) = max(L_t, I_t) = max(L_0 e^{r_G t} - I_t, 0) + I_t$$

Az első tag pont egy amerikai put opciónak felel meg.

Egy alternatíva lehet egy plusz kockázati faktor a törlés bevezetése és így már az opciót ECC-ként árazhatjuk be. A szerződő oldaláról semmi sem változik, a biztosító részéről viszont változik a kötelezettség. Minden időszakban ki kell fizetnie a törlések miatt

$$O_t = l_t L_{t-1} e^{r_G} \text{ -t}$$

ahol, l_t a törlési ráta$t - 1$ és t között.

Az ECC modell tehát az alábbi módon írható fel:

$$F_n = max(L_n - I_n, 0) + I_n \quad \forall n \epsilon N_t$$
$$F_n = l_n L_{a(n)} e^{r_G} \quad \forall n \epsilon N_t,\ t = 1, 2, ...(T-1)$$
$$L_n = (1 - l_n) L_{a(n)} e^{r_G} \quad \forall n \epsilon N_t,\ t = 1, 2, ..., T$$

ahol

F_n – a kifizetés értéke n-ben

A biztosító célja, hogy a kötelezettségeit kockázat nélkül tudja teljesíteni. Így a termék ára megegyezik a replikáló portfólió értékével. Így az árazási feladat az alábbi lineáris programozási modellel írható fel:

Célfüggvény: $min_{\theta_n^j} V$

Korlátok:

$$\sum_{j=1}^{J} S_0^j \theta_0^j + F_0 = V$$
$$\sum_{j=1}^{J} S_n^j \theta_n^j + F_n = \sum_{j=1}^{J} S_n^j \theta_{a(n)}^j \quad \forall n \epsilon N_t, \quad t = 1, 2, ..., T$$
$$\sum_{j=1}^{J} S_n^j \theta_n^j > 0 \quad \forall n \epsilon N_t,$$
$$\theta_n^j \epsilon \mathbb{R} \quad \forall n \epsilon N_t, \quad j = 1, 2, ...J,$$

ahol

V – az opció ára

θ_n^j – a j-edik értékpapír száma az n-edik csúcsban.

A korábban látottakkal összhangban az első korlát azt fejezi ki, hogy az opció ára megegyezik a kifizetéseit leképezi stratégia kezdeti költségeivel. A második korlát pedig az önfinanszírozó tulajdonságot biztosítja.

Az F_n kifizetés egy paraméter a modellben, ezért bármilyen bonyolult struktúraként is leírható nem változtat a modell komplexitásán. (Consiglio, A., & De Giovanni, D. (2010))

6. Összefoglalás

A dolgozatomban először ismertettem a szükséges elméleti hátteret Black-Scholes modell és a szcenárió fák tekintetében. Ezután Matlab és Gurobi programok segítségével leprogramoztam a szcenárió fákkal történő árazási modellt, úgy, hogy a bementi paraméterek szabadon állíthatóak legyenek. Először a Black-Scholes képlettel kapott árakkal hasonlítottam össze a diszkrét modell eredményeit. Általánosságban elmondható, hogy az esetek nagy részében sikerült megközelíteni a Black-Scholes árat valamelyik paraméterbeállítással, de például a legjobbnak talált 6 elágazástól való eltéréssel nagyon megnőtt a hiba nagysága is, ilyen értelemben nem mondható stabilnak az árazás. Érdemes lenne további kutatási irányként szofisztikáltabb árfolyamgenerálás esetén vizsgálni az árazás stabilitását, hiszen hiába tudjuk magát az árazást viszonylag könnyen megkonstruálni lineáris programozási feladatként, a fa generálásának mikéntje és a paraméterek beállítása kulcskérdés.

A dolgozatom egyik másik fő pontja volt a modell tranzakciós költségekkel való kiegészítése. Ebben a modellstruktúrában viszonylag könnyen és intuitív módon beépíthetők ezek a költségek, ez is mutatja a szcenárió fák széleskörű felhasználási lehetőségét. Külön lehetőségünk van fix és arányos költségek beépítésére és természetesen a kettőt kombinálni is lehet. Az árváltozáson kívül az átrendezések számának változását is vizsgáltam, ami az általam alkalmazott legalacsonyabb tranzakciós költség esetén is majdnem megfelezte ezek számát. Az eredmények ismertetése után röviden bemutattam egy Leland (1985) által kifejlesztett modellt, amivel a Black-Scholes keretrendszert bővítette ki tranzakciós költségekkel. További kutatási kérdésként érdekes lehet a tranzakciós költségek mentén is összehasonlítani a különböző modellstuktúrákat. További érdekes kutatási irány lehet, valamilyen módon valós adatok felhasználása és modellezése, ahol az egyszerűbb opciók esetén közvetlenül meg tudjuk figyelni az árat. A dolgozat végén pedig egy kevésbé klasszikus felhasználási módját mutattam be a szcenárió fáknak, biztosításokba ágyazott opciók értékelésére.

7. Irodalomjegyzék

Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. Journal of political economy, 81(3), 637-654.

Briys, E., & De Varenne, F. (1997). On the risk of insurance liabilities: debunking some common pitfalls. Journal of Risk and Insurance, 673-694.

Consiglio, A., & De Giovanni, D. (2010). Pricing the option to surrender in incomplete markets. Journal of Risk and Insurance, 77(4), 935-957.

Finkelstein, G., McWilliam, E., Nagle, S., de Beus, P., Van Leijenhorst, R., Maas, L., & Cui, J. (2003). Guarantee and embedded options. Ernst en Young.

Forsyth, P. A., & Vetzal, K. R. (2001). Implicit solution of uncertain volatility/transaction cost option pricing models with discretely observed barriers. Applied Numerical Mathematics, 36(4), 427-445.

Gotoh, J. Y., Yamamoto, Y., & Yao, W. (2011). Bounding Contingent Claim Prices via Hedging Strategy with Coherent Risk Measures. Journal of optimization theory and applications, 151(3), 613.

Grosen, A., & Jørgensen, P. L. (2000). Fair valuation of life insurance liabilities: the impact of interest rate guarantees, surrender options, and bonus policies. Insurance: Mathematics and Economics, 26(1), 37-57.

Høyland, K., Kaut, M., & Wallace, S. W. (2001). A heuristic for generating scenario trees for multistage decision problems.

Høyland, K., & Wallace, S. W. (2001). Generating scenario trees for multistage decision problems. Management science, 47(2), 295-307.

Hull, J. C. (2012). Options, Futures, and Other Derivatives. Eight edition. New Jersey: PrenticeHall., 292-300.

Jørgensen, P. L. (2001). Life Insurance Contracts with Embedded Options: Valuation, Risk Management, and Regulation. Risk Management, and Regulation (December 13, 2012). Journal of Risk Finance, 3(1), 19-30.

King, A. J. (2002). Duality and martingales: a stochastic programming perspective on contingent claims. Mathematical Programming, 91(3), 543-562.

Leland, H. E. (1985). Option pricing and replication with transactions costs. The journal of finance, 40(5), 1283-1301.

Uemura, N. (2008). The failure without management. Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Tokyo.