Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapesti Corvinus Egyetem

Közgazdaságtudományi Kar

Kiss Tibor

Fedezeti stratégiák vizsgálata tranzakciós költség jelenlétében

BPM szakdolgozat

Témavezető:

dr. Bihary Zsolt

Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék

Budapest, 2020

NYILATKOZAT

Név: Kiss Tibor

ELTE Természettudományi Kar, szak: Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc

NEPTUN azonosító: FQ4Z6H

Szakdolgozat címe:
Fedezési stratégiák vizsgálata tranzakciós költség jelenlétében

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020.12.18.

Kiss Tibor

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani a családomnak és páromnak, Zsófinak, hogy végig támogattak, és ösztönöztek a munkára. Külön köszönetet szeretnék mondani témavezetőmnek, dr. Bihary Zsoltnak, aki hasznos tanácsaival, meglátásaival, ötleteivel segítette munkámat, és nagyban hozzájárult ahhoz, hogy ez a dolgozat elkészülhessen.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A fedezés alapvető szerepet tölt be a pénzügyi életben, hiszen a derivatív termékek esetében a kockázatkezelés egyik fontos eszköze, valamint a fedezési stratégiák a pénzügyi modellezésnek is fontos alapját képezik, hiszen a replikáló portfólió előállítása és költsége kulcsfontosságú szerepet tölt be a derivatív ügyletek árazásában. A modellekben, amelyekkel ezeket a termékeket árazzuk, például a Cox-Ross-Rubinstein vagy a Black-Scholes modell, élünk bizonyos feltételezésekkel, például hogy bármilyen mennyiségben tudunk kereskedni az alaptermékkel, vagy hogy nincsenek tranzakciós költségek. Ezek fontos és szükséges feltételek, hiszen ezek teszik lehetővé azt, hogy meg tudjunk határozni egy egyértelmű, fair árat az adott pénzügyi termékre. A valóságban azonban a tranzakciós költségek jelen vannak, így ezek a stratégiák a gyakorlatban nem úgy működnek, mint a modellben, nem képesek tökéletesen replikálni, és költségesebbek is, mint a fair ár.

A tranzakciós költségek többféle formában is megjelenhetnek, lehet ez egy fix összeg ügyletenként, vagy az ügylet értékének egy meghatározott százaléka. A tranzakciós költség jelenléte miatt minden alkalommal, amikor kereskedünk, elszenvedünk bizonyos mértékű plusz költséget, ez pedig igencsak bonyolítja a fedezés kérdését. A tranzakciós költségből származó veszteség mértéke sztochasztikus, tehát ebből is származik bizonyos mértékű bizonytalanság. Ezenkívül a fedezés szempontjából egyfajta trade-off van az alaptermék árváltozásai és a tranzakciós költség jelentette bizonytalanság között: ha sűrűn fedezünk, hogy jórészt kiküszöböljük az alaptermékből származó piaci kockázatot, akkor a tranzakciós költségekből származó veszteségek igen nagyra nőhetnek, ha viszont ritkábban fedezünk, akkor a tranzakciós költségek alacsony szinten maradnak, viszont a fedezésünk nem lesz túl jó. Ezáltal felvetődik a kérdés, hogy mi is a megfelelő stratégia ebben a helyzetben, hogyan tudunk úgy fedezni, hogy minimalizáljuk a veszteségünket, és egyszersmint a lehető legjobban fedezzük a pozíciónkat. A célom, hogy a tranzakciós költségek által jelentett problémakört minél alaposabban körüljárjam dolgozatomban, és az elméleti, valamint gyakorlati eredményeket összesítve egy általános képet kapjunk a témakörről.

Dolgozatomban először bevezetem a felhasznált modelleket, illetve fogalmakat. Ezután összefoglalom a téma irodalmát, bemutatva a tranzakciós költségek melletti fedezés különböző megközelítéseit, és az általuk adott eredményeket. Végül szimuláció segítségével elemzem a tranzakciós költségek hatását, a különféle modellek és fedezési stratégiák alkalmazása során bekövetkező veszteségeket, és összehasonlítom teljesítményük alapján a stratégiákat.

2. fejezet

Alapfogalmak bevezetése

Első lépésként bevezetem azokat az alapvető fogalmakat és modelleket, amelyek a dolgozatban gyakran előfordulnak. Ezek többségével rendszeresen találkozhatunk a pénzügyi matematika világában, ezért például a modelleket nem teljes mélységükben fogom bevezetni, a cél az, hogy a későbbiekben egyértelmű legyen, hogy mit értek az adott fogalom alatt.

2.1. Opcióárazási modellek

Dolgozatomban két alapvető modellből fogok kiindulni, ezek a Cox-Ross-Rubinstein és a Black-Scholes modellek. Ugyan más modellek esetében is születtek eredmények a témakörben, de mivel ezek egyszerű és széles körben használt modellek, így a legtöbb úttörő cikk a tranzakciós költségek melletti fedezés témájában ezekből indul ki, a bonyolultabb modellekre elért eredmények pedig túlnyomó többségben ezeket a módszereket, megközelítéseket viszik tovább.

2.1.1. Black-Scholes modell

A Black-Scholes modell [2] a legszélesebb körben használt modell derivatívák árazására. A modellben a piacon három termék van, egy részvény (kockázatos), egy kötvény (kockázatmentes), és egy derivatíva a részvényre. Feltesszük a piacról, hogy arbitrázsmentes, hogy nincsenek tranzakciós vagy egyéb járulékos költségek, bármilyen mennyiségben lehet kereskedni (akár shortolni is) a részvénnyel, illetve hogy bármilyen mennyiségben tudunk venni kötvényt, illétve hitelt felvenni a kötvény segítségével. A Black-Scholes modellben a részvényárfolyamat alakulását geometriai Brown-mozgás írja le,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

ahol μ a részvényár driftje, σ a részvényár volatilitása, és W egy Wiener-folyamat. A kötvény folytonosan kamatozik egy konstans r kamatlábbal, vagyis $dB = rdt$.

A derivatívát a martingálmérték alatt árazzuk, amelyre az teljesül, hogy a kötvénnyel diszkontált értékfolyamata a részvénynek, illetve ezáltal a kötvény-részvény portfólióknak martingál. Ennek a tulajdonságnak a segítségével levezethető, hogy egy $P(S,t)$ értékű derivatívára teljesül, hogy

$$rP = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial S} rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\sigma^2 S^2.$$

A t szerinti deriváltat a derivatíva thetájának, az S szerinti deriváltat a derivatíva deltájának, az S szerinti kétszeres deriváltat pedig a derivatíva gammájának szokás hívni.

2.1.2. Cox-Ross-Rubinstein modell

Az időben diszkrét opcióárazási modellek közül az egyik leggyakrabban használt, és egyben az egyik legegyszerűbb a Cox-Ross-Rubinstein modell [4]. A Black-Scholes modellhez hasonlóan a piacon itt is három termék van jelen: egy részvény, egy kötvény, és egy derivatíva a részvényre, illetve a piacra vonatkozó egyéb feltételek is érvényesek. A modellben a részvény árának alakulását egy binomiális fával írjuk le, amelyet az alábbi módon generálunk: kiindulunk egy kezdeti részvényárból, $S(0)$-ból. Innen kétféle irányba mozdulhat el a részvény értéke, vagy felfelé mozdulunk a fán, ami azt jelenti, hogy az új részvényár $S(0)u$ lesz, vagy lefelé mozdulunk a fán, ekkor pedig az új ár $S(0)d$ lesz, ahol

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{és} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

σ a részvény volatilitása, Δt pedig az egyes lépések között eltelt időmennyiség. Ezután ugyanígy minden lépésben a részvényár u-szorosára vagy d-szeresére változhat egészen addig, amíg elérjük a lejárat időpontját. Maga a részvényár pedig úgy alakul, hogy minden lépésben az adott állapotból p valószínűséggel felfelé, $1-p$ valószínűséggel pedig lefelé lépünk. A kötvényünk értéke minden lépésben $R = e^{r\Delta t}$-szeresére kamatozódik, ahol r a kockázatmentes kamatláb.

A derivatívákat itt is a kockázatmentes, vagy martingálmérték alatt árazzuk, amelyben teljesül, hogy a részvény (és bármilyen összetételű kötvény-részvény portfólió) diszkontált értékfolyamata, vagyis az $\frac{S(t)}{B(t)}$ folyamat martingál. A martingálság miatt $E\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right) = \frac{S(0)}{B(0)} = S(0)$ teljesül minden t-re, ebből pedig a kötvényár determinisztikus alakulása miatt az adódik, hogy $E(S(t)) = S(0)e^{rt}$. Ezek alapján az első lépés után az az egyenlőség adódik, hogy $E(S(t_1)) = S(0)R = qS(0)u + (1-q)S(0)d$, ahol q a felfelé lépés valószínűsége a martingálmértékben, gyakori nevén a kockázatmentes valószínűség. Ebből az egyenletből könnyen megkapható a kockázatmentes valószínűség formulája, ami $q = \frac{R-d}{u-d}$.

Ha adott egy derivatíva az $f(S(T))$ kifizetésfüggvénnyel, akkor a derivatíva értéke megadható úgy, mint a kifizetés diszkontált várható értéke, azaz a következő alakban

$$P_f = E\left(\frac{f(S(T))}{B(T)}\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} e^{-rT} f(S(0)u^i d^{n-i}),$$

ahol $n = \frac{T}{\Delta t}$.

2.2. Kereskedési stratégiák

Most azt fogom röviden definiálni, hogy mit fogok fedezési stratégia alatt érteni. A jelölésekhez és a definíciók leírásához felhasználtam Márkus László egyetemi jegyzetét [9].

Először a kereskedési stratégia fogalmát vezetem be. Továbbra is feltesszük, hogy csak egy kötvény és egy részvény van a piacon, jelölje ezeknek az értékét a t időpontban rendre $B(t)$ és $S(t)$. Feltesszük továbbá, hogy csak a $0 = t_0, t_1, \dots t_n$ időpontokban kereskedünk. Ezenkívül legyen $\mathcal{F}_t$ a részvényárfolyamat által generált σ-algebra, azaz $\mathcal{F}_t = \sigma(S(s)|s \leq t)$, és $\mathcal{F}$ az ezen σ-algebrákból álló filtráció.

2.2.1. Definíció. Egy $\beta(t), \gamma(t)$ folyamatpárt kereskedési stratégiának nevezünk, ha mindkét folyamat előrejelezhető az $\mathcal{F}$ filtráció szerint, azaz ha $\beta(t_i)$ és $\gamma(t_i)$ is $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mérhető.

Az előrejelezhetőség szükségességének magyarázata egyszerű: minden időpontban ismernünk kell, hogy mennyi kötvényt, illetve részvényt szeretnénk tartani a következő időpontig. Ez a definíció kiterjeszthető folytonos időre is, azaz amikor minden pillanatban kereskedhetünk, ekkor annak kell teljesülnie, hogy $\beta(t)$ és $\gamma(t)$ $\mathcal{F}_{t-}$-mérhető, ahol $\mathcal{F}_{t-} = \lim_{s \to t-} \mathcal{F}_s$.

2.2.2. Definíció. A $\beta(t), \gamma(t)$ kereskedési stratégia önfinanszírozó, ha nem változik meg a portfólió értéke egyetlen átrendezéskor sem, azaz minden t_i időpont esetén fennáll, hogy

$$\beta(t_i)B(t_i) + \gamma(t_i)S(t_i) = \beta(t_{i+1})B(t_i) + \gamma(t_{i+1})S(t_i).$$

Az árazás és fedezés vizsgálatánál csak önfinanszírozó stratégiákat fogok vizsgálni, hiszen ezekben az esetekben főként arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora kezdőtőkére van szükség az adott stratégia végrehajtásához. Már csak azt kell specifikálni, hogy mit is fogunk fedezési stratégia alatt érteni. Vegyünk egy derivatívát, jelöljük ennek a lejárati idejét T-vel, és legyen ennek a kifizetésfüggvénye $f(S(T))$.

2.2.3. Definíció. A $\beta(t), \gamma(t)$ önfinanszírozó stratégia fedezési stratégia az $f(S(T))$ kifizetési függvényű derivatívára, ha mindig teljesül T-ben, hogy

$$\beta(T)B(T) + \gamma(T)S(T) = f(S(T)).$$

Ez egy viszonylag szigorú definíció, mivel bizonyos esetekben csak annyi a feltétel, hogy a portfólió T-beli értéke legalább akkora legyen, mint a kifizetésfüggvény. Dolgozatomban azonban fedezési stratégia alatt mindig ezt az esetet fogom érteni, amikor a portfólió értéke pontosan megegyezik a kifizetéssel. Ennek oka a dolgozat témájában ered: elsősorban azt szeretném vizsgálni a dolgozatban, hogy a tranzakciós költségek által jelentett bizonytalanságot mekkora veszteség mellett tudjuk kezelni a fedezésben.

Például a Black-Scholes modell esetében az alapvető fedezési stratégia az, ahol mindig a derivatíva deltájának megfelelő részvényt tartunk, kötvény tekintetében pedig az opció fair árának megfelelő mennyiségű hitellel indulunk, majd ez dinamikusan, a kereskedésünknek megfelelően változik. A modell feltételei mellett, ezt a stratégiát folytatva lejáratkor a portfóliónk értéke pontosan meg fog egyezni a kifizetésfüggvénnyel.

A Cox-Ross-Rubinstein modell esetében is hasonló a fedezési stratégia, ennek a modellnek a deltája úgy áll elő, mint

$$\Delta(S,t) = \frac{P(Su, t+\Delta t) - P(Sd, t+\Delta t)}{Su - Sd},$$

ahol $P(S,t)$ a derivatíva ára a t időpontban S részvényár mellett. Az induló kötvénymennyiség itt is a fair áron múlik, lejáratkor pedig a fedező portfólió értéke itt is meg kell egyezzen a kifizetéssel.

2.3. Tranzakciós költségek specifikálása

A tranzakciós költségek a gyakorlatban a kereskedéssel járó plusz költségeket jelentik, mint például a bid-ask spreadből eredő költség a részvény vásárlásánál, a bróker jutaléka, és így tovább. A tranzakciós költségeknek alapvetően két típusát különböztetjük meg: lehet fix költség, ami minden kereskedésnél az üzlet értékétől függetlenül ugyanakkora, és lehet értékarányos költség. Ezek eltérő módon hatnak a fedezési stratégiákra, a fix költségekből adódó kiadások akkor nőnek meg, ha túl gyakran, túl sokszor rendezzük át a portfóliónkat, az értékarányos költségekből adódó kiadások pedig akkor, ha túl nagy volumenben kereskedünk.

Dolgozatomban csak az értékarányos költségek hatását fogom vizsgálni, ennek több oka is van. Egyrészt bonyolultság szempontjából az értékarányos költségek vizsgálata sokkal érdekesebb kérdés, hiszen trajektóriafüggő, hogy mekkora járulékos veszteséget szenvedünk el általuk a fedezés során, míg a fix költségek esetében ez kizárólag attól függ, hogy hányszor kereskedtünk. Tehát például ha tudjuk, hogy naponta szeretnénk fedezni, akkor az értékarányos költségek sztochasztikusak lesznek, viszont a fix költség determenisztikus lesz, mivel tudjuk hányszor fogunk kereskedni. Másrészt a túl sűrű fedezés nemcsak a fix, hanem az értékarányos költség szempontjából sem előnyös. Az, hogy mennyi részvényt kell tartanunk, alapvetően sztochasztikus, és ha túl szorosan követjük a változásait, akkor abból igen nagy veszteségünk adódhat. Tehát azt a szempontot, ami miatt érdemes lenne vizsgálni a fix költségeket, nagyrészt az értékarányos költség is hordozza.

A tranzakciós költség mértékét a dolgozatban κ-val fogom jelölni. Ez a κ bid-ask spreadhez hasonlóan fog funkcionálni: ha t-ben vennünk kell részvényt, akkor $(1+\kappa)S(t)$ áron fogunk vásárolni, ha pedig eladnunk kell, akkor $(1-\kappa)S(t)$ áron fogunk eladni.

3. fejezet

Fedezés és árazás tranzakciós költségek jelenlétében

3.1. Leland módszere

Az egyik első jelentős, és a témában igen gyakran idézett eredmény Leland [8] nevéhez fűződik. Munkájában a Black-Scholes-modellből indult ki, majd azt látta be, hogy egy, a delta-fedezéshez hasonló stratégiával replikálva az adódó tranzakciós költség ésszerű korlátok között tartható várható érték és szórás tekintetében, és az opcióár becsülhető a Black-Scholes-formulával egy módosított volatilitás bevezetése mellett, amely kompenzálja a tranzakciós költségek jelenlétét a modellben. Ugyan Leland eredményének bizonyos elemeit később megcáfolták, megközelítését a témakörben sok más kutató is alkalmazta az évek során. A következőkben ezt a replikáló stratégiát és levezetését fogom bemutatni.

Bár a Black-Scholes-modell esetében az opcióár a folytonos delta-fedezésen alapul, a folytonos, illetve nagyon sűrű fedezés tranzakciós költségek jelenlétében igen magas költségekhez vezetne, mivel a részvényárfolyamat totális variációja végtelen. Ezért egy kicsi, de nem infinitezimális Δt időközönként fogjuk átvariálni a portfóliónkat, ezzel megakadályozva, hogy teljesen elszálljanak a költségek. Δt alatt a részvényár változása a következő módon írható fel:

$$\Delta S = S(\mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} + O(\Delta t^{3/2})),$$

ahol ϵ egy standard normális valószínűségi változó. Ez a formula mindössze a részvényár dinamikájának diszkretizálásából adódik, azért volt fontos a bevezetése, mert a későbbiekben ezt használni fogjuk.

Nézzük, hogyan épül fel Leland stratégiája. Vezessük be a következő módosított volatilitást:

$$\hat{\sigma}^2(\kappa, \Delta t) = \sigma^2 \left(1 + \frac{\kappa E\left|\frac{\Delta S}{S}\right|}{\sigma^2 \Delta t}\right) = \sigma^2 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\kappa}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right),$$

mivel

$$E\left|\frac{\Delta S}{S}\right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\sqrt{\Delta t}.$$

Ekkor emellett a módosított volatilitás mellett az opcióár a Black-Scholes-formula szerint alakul, azaz

$$\hat{C}(S, K, \hat{\sigma}, r, T) = S\Phi(\hat{d}_1) - Ke^{-rT}\Phi(\hat{d}_2),$$

ahol

$$\hat{d}_{1,2} = \frac{\log(S/K) + rT}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\hat{\sigma}\sqrt{T}.$$

Ezt úgy fogjuk belátni, hogy megmutatjuk, hogy ha $\hat{C}$-nek megfelelően delta-fedezünk, azaz Δt időközönként úgy rendezzük át a portfóliónkat, hogy $\hat{\Delta} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial S}$ részvényt tartunk és $\hat{B} = \hat{C} - \hat{\Delta}S$ értékű kötvényünk van, akkor kicsi Δt mellett ennek a stratégia fedezési hibája is kicsi lesz, a várható kifizetés pedig majdnem mindenütt $(S-K)^+$ lesz a tranzakciós költségek figyelembe vétele mellett is.

Ehhez először azt fogjuk megnézni, hogy Δt alatt hogyan változik a P fedező portfólió, és a $\hat{C}$ opcióár értéke. Az előbbiekben ismertetett stratégiát használva

$$\begin{aligned} \Delta P &= \hat{\Delta}\Delta S + rB\Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= \frac{\partial \hat{C}}{\partial S} S \left(\frac{\Delta S}{S}\right) + r\left(\hat{C} - \frac{\partial \hat{C}}{\partial S} S\right)\Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Az opcióár változása a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{C} &= \hat{C}(S + \Delta S, t + \Delta t) - \hat{C}(S, t) \\ &= \frac{\partial \hat{C}}{\partial S} S \left(\frac{\Delta S}{S}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial S^2} S^2 \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \frac{\partial \hat{C}}{\partial t}\Delta t + O(\Delta t^{3/2}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Δt után a $\hat{\Delta}$ megváltozásának megfelelően a fedező portfóliót is át kell rendezni. Az ebből adódó tranzakciós költség az alábbi módon becsülhető:

$$
\begin{aligned}
TC &= \frac{1}{2}\kappa \left| \left(\frac{\partial \hat{C}}{\partial S}(S+\Delta S, t+\Delta t) - \frac{\partial \hat{C}}{\partial S}(S,t) \right)(S+\Delta S) \right| \\
&= \frac{1}{2}\kappa \left| \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial S^2}\Delta S(S+\Delta S) \right| + O(\Delta t^{3/2}) \\
&= \frac{1}{2}\kappa \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial S^2} S^2 \left| \frac{\Delta S}{S} \right| + O(\Delta t^{3/2}),
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

ahol a második sorbeli összefüggés az S szerinti derivált megváltozására adott Taylor-sorfejtésből adódik.

Ezek segítségével már felírhatjuk a Δt alatt adódó fedezési hibát, amelyet ΔH-val fogunk jelölni. Ez úgy áll elő, mint

$$
\Delta H = \Delta P - \Delta \hat{C} - TC.
$$

Ebbe behelyettesítve a kapott kifejezéseket, és elvégezve az összevonásokat az adódik, hogy

$$
\begin{aligned}
\Delta H = r\left(\hat{C} - \frac{\partial \hat{C}}{\partial S}S\right)\Delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial S^2}S^2\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 - \frac{\partial \hat{C}}{\partial t}\Delta t \\
-\frac{1}{2}\kappa\frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial S^2}S^2\left|\frac{\Delta S}{S}\right| + O(\Delta t^{3/2}).
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Mivel $\hat{C}$ a Black-Scholes formulából adódik, így teljesül rá az, hogy

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial S^2}S^2\hat{\sigma}^2 + \frac{\partial \hat{C}}{\partial t} - r\left(\hat{C} - \frac{\partial \hat{C}}{\partial S}S\right) = 0,
$$

ezt az összefüggést felhasználva pedig azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\Delta H &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial S^2}S^2\left[\hat{\sigma}^2\Delta t - \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 - \kappa\left|\frac{\Delta S}{S}\right|\right] + O(\Delta t^{3/2}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial S^2}S^2\left[\sigma^2\Delta t + \kappa E\left|\frac{\Delta S}{S}\right| - \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 - \kappa\left|\frac{\Delta S}{S}\right|\right] + O(\Delta t^{3/2}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial S^2}S^2\left[\sigma^2\Delta t - \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \kappa\left(E\left|\frac{\Delta S}{S}\right| - \left|\frac{\Delta S}{S}\right|\right)\right] + O(\Delta t^{3/2})
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Ekkor $E(\Delta H) = O(\Delta t^{3/2})$, mivel a zárójelben lévő rész várható értéke 0. Ha Δt időközre ekkora a fedezésből adódó hiba várható értéke, akkor az opció teljes időtartamára a hiba várható értéke

$$E\left(\sum_{t=0}^{T-\Delta t}\Delta H_t\right)=\sum_{t=0}^{T-\Delta t}E(\Delta H_t)=\frac{T}{\Delta t}O(\Delta t^{3/2})=O(\Delta t^{1/2}),$$

azaz $\Delta t\to 0$ esetén a hiba várható értéke 0-hoz tart. Emellett $D^2(\Delta H)=O(\Delta t^2)$, ebből pedig az következik, hogy

$$D^2\left(\sum_{t=0}^{T-\Delta t}\Delta H_t\right)=\sum_{t=0}^{T-\Delta t}D^2(\Delta H_t)=\frac{T}{\Delta t}O(\Delta t^2)=O(\Delta t),$$

mivel az egyes időszakokra jutó fedezési hibák korrelálatlanok. Tehát $\Delta t\to 0$ esetén a variancia is 0-hoz tart, ezzel pedig beláttuk, hogy a $(\hat{\Delta},\hat{B})$ stratégiával fedezve a várható hiba a fedezés frekvenciájának növelésével 0-hoz tart, ezáltal pedig a módosított volatilitással megadott ár megfelelő lesz.

Mindazonáltal, könnyen észrevehető, hogy ha $\Delta t\to 0$, akkor $\hat{\sigma}\to\infty$, tehát bár a levezetésben van ráció, tökéletes eredményt nem lehet vele elérni. Ettől függetlenül Leland cikkét gyakran citálják a tranzakciós költségek témájával foglalkozó munkákban, illetve a cikkben alkalmazott ötletek, módszerek, mint például a módosított volatilitás alkalmazása, vagy a várható értékek használata a tranzakciós költségek kezeléséhez, felbukkannak későbbi eredményeknél is.

3.2. Hoggard, Whalley és Wilmott egyenlete

A folytonos esetben Leland után is születtek próbálkozások a replikálásra az övéhez hasonló módszerekkel. Hoggard, Whalley és Wilmott 1994-es cikkükben [7] adtak meg egy parciális differenciálegyenletet, amely használható európai opciók árazására tranzakciós költségek jelenlétében. Az alábbiakban ennek az egyenletnek a levezetését mutatom be Florescu, Marianu és Sengupta [5] cikke alapján.

Az alaptermék a Black-Scholes-modellhez hasonlóan itt is geometriai Brown-mozgást követ. Legyen Π a fedezési portfólió értéke, $C(S,t)$ pedig az opció értéke. Diszkrét időben közelítve kicsi δt lépésköz mellett ekkor az alaptermék árának dinamikája

$$\delta S=\mu S\delta t+\sigma S\epsilon\sqrt{\delta t},$$

ahol μ a drift, σ a volatilitás, és ϵ egy standard normális valószínűségi változó. A portfóliónk értéke $\Pi=C-\Delta S$, ahol Δ az általunk tartott részvények számát jelöli, így a portfólió értékének változása a következő formában adható meg:

$$\delta\Pi=\sigma S\left(\frac{\partial C}{\partial S}-\Delta\right)\epsilon\sqrt{\delta t}+\left(\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+\mu S\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{\partial C}{\partial t}-\mu\Delta S\right)\delta t-\kappa S|\nu|,$$

ahol ν az adott lépésben kereskedett termékek száma, κ pedig a tranzakciós költség aránya. Bár úgy tűnhet, hogy az előbbi formulához feltettük, hogy Δ konstans, valójában nem ez a helyzet, Δ sztochasztikusságát meghagyva is ugyanez az eredmény adódik.

Alkalmazzunk delta-fedezést, azaz legyen $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}(S,t)$. Mivel feltettük, hogy δt kicsi, így a δt idő után kereskedett termékek száma

$$\nu = \frac{\partial C}{\partial S}(S+\delta S, t+\delta t) - \frac{\partial C}{\partial S}(S,t) = \delta S \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \delta t \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial S} + \cdots$$

Mivel $\delta S = \sigma S \epsilon \sqrt{\delta t} + O(\delta t)$, így csak az első tagot megtartva azt kapjuk, hogy

$$\nu \simeq \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma S \epsilon \sqrt{\delta t}.$$

Ebből adódik, hogy δt időközre a várható tranzakciós költség

$$E(\kappa S|\nu|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \kappa \sigma S^2 \left| \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right| \sqrt{\delta t},$$

ahol $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ az ϵ valószínűségi változó abszolút értékének várható értéke. Ez alapján a várható változás a portfólió értékében δt alatt

$$E(\delta \Pi) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} \kappa \sigma S^2 \left| \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right| \right) \delta t$$

Bár a piac nem teljes, azt feltehetjük, hogy arbitrázsmentes, ekkor pedig levezethető, hogy a portfólió várható hozama a kockázatmentes kamatlábbal egyezik meg:

$$E(\delta \Pi) = r \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \delta t.$$

Az előző két formula segítségével a szerzők az alábbi parciális differenciálegyenletet kapták európai call opciók tranzakciós költségek melletti árazására:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} \kappa \sigma S^2 |\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0,$$

az $(S,t) \in (0,\infty) \times (0,T)$ értelmezési tartományon, $C(S,T) = (S-K)^+$ peremfeltétel mellett, ahol K az opció strike-ja. Értelemszerűen a fenti differenciálegyenlet nemcsak call opció árazására alkalmas, ha például egy európai put opciót szeretnénk árazni, akkor egyszerűen a put kifizetésfüggvényét kell megadni T-ben peremfeltételnek.

3.3. Replikálás diszkrét időben

Láthattuk, hogy folytonos modellben igen nehézkes a derivatívák replikálása, ha jelen vannak a modellünkben a tranzakciós költségek, viszont a diszkrét időköz használata után felvetődhet a kérdés, hogy diszkrét modellben lehetséges-e a replikálás, és ezáltal az opció árazása. Boyle és Vorst [3] dolgoztak ki elsőként replikáló stratégiát európai opciókra, most az ő módszerüket fogom áttekinteni.

A szerzők azt tették fel, hogy az alaptermék ára a Cox-Ross-Rubinstein modell szerint alakul. A kereskedési stratégiák bevezetésénél példaként már ismertettem a replikáló stratégiát, de fontos megjegyezni, hogy a stratégia lényegében az, hogy mindig annyi részvényt és kötvényt tartunk, hogy az értékük megegyezzen az aktuális opcióárral, és akármelyik irányba mozdul is el a részvényár, a következő időpontban a portfóliónk a kívánt értéket, vagyis az ott aktuális opcióárat vegye fel. Ez súrlódásmentes piacon egyszerűen megoldható, mivel a portfólió átrendezésének nincs extra költsége, így ha egyszerűen Δ-val jelöljük az általunk tartott részvények számát, és B-vel a kötvényeink értékét, akkor ezeket egy egyszerű két ismeretlenes, lineáris egyenletrendszer megoldásával megkaphatjuk, amennyiben mindkét elágazásra ismerjük a megfelelő Δ és B értékeket. Azonban tranzakciós költségek jelenlétében már nem ilyen egyszerű a helyzet, hiszen ha önfinanszírozó replikáló stratégiát akarunk építeni, akkor figyelembe kell vennünk a portfóliónk átrendezésénél felmerülő tranzakciós költség értékét is. Ekkor Δ-t és B-t az alábbi egyenletrendszer megoldásaként kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} \Delta Su + BR &= \Delta_u Su + B_u + \kappa|\Delta - \Delta_u|Su \\ \Delta Sd + BR &= \Delta_d Sd + B_d + \kappa|\Delta - \Delta_d|Sd, \end{aligned} \tag{3.6}$$

azonban ez az egyenletrendszer nem lineáris Δ-ban a tranzakciós költségnek megfelelő tagok miatt, így nem feltétlen triviális, hogy az egyenletrendszernek van-e egyáltalán egyértelmű megoldása.

3.3.1. Állítás. *A 3.6 egyenletrendszernek van egyértelmű (Δ, B) megoldása, és Δ-ra a következő egyenlőtlenség áll fenn:*

$$\Delta_d \leq \Delta \leq \Delta_u \tag{3.7}$$

Bizonyítás. Lejáratkor a Δ-k értéke 1 vagy 0 lehet, attól függően, hogy S nagyobb-e vagy kisebb, mint a strike. Mivel $\Delta \in [0, 1]$ minden t időpontban és minden állapotban, így $T - 1$-ben, azaz a lejárat előtt biztosan teljesül 3.7. Emiatt feltehetjük azt időben visszafelé haladó indukcióval, hogy Δ_u-ra és Δ_d-re fennáll 3.7, azaz $\Delta_{ud} \leq \Delta_u \leq \Delta_{uu}$ és $\Delta_{dd} \leq \Delta_d \leq \Delta_{ud}$, ebből pedig következik, hogy $\Delta_d \leq \Delta_{ud} \leq \Delta_u$.

Vonjuk ki a második egyenletet az elsőből, és rendezzünk mindent egy oldalra. Mivel a BR kiesik, így ez a kifejezés csak Δ-tól függ, és bevezetjük rá az f jelölést:

$$f(\Delta) = \Delta S(u - d) - \Delta_u Su + \Delta_d Sd - B_u + B_d - \kappa|\Delta - \Delta_u|Su + \kappa|\Delta - \Delta_d|Sd.$$

Azok a Δ értékek lehetnek megoldásai a 3.6 egyenletrendszernek, amelyekre $f(\Delta) = 0$. $f(\Delta)$ folytonos és szakaszonként lineáris, a deriváltja pedig mindegyik szakaszon szigorúan pozitív, így f egy szigorúan monoton növekvő függvény lesz, azaz csak egyetlen zérushelye lehet. Ezzel a (Δ, B) megoldás egyértelműségére vonatkozó részt beláttuk, mivel ha Δ-t ismerjük, B is egyértelműen kiszámolható. Azaz már csak azt kell belátni, hogy 3.7 is mindig teljesül, ehhez az f szigorú monotonitása miatt elég azt belátni, hogy $f(\Delta_d) < 0$ és $f(\Delta_u) > 0$. Korábban feltettük, hogy 3.7 teljesül Δ_u-ra és Δ_d-re, így 3.6 megfelelő egyenleteit alkalmazva felírhatjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\Delta_u Sud + B_u R &= \Delta_{ud} Sud + B_u d + \kappa(\Delta_u - \Delta_{ud}) Sud \\
\Delta_d Sud + B_d R &= \Delta_{ud} Sud + B_u d + \kappa(\Delta_{ud} - \Delta_d) Sud
\end{aligned}
$$

Az első egyenletet a másodikból kivonva és R-rel leosztva azt kapjuk, hogy

$$(\Delta_d - \Delta_u)\frac{Sud}{R} + B_d - B_u = \kappa((\Delta_{ud} - \Delta_d) - (\Delta_u - \Delta_{ud}))\frac{Sud}{R}.$$

Ebből pedig az adódik $f(\Delta_d)$-re, hogy

$$
\begin{aligned}
f(\Delta_d) &= (\Delta_d - \Delta_u)Su(1+\kappa) - B_u + B_d \leq (\Delta_d - \Delta_u)\frac{Sud}{R}(1+\kappa) - B_u + B_d \\
&= \kappa((\Delta_{ud} - \Delta_d) - (\Delta_u - \Delta_{ud}))\frac{Sud}{R} + \kappa(\Delta_d - \Delta_u)\frac{Sud}{R} \\
&= 2\kappa(\Delta_u d - \Delta_u)\frac{Sud}{R} \leq 0.
\end{aligned}
$$

Hasonlóan belátható, hogy $f(\Delta_u) = (\Delta_u - \Delta_d)Sd(1-\kappa) - B_u + B_d \geq 0$, ezzel pedig az állítás második részét is sikerült igazolni. □

Ezen állítás alapján átírhatjuk a 3.6 egyenletrendszert a következő alakra:

$$
\begin{aligned}
\Delta Su(1+\kappa) + BR &= \Delta_u Su(1+\kappa) + B_u \\
\Delta Sd(1-\kappa) + BR &= \Delta_d Sd(1-\kappa) + B_d
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Ez az egyenletrendszer már lineáris, így a lejáratkori értékekből visszafelé indulva kiszámolhatóak minden állapotra a megfelelő Δ és B értékeket. Vegyük észre, hogy $\overline{u} = u(1+\kappa)$-t és $\overline{d} = d(1-\kappa)$-t beírva visszakapjuk a tranzakciós költségek nélküli esetet, így felmerülhet a kérdés, hogy nem használhatnánk-e a tranzakciós költségek nélküli eset árazási formuláit a módosított u-val és d-vel az opcióár meghatározására. Ez a megközelítés azonban hibás, hiszen a 3.8 egyenletrendszerben az egyenletek jobb oldalán álló értékek nem a call opció adott állapotbeli értékét mutatják, felfelé lépés esetén a call értéke $\Delta_u Su + B_u$, nem pedig $\Delta_u Su(1+\kappa) + B_u$.

Ahogy arról már korábban szó esett, a Cox-Ross-Rubinstein modellben a tranzakciós költségek nélküli esetben az opció ára előáll úgy, mint a lejáratkori érték diszkontált várható értéke a martingálmérték felett. Ahhoz, hogy ezt a módszert a tranzakciós költségek mellett is lehessen alkalmazni, szükség van a martingálmérték valószínűségeire. A szerzők előállították ezeket a valószínűségeket, majd ennek segítségével meg is adtak egy, a tranzakciós költségek nélküli esethez hasonló diszkontált várható érték formulát.

A 3.8 egyenletrendszer alapján egy kétperiódusos modell esetén

$$C = \Delta S + B = \frac{\overline{p}(\Delta_u S u(1+\kappa) + B_u) + (1-\overline{p})(\Delta_d S d(1-\kappa) + B_d}{R},$$

ahol C a replikáló portfólió jelenlegi értéke és

$$\overline{p} = \frac{R - d(1-\kappa)}{u(1+\kappa) - d(1-\kappa)}.$$

Mivel a modell két periódusos ezt tovább alakíthatjuk úgy, mint

$$\begin{aligned} C = \Delta S + B = [&\overline{p}\overline{p}_u(\Delta_{uu} S u^2(1+\kappa) + B_{uu} \\ &+ \overline{p}(1-\overline{p}_u)(\Delta_{ud} S u d(1-\kappa) + B_{ud} \\ &+ (1-\overline{p})\overline{p}_d(\Delta_{ud} S u d(1+\kappa) + B_{ud} \\ &+ (1-\overline{p})(1-\overline{p}_d)(\Delta_{dd} S d^2(1-\kappa) + B_{dd}]/R^2, \end{aligned} \tag{3.9}$$

ahol

$$\overline{p}_u = \frac{R(1+\kappa) - d(1-\kappa)}{u(1+\kappa) - d(1-\kappa)} \text{ és } \overline{p}_d = \frac{R(1-\kappa) - d(1-\kappa)}{u(1+\kappa) - d(1-\kappa)}.$$

Látható, hogy az egyenlet jobb oldala értelmezhető diszkontált várható értékként, viszont az is látható, hogy a tranzakciós költségek nélküli esettel szemben itt a felfelé lépés valószínűsége nem egységes, hanem függ attól, hogy az adott állapotba felfelé vagy lefelé tett lépéssel jutottunk el. Ha felfelé tett lépéssel érkeztünk az adott állapotba, akkor az újabb felfelé lépés valószínűsége $\overline{p}_u$, míg ha lefelé tett lépéssel jutottunk az állapotba, akkor $\overline{p}_d$ a felfelé lépés valószínűsége.

Ezt a folyamatot a következő módon lehet formalizálni: legyen n a lépések száma, és legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ egy Markov-lánc két állapottal, és az ezekhez tartozó $\log u$ és $\log d$ értékekkel. A kiinduló állapotban $P(X_1 = \log u) = \overline{p}$, a további lépésekben pedig a folyamat átmenetmátrixa:

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} \overline{p}_u & \overline{p}_d \\ 1-\overline{p}_u & 1-\overline{p}_d \end{pmatrix}$$

3.3.2. Tétel. *Egy európai long call pozíció replikálásának költsége tranzakciós költségek jelenlétében a következő módon számolható ki:*

$$C = \frac{E[((1+\overline{X}_n\kappa)Se^Y - K)I_{Se^Y>K}]}{R^n}, \tag{3.10}$$

ahol n a lépések száma a modellben, $Y = \sum_{i=1}^{n}$, illetve $\overline{X}_n = 1$, ha $X_n = \log u$ és $\overline{X}_n = -1$ egyébként, valamint a várható értéket az előbb leírt folyamat alapján számoljuk.

A tétel egyszerű indukció segítségével bizonyítható. Az $\overline{X}_n\kappa$ tényező kivételével a replikáló portfólió értéke a lejáratkori kifizetés diszkontált várható értéke. Viszont a tranzakciós költségek nélküli esettel szemben nem a kockázatmentes valószínűséggel számoltuk a várható értéket, hanem a korábban részletezett valószínűségek segítségével. Az a 3.10 formulából kiolvasható, hogy tranzakciós költségek mellett a call replikálásának költsége magasabb, mint nélkülük. Emellett mivel felfelé lépés után az újabb felfelé lépés valószínűsége nagyobb, és ugyanez érvényes a lefelé lépésre, így a kockázatos termék extrém magas és extrém alacsony lejáratkori értékei elérésének valószínűsége növekszik, így a kockázatos termék varianciája is növekszik, ez az oka a magasabb árnak.

A 3.10 képlet segítségével becslést adhatunk a call opció árára akár nagy lépésszám esetén is. Tegyük fel, hogy $T = 1$. Ekkor a következők láthatók be Y-ról és $\overline{X}_n\kappa$-ról.

3.3.3. Lemma. *Az Y valószínűségi változó varianciája nagy n és kicsi κ mellett a következő alakban áll elő:*

$$Var(Y) = \sigma^2 \left(1 + O(\kappa^2) + \left(\frac{2\kappa}{\sigma} + O(\kappa^3)\right)\sqrt{n}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{3.11}$$

3.3.4. Lemma. *Az Y valószínűségi változó várható értéke nagy n és kicsi κ mellett a következő alakban áll elő:*

$$E(Y) = r - \frac{1}{2}(Var(Y)) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O(k^2) \tag{3.12}$$

3.3.5. Lemma. *Nagy n és kicsi κ mellett a következők teljesülnek $\overline{X}_n\kappa$-ra:*

$$E(\overline{X}_n\kappa) = -\kappa\left(\kappa + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) Cov(\overline{X}_n\kappa, Y) = 4\kappa^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

A lemmák bizonyításának részletezésétől, azok hossza miatt, eltekintek.

Ahogy az látható, nagy n és kicsi κ esetén az $\overline{X}_n\kappa$-s tényező elhagyható a 3.10 formulából. Így ebben az esetben a call opció ára úgy becsülhető, mint

$$C = \frac{E[(Se^Y - K)I_{Se^Y > K}]}{R^n}.$$

Továbbá nagy n esetén Y eloszlása normális eloszláshoz tart a 3.12 és 3.11 formulákban megadott várható értékkel és szórással, tehát az alaptermék ára a megfelelő lognormális eloszlást követi. Ennek köszönhetően a call opció árára adott előbbi formulát becsülhetjük a Black-Scholes modellnek megfelelően, ez alapján pedig a következőt mondhatjuk ki az opcióár becsléséről.

3.3.6. Tétel. *Nagy n és kicsi κ esetén egy olyan fedező portfólió kezdeti értéke, amely dinamikusan és önfinanszírozva replikálja egy európai long call opció lejáratkori kifizetését tranzakciós költségek mellett, nagyságrendileg egyenlő az opció Black-Scholes formula szerint számolt árával a következő módosított volatilitás mellett:*

$$\sigma^2\left(1+\frac{2\kappa}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right),$$

ahol $\Delta t = \frac{T}{n}$.

Ez a módosított volatilitás nagyon hasonlít a Leland-féle volatilitáshoz, annyi a különbség, hogy a módosító tag együtthatója nagyobb, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ helyett 2. Így végső soron hasonló eredményt kaptunk, azonban a modell diszkrét mivolta miatt itt a replikálás ténylegesen működik.

Ezzel végig is jártuk, hogyan lehet tranzakciós költségek mellett egy long call opció árát becsülni. Most áttérünk a short call replikálásának kérdésére. Nyilvánvaló, hogy a tranzakciós költségek nélküli alapesettel szemben itt a short call replikálásához nem lehet egyszerűen a long call replikálásához használt stratégia ellentettjét venni, hiszen a tranzakciós költségek miatt nem mindegy, hogy vennünk vagy eladnunk kell az adott állapotban. Ettől függetlenül a megoldás menete itt is szinte ugyanaz lesz, mint a long call esetében.

Először induljunk ki egy egyperiódusos modellből. A replikálásnál a lényeges különbség a long callhoz képest, hogy itt az alaptermékből short pozíciónk lesz, azaz a Δ-k negatívak lesznek (kivéve ha egyértelműen out-of-the-money lesz a kimenetel, akkor nyilván $\Delta = 0$), de a rekurzív egyenletek, amelyek segítségével kiszámolhatjuk az önfinanszírozó replikáló stratégiánkat megegyeznek a long callnál is használt 3.6 egyenletrendszerrel. Hasonlóan a long callhoz itt is megfogalmazhatunk egy állítást arra vonatkozóan, hogy mikor lesz ennek a rendszernek egyértelmű megoldása.

3.3.7. Állítás. *Egy európai short call pozíció replikálására, azaz a 3.6 egyenletrendszerre létezik egyértelmű (Δ, B) megoldás, ha*

$$u(1-\kappa) \geq R(1+\kappa) \text{ és } d(1+\kappa) \leq R(1-\kappa)$$

Továbbá erre az egyértelmű megoldásra minden állapotban teljesül, hogy $\Delta_u \leq \Delta \leq \Delta_d$, amennyiben az alaptermék árát modellező binomiális fa végpontjainak egyikére sem teljesül, hogy $\frac{K}{1+\kappa} \leq S_T \leq \frac{K}{1-\kappa}$.

Bizonyítás.

A 3.3.1 bizonyításában használt $f(\Delta)$ függvényt újból használni fogjuk, azaz továbbra is

$$f(\Delta) = \Delta S(u-d) - \Delta_u Su + \Delta_d Sd - B_u + B_d - \kappa|\Delta - \Delta_u|Su + \kappa|\Delta - \Delta_d|Sd.$$

Ha $\Delta_u \leq \Delta_d$, akkor $f(\Delta)$ szakaszonként lineáris a $(-\infty, \Delta_u), (\Delta_u, \Delta_d), (\Delta_d, \infty)$ intervallumokon, amelynek a deriváltjai az egyes szakaszokon rendre

$$(1+\kappa)(u-d)S,\ ((1-\kappa)u-(1+\kappa)d)S \text{ és } (1-\kappa)(u-d)S.$$

Amennyiben $(1-\kappa)u > (1+\kappa)d$, mindegyik derivált pozitív, így $f(\Delta)$ szigorúan monoton növekvő lesz, azaz az $f(\Delta) = 0$ egyenletnek pontosan egy megoldása lesz.

Ha $\Delta_u > \Delta_d$, akkor $f(\Delta)$ a $(-\infty, \Delta_d), (\Delta_d, \Delta_u), (\Delta_u, \infty)$ szakaszokon lineáris, itt a deriváltak szakaszonként rendre

$$(1+\kappa)(u-d)S,\ ((1+\kappa)u-(1-\kappa)d)S \text{ és } (1-\kappa)(u-d)S.$$

Ezek mind pozitívak, így ekkor mindig teljesül, hogy $f(\Delta)$ szigorúan monoton növekvő. Ezzel tehát beláttuk, hogy ha $(1-\kappa)u > (1+\kappa)d$, akkor mindig van egyértelmű megoldása 3.6-nek.

Az állítás második felének bizonyítása ugyanúgy indukciós lépésekkel, és az f függvény szigorú monotonitásának felhasználásával történik, mint a 3.3.1 állítás esetében. Az indukció kiindulásánál van csupán egy kis különbség, a végpontokban $\Delta = -1$, ha $S > K$, és $\Delta = 0$ egyébként. Értelemszerűen, ha $\Delta_u = \Delta_d$, akkor Δ is ugyanezzel az értékkel lesz egyenlő, ha pedig $\Delta_u = -1$ és $\Delta_d = 0$, akkor

$$\Delta = -\left(\frac{Su(1-\kappa)-K}{Su(1-\kappa)-Sd(1+\kappa)}\right).$$

A nevezőben lévő kifejezés mindig pozitív, ha $(1-\kappa)u > (1+\kappa)d$, így ahhoz, hogy $\Delta \in [-1, 0]$ fennálljon, két dolognak kell teljesülnie:

$$Su(1-\kappa)-K \geq 0 \text{ és } Su(1-\kappa)-K \leq Su(1-\kappa)-Sd(1+\kappa).$$

Ezeket átrendezve az adódik, hogy

$$Su \geq \frac{K}{1-\kappa} \text{ és } Sd \leq \frac{K}{1+\kappa},$$

ami pontosan azt jelenti, hogy a fa végpontjainak egyike sincs benne a $\left[\frac{K}{1+\kappa}, \frac{K}{1-\kappa}\right]$ intervallumban. □

Ahogyan azt láttuk, az egyértelmű megoldás létezéséhez elégséges feltétel, hogy $(1-\kappa)u > (1+\kappa)d$, ennél az állításban mégis erősebb feltételt fogalmaztunk meg. Ennek oka, hogy ha a long call esetéhez hasonló várható érték formulát szeretnénk felírni a replikálás költségére, akkor ehhez a következő felfelé lépésre vonatkozó valószínűségeket szeretnénk használni:

$$\overline{p} = \frac{R-d(1+\kappa)}{u(1-\kappa)-d(1+\kappa)},\ \overline{p}_u = \frac{R(1-\kappa)-d(1+\kappa)}{u(1-\kappa)-d(1+\kappa)} \text{ és } \overline{p}_d = \frac{R(1+\kappa)-d(1+\kappa)}{u(1-\kappa)-d(1+\kappa)}$$

Ahhoz, hogy ezeket ténylegesen valószínűségként lehessen alkalmazni, a $[0, 1]$ intervallumban kell legyenek. Látható, hogy ha $R(1-\kappa) \geq d(1+\kappa)$, akkor mindhárom kifejezés nemnegatív, ha pedig $R(1+\kappa) \leq u(1-\kappa)$, akkor egyik kifejezés sem lehet nagyobb 1-nél, ezzel be is láttuk, miért van szükség ezekre a feltételekre.

A long callra bemutatott várható értékként való formalizálás itt is alkalmazható, majd ezt a formulát kiterjesztve nagy n-ekre és kicsi κ-kra, a long callnál alkalmazottakhoz hasonló számításokkal azt kapjuk, hogy egy európai short call opció értéke becsülhető a Black-Scholes formula segítségével egy módosított volatilitás paramétert használva, amelyet a

$$\sigma^2 \left(1 - \frac{2\kappa}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)$$

formulából kapunk meg. Vegyük észre, hogy ez ugyanúgy néz ki, mint a long callnál bevezetett módosított volatilitás, csak a zárójelben $+$ helyett $-$ szerepel. Mivel az opcióár folytonos K-ban, így ez a becslés akkor is használható, ha a fa végpontjaira vonatkozó feltétel nem feltétlen teljesül. Azonban, mint azt látni fogjuk, az egyértelmű megoldás létezésének feltételei szükségesek ahhoz, hogy a becslésünk értelmezhető legyen. Ha $u(1-\kappa) \geq R(1+\kappa)$ és $d(1+\kappa) \leq R(1-\kappa)$, akkor $u(1-\kappa)^2 \geq d(1+\kappa)^2$. u és d helyére beírva a definíció szerinti alakjukat, és logaritmust véve azt kapjuk, hogy

$$\sigma\sqrt{\Delta t} + 2\log(1-\kappa) \geq -\sigma\sqrt{\Delta t} + 2\log(1-\kappa).$$

Amennyiben κ kicsi, a $\log(1 \pm \kappa) \approx \pm\kappa$ becslést használva ebből az adódik, hogy $2\sigma\sqrt{T/n} \geq 4\kappa$, ezt átrendezve pedig azt kapjuk, hogy

$$1 - \frac{2\kappa}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \geq 0.$$

Tehát amennyiben az említett feltételek nem teljesülnek, a becsléshez használt módosított volatilitás negatív értéket vehet föl.

3.4. A hasznosság alapú megközelítés

Az eddigi modellekben azt láthattuk, hogy a tranzakciós költségekből származó bizonytalanságot olyan módon próbálták kezelni, hogy a tranzakciós költségek várható értéke alapján próbáltak kidolgozni valamilyen megfelelő stratégiát, amiből aztán adódik egy ár az opcióra. Azonban ezek csak közelítések, folytonos modellben a pontos replikálás véges tranzakciós költségek mellett nem valósítható meg, illetve akkora veszteséggel jár, amely mellett nem racionális egy ilyen stratégiát követni.

Hodges és Neuberger [6] éppen ezért más módon közelítették meg a tranzakciós költségek melletti replikálás problémáját. Ők nem egy tisztán matematikai módszert alkalmazva, hanem egy, inkább a közgazdaságtanhoz közel álló szemlélettel, a befektetők kockázatkerülésére építették fel a modellt. Feltételezték, hogy a befektető kockázatvállalási hajlandósága leírható valamilyen hasznosságfüggvénnyel, és ennek ismeretében próbálták meghatározni az optimális stratégiát.

Mivel a modell fókuszában a kockázatkerülésnek megfelelően, az elszenvedett veszteség szempontjából való optimalizálás áll, és nem egy bizonyos árazási modell köré lett felépítve, így a részvényár a modelljükben az eddig látottakkal ellentétben nem egy adott modell feltételének megfelelően alakul, hanem a dinamika az általánosabb alakban, az aktuális részvényártól függő drifttel és volatilitással lett megadva:

$$dS = \mu(S)dt + \sigma(S)dW.$$

A kötvény szokás szerint egy konstans r kamatlábbal folytonosan kamatozik.

Legyen $C(S(T))$ a derivatívánk kifizetésfüggvénye. Ha ezt a derivatívát fedezzük valamilyen stratégiát követve, akkor lejáratkor az alaptermékbeli pozíciónk zárása után fennmaradó pénzösszeget jelöljük y_T-vel, és legyen

$$w_T = \beta_T - C(S(T))$$

a derivatívabeli pozíció zárása után fennmaradó összeg. Ekkor egy $U(w_T, S(T))$ hasznosságfüggvényt definiálunk, és ehhez a hasznosságfüggvényhez kell meghatároznunk azt a stratégiát, amely maximalizálja a várható hasznosságot. Előbb azonban meg kell határozni milyen függvénytípus lenne a legmegfelelőbb a hasznosság leírására. Mivel w_T értéke lehet negatív is, így ki kell zárni olyan gyakran használt függvényosztályokat, mint a hatvány- vagy a logaritmusfüggvények. Ezenfelül kell, hogy $U(w_t, S(T))$ kétszer folytonosan differenciálható legyen, és teljesítenie kell a deriváltaknak bizonyos, a kockázatkerülésből fakadó feltételeket:

$$\frac{\partial U}{\partial w} > 0 \text{ és } \frac{\partial^2 U}{\partial w^2} < 0.$$

A probléma felírásához definiáljuk kell a következő függvényt:

$$J(t, S, x, y) = \max E(U(w_T, S(T))),$$

ami a maximális elérhető várható hasznosság a t időpontból indulva S pillanatnyi részvényárfolyam, x kezdeti részvénymennyiség, és y kezdeti bankbetét mellett, ahol a maximalizálást minden ésszerű kereskedési stratégia mellett végezzük. Ha a lejárat időpontjában vesszük a $J(.)$ függvényt, mivel ekkor már nincs bizonytalanság a részvényár mozgásában, így értelemszerűen úgy áll elő, mint

$$J(T, S, x, y) = U(w_T, S(T)), \tag{3.13}$$

ahol

$$w_T = xS(T) + y_T - C(S(T)),$$

ha lejáratkor nincs semmiféle tranzakciós költség. Amennyiben a részvénypozíciónkat tranzakciós költségek mellett kell zárnunk T-ben, akkor pedig w_T-hez még hozzáadódik $-\kappa|x|S(T)$.

A maximalizálás problémáját rekurzívan, a lejárattól visszafelé haladva oldjuk meg dinamikus programozási feladatként. A $J(.)$ függvény fejlődését a következőképpen lehet felírni visszafelé lépkedve:

$$J(t, S, x, y) = \max E_{dS}[J(t + dt, S + dS, x^*, y(x^*))],$$

tehát lényegében azt számoljuk ki, hogy adott dS értékek mekkora részvénymennyiséggel indulva tudjuk maximalizálni a hasznosságot.

Ezen sztochasztikus optimális kontroll probléma megoldásának ki kell elégítenie az alábbi egyenletet:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \mu(S)\frac{\partial J}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(S)\frac{\partial^2 J}{\partial S^2} + ry\frac{\partial J}{\partial y} = 0, \tag{3.14}$$

a 3.13 peremfeltétel mellett, továbbá $J(.)$-re teljesül, hogy

$$J(t, S, x + u, y - uS - \kappa|u|S) \leq J(t, S, x, y). \tag{3.15}$$

Az utóbbi feltétel abból következik, hogy ha t és S változatlansága mellett a kiinduló (x, y) portfóliónkat bármilyen átrendezését vesszük, azzal nem jutunk nagyobb $J(.)$ értékhez, hiszen ha ezzel növelni lehetne $J(.)$-t, akkor ez az azonnali átrendezés is része lenne annak a stratégiának, amely maximalizálja a várható hasznosságot.

A $J(.)$ függvény a származtatott követelések árazására is felhasználható, ha például adott egy C származtatott követelés, akkor jelölje $J^C(t, S, x, y)$ a C vállalásából származó várható hasznosságot a paramétereknek megfelelő optimális fedezés mellett. Ekkor a befektető szempontjából az eladási ár, ezt jelöljük $V_S(C)$-vel, az a pénzmennyiség, aminek a birtoklása és C-ből egy short pozíció felvétele ugyanazt a várható hasznosságot eredményezi, mintha nem csinálnánk semmit. Ehhez hasonlóan definiálhatjuk a vételi árat is, $V_B(C)$ az a pénzösszeg, amely mellett a vételi ár kifizetése és a követelés tartása ugyanakkora várható hasznossággal jár, mintha nem csináltunk volna semmit. Formulizálva ezt a következőképpen írhatjuk föl:

$$J^C(0, S, 0, V_S(C)) = J^0(0, S, 0, 0) = J^{-C}(0, S, 0, -V_B(C)), \tag{3.16}$$

ahol J^0 azt jelöli, ha nincs semmilyen származtatott követelésből pozíciónk, magyarán a "kifizetés" konstans 0.

Ahogy azt láthatjuk, a probléma igencsak komplex, így bizonyos egyszerűsítésekkel kell élni annak érdekében, hogy a megoldás kiszámítható legyen. Ennek megfelelően hasznosságfüggvényként a szerzők egy egyszerű negatív exponenciális függvényt használtak:

$$U(w_T) = -\exp(-\lambda w_T),$$

ahol a λ kvázi a befektető kockázatkerülését méri. Ahogy látható, ez nem függ a lejáratkori részvényártól, így csökken a probléma bonyolultsága, illetve árazási megfontolásokból is jó választás. Azt szeretnénk, ha fedezés szempontjából az alaptermékből tartott kezdeti mennyiség független lenne a bankbetétünk kezdeti értékétől. Ez ebben az esetben teljesül is, hiszen a hasznosság csak a pozíciónk zárása után megmaradó pénzmennyiségtől függ, és igaz lesz az, hogy

$$J(t, S, x, y) = J(t, S, x, 0) \exp\left(-\lambda y e^{r(T-t)}\right),$$

hiszen ha módosítjuk a kiinduló bankbetét értékét, akkor az minden stratégia mellett ugyanannyival tolja el w_T-t, így ezen hasznosságfüggvény mellett ennek a hatása csak egy szorzó megjelenésében nyilvánul meg. Ennek köszönhetően a y-t akár el is hagyhatjuk a paraméterek közül, és így definiálhatunk egy új függvényt:

$$H(t, S, x) = J(t, S, x, 0).$$

Ezenfelül a továbbiakban áttérünk a kockázatmentes mértékre, azaz feltehetjük, hogy a részvényünk driftje r lesz. Ahogy már láthattuk az opcióárazási modellek ismertetésénél, ez az árazás szempontjából fontos, így a fedező portfólió értékfolyamatának összetételtől függetlenül r lesz a driftje.

Nézzük meg, hogy ezen feltételek figyelembevétele mellett hogyan írhatóak fel a korábban részletezett összefüggések. A problémát leíró 3.14, 3.13 és 3.15 feltételek az alábbi formában állnak elő a H függvény segítségével felírva:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial H}{\partial t} + rS\frac{\partial H}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(S)\frac{\partial^2 H}{\partial S^2} = 0 \\
H(T, S, x) = -\exp(-\lambda w_T) \\
H(t, S, x+u) \geq H(t, S, x)\exp(-\lambda(uS - \kappa|u|S)e^{r(T-t)}).
\end{gathered}$$

Az árazó formulák is hasonlóan transzformálhatóak a H függvényre, a 3.16 összefüggést felhasználva:

$$J^C(0, S, 0, V_S) = H^C(0, S, 0)\exp(-\lambda V_S e^{rT}) = H^0(0, S, 0) = -1,$$

hiszen 0 bankbetéttel indulva a konstans 0 kifizetésfüggvény mellett a lejáratkori egyenleg is 0 lesz, és $U(0) = -1$. Ennek az egyenlőségnek a segítségével pedig már meg tudunk határozni egy konkrét formulát mind V_S-re, mind V_B-re:

$$V_S = \frac{1}{\lambda} e^{-rT} \log(-H^C)$$
$$V_B = -\frac{1}{\lambda} e^{-rT} \log(-H^{-C})$$

A probléma megoldása egy optimális stratégiát ad az opció fedezésére, illetve valamilyen függvényt az árazáshoz. A megoldás a szokványos tranzakciós költségformák (fix vagy értékarányos vagy ezek kombinációja) mellett az alábbi függvényeket fogja megadni:

$$x_-(t,S,y), x_+(t,S,y), x_-^*(t,S,y), x_+^*(t,S,y).$$

Ezek a függvények a fedezésünk során tartott részvények számát határozzák meg: kiinduláskor $x \in [x_-, x_+]$, ha később azt tapasztaljuk, hogy az adott pillanatban $x < x_-$, akkor úgy rendezzük át a portfóliónkat, hogy a részvényeink száma pontosan x_-^* legyen. Ha pedig $x > x_+$, akkor úgy rendezünk át, hogy x_+^* részvényünk legyen. Ha csak értékarányos tranzakciós költségek vannak, akkor $x_- = x_-^*$ és $x_+ = x_+^*$. Tehát lényegében az optimális megoldás adott t, S és y mellett megadja egy úgymond "tranzakciómentes" intervallum korlátait, és optimális részvénymennyiségeket: amennyiben az intervallumon belül vagyunk, nem csinálunk semmit, ha viszont kívül vagyunk, akkor annyi részvényt veszünk vagy adunk el, hogy a megfelelő optimális mennyiséget tartsuk.

3.5. A delta tolerancia stratégia

Bár Hodges és Neuberger módszere igen jó empirikus eredményeket szolgáltatott, a fedezési határok pontos kiszámítása egy igen nehéz, idő- és számításigényes feladat. Emiatt az alapötletet felhasználva születtek további eredmények, amelyek ezt a stratégiát valamilyen módon egyszerűsítették. Zakamouline 2006-os cikkében [12] az egyik ilyen egyszerűsített fedezési módszer, a delta tolerancia stratégia eredményeit vizsgálta.

A delta tolerancia stratégia alapvetően hasonló Hodges és Neuberger stratégiájához, ott akkor rendeztük át a portfóliónkat, ha a tartott részvények száma kívül esett a tranzakciómentes intervallumon, és lényegében itt is ez történik, csak ebben az esetben az intervallum lényegében az aktuális delta a toleranciaszintnek megfelelő sugarú környezete. Formálisan legyen H ez a toleranciaszint, $\gamma(t)$ a t-ben tartott részvények száma és $\Delta(t)$ a Black-Scholes delta a t időpontban. Ekkor ha $\gamma(t) \in (\Delta(t) - H, \Delta(t) + H)$, akkor nem rendezünk át. Az, hogy a befektető mekkora H-t választ, attól függ, mennyire kockázatkerülő: minél inkább hajlandó vállalni a kockázatot, annál magasabb a megfelelő toleranciaszint.

Mivel a hasznosság alapú módszer megoldásának kiszámítása igencsak bonyolult, ezért elkezdtek aszimptotikus megoldásokat keresni Hodges és Neuberger módszerének segítségével, hogy olyan korlátokat kapjanak az intervallumra, amelyeket egyszerűbb meghatározni. Ahogy láthattuk, a delta tolerancia stratégia igencsak hasonlít Hodges és Neuberger stratégiájára, ennek megfelelően több megoldás is született az évek során az optimális toleranciaszintre. Először Whalley és Wilmott [11] oldotta meg ilyen módon a problémát, feltéve, hogy a tranzakciós költségek kicsik, a következő korlátokat adták a tranzakciómentes intervallumra:

$$\Delta \mp H_{ww} = \Delta \mp \left(\frac{3}{2} \frac{e^{-r(T-t)} \kappa S \Gamma^2}{\lambda} \right)^{1/3},$$

ahol $\Gamma(t) = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$, vagyis a Black-Scholes gamma. Ahogy látható, itt H nem konstans, hanem több paramétertől is függ. Egyrészt a formula hűen tükrözi a toleranciaszint és a kockázatkerülés közötti összefüggést, hiszen minél kisebb a λ, annál nagyobb lesz a toleranciaszint. Másrészt azt láthatjuk, hogy H_{ww} négyzetesen függ a gammától, ami szintén logikus, a magas gamma változékonyabb deltát jelent, ilyenkor gyakrabban lehet szükség a fedező portfóliónk átrendezésére, így erre válaszul a toleranciaszintet is növelni kell.

Barles és Soner [1] ennél komplexebb megoldással álltak elő. Ők nemcsak a tranzakciós költség mértékéről, hanem a befektető kockázatvállalási hajlandóságáról is azt feltételezték, hogy kicsi, és ezek mellett a feltételek mellett az alábbi formulát kapták:

$$\frac{\partial C(\sigma_m)}{\partial S} \mp H_{bs} = \frac{\partial C(\sigma_m)}{\partial S} \mp \frac{1}{\kappa \lambda S} g(\kappa^2 \lambda S^2 \Gamma),$$

ahol $C(\sigma_m)$ a Black-Scholes szerinti opcióár a következő módosított volatilitás mellett:

$$\sigma_m^2 = \sigma^2 \left(1 + f\left(e^{r(T-t)} \kappa^2 \lambda S^2 \Gamma\right)\right),$$

az $f(x)$ függvény az

$$f'(x) = \frac{f(x) + 1}{2\sqrt{x f(x)} - x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0$$

nemlineáris kezdetiérték-probléma megoldása, és $g(x) = \sqrt{x f(x)} - x$.

Ez az eredmény több szempontból is eltér Whalley és Wilmott formulájától. Az intervallum középpontja nem a delta, hanem a Leland-féle modellhez hasonlóan egy módosított volatilitást használ, és ezt behelyettesítve számol egy ennek megfelelő deltát, azonban Leland modelljével szemben itt a volatilitás függ a gammától, illetve a kockázatkerülés mértékétől, a λ-tól. Ettől függetlenül ugyanazok az elvek teljesülnek itt is, minél kockázatkerülőbb a befektető, annál kisebb ez a tartomány, és nagyobb gamma esetében a tartomány is nagyobb lesz.

Zakamouline összegezve ezeket az eredményeket, és ezek viselkedését egyes paraméterek mellett, az alábbi általánosított formát adta a fedezésmentes intervallum korlátaira:

$$\frac{\partial C(\sigma_m)}{\partial S} \mp (H_w + H_0),$$

ahol a σ_m módosított volatilitás olyan alakban áll elő, hogy

$$\sigma_m^2 = \sigma^2(1 + H_\sigma).$$

A H_σ a Barles-Soner-féle eredménynél használthoz hasonló módosító tag a volatilitáshoz, amely függ az opció gammájától. A H_w tag alapvetően hasonló Whalley és Wilmott, valamint Barles és Soner toleranciaszintjeihez, és a legfontosabb tulajdonsága, hogy ezekhez hasonlóan ez is függ az opció gammájától. Tudjuk, hogy a gamma 0-hoz konvergál, ha a részvényár tart a végtelenhez vagy 0-hoz, mivel ezekben az esetekben az opció egyre inkább in-the-money, illetve out-of-the-money lesz, ekkor pedig a H_w is 0-hoz fog tartani. Tehát ha csak ez az egy tagunk van, akkor a fedezésmentes intervallum mérete a 0-hoz tart, ha a gamma is. Viszont az empirikus eredmények azt mutatják, hogy ez nem teljesül, ha a gamma 0-hoz konvergál, akkor a fedezésmentes intervallum méretének és a részvényárnak a szorzata egy konstans értékhez közelít. Emiatt a jelenség miatt lett hozzáadva a H_w-hez a H_0 konstans tag.

Zakamouline ezután ezekre a paraméterekre adott becslést, hogy egy, a korábban látottakhoz hasonló becslést adjon az optimális toleranciaszintre a delta tolerancia stratégiához. A paraméterek becslésére a következő függvényalakokat használta:

$$H_0 = \alpha\sigma^{\beta_1}\kappa^{\beta_2}(\lambda S)^{\beta_3}(T-t)^{\beta_4},$$
$$H_w = H_\sigma = \alpha\sigma^{\beta_1}\kappa^{\beta_2}(\lambda S)^{\beta_3}\Gamma^{\beta_4}e^{-\beta_5 r(T-t)}(T-t)^{\beta_6},$$

Ahogy látható, ezek a formulák tartalmazzák mind Whalley és Wilmott, mind Barles és Soner formuláinak a változóit. A hatványalak alkalmazása is racionális, hiszen az említett formulákban is hasonló módon jelennek meg ezek a változók.

A becslési módszer abból állt, hogy a paraméterek különféle rögzített értékeire kiszámította a fedezésmentes intervallum korlátait, majd a korlátokra kapott eredményekből számolta ki az egyes H értékeket az adott értékhalmaz mellett. Az így kapott értékekre való paraméterillesztés és a megfelelő paraméterértékek kiválasztása után a következő becslések adódtak a keresett kifejezésekre:

$$H_0 = \frac{\kappa}{\lambda S\sigma^2(T-t)},$$
$$H_w = 1{,}18\frac{\kappa^{0,31}(T-t)^{0,1}}{\sigma^{0,25}e^{0,15(T-t)}}\left(\frac{\Gamma}{\lambda}\right)^{0,5},$$
$$H_\sigma = 6{,}85\frac{\kappa^{0,78}(T-t)^{0,1}}{\sigma^{0,25}e^{0,2(T-t)}}\left(\lambda S^2\Gamma\right)^{0,15}.$$

3.6. Optimális fedezés domináló stratégiák esetén

Zárásul kisebb kitekintésként lássunk egy eredményt arra az esetre, amikor a domináló stratégiákat is nézzük a szigorúan vett fedezés mellett, azaz minden olyan stratégiát tekintünk, ahol a fedező portfólió értéke lejáratkor mindenütt legalább akkora, mint a kifizetés. Soner, Shreve és Cvitanic [10] azt látták be, hogy folytonos modellben a legolcsóbb domináló stratégia egy európai call opció esetén az a triviális stratégia, ha egy részvényt tartunk az opció egész időtartama alatt. Ennél a stratégiánál nyilván nem kell soha átrendezni a portfóliót, és a végén legalább akkora az értéke, mint a kifizetés, ráadásul a "stratégia" költsége fix, csak a részvény árát kell kifizetni. Nyilvánvalóan ez a stratégia egy racionális befektető számára érdektelen, viszont a szerzők azt is belátták, hogy minden más, klasszikusabb stratégia is hasonlóan érdektelen.

Az egyértelmű, hogy ha bármikor át kell rendeznünk, akkor benne van a kockázat, hogy jóval drágábban kell vásárolnunk, mint t_0-ban, vagy hogy más miatt elromolhat úgy a stratégiánk, hogy költség szempontjából rosszabbul jövünk ki, mintha egyszerűen vettünk volna egy részvényt az elején és azt tartanánk. Viszont ésszerű paraméterek mellett ennek csak elméleti esélye van, a gyakorlatban óriási sokk kell ahhoz, hogy ilyen bekövetkezzen.

4. fejezet

Szimuláció

Az elméleti eredmények ismertetése után most lássuk, hogy a gyakorlatban hogyan is alakulnak a tranzakciókból adódó költségek. Több különböző stratégiát fogok összehasonlítani, hogy mennyire hatékonyan alkalmazhatóak a tranzakciós költségek melletti fedezéshez, mekkora veszteségekkel számolhatunk az alkalmazásukkor, ismertetni és elemezni fogom a kapott eredményeket és a köztük lévő összefüggéseket.

4.1. Metodológia

Mivel a tranzakciós költségek mértéke útvonalfüggő, ezért ezeknek hatását, és az ezekből származó veszteségeket nem lehet egyszerű analitikus eszközökkel vizsgálni. Éppen ezért a szimulációban Monte-Carlo módszert fogok alkalmazni, amely bevett módszer az útvonalfüggő mennyiségek vizsgálatához. A részvényárfolyamatra fogok trajektóriákat generálni, majd ezeken a trajektóriákon fogom kiszámítani minden stratégia esetén az ezekből adódó fedezési költséget, azaz hogy mekkora pénzmennyiséggel kell elindulnunk ahhoz, hogy az adott stratégiát végrehajtsuk. Majd az egyes trajektóriákra kapott költségeket összesítem, és az adatokból kiszámolom a kívánt mérőszámokat. A trajektóriákat a valós mértéknek megfelelően, azaz a részvény driftjének megfelelően generáljuk, hiszen a gyakorlatban is tapasztalható trajektóriákat szeretnénk látni.

4.2. Fedezési stratégiák vizsgálata diszkrét modellben

Az első szimulációban egy 128 napos straddle pozíció fedezését fogom vizsgálni. A részvény ára t_0-ban $S_0 = 100$, a driftje $\mu = 10\%$, a volatilitása $\sigma = 20\%$. A kockázatmentes kamatláb $r = 3\%$, az opció strike-ja pedig $K = 100$. A részvényár-folyamat modellezéséhez binomiális fát használtam a Cox-Ross-Rubinstein modellnek megfelelően, majd a fán a végpontokból visszafelé haladva kiszámoltam a delta értékeket, illetve az opció fair árát.

Ezután a Monte-Carlo módszer segítségével szimuláltam a különböző fedezési módszerek költségeit: 100000 trajektóriát generáltam, majd ezeken a trajektóriákon kiszámoltam, hogy egy adott fedezési stratégiának megfelelően kereskedve mekkora összköltség, illetve mennyi tranzakciós költség adódik. Ezenfelül az is érdekes kérdés, hogy egy adott stratégia különböző fedezési gyakoriságok mellett hogyan teljesít, így minden stratégiára minden trajektórián kiszámoltam, hogy mekkora költségek adódnak, ha 1, 2, 4, 8, 16, 32, avagy 64 naponként rendezzük át a portfóliónkat, illetve ha statikusan fedezünk, azaz az elején veszünk valamennyi részvényt, és azt tartjuk lejáratig. A kapott eredményekből átlagot és szórást számoltam, valamint 90%-os kvantiliseket, hogy a széleit is láthassuk a költségek eloszlásának. Azért ezeket a kvantiliseket választottam, mert nem a kifejezetten extrém esetek vizsgálata a cél, ami mondjuk egy 99%-os kvantilist indokolna, hanem a stratégiák összehasonlításához szeretném felhasználni a kvantilis értékeket, és ezen a szinten még a kvantilisérték egy jól szemlélteti az átlag és a szórás együttes alakulását, így alkalmas erre a feladatra, és egyszersmint már elég magas ahhoz, hogy adjon egy jó felső becslést a veszteségeinkre, amelyet az esetek túlnyomó többségében nem fogunk átlépni.

A szimulációban alkalmazott tranzakciós költség mértékét $\kappa = 0{,}5\%$-nak választottam, ami egy kellően likvid alapterméket feltételez.

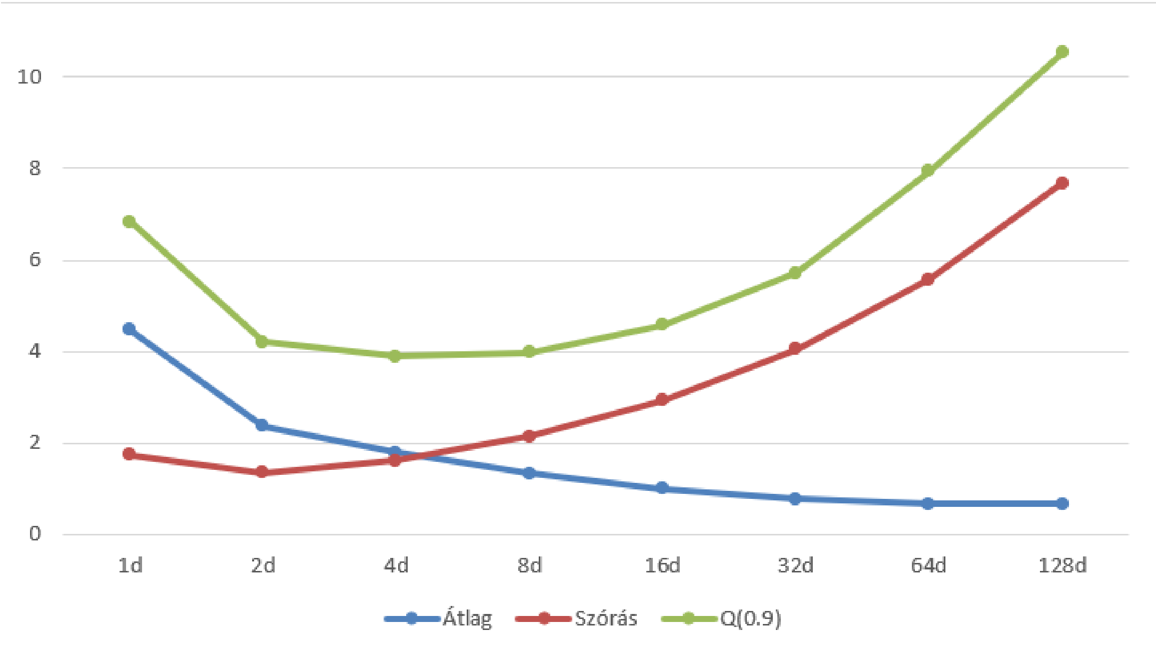
A fedezéssel járó költségek számolásánál az opció árát kivontam a költségekből, így szemléletesebbek az eredmények, hiszen a kapott eredmények azt mutatják, hogy az opció árához képest mennyivel magasabb volt az adott stratégiával való fedezésből adódó költség.

4.2.1. Eredmények elemzése

Először azt fogom vizsgálni, hogy az egyszerű delta-fedezés hogyan teljesít a tranzakciós költségek nélküli illetve az azok melletti világban különböző fedezési időközök használata mellett. Ha nincsenek tranzakciós költségek, akkor a napi átrendezése a portfóliónknak tökéletesen replikálja az opciót, ekkor nincs bizonytalanság, a fedezésből adódó költségek mindig egyenlőek lesznek az árral. Tranzakciós költségek jelenlétében már nem ez a helyzet, az összköltség trajektóriafüggő, így a napi fedezés mellett is lesz bizonytalanság, illetve a fedezés várható költsége magasabb lesz a fair árnál. A delta-fedezéssel kapott eredményeket egyfajta benchmarkként szeretném használni a későbbiekben, nem feltételezem, hogy ez a stratégia optimális lenne, viszont érdekes lesz látni, hogy a többi, bonyolultabb stratégia hogyan teljesít a klasszikus delta-fedezéshez képest.

Ha a Cox-Ross-Rubinstein-modellel számolt deltáknak megfelelően fedezünk, egy paraméter szerint tudunk csak optimalizálni, hogy milyen sűrűn rendezzük át a fedező portfóliónkat az éppen aktuális deltának megfelelően.

Ahogyan az a 4.1 ábrán látható, a napi rendszerességű fedezés igen magas költségeket generál, mind az átlagot, mind a 90%-os kvantilist tekintve, tehát ez semmiképpen sem lesz jó. A költség szórása az 1, 2, illetve 4 naponként történő fedezés esetében nagyjából ugyanakkora marad, utána kezd el lényegesen nőni, míg a 90%-os kvantilis a 4 naponként



4.1. ábra. A delta-fedezésből adódó költségek főbb mérőszámai

történő fedezésnél a legalacsonyabb. Ezek alapján ha mindenképpen a deltákat akarjuk használni, akkor a 4 napos időközönként történő átrendezéssel járunk a legjobban veszteség szempontjából.

Ahogy azt a 3.3 részben bemutattam, a Cox-Ross-Rubinstein-modell tranzakciós költségekkel való kiterjesztésében létezik tökéletes replikálás, így következőnek ezt a replikáló stratégiát fogom meghatározni a straddle pozícióra, illetve a stratégia használatával keletkező költségeket vizsgálom. Bár Boyle és Vorst egyszerű call pozícióra bizonyították, hogy létezik egyértelmű replikáló stratégia, az elgondolás kiterjeszthető straddle pozícióra is, hiszen a fa végpontjaiban a deltákra leírt összefüggések ebben az esetben is fennállnak. A short pozíció esetén azonban így is kérdéses, hogy a megfelelő delták ellenére ténylegesen létezik-e replikáló stratégia, hiszen ott már egy európai call esetén is csak bizonyos feltételek teljesülése esetén létezik megoldás. Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy a fedező portfólió értékének meghatározásánál nem a pillanatnyi részvényárat vesszük figyelembe, hanem a vételi avagy az eladási árat attól függően, hogy a delta nő vagy csökken az adott állapotba lépve. Ennek köszönhetően előfordulhat, hogy a Boyle és Vorst által megadott kockázatmentes valószínűségek segítségével tudunk árazni, azonban replikáló stratégiát nem tudunk számolni.

Az én esetemben pontosan ez fordult elő, a stratégia számolása során a fa közepénél a delta értékek már pár lépés után elszállnak, így a short pozíció esetére nem sikerült replikáló stratégiát meghatározni. Viszont a valószínűségek megfelelőek, 0 és 1 közé esnek, ennek köszönhetően ezeket fel tudjuk használni egy hozzávetőleges ár meghatározására.

Bár a valószínűségek segítségével lenne lehetőség analitikus árazásra mind a long, mind a short pozíció esetén, mivel a felfelé lépés valószínűsége útvonalfüggő, ezért az analitikus árazás problémája egy ekkora fa esetén igencsak komplex. Emiatt az árazáshoz Monte-Carlo-módszert alkalmaztam: a három valószínűség segítségével generáltam trajektóriákat, összesen 1 milliót, és minden egyes útvonal esetén kiszámoltam a diszkontált kifizetést a megfelelő részvényárt használva, illetve a részvényárat módosítva κ-val annak megfelelően, hogy az utolsó lépés felfelé vagy lefelé történt (ahogy az a 3.9 formulában is látható). Az ár pedig a tapasztalt diszkontált kifizetések átlagaként áll elő.

	Átlag	Szórás	Minimum	Maximum
Long	3,79788	0,01539	3,76807	3,82286
Short	-6,71922	0,00222	-6,72259	-6,71485

4.1. táblázat. Boyle és Vorst módszerével árazva kapott eredmények összesítése

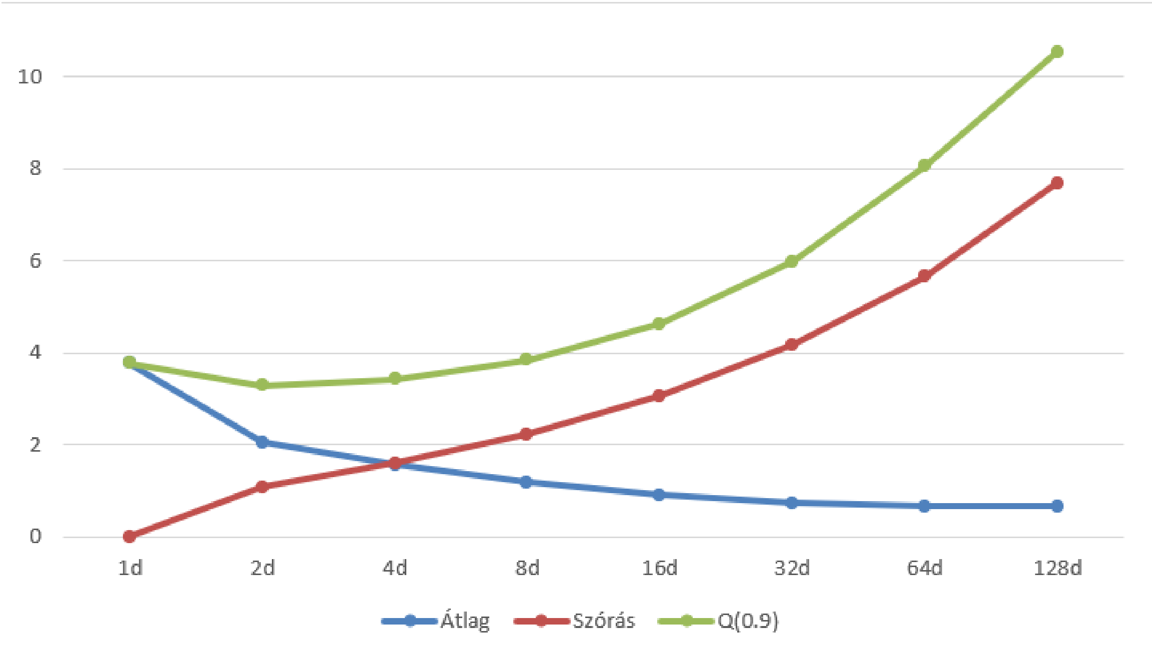
Mivel a Monte-Carlo-módszer eredménye nem teljesen pontos, ezért tízszer futtattam le a szimulációt, hogy legyen egy becslésem a hibára. Ahogy az a táblázatban látható, az eredmények szórása kicsi, a long pozíció esetében is kevesebb, mint 6 század az eltérés a legkisebb és a legnagyobb érték között.

Boyle és Vorst azt is bemutatták, hogy nagy n és kicsi κ mellett a Black-Scholes formula is felhasználható módosított volatilitással az ár becslésére, ezért mivel a lépések száma egészen nagy, ezzel a módszerrel is kiszámoltam az árat összevetésképpen, hogy mennyire pontos. Az így kapott számolások azonban elég pontatlanok lettek, a fair árhoz képest a long pozíció árára 3,27606, a short pozíció árára pedig $-8{,}8242$ adódott, ezek igencsak messze vannak a szimulációval kapott áraktól.

A shorttal ellentétben a long pozícióra sikerült meghatározni a replikáló stratégiát, így most az ezzel történő fedezésből adódó eredményeket ismertetem. Egyrészt azt szeretnénk látni, hogy ha naponta rendezzük át a portfóliónkat, akkor a költségünk állandó lesz, másrészt pedig azt, hogy a napi fedezésből adódó költség nagyon közel lesz az árazó szimulációból kapott eredmények átlagához. Ezenfelül pedig itt is érdekes lehet a fedezés sűrűségének, mint paraméternek a hatása: ugyan a napi fedezésnél nincs bizonytalanság, de előfordulhat, hogy két- vagy négynaponta átrendezve más mérőszámokban jobban teljesít a stratégia.

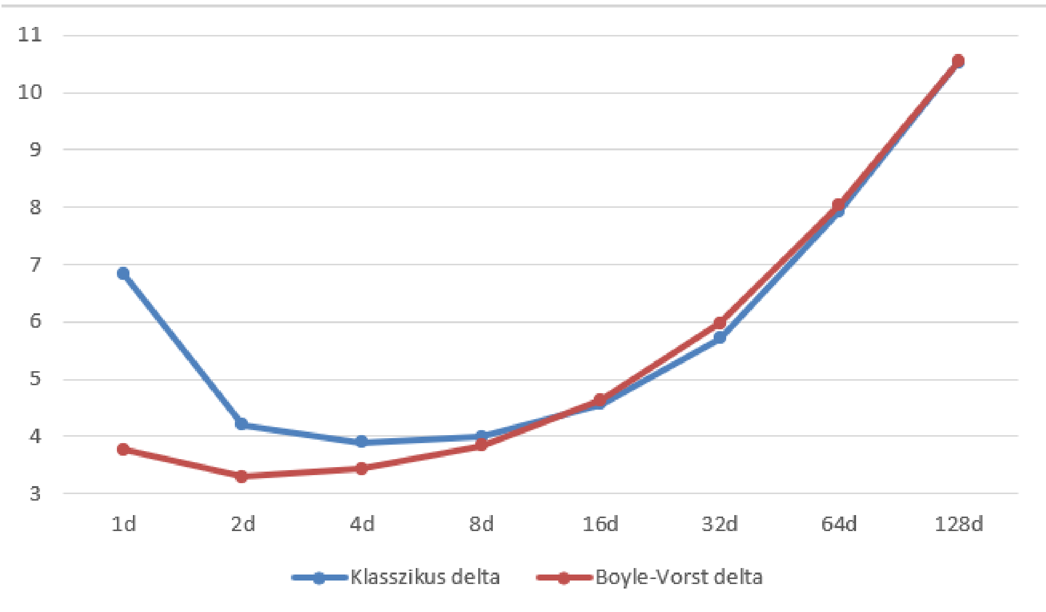
A napi fedezésre kapott eredmények teljesítik az elvárásainkat, az összköltség szórása nulla, a fedezésből adódó költség pedig 3,77341, ami beleesik az árazó szimulációban kapott eredmények által meghatározott intervallumba, tehát a replikáló stratégia működik, és a költségek szinkronban vannak a kockázatmentes mérték szerinti várható kifizetéssel.

Viszont azt láthatjuk, hogy a kétnapos fedezés esetében a költségek átlaga is sokat csökken, illetve a 90%-os kvantilis is csökken, sőt még a négynapos időköz esetében is a napi fedezés költségszintje alatt van. Tehát ha nem akarunk semmiféle kockázatot vállalni, akkor egyértelműen a napi fedezés a legjobb megoldás, azonban azt láthatjuk, hogy ha kissé növeljük a lépésközt, akkor bár lesz valamennyi kockázat, de igen nagy valószínűséggel



4.2. ábra. A Boyle-Vorst-féle delta-fedezésből adódó költségek főbb mérőszámai

olcsóbban megússzuk, mintha minden nap kiigazítanánk a portfóliót.



4.3. ábra. A klasszikus és a Boyle-Vorst deltákkal fedezéssel kapott 90%-os kvantilisek

Ha a klasszikus delta-fedezéssel hasonlítjuk össze az eredményeket, akkor igazán szembeötlő, hogy mennyivel jobban kezeli ez a stratégia a tranzakciós költségeket gyakori fedezés esetén. Az átlagos költség kisebb lesz a Boyle-Vorst deltákkal, ha gyakran fedezünk, az 1 és 2 napos időközök esetén a szórás is kisebb, de a 90%-os kvantilis az, ahol a leglátványosabb ez a különbség. A Boyle-Vorst delták esetében a napi fedezés (fix) költsége kisebb, mint az egyszerű delta-fedezés esetében a kvantilisek minimuma a 4 napos fedezés esetében, a kétnapos fedezésnél tapasztalt 90%-os kvantilis pedig jóval ezalatt a minimum alatt van. Tehát Boyle és Vorst stratégiája amellett, hogy képes pontosan replikálni a kifizetést, szignifikánsan jobban kezeli a tranzakciós költségeket, mint az egyszerű delta-fedezés, így egyértelműen jobb választás tranzakciós költségek melletti fedezésre.

Egy másik lehetséges megközelítés a tranzakciós költségek kezelésére, hogy a klasszikus deltákat használjuk a stratégiánk alapjául, azonban valamilyen módszerrel kezeljük a delták folyamatos váltakozásából adódó magas költségeket gyakori fedezés esetén. Főként azok az esetek a problémásak, amikor a trajektóriában sokszor lépünk felváltva fel és le, ekkor a delta értékek követéséből igen sok tranzakciós költség adódhat, miközben hosszabb távon a delta alig mozdul el. Két egyszerű módszert fogok vizsgálni:

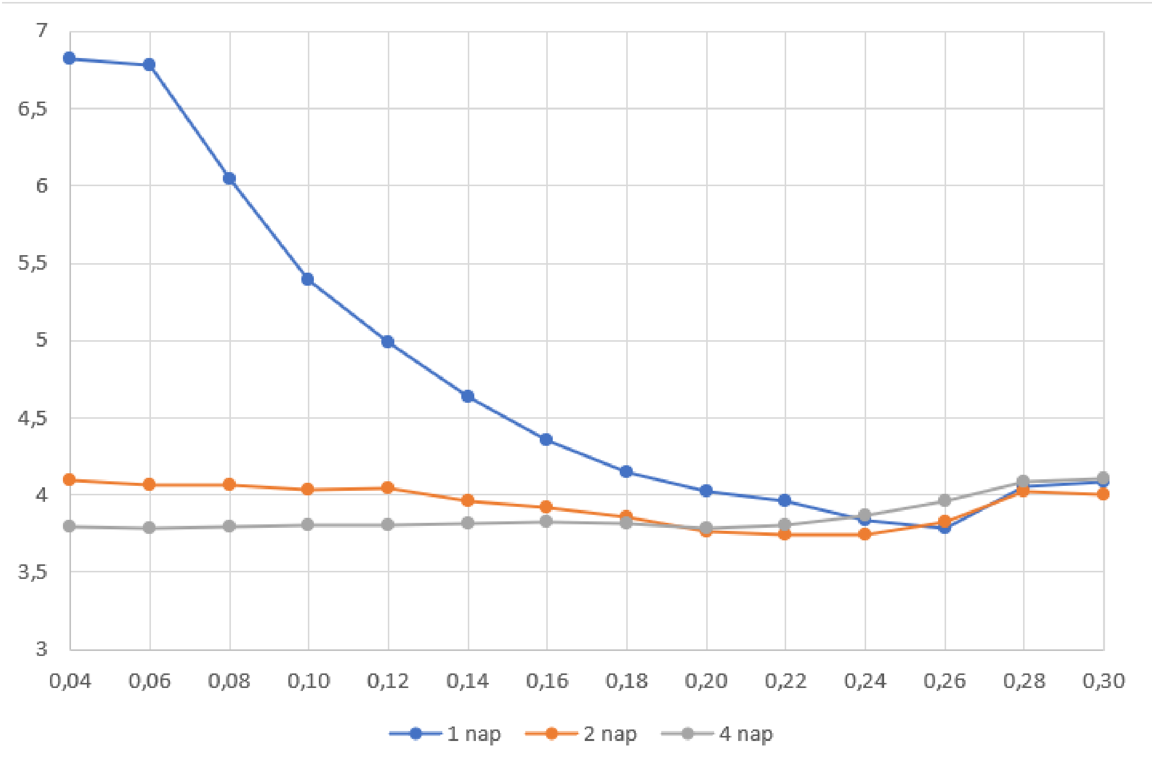
- *Delta tolerancia stratégia*: Ezt láthattuk már korábban, most viszont csak egy konstans toleranciaszinttel fogunk számolni. Választunk egy H toleranciaszintet. Ha γ részvényt tartunk a fedező portfóliónkban, akkor egy adott állapotban pontosan akkor fogunk kiigazítani az azon állapotbeli Δ-ra, ha $|\Delta - \gamma| \geq H$. Ezenfelül ha $\Delta = \pm 1$, azaz az opciónk kimenetele biztos, akkor kiegészítjük γ-t 1-re vagy -1-re.

- *Részleges fedezés*: Választunk egy c szorzót, amire teljesül, hogy $0 < c < 1$. Ha γ részvényt tartunk, akkor nem vásároljuk meg a teljes különbözetet az adott állapotbeli Δ-hoz képest, hanem csak annak c-szeresét, azaz az egyes állapotokban mindig csak $c(\Delta - \gamma)$ részvényt vásárolunk.

A két módszer különböző módon ragadja meg a gyakori fedezésből adódó problémákat: a delta tolerancia stratégiánál csak akkor rendezzük át a portfóliónk, ha kellően nagy a különbség az aktuális deltához képest, így a kisebb ugrásoknál nem kereskedünk feleslegesen. Ezzel szemben a részleges fedezésnél a kereskedésünk volumenét fogjuk vissza, így a fel-le ugrálások esetében kevesebbet kereskedünk.

Először a delta tolerancia stratégia eredményeit fogom ismertetni. Itt a fő vizsgált paramétert a toleranciaszint mérete jelenti, viszont itt is vizsgáltam annak az eshetőségét, hogy mi a hatása annak, ha $1, 2, \cdots$ naponta döntünk arról, hogy át kell-e rendeznünk a portfóliónkat.

Bár az elképzelés a stratégia mögött alapvetően jó, az eredmények mégis azt mutatják, hogy még a toleranciaszint jó megválasztásával sem tudjuk szignifikánsan felülmúlni az egyszerű delta-fedezést. A 4.4 ábrán láthatók a kvantilis értékek azokra az esetekre, ha 1, 2, illetve 4 naponta döntünk, mivel az egyes toleranciaszintek esetén ezen időközök esetén fordultak elő minimális értékek. Azt láthatjuk, hogy ha naponta vizsgáljuk felül a portfóliónkat, akkor a kvantilisek csökkennek, ahogy növeljük a toleranciaszintet, majd a 0,26-os értéknél elérjük a minimumot. Ha kétnaponta döntünk, akkor a 0,22, 0,24 értékeknél

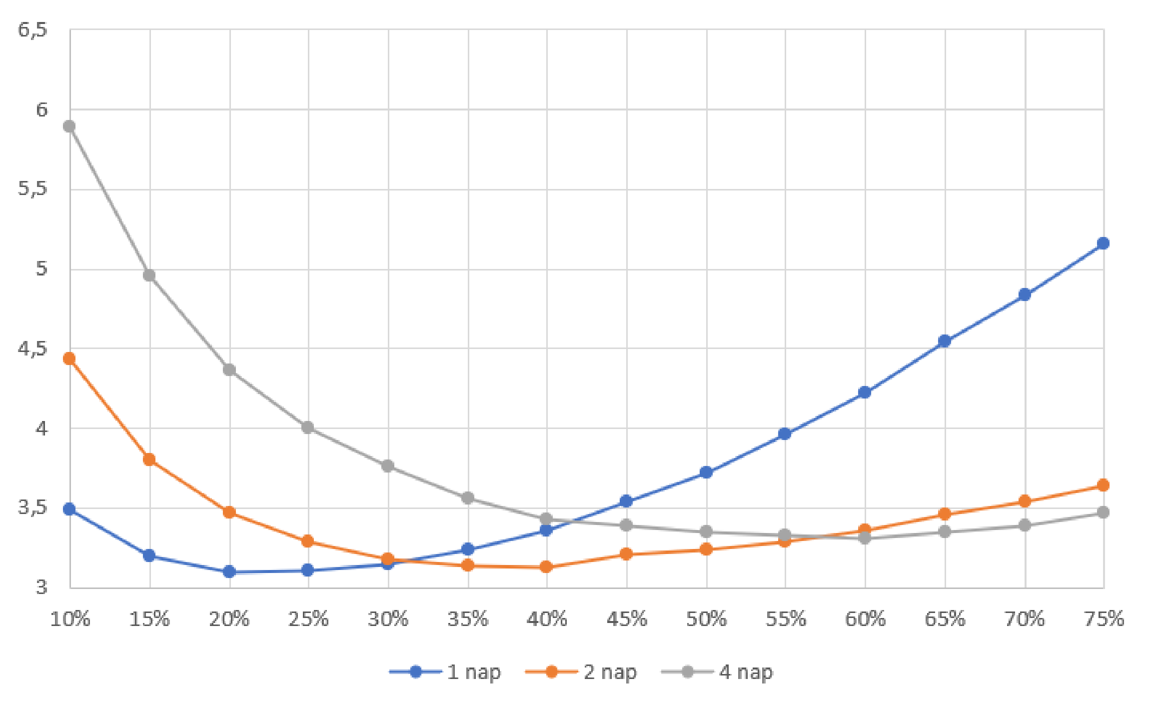


4.4. ábra. 90%-os kvantilisek alakulása különböző toleranciaszintek mellett, ha 1, 2, illetve 4 naponta ellenőrizzük a deltákat

érjük el a minimumot, ráadásul itt érjük el mindent összevetve is a minimális kvantilist költségeket tekintve. Itt már nem látható az egynapos esethez hasonló éles csökkenés, stagnálás és lassú csökkenés után érjük el a minimumot. A 4 napos esetben a 90%-os kvantilis 3,8 körül stagnál 0,04-től 0,22-ig és utána kezd el lassan növekedni. Érdemes megjegyezni, hogy az egyszerű delta-fedezés esetében a 4 naponta történő fedezés esetében a 90%-os kvantilis 3,888 volt, ennél alig voltak kisebbek a delta tolerancia stratégiánál tapasztalt kvantilisek.

Összességében sikerült minimális javulást elérni a delta-fedezéshez képest, azonban ez a javulás nem tekinthető szignifikánsnak: ott a 4 napos fedezési időköznél volt a legalacsonyabb a 90%-os kvantilis, ehhez képest a limit fedezésnél a legjobb esetben is alig több, mint egy tizeddel sikerült jobbat elérni. Ezenfelül összehasonlítva a legkisebb kvantilisekkel rendelkező stratégiák számait a 4 napos delta-fedezés értékeivel, azt láttam, hogy mind az átlag, mind a szórás tekintetében kicsi az eltérés. Mivel a toleranciaszint bevezetése csak a kiigazítások számát csökkenti, a mértéküket nem, így a hatás hasonló, mint ha ritkábban fedezünk, ennek köszönhetően pedig a legjobb stratégiák mérőszámai is hasonlóak lesznek a két eljárásnál. A Boyle-Vorst deltákat használva az itt látottaknál minden szempontból jobb eredményeket értünk el, így bár minimálisan jobb, mint a delta-fedezés, de nem a legjobb választás.

Most áttérek a részleges fedezés eredményeire. A részleges fedezésnél a fő vizsgált paraméter az lesz, hogy mekkora arányát fedezzük az aktuális deltától való eltérésnek. A delta tolerancia stratégiához hasonlóan itt is vizsgáltuk a fedezés sűrűségének a hatását, illetve hogy az egyes fedezési sűrűségeknél hogyan reagálnak a mérőszámok, különösen a 90%-os kvantilis a paraméter változására.



4.5. ábra. 90%-os kvantilisek alakulása részleges fedezés esetén különböző fedezési arányok mellett 1, 2, illetve 4 naponta történő átrendezés esetén

A delta tolerancia stratégiával ellentétben itt kifejezetten ígéretes eredményeket kaptam. Ebben az esetben is csak az 1, 2 és 4 naponta fedezés esetét nézzük, mivel csak ezeknek az eredményei szignifikánsak. Első ránézésre is látszik, hogy a különböző fedezési időközök esetén igen eltérő az optimális fedezési arány. Ha naponta fedezünk, akkor igen alacsony ez a szám, elég mindössze 20%-át fedezni a különbségnek a deltához képest. 2 naponta fedezve már magasabb ez az arány, a deltától való eltérés 40%-ának fedezésénél kaptunk minimális értéket a 90%-os kvantilisre. Ha pedig 4 naponta fedezünk, akkor pedig 60%-nál érjük el a minimumot. Az abszolút minimum a kvantiliseket tekintve az 1 napos, 20%-os fedezés esetében adódik, itt 3,102 a 90%-os kvantilis, és a 25%-os fedezési arány mellett is csak 3,11 az érték. 2 naponta fedezésnél a minimális kvantilis csak pár századdal magasabb, a 4 napos esetnél viszont már két tizeddel nagyobb ez a szám.

A különböző fedezési időközökre adódó optimális arányok között egy érdekes összefüggés figyelhető meg. A napi fedezésnél 20-25%-nál voltak legkisebbek a kvantilisek, ha ilyen arányban fedezünk, az a deltától való különbség 75-80%-át hagyja fedezetlenül. Ez egy kétnapos időtartamra vetítve azt jelenti, mindkét nap fedezve ezeknek az arányoknak a négyzetét, vagyis 56,25-64% marad fedezetlenül. Ha a 2 napos fedezésnél legjobbnak talált 40%-os arányt használjuk, akkor 60% marad fedezetlenül egy kétnapos időtartam alatt, ami pont az előbb látott intervallumban van. Tehát a két arány mellett körülbelül ugyanakkora hányada marad fedezetlenül a deltától való eltérésnek. Ugyanez a 2 és 4 napos időközökre vetítve is fennáll: négy napra vetítve a 2 napos fedezés 40%-os aránya körülbelül 36%-ot hagy fedezetlenül (a tényleges optimum valószínű kicsit kisebb, mint 40%, ekkor a fedezetlen rész aránya kicsit nagyobb), a 4 napos fedezésnél látott 60%-ot használva pedig ez a fedezetlen rész aránya 40%. Magyarán a számokból az olvasható ki, hogy az, hogy optimális esetben mekkora hányadot hagyunk fedezetlenül állandó, és a fedezés sűrűsége határozza meg igazából az optimális arányt.

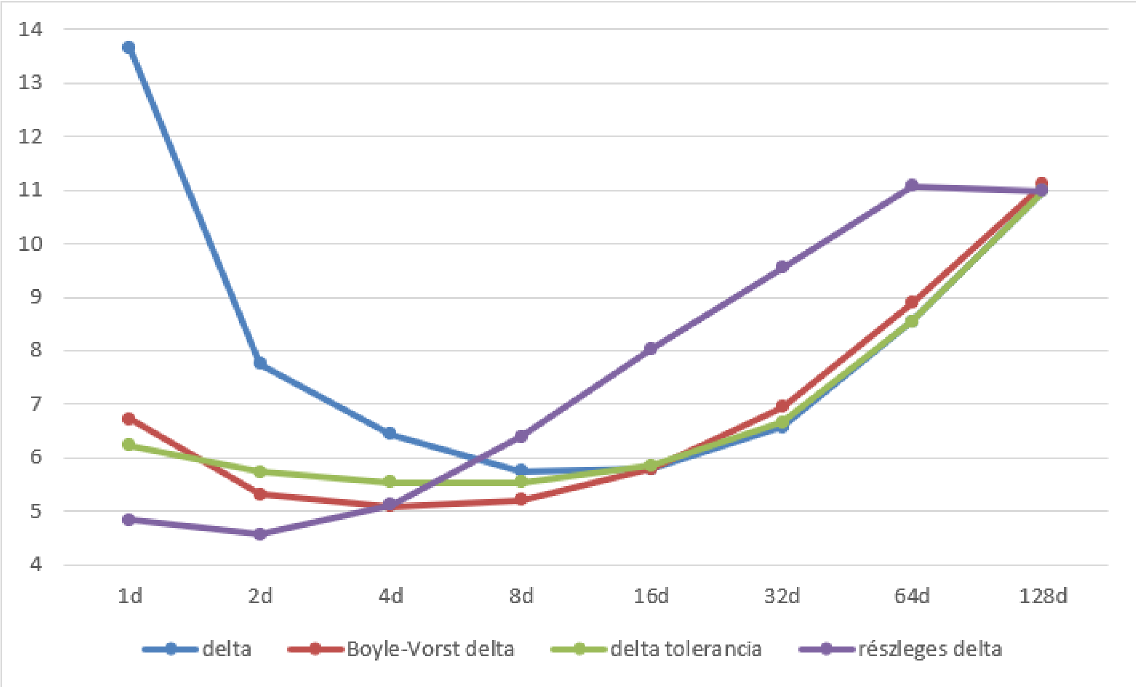
Mindent figyelembe véve, a részleges fedezés kifejezetten jól működött, a költségek mutatói jóval alacsonyabbak, mint amit az egyszerű delta-fedezésnél láttunk, de a kvantilis értékek még a Boyle-Vorst deltáknál látottaknál is kisebbek, tehát ilyen szempontból ez a legjobb fedezési módszer az általam teszteltek közül. Ennek véleményem szerint az az oka, hogy rugalmasabban alkalmazható a többi módszernél: folyamatosan követi a deltákat, így jól fedezi az aktuális kitettséget az alaptermékben, és ha később az ellenkező irányba mozdul az alaptermék ára, akkor nem kell olyan nagy mennyiséggel kereskednünk, mint a többi stratégia esetében.

4.2.2. Az optimális stratégiák további vizsgálata

Áttekintettük, hogy az egyes módszerek esetén a paraméterek milyen megválasztása esetén lesznek a legkedvezőbbek a költségek, most pedig azt szeretnénk látni, hogy magasabb tranzakciós költség esetén hogyan teljesítenek ezek a stratégiák, és hogy ott is hasonló következtetésekre jutunk-e a módszerekkel kapcsolatban.

Az eddig használt szimulációs módszeren nem változtattunk, a paraméterek is változatlanok maradtak egy kivételével, $\kappa = 1\%$-ra növeltem meg a tranzakciós költség hányadát, és emellett az új arány mellett újrafuttattam a szimulációt az egyes stratégiákra. A delta tolerancia stratégia és a részleges delta-fedezés esetében a korábban ideálisnak talált paramétereket alkalmaztam, ami 0,26-os toleranciaszintet és 0,2-es fedezési arányt jelent.

Az egyes stratégiák esetében a 90%-os kvantilisek a 4.2.2 ábrán láthatók. Összességében a $\kappa = 0{,}5\%$-ös érték mellett tett megállapítások itt is helytállóak a stratégiákkal kapcsolatban. A delta tolerancia stratégia sűrű fedezés esetén jobb eredményeket hoz, mint a delta-fedezés, de a legjobb kvantilisértékek között kicsi a különbség a delta tolerancia stratégia javára. A Boyle-Vorst delta-fedezés itt is szignifikánsan jobb, mint az előző két említett stratégia, bár a legalacsonyabb kvantilisértékek itt sem a napi fedezés esetén adódnak. Összességében pedig továbbra is a részleges delta-fedezés teljesít a legjobban, a naponta, illetve kétnaponta történő fedezésnél látott kvantilisértékek pedig jóval kisebbek, mint a Boyle-Vorst delta-fedezés kvantilisei. Tehát a stratégiákkal kapcsolatban tett



4.6. ábra. 90%-os kvantilisek alakulása $\kappa = 1\%$-os tranzakciós költségarány mellett, $H = 0{,}26$ toleranciaszintre és $c = 0{,}2$ fedezési arányra

megállapításaim a tranzakciós költségek magasabb aránya esetén sem változnak, a módszerek hatékonysága nem kifejezetten érzékeny a tranzakciós költségek szintjének esetleges változásaira.

Az is észrevehető, hogy a tranzakciós költségek arányának emelése hatott arra, hogy az egyes stratégiák milyen sűrű fedezés mellett a leghatékonyabbak. A kvantilisértékek ésszerű módon változtak, azzal, hogy nőttek a tranzakciós költségek, a minimumok a ritkább fedezés felé mozdultak el, hiszen a sűrűbb fedezés a növekedő költségek miatt előnytelenebbé vált.

4.2.3. Hibabecslés

A Monte-Carlo-módszer nem egzakt, analitikus eredményeket ad, a szimulációból kapott értékek függnek attól, hogy milyen trajektóriákat generáltunk, még a trajektóriák magas számánál is. Éppen ezért szükséges becsülni a szimuláció hibáját, hogy lássuk mennyire pontosak is a kapott eredmények.

A hibabecslést a delta-fedezésre kapott eredményeken fogom elvégezni. Mivel mindegyik stratégia esetén ugyanazokat a trajektóriákat használtam, és a delta-fedezésnél adódtak a legmagasabb értékek szinte minden kategóriában, így az itt kapott becslések hozzávetőlegesen jók lesznek a többi stratégia esetén is. Összesen 10 különböző szimuláció eredményeit összesítettem, és a szimulációból kinyert mérőszámokra, azaz az átlagra, a szórásra és a

90%-os kvantilisre számoltam szórást az összes fedezési időköz esetén.

	1 nap	2 nap	4 nap	8 nap	16 nap	32 nap	64 nap	128 nap
Átlag	0,0066	0,0061	0,0053	0,0080	0,0085	0,0089	0,0145	0,0271
Szórás	0,0037	0,0050	0,0050	0,0071	0,0071	0,0084	0,0149	0,0135
90% kvantilis	0,0109	0,0128	0,0113	0,0218	0,0207	0,0225	0,0103	0,7404

4.2. táblázat. Monte-Carlo szimuláció hibái az egyes mérőszámokra a delta-fedezés esetén

Ahogy látható a hibák az átlag és a szórás esetén többségében 0,01 alatt vannak, és a kvantilis értékek esetében is jórészt 0,02 bővebb környezetében maradnak. Csak a 128 nap, magyarán a statikus fedezés esetén látunk kiugró számokat, ennek viszont egyszerűen az az oka, hogy itt a lehetséges kimenetelek között relatíve nagyok a különbségek, így sokkal több múlik a trajektóriák pontos eloszlásán. Mivel a statikus fedezés eredményei nem különösen voltak relevánsak a legjobb stratégiák keresésénél, így összességében azt mondhatjuk, hogy a hibák nagysága elfogadható, nem szóródnak annyira az értékek, hogy szignifikánsan befolyásolják az eredmények kimenetelét.

4.2.4. Az eredmények összegzése

A szimuláció során több különböző stratégiát is vizsgáltam abból a célból, hogy felmérjem a tranzakciós költségek jelenléte által gyakorolt hatást az egyes stratégiák végrehajtásából származó költségekre, illetve hogy mekkora veszteséget szenvedünk el a fair opcióárhoz képest az egyes stratégiák használatával. A stratégiák egyik típusát a delta-fedezés és azok módosításai alkották, itt azt teszteltem, hogy relatíve egyszerű módosításokkal lehet-e csökkenteni a fedezés során elszenvedett veszteségeket, és ha igen, milyen mértékben. Emellett vizsgáltam a Boyle és Vorst által leírt replikáló módszert, és hogy ez hogyan teljesít az előbb leírt stratégiákkal összehasonlítva.

Mindent egybevetve azt láthattuk, hogy a részleges delta-fedezés működött a legjobban a tesztelt stratégiák közül, illetve még a Boyle-Vorst-féle replikáló stratégia működött jól, azonban itt fontos megjegyezni, hogy a stratégia nem tökéletes replikálás esetén nyújtja a legjobb teljesítményt, hanem a napinál ritkább fedezés esetén. Ez utóbbi tény mutatja azt, hogy a napi fedezés bármiféle módosítás, simítás nélkül nem hatékony, még replikálás esetén sem, mivel a napi rendszerességű kereskedés a tranzakciós költségek miatt túlzottan nagy veszteséget generál. A részleges delta-fedezés remek eredményei pedig arra mutatnak rá, hogy az elszálló tranzakciós költségeket leginkább egy ilyen jellegű, rugalmas, a deltát folyamatosan követő, viszont a kereskedés mértékét csökkentő stratégia tudja kordában tartani.

Fontos megjegyezni, hogy fix tranzakciós költségek jelenlétében az eredmények kicsit mások lennének, a részleges fedezés eredményei romolnának, különösképpen a naponta, illetve kétnaponta történő fedezés esetében, míg a delta tolerancia stratégia eredményeire kevésbé lenne hatással. Mindazonáltal, az eredmények között észlelt különbségek alapján igen nagy fix költségnek kellene jelen lennie, hogy ezek a stratégiák nagyjából azonos eredményeket hozzanak, avagy a delta tolerancia stratégia teljesítsen jobban. Ezenfelül a részleges delta-fedezés ritkább fedezés esetén is jobban teljesített, mint a delta tolerancia stratégia, itt pedig már a fix költségből adódó veszteségek is körülbelül kiegyenlítettek lennének.

5. fejezet

Összegzés

Dolgozatomban először bevezettem a szükséges opcióárazási modelleket, a kereskedési stratégiákat, illetve azt, hogy milyen formában fogom felhasználni a tranzakciós költségeket a dolgozatomban.

Ezután bemutattam a témakör irodalmát, a tranzakciós költségek melletti fedezés, illetve árazás különböző módszereit. Ezeket a modelleket alapvetően két kategóriába lehet sorolni, egyrészt vannak azok a modellek, amik szigorúan matematikai módon ragadják meg a tranzakciós költségek kérdéskörét, ilyen Leland, Boyle és Vorst, vagy Hoggard, Whalley és Wilmott modellje. Ezek alapvetően arra épülnek, hogy a teljesen folytonos fedezésből kilépve, kicsi Δt-re próbálnak a tranzakciós költségek várható értékéből kiindulva olyan stratégiát adni, amely esetében a fedezési hiba elhanyagolható lesz. Leland, valamint Boyle és Vorst eredménye is azt mutatta, hogy egy európai call opció esetén a volatilitás növelése egy κ-tól és Δt-től függő taggal, és ennek a módosított volatilitásnak az alkalmazása az árazásban kompenzálni tudja a tranzakciós költségekből adódó kiadásokat. Ahogy Boyle és Vorst eredményeiből láttuk, diszkrét modellből kiindulva lehetséges akár a pontos replikálás is, azonban folytonos modellekből kiindulva nem ilyen egyszerű a helyzet.

A tranzakciós költségek melletti modellek másik kategóriáját, a közgazdaságtanhoz sokkal közelebb álló irány, a hasznosság, illetve a kockázatkerülés felől való közelítés jelenti. Ennek a módszernek Hodges és Neuberger voltak az úttörői, akik modelljükben azt vizsgálták, hogy ha egy hasznosságfüggvénnyel mérjük, hogy egy befektetőt a fedezésből adódó veszteség mennyire érzékenyen érint, akkor milyen stratégiával lehet maximalizálni a várható hasznosságot, azaz mi lesz az a stratégia, amely a befektető kockázatkerülését figyelembe véve leginkább megfelel számára, továbbá azt is bemutatták, hogyan lehet ezt a módszert akár árazásra is felhasználni. Hodges és Neuberger bizonyos racionális feltevések mellett formulizálták a problémát, és megoldásként olyan függvények adódtak, amelyek meghatároznak egy intervallumot, amelyben ha benne van az általunk tartott részvények száma, akkor nem kereskedünk, nem rendezzük át a portfóliónkat, ha pedig kívül vagyunk, akkor egy meghatározott, szintén a megoldás részeként adódó mennyiségű részvényre rendezzük át a fedező portfóliót. Mivel ennek a megoldásnak a meghatározása nehézkes, ezért később születtek eredmények egyszerűbb modellekre Hodges és Neuberger módszerével. Ezek közül láthattunk néhányat, amelyek a delta tolerancia stratégia optimális toleranciaszintjét határozzák meg, mint például Whalley és Wilmott, Barles és Soner, vagy Zakamouline eredményei.

Végül egy szimuláció segítségével hasonlítottam össze fedezési stratégiák költségeit tranzakciós költségek jelenlétében. Itt a Cox-Ross-Rubinstein modellben számoltam ki egy straddle pozíció deltáit, illetve fair árát, majd Monte-Carlo-módszer segítségével szimuláltam trajektóriákat a részvényárra, és ezeken számoltam ki a fedezés költségeit a fair árhoz képest, majd az eredmények összesítése után elemeztem azokat. A Cox-Ross-Rubinstein deltáival való fedezés eredményeit használtam összehasonlítási alapnak, majd ezen kívül még három stratégiát vizsgáltam: egyrészt a Boyle és Vorst által megadott replikáló stratégiát, másrészt két, a deltákat felhasználó stratégiát, a delta tolerancia stratégiát, illetve a részleges delta-fedezést. A stratégiák összehasonlítása után azt láthattuk, hogy a részleges delta-fedezés teljesített a legjobban, illetve a Boyle-Vorst-féle stratégia szolgáltatott még jó eredményeket. Végül röviden ismertettem, hogy milyen lesz a stratégiák viszonya, ha emelkednek a tranzakciós költségek, összességében azt láthattuk, hogy a stratégiák egymáshoz képest hasonlóan teljesítenek ebben az esetben is, tehát a kapott eredmények nem költségszint-specifikusak, nincs komolyabb összefüggés a tranzakciós költség szintjével.

Irodalomjegyzék

[1] Barles, G., Soner, H.M.: Option Pricing with Transaction Costs and a Non-Linear Black-Scholes Equation. Finance and Stochastics 2, 369-397. (1998)

[2] Black, F., Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy Vol. 81, No. 3., 637-654. (1973)

[3] Boyle, P.P., Vorst, T.: Option Replication in Discrete Time with Transaction Costs. The Journal of Finance, Volume XLVII, Issue 1, 271-293. (1992)

[4] Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M.: Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics 7, 229-263. (1979)

[5] Florescu, I, Marianu, M.C., Sengupta, I.: Option Pricing with Transaction Costs and Stochastic Volatility. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2014, No. 165, 1-19. (2014)

[6] Hodges, S.D., Neuberger, A.: Optimal Replication of Contingent Claims Under Transaction Costs. The Review of Futures Markets, Vol. 8, No. 2. (1989)

[7] Hoggard, T., Whalley, A.E., Wilmott, T.: Hedging Option Portfolios in the Presence of Transaction Costs. Advances in Futures and Options Research, Vol. 7, No. 4. (1994)

[8] Leland, H.E.: Option Pricing and Replication with Transaction Costs. The Journal of Finance, Volume 40, No. 5, 1283-1301. (1985)

[9] Márkus, L.: Eszközár folyamatok modellezése, valamint európai és amerikai opciók árazása. Egyetemi jegyzet. (2017)

[10] Soner, H.M., Shreve, S.E., Cvitanic, J.: There Is No Nontrivial Hedging Portfolio For Option Pricing with Transaction Costs. The Annals of Applied Probability, Volume 5, No. 2, 327-355 (1995)

[11] Whalley, A.E., Wilmott, P.: An Asymptotic Analysis of an Optimal Hedging Model for Option Pricing with Transaction Costs. Mathematical Finance, Vol. 7, No. 3, 307-324. (1997)

[12] Zakamouline, V.I.: Efficient Analytic Approximation of the Optimal Hedging Strategy for a European Call Option with Transaction Costs. Quantitative Finance, Vol. 6, Issue 5. (2006)

A. függelék

A szimulációhoz használt kód

A.1. A 4.2 szimuláció kódja

```
import numpy as np
import pandas as pd
import math
import xlsxwriter as xl
import scipy.special

# declaring parameters
S = 100
K = 100
dt = 1/365
sigma = 0.21
mu = 0.1
rate = 0.03
R = math.exp(rate*dt)
df = 1/R
kappa = 0.005
lmt = 0.26
prc = 0.2


u = math.exp(sigma*math.sqrt(dt))
d = 1/u
p = (math.exp(mu*dt)-d)/(u-d)
q = (R-d)/(u-d)
ld = d*(1-kappa)
lu = u*(1+kappa)
lq = (R-ld)/(lu-ld)
```

```
lqu = (R*(1+kappa)-ld)/(lu-ld)
lqd = (R*(1-kappa)-ld)/(lu-ld)
sd = d*(1+kappa)
su = u*(1-kappa)
sq = (R-sd)/(su-sd)
squ = (R*(1-kappa)-sd)/(su-sd)
sqd = (R*(1+kappa)-sd)/(su-sd)

st = np.zeros((129, 129))
delta = np.zeros((129, 129))
pv = np.zeros((129, 129))
st[128, 0] = S

for j in range(1, 129):
    for i in range(128-j, 129):
        if st[i, j-1] == 0:
            st[i, j] = st[i+1, j-1]*u
        else:
            st[i, j] = st[i, j-1]*d

pv[:, 128] = abs(st[:, 128] - K)
delta[:, 128] = np.sign(st[:, 128] - K)

for j in range(127, -1, -1):
    for i in range(128-j, 129):
        delta[i, j] = (pv[i-1, j+1]-pv[i, j+1])/(st[i-1, j+1] - st[i, j+1])
        pv[i, j] = df*(pv[i-1, j+1]*q + pv[i, j+1]*(1-q))

price = 0

for i in range(0, 129):
    dpo = (df**128)*abs(st[i, 128]-K)
    price = price + scipy.special.binom(128, i)*(q**(128-i))*((1-q)**i)*dpo

lpay = np.zeros(100000)
spay = np.zeros(100000)

for i in range(0, 100000):
    lfirst = np.random.binomial(1, lq, 1)
    lup = np.random.binomial(1, lqu, 127)
    ldown = np.random.binomial(1, lqd, 127)
    lpath = [lfirst[0]]
    for k in range(0, 127):
```

```
        if lpath[-1] == 1:
            lpath.append(lup[k])
        else:
            lpath.append(ldown[k])
    lsum = 128-sum(lpath)
    lsgn = 1+kappa if lpath[127] == 1 else 1-kappa
    lpay[i] = (df**128)*abs(st[lsum, 128]*lsgn-K)
    sfirst = np.random.binomial(1, sq, 1)
    sup = np.random.binomial(1, squ, 127)
    sdown = np.random.binomial(1, sqd, 127)
    spath = [sfirst[0]]
    for k in range(0, 127):
        if spath[-1] == 1:
            spath.append(sup[k])
        else:
            spath.append(sdown[k])
    ssum = 128-sum(spath)
    ssgn = 1-kappa if lpath[127] == 1 else 1+kappa
    spay[i] = (df**128)*abs(st[ssum, 128]*ssgn-K)

lprice = np.mean(lpay)
sprice = np.mean(spay)

print("Fair price:", price)
print("Long price:", lprice)
print("Short price:", sprice)

ldelta = np.zeros((129, 129))
lb = np.zeros((129, 129))
sdelta = np.zeros((129, 129))
sb = np.zeros((129, 129))
ldelta[:, 128] = np.sign(st[:, 128] - K)
sdelta[:, 128] = np.sign(K - st[:, 128])
lb[:, 128] = np.sign(K - st[:, 128])*K
sb[:, 128] = np.sign(st[:, 128] - K)*K

for j in range(127, -1, -1):
    for i in range(128-j, 129):
        lvu = ldelta[i-1, j+1]*st[i-1, j+1]*(1+kappa)+lb[i-1, j+1]
        lvd = ldelta[i, j+1]*st[i, j+1]*(1-kappa)+lb[i, j+1]
        ldiv = st[i-1, j+1]*(1+kappa) - st[i, j+1]*(1-kappa)
        ldelta[i, j] = (lvu-lvd)/ldiv
        svu = sdelta[i-1, j+1]*st[i-1, j+1]*(1-kappa)+sb[i-1, j+1]
```

```
            svd = sdelta[i, j+1]*st[i, j+1]*(1+kappa)+sb[i, j+1]
            sdiv = st[i-1, j+1]*(1-kappa) - st[i, j+1]*(1+kappa)
            sdelta[i, j] = (svu-svd)/sdiv
            lb_change = (ldelta[i, j]-ldelta[i-1, j+1])*st[i-1, j+1]*(1+kappa)
            lb[i, j] = (lb[i-1, j+1]-lb_change)*df
            sb_change = (sdelta[i, j]-sdelta[i, j+1])*st[i, j+1]*(1+kappa)
            sb[i, j] = (sb[i-1, j+1]-sb_change)*df

nontc_res = np.zeros((100000, 8))
long_tc_res = np.zeros((100000, 8))
lmt_res = np.zeros((100000, 8))
prc_res = np.zeros((100000, 8))
short_tc_res = np.zeros((100000, 8))
tcs = np.zeros((100000, 8))
lmt_tcs = np.zeros((100000, 8))
prc_tcs = np.zeros((100000, 8))
ld_results = np.zeros((100000, 8))
sd_results = np.zeros((100000, 8))
long_trc = np.zeros((100000, 8))
short_trc = np.zeros((100000, 8))

for i in range(0, 100000):
    rnd = np.random.binomial(1, p, 128)
    szum = np.zeros(129)
    szum[0] = 128
    for k in range(1, 129):
        szum[k] = szum[k-1] - rnd[k-1]
    for j in range(0, 8):
        cost = delta[128, 0]*S-price
        long_cost = delta[128, 0]*S-price
        short_cost = delta[128, 0]*S-price
        lmt_cost = delta[128, 0]*S-price
        prc_cost = delta[128, 0]*S-price
        tc = 0
        lmt_tc = 0
        prc_tc = 0
        last_dlt = delta[128, 0]
        lmt_dlt = delta[128, 0]
        prc_dlt = delta[128, 0]
        lcost = ldelta[128, 0] * S - price
        scost = sdelta[128, 0] * S - price
        ltrc = 0
        strc = 0
```

```
last_ldlt = ldelta[128, 0]
last_sdlt = sdelta[128, 0]
t = 2**j
for l in range(t, 129, t):
    row = int(szum[l])
    dlt_diff = delta[row, l] - last_dlt
    prc_diff = delta[row, l]-prc_dlt
    lmt_diff = delta[row, l]-lmt_dlt
    cost = cost+(df**l)*dlt_diff*st[row, l]
    tc = tc+(df**l)*kappa*abs(dlt_diff)*st[row, l]
    prc_tc = prc_tc+prc*(df**l)*kappa*abs(prc_diff)*st[row, l]
    if dlt_diff > 0:
        long_cost = long_cost+(df**l)*dlt_diff*st[row, l]*(1+kappa)
        short_cost = short_cost+(df**l)*dlt_diff*st[row, l]*(1-kappa)
    else:
        long_cost = long_cost+(df**l)*dlt_diff*st[row, l]*(1-kappa)
        short_cost = short_cost+(df**l)*dlt_diff*st[row, l]*(1+kappa)
    last_dlt = delta[row, l]
    mp = prc if l < 128 else 1
    if prc_diff > 0:
        prc_cost = prc_cost+mp*(df**l)*prc_diff*st[row, l]*(1+kappa)
    else:
        prc_cost = prc_cost+mp*(df**l)*prc_diff*st[row, l]*(1-kappa)
    prc_dlt = prc_dlt+mp*prc_diff
    if abs(lmt_diff) > lmt or abs(delta[row, l]) == 1:
        if lmt_diff > 0:
            lmt_cost = lmt_cost+(df**l)*lmt_diff*st[row, l]*(1+kappa)
        else:
            lmt_cost = lmt_cost+(df**l)*lmt_diff*st[row, l]*(1-kappa)
        lmt_tc = lmt_tc+(df**l)*kappa*abs(lmt_diff)*st[row, l]
        lmt_dlt = delta[row, l]
    ldlt_diff = ldelta[row, l] - last_ldlt
    sdlt_diff = sdelta[row, l] - last_sdlt
    ltrc = ltrc + kappa * abs(ldlt_diff) * st[row, l]
    strc = strc + kappa * abs(sdlt_diff) * st[row, l]
    if ldlt_diff > 0:
        lcost = lcost + (df ** l) * ldlt_diff * st[row, l] * (1 + kappa)
    else:
        lcost = lcost + (df ** l) * ldlt_diff * st[row, l] * (1 - kappa)
    if sdlt_diff > 0:
        scost = scost + (df ** l) * sdlt_diff * st[row, l] * (1 + kappa)
    else:
        scost = scost + (df ** l) * sdlt_diff * st[row, l] * (1 - kappa)
```

```
                last_ldlt = ldelta[row, l]
                last_sdlt = sdelta[row, l]
            po_sign = np.sign(st[int(szum[128]), 128]-K)
            cost = cost - (df**128)*po_sign*K
            long_cost = long_cost - (df**128)*po_sign*K
            short_cost = short_cost - (df**128)*po_sign*K
            prc_cost = prc_cost - (df**128)*po_sign*K
            lmt_cost = lmt_cost - (df**128)*po_sign*K
            lcost = lcost - math.exp(-rate * 128 * dt) * po_sign * K
            scost = scost + math.exp(-rate * 128 * dt) * po_sign * K
            ld_results[i, j] = lcost
            sd_results[i, j] = scost
            long_trc[i, j] = ltrc
            short_trc[i, j] = strc
            nontc_res[i, j] = cost
            long_tc_res[i, j] = long_cost
            short_tc_res[i, j] = short_cost
            lmt_res[i, j] = lmt_cost
            prc_res[i, j] = prc_cost
            tcs[i, j] = tc
            lmt_tcs[i, j] = lmt_tc
            prc_tcs[i, j] = prc_tc

    nontc_mean = np.mean(nontc_res, axis=0)
    nontc_stdev = np.std(nontc_res, axis=0)
    nontc_up = np.quantile(nontc_res, 0.1, axis=0)
    nontc_down = np.quantile(nontc_res, 0.9, axis=0)
    nontc_data = pd.DataFrame([nontc_mean, nontc_stdev, nontc_up, nontc_down])

    long_tc_mean = np.mean(long_tc_res, axis=0)
    long_tc_stdev = np.std(long_tc_res, axis=0)
    long_tc_up = np.quantile(long_tc_res, 0.1, axis=0)
    long_tc_down = np.quantile(long_tc_res, 0.9, axis=0)
    long_tc_data = pd.DataFrame([long_tc_mean, long_tc_stdev,
                                 long_tc_up, long_tc_down])

    short_tc_mean = np.mean(short_tc_res, axis=0)
    short_tc_stdev = np.std(short_tc_res, axis=0)
    short_tc_up = np.quantile(short_tc_res, 0.1, axis=0)
    short_tc_down = np.quantile(short_tc_res, 0.9, axis=0)
    short_tc_data = pd.DataFrame([short_tc_mean, short_tc_stdev,
                                  short_tc_up, short_tc_down])
```

```
tc_mean = np.mean(tcs, axis=0)
tc_stdev = np.std(tcs, axis=0)
tc_up = np.quantile(tcs, 0.1, axis=0)
tc_down = np.quantile(tcs, 0.9, axis=0)
tc_data = pd.DataFrame([tc_mean, tc_stdev, tc_up, tc_down])

lmt_mean = np.mean(lmt_res, axis=0)
lmt_stdev = np.std(lmt_res, axis=0)
lmt_up = np.quantile(lmt_res, 0.1, axis=0)
lmt_down = np.quantile(lmt_res, 0.9, axis=0)
lmt_data = pd.DataFrame([lmt_mean, lmt_stdev, lmt_up, lmt_down])

lmtc_mean = np.mean(lmt_tcs, axis=0)
lmtc_stdev = np.std(lmt_tcs, axis=0)
lmtc_up = np.quantile(lmt_tcs, 0.1, axis=0)
lmtc_down = np.quantile(lmt_tcs, 0.9, axis=0)
lmtc_data = pd.DataFrame([lmtc_mean, lmtc_stdev, lmtc_up, lmtc_down])

prc_mean = np.mean(prc_res, axis=0)
prc_stdev = np.std(prc_res, axis=0)
prc_up = np.quantile(prc_res, 0.1, axis=0)
prc_down = np.quantile(prc_res, 0.9, axis=0)
prc_data = pd.DataFrame([prc_mean, prc_stdev, prc_up, prc_down])

prtc_mean = np.mean(prc_tcs, axis=0)
prtc_stdev = np.std(prc_tcs, axis=0)
prtc_up = np.quantile(prc_tcs, 0.1, axis=0)
prtc_down = np.quantile(prc_tcs, 0.9, axis=0)
prtc_data = pd.DataFrame([prtc_mean, prtc_stdev, prtc_up, prtc_down])

ld_mean = np.mean(ld_results, axis=0)
ld_stdev = np.std(ld_results, axis=0)
ld_up = np.quantile(ld_results, 0.1, axis=0)
ld_down = np.quantile(ld_results, 0.9, axis=0)
ld_data = pd.DataFrame([ld_mean, ld_stdev, ld_up, ld_down])

sd_mean = np.mean(sd_results, axis=0)
sd_stdev = np.std(sd_results, axis=0)
sd_up = np.quantile(sd_results, 0.1, axis=0)
sd_down = np.quantile(sd_results, 0.9, axis=0)
sd_data = pd.DataFrame([sd_mean, sd_stdev, sd_up, sd_down])

ltrc_mean = np.mean(long_trc, axis=0)
```

```
ltrc_stdev = np.std(long_trc, axis=0)
ltrc_up = np.quantile(long_trc, 0.1, axis=0)
ltrc_down = np.quantile(long_trc, 0.9, axis=0)
ltrc_data = pd.DataFrame([ltrc_mean, ltrc_stdev, ltrc_up, ltrc_down])

strc_mean = np.mean(short_trc, axis=0)
strc_stdev = np.std(short_trc, axis=0)
strc_up = np.quantile(short_trc, 0.1, axis=0)
strc_down = np.quantile(short_trc, 0.9, axis=0)
strc_data = pd.DataFrame([strc_mean, strc_stdev, strc_up, strc_down])

writer = pd.ExcelWriter('szimul1.xlsx', engine='xlsxwriter')
nontc_data.to_excel(writer, sheet_name='no trc')
long_tc_data.to_excel(writer, sheet_name='long with trc')
short_tc_data.to_excel(writer, sheet_name='short with trc')
tc_data.to_excel(writer, sheet_name='trc data')
lmt_data.to_excel(writer, sheet_name='limit hedge')
lmtc_data.to_excel(writer, sheet_name='limit hedge tc')
prc_data.to_excel(writer, sheet_name='partial delta')
prtc_data.to_excel(writer, sheet_name='partial delta tc')
ld_data.to_excel(writer, sheet_name='BV long')
sd_data.to_excel(writer, sheet_name='BV short')
ltrc_data.to_excel(writer, sheet_name='BV long trc')
strc_data.to_excel(writer, sheet_name='BV short trc')
writer.save()
```