

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar,
Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

GYERMEK ÉS NYUGDÍJ

Diplomamunka

Sárosdi Zsombor

Biztosítási és pénzügyi matematika Msc

Témavezető: Dr. Banyár József



Tartalom

1	Bevezetés.....	4
2	A nyugdíjrendszerek kialakulása.....	7
3	Gyermeknevelés és nyugdíj kapcsolata.....	12
4	A demográfiai átmenetek és a termékenységet befolyásoló tényezők.....	19
4.1	A hagyományos társadalmak termékenysége.....	20
4.2	Az átmenet folyamata.....	24
4.3	Hol tartunk ma?.....	25
5	Termékenységi mutatók.....	27
5.1	Időszaki mutatók.....	27
5.1.1	Nyers születési ráta.....	27
5.1.2	Általános termékenységi ráta.....	28
5.1.3	Korspecifikus termékenységi arányszám (Age-Specific Fertility Ratio – ASFR).....	28
5.1.4	Teljes termékenységi arányszám (Total Fertility Ratio – TFR).....	30
5.2	Kohorsz mutatók.....	31
5.2.1	Végleges Termékenységi Arányszám (Completed Fertility Ratio – CFR).....	31
5.2.2	Születési sorrendek következési aránya (Parity Progression Ratio – PPR).....	32
6	A termékenység modellezése.....	35
6.1	A termékenységi függvény matematikai jellemzése.....	35
6.2	Brass-féle polinom approximáció.....	37
6.3	Coale-Trussel modell.....	39
6.4	Hadwiger modell.....	46
6.5	Egy Bayes-i megközelítés.....	47
7	Egy lehetséges demográfiai modell.....	53
8	Összefoglalás.....	59
9	Irodalomjegyzék.....	61
10	Függelék.....	64
10.1	Demográfiai adatok.....	64

10.2	2018-as KSH halandósági tábla	68
10.3	R kódok, Coale-Trussel és Scmertmann modell.....	70

1 Bevezetés

Szakedolgozatom középpontjában a termékenységi folyamatok vizsgálata áll. Önmagában ez a téma aktuáriusok körében csak a folyó finanszírozású nyugdíjrendszerek kapcsán szokott előkerülni. Ilyenkor legtöbbször megjegyezzük, hogy a nyugdíjak ki vannak téve annak a kockázatnak, hogy nem születik elegendő gyermek, és így a jövőben hiány léphet fel a nyugdíjkötelezettségek teljesítésekor (azaz a befizetett járulékteremtés nem elég a nyugdíjígéret teljesítésére). Ezt nevezem a továbbiakban termékenységi kockázatnak. Nem találtam még olyan szakirodalmat, amelyik megcélozta volna ezen kockázat modellezését, kezelését, bár széles körben elismerik jelentőségét. A termékenység kockázata talán még jobban is érinti a nyugdíjakat, mint a hosszú élet kockázata, mégis, közel sincs mögötte olyan komoly szakirodalom, mint a halandóság esetében. Munkámban szeretném bemutatni egyrészt a téma fontosságát, másrészt azokat a megközelítéseket, modellezési lehetőségeket, amiket demográfusoktól eltanulhatunk.

A téma két szempontból lehet releváns egy aktuárius számára. Egyrészt, a kockázat kezelése szempontjából régóta tartó vita zajlik arról, hogy milyen módon kellene a gyermekvállalást (vagy helyesebben mondva: a gyermeknevelést) figyelembe venni a nyugdíjjogosultság megállapításakor. Valamilyen szinten ez már a mai rendszerekben is megjelenik, például a GYES-en töltött idő Magyarországon is beszámít a nyugdíjjogosultság megállapításakor. Számos javaslat azonban kevesli ezt. Az elméletek palettája széles, kezdve onnantól, hogy valamifajta „bónuszt” állapítsunk meg a gyermeket nevelőknek, egészen odáig, hogy maga a gyermeknevelés legyen a nyugdíjjogosultság alapja. Mások szerint pedig elég csak a demográfiai változások beépítése a járadékbecslések szétosztásakor, ahogy az például a német pontrendszerben történik¹.

Másrészt, a nyugdíjak vizsgálata a termékenység szempontjából azért is érdekes, mert befektetésnek tekintve a járulékfizetést definiálható ennek egy várható hozama, ami elsősorban attól függ, hogy később mennyi gyerek születik, nő fel és mekkora járulékteremtő képesek generálni, ami szétosztható az aktuális nyugdíjasok között. Ezt hívta Samuelson biológiai kamatnak (Samuelson 1958, később a termelékenységgel kiegészítette Aaron 1966). Ennek számszerűsítése nagyon összetett demográfiai modellt igényel, amelynek kulcseleme lenne a termékenység modellezése. Nem csupán arról van szó, hogy figyelembe vegyük-e a termékenységet, és ha igen akkor hogyan (exogén, vagy endogén változóként), hanem az,

¹ Tulajdonképpen ez a fajta nyugdíj-modell volt az eredeti elképzelés is, amit Samuelson vezetett be (Samuelson 1958). Ekkorra azonban a nyugdíjrendszerek már több, mint egy évtizede elindultak és nem tartották fontosnak, hogy módosítsák – vagy nem is vették észre, hogy nem ugyanarról a nyugdíjrendszerről szól a cikk, mint amit bevezettek...

hogy magukat a konkrét termékenységi rátákat hogyan lehetne megbízhatóan becsülni. Ha a biológiai kamatra becslést szeretnénk adni, akkor össze lehetne hasonlítani azt nyugdíjalapok hozamával, más nyugdíjrendszerekkel, illetve számszerű képet kaphatunk a mai formában megvalósuló folyó finanszírozás hatékonyságáról. Azoknak a számításoknak, amik eddig erre kísérletet tettek, két nagy hiányossága van:

1. A szolgáltatással meghatározott rendszert veszik alapul, amiből könnyen kijöhet, hogy a nyugdíjas jól jár, de nincs mögötte az, hogy a nyugdíjat finanszírozó intézmény, azaz az állam képes-e a kötelezettségeit teljesíteni. Samuelson hozzájárulással meghatározott rendszerként definiálta a nyugdíjrendszert, a biológiai kamat igazán ebben kérdéses.
2. Nem tartalmaznak túl összetett demográfiai feltételezéseket arra, hogy lesz-e elég járulékfizető a kockázatközösségben.

Ebben a szakdolgozatban nem célom felépíteni azt a modellt, amelyből megkapható a biológiai kamat, de első lépésként ezen cél felé a termékenység modellezésének eszközeit szeretném bemutatni.

Aktuáriusi szempontból ráadásul a termékenység modellezésének matematikája nem is kíván teljesen új vagy idegen eszköztárat. A dolgozatban bemutatom, hogy számos modellezési technika analóg a halandóság modellezésének technikájával, például a Lee-Carter modellel. Mégis magában foglal új kihívásokat, hiszen a halandóság modellezésekor egyszer megtörténő eseményt vizsgálunk, aminek inkább az időpontja a kérdéses. Ezt illetően pedig a trend elsősorban növekvő – a várható élettartam minden országban felfelé kúszik –, a trendnek inkább csak a mértéke kérdéses. A termékenység modellezésekor ismétlődő eseményről van szó és nem olyan egyértelmű a trend jelenléte, mint a hosszú élet esetében.

A gyermekszületések modellezése tehát releváns, kihívásokkal teli feladat. Ugyanúgy benne van a potenciál, hogy olyan határterületté váljon a demográfia és az aktuáriusi tudományok között, mint a halandóság és a növekvő élettartam témaköre. Magyarországon külön érdekessége a feladatnak, hogy a termékenység modellezése kockázatkezelési szempontból már felmerült az úgynevezett Babaváró hitel pénzáramlásának előrejelzésével kapcsolatban a bankok részéről (Grósz et al. 2020).

Először a nyugdíjak kialakulásáról lesz szó. Bemutatom, honnan ered, hogyan alakult ki a nyugdíjrendszer mai formája. Ehhez kapcsolódóan relevánsnak tartom azt a kérdést, hogy a termékenység világszerte tapasztalható csökkenésének milyen gazdasági-kulturális okai lehetnek. Számos kutató érvel úgy, hogy maga a nyugdíjrendszer az oka a gyermekvállalási kedv csökkenésének ((Scheubel 2013), (Sinn 2004)) és vannak, akik ezt használják alapul, hogy

a gyermekvállalást jóval radikálisabb mértékben számítsuk be a nyugdíjjogosultságok elbírálásakor, hiszen anélkül az nem lesz fenntartható. Ezt az érvet sokan nem fogadják el, mondván, hogy a termékenység alakulása ettől független folyamat, az okokat máshol kell keresni. Foglalkozom ezért azzal a kérdéssel is, hogy milyen okok húzódnak meg a gyermekvállalási kedv alakulása mögött, illetve, hogy hogyan is lehet – lehet-e egyáltalán – ezt mérni. Az erre vonatkozó gondolatok a demográfiai átmenet elméletének ernyője alá tartoznak, amely elmélet azt szeretné magyarázni, hogy a régi, magas termékenységgel jellemzett „hagyományos” társadalmak miért és hogyan alakultak át a mai, alacsony, reprodukciós szint alatti termékenységű „modern” társadalmakká. A gyermekvállalást befolyásoló tényezők vizsgálata azért is fontos, mert a termékenység modellezésekor is érdemes lehet figyelembe venni ezeket, illetve gyakran politikai döntéshozók is ezt kutatják, hogy a leghatékonyabban tudják alakítani a népesedés dinamikáját. A szakdolgozat második felében a termékenység modellezésének matematikájába nyújtok bevezetőt.

2 A nyugdíjrendszerek kialakulása

Az első társadalombiztosítást, benne az egyik legfontosabb elemként a nyugdíjrendszerrel Otto von Bismarck vezetése alatt alkották meg 1889-ben a Birodalmi Németországban. Az igény azáltal alakult ki, hogy a korábbi szoros családi kapcsolatok – és így az egymást követő, egy háztartásban élő generációk közvetlen gondoskodása egymásról – felbomlottak a tömeges urbanizációval. A folyamat elsősorban a nemrégiben kialakult munkásréteget érintette. A kialakult társadalmi feszültségeket sürgősen kezelni kellett. Akkoriban ez politikai érdek is volt, hiszen minden európai országban igyekeztek elejét venni a szocializmus térnyerésének. Ilyen körülmények között alkották meg a társadalombiztosítást, amelynek egyik legfontosabb eleme a nyugdíj lett.

Ez mai szemmel szinte nevetséges mértékű volt, a társadalom alig negyedére terjedt ki, mértéke az akkori munkás átlagbér 20%-a körül mozgott. A nyugdíjkorhatárt 70 évben állapították meg, de a gyakorlatban a munkaképtelenné válástól kaphatott nyugdíjat a dolgozó, amennyiben rendelkezett jogosultsággal. A 70 éves kor csupán azért szerepelt a törvényben, mert ebben a korban már orvosi vizsgálat nélkül munkaképtelenné nyilvánították az embereket (Németh 2009). Ez később 65 évre csökkent, ami azóta is így maradt a legtöbb országban.

A német társadalombiztosítás megalkotásáról részletes és nagyon alapos áttekintést ad (Scheubel 2013:84-96), ebből azonban igyekszem csak az ideillő lényegyet kiragadni. Az akkori rendszert „jogcím alapján fedezetet nyújtó” (Anwartschaftsdeckungsverfahren) rendszernek nevezték, amelynek lényege az volt, hogy a befolyó hozzájárulásokon felül egy tőketartalék is rendelkezésre állt. A kettőnek együtt elvben² ki kellett elégítenie az összes aktuális nyugdíjigényt, valamint minden akkor már fennálló jogosultságot³. Ezt a tartalékot az állam egyrészt az esetleges járuléktöbbletből, másrészt egyéb forrásokból építette fel. Bismarck idejében jelentős tőke állt fenn a nyugdíjkifizetések fedezetére, de értelemszerűen az aktuális járulékokból rögtön ki is fizették, amit lehetett. Ezért ez a rendszer feltőkésített volt. Ennek ellenére a bismarcki nyugdíjrendszer alatt ma általában folyó finanszírozású rendszert értenek⁴. Ez azonban súlyos fogalmi tévedés. A folyó finanszírozású rendszer Roosevelt

² A gyakorlatban ez nem teljesen tudott megvalósulni, de ennek oka részben a számítási kapacitások hiánya volt.

³ Egy országban az aktuálisan fennálló nyugdíjjogosultságok jelenértékét implicit államadóságnak nevezzük. Bismarck idejében ez a fogalom így még nem létezett, de gyakorlatilag ennek fedezetére szolgált. Ez ma már legtöbb esetben az adott ország éves GDP-jének többszöröse, ezért egy ilyen rendszer ma szinte elképzelhetetlen lenne.

⁴ Ironikus módon maga Bismarck nagy ellenzője volt a tőkefedezet nélküli nyugdíjrendszernek. Azt vallotta, hogy nem bízhatjuk meg sem született emberekre mások nyugdíját (Scheubel 2013:88). Mai szavakkal megfogalmazva az implicit államadóságnak rejülő kockázatot mérte fel – ma már látjuk: helyesen. Ennek figyelembevétele a

névéhez köthető, aki különösebb megfontolás vagy szakmai vita nélkül indította útjára a ma is fennálló nyugdíjrendszert. Valószínűleg neki is a belső feszültségek rövid távú kezelése, a kommunizmus visszaszorítása lehetett a prioritás. A rendszernek pedig egyetlen „előnye”, hogy egyből el lehet indítani.

A világháborúk minden más országban is felemésztették a nyugdíjak mögötti tőkefedezetet, a második világhéges után pedig Európának a Marshall-segélyen tengődve aligha volt a nyugdíj feltőkésítése a legnagyobb problémája. Mindeközben a kommunizmus térnyerésének megakadályozása érdekében égetően fontos volt, hogy „valami legyen”. A folyó finanszírozású nyugdíjrendszer mellett erős érv volt, hogy egyből el lehetett indítani. Eleinte úgy nézett ki, hogy mindenkinek van oka azt remélni, hogy a nyugdíjával nem lesz gond, hiszen a második világháború után nem volt probléma a gyermekek számával. A „baby boom” azonban – ahogy a neve is kifejezi – csak pillanatnyi robbanás volt. A teljes termékenységi ráta nem sokkal később tartósan a társadalom fenntartásához szükséges 2,1 alá süllyedt. Mindeközben a várható élettartam is folyamatosan növekedett (a korhatár növelése nélkül), ezáltal egyre tovább kellett a nyugdíjakat folyósítani. Az 1970-es, 1980-as évekre pedig a szakemberek már jól látták, hogy ha ez tovább folytatódik, akkor a rendszer nem lesz fenntartható.

Igen meglepő, hogy az első világháború előtt és a második után mekkora a különbség a nyugdíjak színvonala között. Az átmenettel kapcsolatban nem találtam nyomát komoly szakmai vitának, hogy mi volt a fedezete a háború utáni rendszerek bőkezűségének. Talán a szükség nagyobb volt arra, hogy megadjuk ezt az akkori idős generációknak, mint hogy elgondolkodjunk azon, hogy mi az, ami fenntartható. Bár a nyugdíjakat mára alapértelmezésnek vesszük, a mai társadalombiztosítás nagyjából egy generációt kísért el egész életpályája során és már néhány évtizede látszik, hogy ez egyre kevésbé lesz zökkenőmentes. Ha egy nyugdíj „tesztidejének” egy emberöltőt veszünk, akkor a mai formában megvalósuló folyó finanszírozás nem ment át ezen a teszten.

Mi lehetett volna, illetve mi lehet még másik út? Ha továbbra is ragaszkodunk a Samuelson által megalapozott nyugdíjrendszerhez, akkor a paraméterek racionalizálása az, amit különösebb erőfeszítések nélkül megtehetünk, illetve meg kellett volna tennünk (lásd például (Banyár 2016) vagy (Banyár 2020a)). A második világháború környékén elindított nyugdíjrendszerek ugyanis gyakorlatilag szolgáltatással meghatározott rendszerekként indultak el, nem számoltak sem a várható élettartam növekedésével, sem a lehetséges demográfiai változásokkal. Samuelson eredeti modellje (Samuelson 1958) hozzájárulással

világháború utáni nyugdíjrendszerekből kimaradt. Az alapfeltételezés mellett, hogy az emberek úgyis mindig elég gyereket fognak vállalni, elbagatellizálták a kockázat mértékét.

meghatározott nyugdíjrendszert ír le, tehát ez lehetett a racionalizálás első lépése. Az először Svédországban (később máshol is, mint Olaszországban, a balti államokban stb.) bevezetett névleges, egyéni számlák (NDC – Notional Defined Contribution) lehetővé teszik, hogy a nyugdíjak hozzájárulással meghatározott formában legyenek megállapítva, tehát erre már létezik megoldás⁵. Második lépésként a várható élettartam növekedését kell kezelni. A korhatár indexálása aktuáriusi eszközökkel már megoldható feladat (Banyár 2020b) és sok országban már alkalmazzák is. A demográfiai változásokat (ami elsősorban a termékenység változékonyságából ered) a gazdasági növekedés mértékével együtt egy szorzóként hozzáadhatjuk a rendszerhez (ez a szorzó persze lehet negatív is, például csökkenő népesség esetén). Ez eddig csak a német pontrendszerben működik és ott sem olyan régen került bevezetésre.

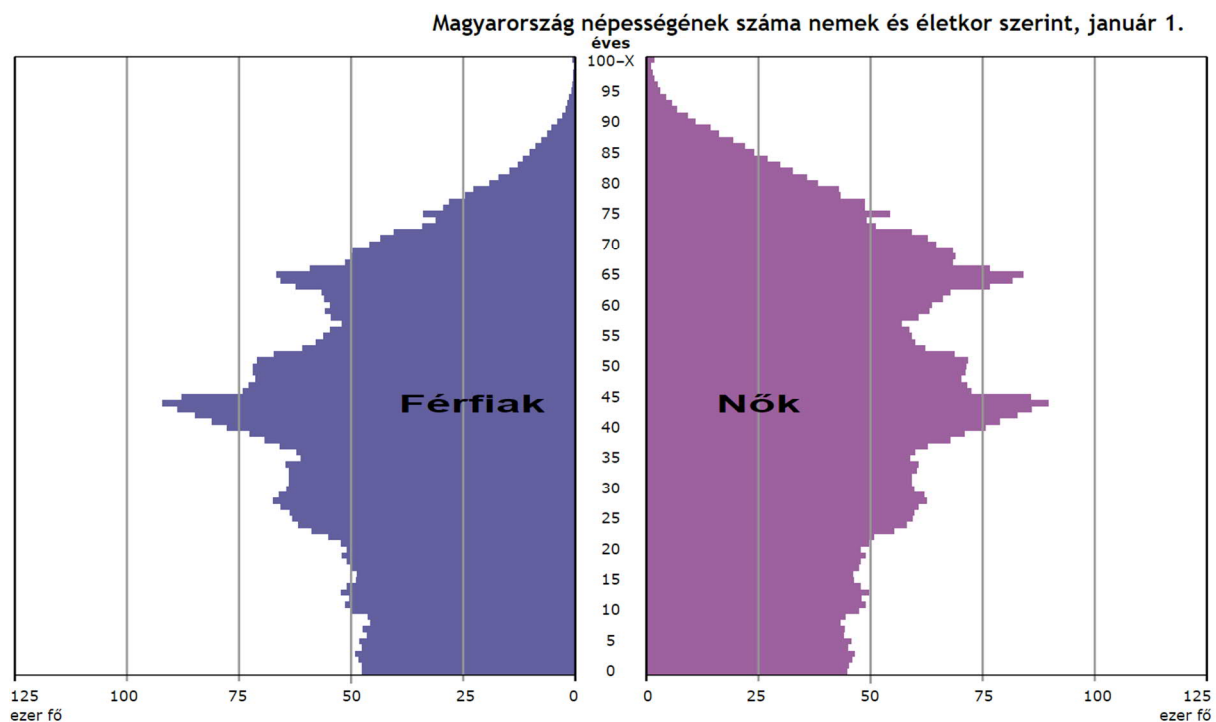
Jó kérdés, hogy ha így indultak volna el eredetileg a nyugdíjrendszerek, vajon hol tartanánk, de erre nehéz lenne pontos választ adni. Mindenesetre inkább az a valószínű, hogy még gyorsabban is jutottunk volna oda, ahol most tartunk. Annyiban jártunk volna jobban, hogy a kormányokat nem terhelné megalapozatlanul nagy implicit államadósság, ami elsősorban a félreértett DB rendszer miatt áll ma fenn.

Világosan látszik tehát az is, hogy tartós népességcsökkenés mellett, vagy gazdasági visszaesés idején a nyugdíjak nem lennének elegendőek az életszínvonal fenntartásához. Egy jóléti állam felé pedig ma már alap elvárás, hogy a nehéz időkre is garantáljon egy alap nyugdíjszínvonalat. Ehhez mindenképpen szükség lenne egy tőkefedezetre, vésztartalékra, ami egy termékenységi visszaesés, vagy recesszió idején fedezheti a hiányt. A gazdasági visszaeséseket könnyen lehetne ilyen módon kezelni, hiszen eddigi tapasztalataink szerint egy-egy gazdasági válság legrosszabb esetben is néhány év alatt véget ér, néha pedig előre számítottunk is rájuk. Így meg lehet határozni azt a szintet, hogy a fedezet mekkora visszaesést mennyi ideig bír el, a kockázat tehát kezelhető lenne.

A termékenységi sokkok kezelése még ennél is jóval összetettebb. Ha egy generáció születésszámai visszaesnek, egyrészt nem tudjuk – de még az érintettek sem tudják – azonnal, hogy ez csak egy halasztása-e a gyermekvállalásnak, vagy elmulasztása. Másrészt, azt sem tudjuk, hogy vajon az utána következő generációk viselkedése követi-e ezt a trendet, vagy sem. Egy ilyen visszaesés évtizedekkel később fogja csak éreztetni a hatását, akkor viszont tartósan, a folyamat pedig nem fordul vissza olyan könnyen, mint egy gazdasági visszaesés. Magyarországon a Ratkó-korszak hatása analóg a nyugati országok „baby-boom”-jával. A Ratkó-gyerekek még kellő számú utódot hagytak hátra, hogy róluk gondoskodjanak, de a

⁵ Az NDC felfedezése Buchanan 1968-as cikkéhez köthető (Buchanan 1968), hiszen Samuelson ezt még nem fogalmazta meg expliciten.

Ratkó-unokákról ez már nem mondható el. Pár évtizeden belül zajlik le az az időszak, amikor a Ratkó-unokák nyugdíjba vonulnak, de még a Ratkó-gyerekek közül is sokan életben vannak. Rájuk nagyon kevés járulékfizető jut és ez a probléma azzal sem tűnne el, ha a Ratkó-unokák utáni generációknak megnőne a gyermekvállalási hajlandóságuk. Ők ugyanis már túl kevesen vannak ahhoz, hogy annyi utódot hozzanak világra, hogy a két idősebb népes generációt eltartsák. Félő tehát, hogy ha rendelkezésre is állna egy ilyen kockázati alap a termékenység csökkenésének esetére (amit eleve csak gazdag országok engedhetnek meg maguknak), az olyan költséges lenne, hogy nem érné meg fenntartani⁶.



1. ábra Magyarország korfája a 2020-as évre. Ha feltesszük, hogy egy járulékfizető egy nyugdíjast képes eltartani, akkor mai 25 év alatti nők esetében az sem lenne elég, ha átlagosan 2,1 körüli gyermeket szülnének. Ez az 6 nyugdíjas éveikre elegendő lenne, de a 35-50 éves korosztály nyugdíjba vonulásának fedezetére még ennél is nagyobb termékenységi sokkra lenne szükség. (A teljes termékenységi arányszám 2018-ban Magyarországon 1,6 alatt van.) Forrás: KSH interaktív korfa - <https://www.ksh.hu/interaktiv/korfak/orszag.html>

Vizsgálva a folyó finanszírozás jellegét triviális, hogy gyakorlatilag azon múlik egy generáció nyugdíjának finanszírozhatósága, hogy mennyi (és milyen „minőségű”) gyermekek követi őket. Sokkal természetesebb lenne tehát a gyermekvállaláshoz kötni a nyugdíjjogosultságot, ahogy az tulajdonképpen a természetes rendje volt mindig is a nyugdíjaknak, Bismarck előtt is: akinek volt gyermeke arról az gondoskodott, akinek nem volt, annak máshogy kellett megoldania – meg kellett vásárolnia az időskori ellátást. Bismarck rendszere azoknak nyújtott megoldást, akik kiszakadtak ebből az addig természetes alapon szerveződő rendszerből. Hans-Werner Sinn felfogásában a nyugdíj tulajdonképpen egy biztosítás egyrészt a gyermektelenség

⁶ Értelemszerűen ez a bizonyos kockázati alap tulajdonképpen az implicit államadósság csökkentve a várhatóan befolyó járulékokkal.

kockázata ellen, másrészt a „hálátlan gyermek” esete ellen, aki annak ellenére, hogy felnevelték, nem tartja el szüleit, amikor rászorulnának (Sinn 2004 és Becker 1974). Erre a következő fejezetben még visszatérünk.

Ezzel együtt nem meglepő, hogy a gyermekvállalás beszámítása a kezdetekkor fel sem merült a 19. század végi társadalomban. Egyrészt feltőkésített rendszerben gondolkodtak, amelyben ez a tényező nem értelmezhető. Másrészt a nyugdíjak mértéke nagyon minimális volt és a társadalom csak kis részére terjedt ki, tehát nem volt téma a fenntarthatóság kérdése. Harmadrészt a gyermekvállalások regisztrációjának adminisztrációs terhe a korabeli viszonyokhoz képest sokkal nagyobb lehetett, mint egy tőkefedezet felállításáé. A kérdést a nyugdíjrendszerek második hullámakor, a világháborúk után kellett volna tüzetesebben megvizsgálni. Ekkor lett széles körű a társadalombiztosítás és ekkor tett meg a nyugati világ számos olyan lépést, aminek eredményeképp létrejött az, amit modern társadalomnak és fejlett világnak nevezünk. Véleményem szerint ekkor kellett volna a maitól eltérő elven, humán tőkére alapozva megalkotni a nyugdíjrendszert úgy, ahogy (Banyár 2020a) javasolja, hiszen az is ugyanúgy, egyből elindítható lett volna. (Erre a későbbiekben humán tőkével feltőkésített, vagy röviden HT rendszerként fogok hivatkozni Banyár József elnevezése nyomán.) A második világháború után páratlan lehetősége nyílt Nyugat-Európának és az Egyesült Államoknak, hogy újra definiálják értékrendjüket és azt, hogy miként akarják megszervezni társadalmukat. Ez meg is történt, de sajnos sok tekintetben kapkodva. Az új rendszer ezernyi jogot és lehetőséget garantál az egyénnek és még ezzel nem is feltétlenül lenne baj, hiszen ezt senkitől sem sajnáljuk, de kimaradt a megfontolásból ezek fenntarthatósága, észszerűsége és a jogokhoz kapcsolódó felelősségvállalás is.

El tudom képzelni, hogy hetven évvel ezelőtt érthetőbb lett volna a HT rendszer gondolata, ha egyáltalán eszébe jut bárkinek is. Ma úgy látom, hogy túl nagy kényelemhez szokott hozzá az egyén ahhoz, hogy ezen könnyen változtatni lehessen. Ma már sokak számára nem világos, hogy egyáltalán mi köze van a gyermekvállalásnak a nyugdíjhoz és fordítva. Azt tapasztalom, hogy a HT rendszer azért nem talál nagy visszhangra, mert a ma kialakult „értékrend” ezt nem teszi lehetővé. Mindeközben ennek az úgynevezett értékrendnek számos eleme inkább csak néhány kérdésre adott rossz válaszból következik, tehát valójában nem is értékrendi kihívás előtt állunk. Ezért következőkben arra fordítom a figyelmet, hogy vélekedünk napjainkban a gyermekvállalásról és annak a nyugdíjakkal való kapcsolatáról. Kísérletet teszek arra, hogy megmutassam, nem is értékrendi akadálya van a HT rendszernek, hanem csak néhány szőnyeg alá söpört kérdést kellene elővenni és elfogulatlanul megvitatni.

3 Gyermeknevelés és nyugdíj kapcsolata

A 21. század egyik jelentős problémájának a Föld túlnépesedését tartják. Számos környezetvédelmi téma megvitatásakor felmerül, hogy a bolygó kapacitásai végesek, így környezetvédelmi szempontból öröndetesnek hathat, hogy a termékenységi mutatók világszerte csökkennek. Más megvilágításban viszont ugyanez a tény baljós színezetet kap. A várható élettartam növekedésével ugyanis a világ társadalmainak egyre nagyobb része válik előregedővé. Ha a gyermekszületések ezzel a folyamattal egyidőben csökkennek, akkor néhány évtized leforgása alatt soha nem látott mértékűvé válik az idősek aránya a fiatalokéhoz képest. A sok idős korú eltartása nagy terhet róhat a társadalomra, a – különösen a folyó finanszírozású – nyugdíjrendszereket pedig össze is roppanthatja a nyomás. Éppen ezért a családtámogató intézkedések nem csupán szociális kiadások, hanem befektetések a humántőkébe. Ezt minden fejlett ország kormánya szem előtt tartja.

Nem cél ugyanakkor a termékenység folyamatos növelése sem. A kifejezetten pronatalista megközelítések általában nem is találnak nagy visszhangra. A történelmi tapasztalat is azt mutatja, hogy ha egy kormány túl erős eszközökkel befolyásolni próbálja a termékenységi folyamatokat (bármelyik irányba), azoknak hosszú távon meg vannak a maguk következményei. Erre példa Kína, Irán, de Magyarország is a Ratkó-korszak óta. Ha viszont egy kormány ölbe tett kézzel figyeli, hogy csökken a népesség, szintén súlyos következményekkel néz szembe a nyugdíjak finanszírozása terén, de nem csak ott. A nyugdíjkötelezettségekből fakadó, úgynevezett implicit államadósság általában többszöröse egy ország GDP-jének. Ezek lejáratára pedig egyre közeledik az európai országokban, ahogy a népesebb generációk nyugdíjba vonulnak.

Erre volt egy bizonyos szempontból hatékony válasza Németországnak a nyugdíj-pontrendszer bevezetése. Ebben a modellben a pontok értéke korrigálódik minden évben egy demográfiai és egy gazdasági tényezővel. Ha csökken a népesség, a demográfiai korrekció csökkenti a nyugdíjpont értékét, azonban a gazdasági tényező ezt még ellensúlyozhatja⁷. Ez azonban csak egy racionalizálása a folyó finanszírozású nyugdíjrendszernek. Folyamatosan csökkenő népesség mellett ugyanúgy csökkenni fog a nyugdíjak értéke, tehát a valós problémát nem oldja meg. Jó oldala, hogy az állam legalább nem vállal teljesíthetetlen kötelezettségeket, de

⁷ Azaz, ha kevesebb ember nagyobb gazdasági teljesítményre képes, akkor még nincsen probléma. Ha kevesebb gyerek is születik manapság, mint egy évszázaddal korábban, az is elmondható a folyó finanszírozású nyugdíjrendszerek védelmében, hogy ezek a gyerekek „minőségibbek”, jobb és több oktatásban részesültek, így többre is képesek. Ez azonban már egyáltalán nem látszik, ha a ma munkába álló és a pár évtizeddel ezelőtti munkába álló generációkat hasonlítjuk össze. Az oktatás költsége viszont továbbra is drágul, miközben a színvonal nem javul olyan egyértelműen. Ezért kétkedem abban, hogy tartósan fenntartható lehet a csökkenő termékenység mellett az ezt ellensúlyozó járuléktömeg növekedést elérni.

továbbra sem ad választ arra, hogy ki fog gondoskodni az idős emberekről csökkenő gyermekszám esetén.

A problémát azzal lehetne orvosolni, hogy a gyermekvállalást is beszámítjuk a nyugdíjjogosultság megállapításakor. Ez szigorúan véve ma is működik, hiszen valamilyen mértékben a gyermekneveléssel töltött idő is beszámít járulékfizetésnek. Más elméletek viszont azt javasolják, hogy kifejezetten tolódjon el a hangsúly a másik irányba. Azaz olyan nyugdíjrendszert kellene megalkotni, ahol a gyermeket nevelők járnak jobban a nyugdíj szempontjából, hiszen a gyermeknevelés az, amiből a nyugdíj később lesz. Ezen a ponton azonban ismét többfelé ágazik a szakirodalom aszerint, hogy ezt miként kellene megtenni. Értelemszerűen az lenne az ideális, ha a gyermekvállalás semleges döntés lenne a nyugdíjra nézve, ahogy ez a HT rendszerben meg is valósulhat.

A kérdés nehézsége az, hogy a nyugati világ értékrendje szerint a gyermekvállalás személyes döntés. Ezt a tézist meglátásom szerint úgy lehetne átfogalmazni, hogy az a kívánatos, ha minden gyermek meg tudna születni, akit szülei akarnak és képesek is felnevelni, de senkinek sem kellene kötelességből, vagy anyagi kényszerből gyermeket vállalnia. Úgy látom, hogy amíg csak úgy próbálnánk belenyúlni a jelenlegi rendszerbe, hogy a gyermekvállalásért különböző nyugdíj kedvezmények járnak, addig ez a tézis nem sérül, de mégsem tanácsos ezt az utat választani. Ugyanis, ha így teszünk, ez csupán egy családtámogató intézkedés. Elképzelhető, hogy ezzel sem növekedik a gyermekvállalási hajlandóság, ekkor pedig ugyanott tartunk – vannak ugyan ösztönzők, de nem élnek velük. Másrésztől, ha a gyermekvállalás ösztönzése lenne a cél, azt sokkal hatékonyabban lehetne olyan csatornákon keresztül elérni, amiket egyből realizálhat a család. Nincs tehát arany középút: a nyugdíjnak a gyermeknevelésért kell járnia (Banyár 2020b).

Ha elfogadjuk azt a meglátást, hogy a nyugdíj tulajdonképpen a gyermeknevelésért jár, hiszen mostani gyermekek fogják fizetni a jövő nyugdíjait, akkor oda fogunk jutni, hogy a gyermeket nem nevelők nem, vagy gyermeket nevelőkhöz képest alig kapnak nyugdíjat a folyó finanszírozású első pillérből. Úgy látom, hogy sokak számára azért elfogadhatatlan ez a megközelítés, mert a mai rendszerhez képest ezt úgy értelmezik, hogy a gyermeket nem vállalókat bünteti a társadalom, holott épp fordítva van a jelenlegiben. Ezt szemléltesse itt egy egyszerű példa. Képzeljünk csak el egy olyan nyugdíjrendszert, ami abszolút tőkefedezetű: kötelező jellegű, egy közös kasszába begyűjtik a hozzájárulásokat, de a kifizetések ez után úgy történnek, hogy ha valaki gyermeket nevelt, de kereső tevékenységet nem folytatott, azt az időszakot teljes hozzájárulásnak tekintjük; mivel értelemszerűen fizikailag ez a hozzájárulás mégiscsak hiányzik, ezt úgy kompenzáljuk, hogy a többiekéből kipótoljuk. Azt hiszem, ebben az esetben mindenkinek egyértelmű a rendszer méltánytalansága. Ez lenne a fordítottja a mai

folyó finanszírozású rendszernek, ahol a humán tőkéből alaposan profitál az is, aki nem járult hozzá, és jóval kisebb (vagy szélsőséges esetben semmilyen) mértékben az, aki hozzájárult.

Azt tapasztalom, hogy a gyermeknevelés és nyugdíj kapcsolatáról szóló viták szinte kivétel nélkül értékrendinek vélt különbségek miatt szakadnak meg. Aktuárius hallgatóként nem tisztem értékrendi vitában állást foglalni, de meglátásom szerint ennek a vitának a háttérében meghúzódik egy kérdés és az arról formált vélemény nagyban meghatározza azt, hogy ki mit gondol a gyermek szerepéről. Meggyőződésem, hogy az erre a kérdésre adott hibás, vagy részben hibás válasz következménye az, hogy a mai nyugdíjrendszer hiányossága és megalapozatlansága felett szemet hunyunk. A kérdés a következő: Mit tekintünk „befolyásolatlan” gyermekvállalásnak és a nyugdíjrendszer milyen hatást gyakorol erre az állapotra?

Sokan nézik a dolgot onnan, hogy a nyugdíjak bevezetése előtt az emberek akkor is gyermekvállalásra voltak kényszerítve, ha nem akarták ezt, ugyanis különben nagyon nehezen tudtak volna időskorukra gondoskodni magukról. Ebben a felfogásban a társadalombiztosítás adta meg erre válaszként azt a szabadságot, amit a civilizáció eszközeitől általában elvárunk: kevésbé legyünk kiszolgáltatva a természet kénye-kedvének. Így könnyebben dönthetünk szabad belátásunkból, nem kell már csak a nyugdíjért is gyermeket vállalni. Aki gyermeket vállal, az már nem azért teszi, hogy haszna legyen belőle, hanem pusztán a gyermekvállalás örömeért. Az az általános felfogásunk, hogy a gyermek érdeke is ez, de ez is csak egy hiedelem, egy feltevés, amivel mostanában kísérletezünk. Ebben a felfogásban a kérdésre adott válasz az, hogy a gyermekvállalás csak akkor lehet semleges döntés, ha a gyermekre nincs szüksége az egyénnek. Ezt csak úgy érhetjük el, ha gyermekvállalás nélkül is garantáljuk az időskori ellátását – gondolják.

Ez tipikus példája annak, amit fellengzősen értékrendből eredő hozzáállásnak nevezünk és a „main stream” vélekedést ez jellemzi. De a fenti gondolatmenet valójában nem értékrendből, hanem a kérdésre adott hibás válaszból fakad. Elfogadható az a pontja, hogy az egyénnek nincs szüksége arra, hogy saját gyermeke legyen. Ugyanakkor az egyénnek szüksége van a társadalomra (hiszen épp a társadalom biztosítja neki azt, hogy kevésbé legyen kiszolgáltatva a természetnek), a társadalomnak pedig gyermekre. Ebben az értelmezésben a mai rendszerre használni a társadalombiztosítás elnevezést önámítás, mert bár a társadalom biztosítja az egyént, de nincs biztosítva a társadalom folytatólágossága.

A HT rendszernek erre a kérdésre megvan a válasza, pontosabban kínálja azt a választ, ami eddig is adott volt: az időskori gondoskodást a piac már egyre jobban tudja garantálni. Az, aki

nem vállal gyermeket, elegendő pénzt tarthat meg magának, amiből könnyedén vásárolhat életjáradékot, de akár személyes gondoskodást is időskorára⁸.

A másik aggály, ami a HT rendszerrel kapcsolatban sokakban felmerül, hogy úgy gondolják, ezáltal lehetőség nyílik arra, hogy valaki csupán anyagi érdekből vállaljon gyermeket. Az általános felfogás szerint a gyermek érdeke az, ha csak „önmagáért” jön világra⁹. Bár ez a felfogás sem több pusztá hiedelemnél, modern kori dogmánál, senki nem szeretne olyannak tűnni akár más, akár a gyermeke szemében, hogy a szülőség neki anyagi érdeke. Sokan képzelik el azt is, hogy egy ilyen rendszer hatására sorra születnének azok a gyerekek, akikkel végül a szülő nem tud mit kezdeni, mert születésükkor csak a gyermek pozitív anyagi vonzatára gondoltak a szülők. Ez valóban egy olyan pont, ahol érdemes óvatosnak lenni.

Banyár József a HT rendszer megfogalmazásakor is külön kitér arra, hogy – ellentétben sok más, gyermekvállalással kapcsolatos nyugdíjjavaslat megfogalmazójával – a reformnak nem célja a gyermekvállalás ösztönzése. Ha józanul határozzuk meg egy leendő felnőtt által potenciálisan generált járulék értékét, akkor ez kiküszöbölhető. Nem kell ilyen téren túlbecsülni a gyermek értékét, de meg kell adni érte azt, ami jár. Azt egyébként nehezen tudom elképzelni, hogy maguk a születendő gyermekek ebben a rendszerben kárt szenvednének szüleik kapzsiságától. Vajon akinek alapesetben nem sok kedve van a gyermekneveléshez, vállalná-e annak nehézségeit nyugdíjért, ha alternatívaként akár életjáradékot, akár más formájú időskori gondoskodást is vásárolhat magának? Kétségtelen, hogy a gyermeknevelés áldozatos munka. Személy szerint úgy látom, hogy akiknek csak ez a kis „lökés” kell, hogy ez anyagilag is megtérülő legyen, azok nem az ezzel járó munkára finnyásak. Egyszerűen arról van szó, hogy esetükben olyan versenytársak rúgnak labdába a gyermekvállalási kedv ellen, mint az azonnali fogyasztási cikkek. Ha viszont nem állna fenn a lehetőség arra, hogy felelőtlenül elköltsék pénzüket és gondolniuk kéne öregkorukra, biztosan lennének olyanok, akik inkább még egy-két gyermek felnevelését választanák.

Az első tábor tagjai érvelhetnek azzal, hogy aki jobban szeretne autót, mint gyermeket, annak ne is legyen gyereke én azonban közel sem vagyok meggyőződve arról, hogy belőlük rossz szülő lenne. Egyszerűen arról van szó, hogy a szülőség élményét egy gyerekkel is meg lehet élni, de mivel anyagilag nem jó üzlet, jobban fogynak az élvezeti cikkek. Ha egy ilyen

⁸ Lehet eltartási szerződést kötni, amiért a lakás öröklési jogát tudja felajánlani a biztosított. Ma már példa is van arra, hogy ezt cégek szervezik meg életjáradékért cserébe, de önkormányzatok is örömmel vállalják a feladatot, hiszen ők olyan lakásokhoz jutnak, amit aztán ki tudnak adni szolgálati lakásként. Az önkormányzatok akár személyes gondoskodást is tudnak szolgáltatni.

⁹ Ezt a felfogást nem illik vitatni, ugyanakkor azt gondolom, hogy ha az emberektől azt kérnénk, hogy szüleinek fizesse vissza a gyermeknevelés költségeit nyugdíj formájában, az egyáltalán nem keltene felháborodást.

rendszerbe beágyazva magunkat azt tapasztaljuk, hogy az adott feltételek mellett alig születik gyerek, akkor elengedhetetlen mindezt újra gondolni.

Kijelenthetjük tehát, hogy ha a jelenlegi nyugdíjrendszernek köszönhetően esett vissza a gyermekvállalási kedv olyannyira, hogy emellett már maga a nyugdíjrendszer sem fenntartható, akkor függetlenül attól, hogy mit gondolunk a gyermeknevelésről, sürgősen változtatni kell, mert nem csak a nyugdíjrendszer, de a társadalom is károkat szenved ezen feltételek mellett. Ha azonban a nyugdíjrendszer hatása nem jelentős, azaz a meglévő nyugdíjrendszer mellett is „produkálható” a szükséges gyerekszám, akkor az egyéb fékeket kell megtalálni és feloldani. Tehát a kérdés az, hogy milyen hatást gyakorol a nyugdíj ígéret a gyermekvállalásra?

Mivel eddig csak a nyugdíjak szemszögéből vizsgáltuk a gyermekvállalási hajlandóságot, ezért később külön fejezetben foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy mik lehetnek még a mai társadalomra jellemző termékenységi tulajdonságok meghatározói, illetve, hogy egyáltalán meghatározhatók-e ezek.

Előtte viszont szeretném kiemelni a HT javaslatnak egy másik erősségét is. Korábban is említettük, hogy a nyugdíj, mint a civilizáció egy eszköze a természetnek való kiszolgáltatottságunktól szabadít meg. Hans-Werner Sinn megállapítása alapján a nyugdíjnak az lenne a feladata, hogy biztosítson a gyermektelenség és a hálátlan gyermek esete ellen (Sinn 2004). Egy ilyen biztosítás azonban piaci alapon nem megszervezhető, hiszen melyik biztosító tudná kezelni az ebben rejlő morális kockázatot? Bárki kifizethetné a biztosítás díját, majd nyugdíjba vonuláskor azt mondaná, hogy nem sikerült gyermeket hozni a világra, de felvenné a járadékot. (Őket nevezi Sinn „free ridernek”, azaz potyautasnak.) Ráadásul ezt a járadékot olyanoknak kellene kitermelni, akik ebbe bele sem egyeztek! Ironikus, hogy az állam ezt teszi kötelezővé és vállalja a szponzor szerepét. A biztosítási kockázat csak akkor értelmezhető, ha a biztosítottak is törekvése az, hogy a kockázatot elkerülje. Azt sem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy a gyermektelenség elleni kockázatot lehet már kezelni a fejlett tőkepiacoknak köszönhetően.

A HT rendszer viszont a morális kockázatot is kiküszöböli. Csak az lép be ebbe az alrendszerbe, aki szeretne gyermeket nevelni¹⁰. Így a kockázat is módosul kicsit, ami ellen ez biztosít.

¹⁰ Ha a kifejezés valódi értelmében szeretnénk olyan biztosítást alkotni, ami a gyermektelenség kockázata ellen véd, akkor ez vagy az életjáradék/vásárolható időskori ellátás, ahogy azt korábban is említettem, vagy az a fajta kiszervezése a gyermeknevelésnek, amire Banyár József lehetőségként hivatkozik. Lesznek ugyanis olyan anyák, akik annyi gyereket vállalnak és nevelnek, hogy nem tudják saját felnevelésük költségeit megtéríteni. Az ő esetükben pedig nincs szükség minden gyermek járulékfizetésére. Ezt felajánlhatják olyanoknak, akik nem szeretnék gyermeket nevelni, de ki tudják fizetni az anya járulékát is. Ez is értelmezhető a gyermektelenségi biztosítás egy formájának.

Gyermektelenek eleve nem kerülnek be a kockázatközösségbe, hiszen a gyermeket nem akaróknak a gyermektelenség esete nem kockázat. Kockázat viszont a gyerekesek esetében a „hálátlan gyerek”, a „nem elég jól kereső gyerek”¹¹ és tulajdonképpen a gyermekhalandósági kockázatot is el lehet porlasztani a kockázatközösségben már csak elhanyagolhatósága miatt is.

Nyilvánvaló, hogy ez a rendszer kedvező (de méltányos is!) annak, aki gyereket szeretne nevelni. Vizsgáljuk meg azonban azoknak a szemszögéből, akik anyagi javaktól függetlenül nem szeretnék gyereket vállalni. Tekintsük azt a folyó finanszírozású nyugdíjrendszert, amiben a demográfiai és egyéb racionalizálások (például korhatár indexálás) már megtörténtek. Így ez a fajta rendszer tulajdonképpen egy hozzájárulással meghatározott rendszer.¹² Ennek hozamát az úgynevezett „biológiai kamattal”, vagyis a termékenység (Samuelson 1958) és a termelékenység változásaiból (Aaron 1966) fakad. Ez akár negatív is lehet. Ebbe a rendszerbe kötelező belépni, tehát a negatív hozamot mindenki realizálja. Aki nem szeretne gyereket vállalni, annak sem előnyös ez a felállás, hiszen ugyanezt a pénzt be is fektethetné és pozitív hozamot érhetne el rajta. Ehelyett a Banyár-féle nyugdíjrendszerben egy, az állam által megszervezett, de piaci, feltőkésített nyugdíjrendszerbe lépne be, ami tulajdonképpen a Sinn-féle gyermektelenségi biztosítás egy formája. Igaz, hogy felnevelésének költségeit vissza kellene fizetnie egy nyugdíj járadéknyi formában, de ez egy belátható, előre ismerhető tartozás, amit egyszer visszatörleszt, nem úgy, mint a kötelező járulékfizetés, ami egész életpályája során elkíséri. Emellett talán lelkileg is megnyugtatóbb, hogy nem egy olyan befektetéstől kell várnia a hozamot, amit ő nem tud és esetleg nem is akar befolyásolni, nevezetesen, hogy mennyi gyermek születik. A befektetési alapokat legalább meg tudná választani.

Ez a nyugdíjrendszer valóban biztosítási alapon működhetne. Világosan meghatározott kockázatokkal szemben észszerű alapon biztosítana. Természetesen a korábban említett racionalizálásokat itt is fontos végrehajtani: a korhatár indexálást és a hozzájárulással meghatározott juttatást. A demográfiai változásoknak itt nem lenne szerepe, ettől lényegében függetlenül tudna működni a rendszer és ez is a lényege.

¹¹ Kockázat, hogy hiába nevelte fel a szülő pár a gyermeket, az nem keres annyit, hogy eltarthassa, esetleg olyan hivatást szeretne választani, ami nem jövedelmez kellőképpen. Mások pedig épp ellenkezőleg, jóval meghaladják azt a szintet, amit felnevelésük költsége jelent. A javaslatban azonos végzettségű gyermek felneveléséért ugyanakkora nyugdíj járna. Ezzel az a morális kockázat is ki lenne zárva, hogy valaki mellett úgy nő fel a gyermek, hogy nincs mögötte érdemi munka, ami többnyire mérhető azzal, hogy érettségiig sem jut el. Tehát egy felnevelt gyermek az érettségi szintet elért gyermeket jelenti.

¹² Szemben a sok országban, mint Magyarországon is, még mindig működő, szolgáltatással meghatározott nyugdíjrendszerekkel. Eredetileg Samuelson is a hozzájárulással meghatározott, racionális folyó finanszírozású rendszernek adta meg a modelljét híres tanulmányában (Samuelson 1958). Ekkorra már több országban működött a szolgáltatással meghatározott rendszer.

A korábban említett, látszólag értékrendi felfogással ez a rendszer ellentétben áll, nevezetesen, hogy sokakat az zavar, hogy egy gyermeknek már születésekor kötelezettsége indul. Ezt az aggályt azonban két érveléssel is el lehet oszlatni. Egyrészt, ha az egész életpályáját nézzük egy átlagembernek – azaz tulajdonképpen egy generációnak –, akkor az életpályának pénz áramlásai nullára zárnak (feltéve, hogy a paraméterek jól vannak megválasztva, de ez már „részletkérdés”). Tehát a rendszer nem lop meg senkit, méltányos.

Másrészt, az az első hallásra csúnyán hangzó állítás, hogy az újszülöttre azt mondjuk, hogy már tartozása van, egy téves felfogás. Ha számviteli alapon számszerűsítjük és mutatnánk ki ezt a tartozást, akkor a „Projected Unit Credit Method”, vagy magyarul a kivetített jóváírási egység módszere lenne a kézenfekvő eszköz. Ebben az értelmezésben az újszülött tartozása nulla. Az egy éves gyermek tartozása az egy éves felnevelési költség és így tovább, de a tartozást csak felnőttként kell törleszteni. Azt is szeretném újra hangsúlyozni, hogy nem bölcs dolog erre erkölcsi kérdésként gondolni, mint ahogy számos olyan része van az életnek, ami egyszerűen tény és józan dolog azt elfogadni – ilyenek tartom azt is, hogy a társadalomnak szüksége van új gyerekekre, aki, ha felnőtt, képes legyen felelősséget vállalni.

Végül soron tehát a felnőtt emberre tekintünk úgy, hogy adósságot törleszt. Őt miért ne kérhetnénk meg arra, hogy térítse meg azt az értéket, amit ő kapott neveltetése során? Ezt eleve csak akkor fizetné, ha dolgozik, ha pedig dolgozik, az azt is jelenti, hogy részesült olyan neveltetésben, ami erre képessé tette.

4 A demográfiai átmenetek és a termékenységet befolyásoló tényezők

A mai termékenység csökkenéséről szóló beszélgetések, eszmefuttatások háttérében azt tapasztalom, hogy mindig meghúzódik egy gondolat, ami a következőképpen fogalmazható meg: A termékenység régen azért magas volt mindenhol, mert az emberek nem tudták, vagy nem engedhették meg maguknak, vagy nem is akarták szabályozni a születések számát. Ahogy egyre nagyobb jólétre tettünk szert, ez megváltozott, de ahol még nem változtak meg a körülmények, ott továbbra is a magas termékenység jellemző.

Erre szoktak úgy hivatkozni, mint a demográfiai átmenet elmélet. Természetesen, ahogy én az előbb leegyszerűsítettem, legfeljebb csak jelenségnek nevezhető. Azonban azért is volt szükség arra, hogy olyan általánosan fogalmazzak, hogy annak a nyilvánvalón túl ne legyen sok információ tartalma, mert bármilyen átmenetelmélettel kapcsolatos olvasmányom során azt láttam, hogy jóformán semmit sem tudunk róla biztosan. A kutatók véleménye már abban eltér, hogy milyen fázisokra lehet osztani az átmenet folyamatát. A felosztás szorosan kapcsolódik ahhoz a kérdéshez, hogy miket tekintünk az átmenetet meghatározó tényezőknak. Ezen a téren tudunk azonosítani számtalan okot, de továbbra sincs egyetértés abban, hogy melyik mennyire meghatározó, mennyire általános, de még csak azt sem, hogy mennyire tekinthető állandónak.

A demográfiai átmenetek elmélete a fent megfogalmazott jelenség kapcsán három kérdésre szeretne választ adni.

1. Miért volt a hagyományosnak nevezett társadalmakban a termékenység szintje olyan magas?
2. Mi volt az oka annak, hogy elindult az átmenet a korábbi egyensúlyi helyzetből a mai felé?
3. Miért marad a termékenység a mai társadalmakban ilyen alacsony szinten?

A kérdés gyakorlati szempontból nagyon is fontos. Egyrészt mondhatni globális érdek, hogy a szubszaharai Afrika túlnépesedését minél rövidebb időtávon le tudjuk lassítani¹³. A legtöbb elemzés szerint ebben a térségben lesznek a globális klímaváltozás következményei a legsúlyosabbak, ami óriási migrációs nyomást helyez Európára (már évek óta). Másrészről nem

¹³ Bővebben: <https://folyoirat.ludovika.hu/index.php/eumirror/article/view/4500> vagy https://makronom.mandiner.hu/cikk/20180318_banyar_jozsef_nemeth_gyorgy_a_tulnepesedo_afrika

kis részben az ottani túlnépesedés lehet oka is a környezetpusztításnak. Ha jól ismerjük az első két kérdésre a választ, az hozzásegíthet minket az ottani probléma megoldásához.

A szakdolgozat témáját tekintve relevánsabb a harmadik kérdés. Azt hiszem, sokan még magát a kérdésfelvetés módját is kritizálnák, talán jogosan, hiszen az tényként magában foglalja, hogy a termékenység szintje alacsony marad, holott nincs arra kézzel fogható bizonyíték, hogy ez nem fog „magától” változni. Ha viszont mélyebben ismerjük az okokat, vagy van reményünk azt megismerni, az olyan eszközöket adhat döntéshozók kezébe, amelyekkel kezelni lehetne a népesedési dinamikát.

Már a fejezet elején szeretném kifejezni kétségemet afelől, hogy ezekre egzakt, használható választ kapjunk. Mégis, azt gondolom, hogy a fenti kérdésekhez való hozzáállás nagyban meghatározza a gondolkodásmódunkat a nyugdíjakat illetően is és túl sok téves elképzelés él a köztudatban, amit szeretnék eloszlatni. (Nem egy tévhitet bennem is a szakdolgozattal kapcsolatos munka oszlatott el.)

A témát legtöbbször úgy dolgozzák fel, hogy sorra egy-egy elmélet alapján, egy adott szemszögből mutatják be a demográfiai átmenet szakirodalmát. Erre tömör és hasznos példa (Szentgáli 1991). Ehelyett inkább azt választottam, hogy három stádiumra bontom a témát: átmenet előtti, átmeneti és átmenet utáni állapot. A dolgozat témája kapcsán ugyanis nem maga a demográfiai átmenetek elmélete a lényeges, hanem a fent leírtak, miszerint tudunk-e valamit mondani a termékenységet befolyásoló tényezőkről.

4.1 A hagyományos társadalmak termékenysége

A 20. század előtti társadalmakat hajlamosak vagyunk úgy beállítani, hogy ők még túlságosan ki voltak téve a természet erőinek és modern orvostudomány és technológia híján nem volt lehetőségük arra, hogy a születések számát kontrollálni tudják. A születésszabályozás csak a fogamzásgátló tabletták megjelenésével, a második világháború után terjedhetett el. Éppen ezért a születésszám régen azért kellett, hogy magas legyen, mert nem volt eszköz arra, hogy ez máshogy történjen.

A demográfiai és szociológiai szakirodalomban már évtizedek óta nem kérdezi vita tárgyát, hogy kellően hatékony születésszabályozásra már évszázadokkal ez előtt is képesek voltak társadalmi szinten is¹⁴. Elsősorban a vallási tabukat, népi szokásokat, mint a szoptatás hosszának kitolását, így a következő terhesség késleltetését szokták említeni, de ide tartozik a

¹⁴ Talán az első cikk (Carlsson 1966) volt a témában.

házasságkötés késleltetése is¹⁵. Magyarországon is jelen volt már a 19. században is az „egykezés”, amelynek során a rációk gyakorlatilag „kihaltak”¹⁶. A fogamzásgátló technikák hiányát tehát már az elején kizárhatjuk. Ezek széles körben propagáltak és terjesztik őket a mai szubszaharai Afrikában is, de mégsem élnek vele. Kétségtelen, hogy ezek modernizációja megkönnyítette és ezáltal talán fel is gyorsította a népességcsökkenést, de pusztán ez az innováció még nagyon kevés ahhoz, hogy a termékenység csökkenésnek induljon.

A másik közkeletű elképzelés az, hogy régen olyan mértékű volt a halandóság, hogy muszáj volt sok gyereket szülni, hiszen nem tudhatta az ember, hogy közülük mennyi marad majd életben. Ezt szokás a kereslet-kínálat elvének is nevezni. Magától értetődő, hogy a kínálatot a termékenység és a halandóság eredője adja. A kereslet pedig, ha hosszú távon gondolkozunk, a társadalom fenntartása és folytatóságossága. Tehát magas halandóság mellett értelemszerűen magas születésszám szükséges. A javuló jólét, higiénia és orvostudomány fejlődése azzal járt, hogy nagy mértékben csökkent a halandóság. Ez ráadásul először a csecsemőhalandóság javulásában mutatkozott. A születések száma ezt a változást egy ütemmel később és fokozatosabban követte le. Ezért ebben a fázisban a népesség dinamikusán nőtt. A várható élettartam is növekszik, tehát a hirtelen növekedésnek a lecsengése is hosszúra nyúlik és ennek a folyamatnak a vége felé járunk ma a fejlett országokat tekintve. Ebben a keretrendszerben gondolkodva természetesen adódik az is, hogy milyen fázisokra tagoljuk az átmenetet és első hallásra logikus magyarázatot ad az egész folyamatra.

Amilyen csábító az elmélet, olyan sok ellenpélda kínálkozik rá. Számos ország esetében a halandóság és termékenység csökkenése egyszerre következett be, sőt, nem egy példa van rá, hogy a születésszám esése megelőzte a halandóság javulását (Scheubel 2013, Cummins 2009). Az elgondolás abból a szempontból is gyenge lábakon áll, hogy nem magyarázza az átmenet előtti és utáni állapot közötti sokkal lényegesebb különbséget, azt, hogy előbbiben a kereslet a reprodukciós szint felett volt, míg utóbbiban jóval alatta. Tehát még ha igaz is az elmélet, akkor is kellett volna valaminek történnie az átmenet alatt, ami megváltoztatta az elgondolást arról, hogy mennyi gyereket szeretnének a mai modern társadalmak.

Ezek azok a kételyek, amik afelé vezetnek a kérdéssről gondolkodókat, hogy nagyobb jelentőséget tulajdonítsanak gazdasági, társadalmi és kulturális változásoknak, amik ennek az elméletnek az „elhanyagolható hibatagjába” kerültek. Ezt a képet tovább árnyalta valamivel (Easterlin 1975). Ő a termékenységet három tényezőre bontotta: gyerekek potenciális száma, gyerekek iránti kereslet és születésszabályozás költségei. Ezután kiválasztott néhány olyan

¹⁵ Sok európai országban törvényileg akkora vagyonhoz kötötték a házasságkötést, hogy azt a vagyont egy férfi csak 25-30 éves korára érte el.

¹⁶ <https://hu.wikipedia.org/wiki/Egyk%C3%A9z%C3%A9s>

paramétert, amik jellemzik a gazdaság fejlődését és a társadalom modernizációt, majd a termékenységet meghatározó tényezők ezekről való függését vizsgálta. Ezek azonban arra nem derítenek fényt, hogy a hagyományos társadalmakban mi szabályozta a termékenység szintjét (Szentgáli 1991). Márpedig a születésszabályozás jelen volt már korábban is, ahogy azt már említettük. A mi szempontunkból pedig nem is annyira az lényeges, hogy egyik – nagyjából – egyensúlyi állapotból hogyan és miért kerültünk a másikba, hanem az, hogy ez a mai állapot miért került a reprodukciós szint alá.

A hagyományos társadalmak termékenységét illetően népszerű elképzelés az is, amire a homeosztatisz mechanizmusként szoktak hivatkozni (Szentgáli 1991). Az elmélet atyja Ron Lesthaege. A hagyományos társadalmak népesedési dinamikájában látott egyfajta önszabályozást is (Lesthaege 1980), ami akár társadalmi, akár természeti folyamatokon keresztül úgy szabályozta a népesedési dinamikát, hogy az a természeti erőforrásokkal összhangban legyen. A régi társadalmakban, ahol a feudalizmus kisebb, vagy nagyobb mértékben élteben volt egy ilyen szabályozó tényező volt a birtokolható föld mennyisége. Túl sok örökös születése esetén ez elaprózódott és a család elszegényedéséhez vezethetett. Biológiában is populációk szaporodását szokás az

$$\dot{x}(t) = c \cdot x(t) \cdot (1 - h(x))$$

dinamikai rendszerrel modellezni, ahol a h függvény magában foglal olyan változókat, mint a természeti erőforrások elhasználása, vagy a természet önszabályozása. (Például egy nyúlpopuláció esetében, ha sok a nyúl, a farkasok is el tudnak szaporodni, hiszen könnyebben és több táplálékhoz jutnak. Ha viszont a farkasok elszaporodnak, az később vissza szabályozza a nyúlpopulációt stb.) Egy ilyen önszabályozó hatást nagyon nehéz lenne kiszűrni egy-egy társadalom tanulmányozásakor és emiatt is nehéz összehasonlítani két különböző társadalom népesedési mintáit.

A fenti gondolatmenetekben közös, hogy mindegyik egészében próbálja magyarázni a társadalom viselkedését. A szakirodalomba – talán elsőként – Caldwell vezette be azt az elgondolást, hogy mikroszinten, a családi szerkezetek szintjén kellene nézni a változásokat. Caldwell is kitért arra mellett a feltevés mellett, hogy a gyermekvállalás racionális döntés és a szülők, vagy potenciális szülők, ha nem is tudatosan, de mérlegelik a gyermekvállalás hasznosságát.

Már a nyugdíjak bemutatásánál is kitértünk rá valamilyen szinten, hogy az átmenet előtti társadalmakat a mezőgazdaságból élő, a leglényegibb szükségleteket tekintve önellátó családi gazdaságok jellemezték (a családi gazdaságot tágabban értjük, horizontális rokoni kapcsolatokat is beleértve). A felnevelt gyerek már egészen kiskorától kezdve „hasznosítható”

volt, ráadásul fogyasztása elenyésző. Caldwell is megjegyzi, hogy a szülő időskori ellátásának garanciája volt a gyerek, de ennek jelentőségét nem emeli ki annyira, mint ahogy korábbi fejezetekben tettem. Caldwell arra helyezi a hangsúlyt, hogy a termékenység egészen addig marad magas a hagyományos társadalmakban, amíg a vagyonáramlás fölfelé, a családfő felé történik. Ezért elméletét vagyonáramlás elméletnek nevezték el. Szentgáli Tamás értelmezésében ez egy gyakorlatilag kizsákmányoló, patriarchális rendszer, melyben a családfő kevesebbet dolgozik és nagyobb részben részesül az anyagi javakból, mint a család többi tagja (Szentgáli 1991). Továbbá érvényesíteni tudja érdekeit a többiekkel szemben, hiszen ő rendelkezik a föld tulajdonjogával. Szerinte a születésszabályozás hiánya nem a tudatlanságra vagy vallásos meggyőződésekre és szokásokra vezethető vissza, hanem arra, hogy a döntéshozók (azaz a családfők) kellő befolyással rendelkeztek arra, hogy a család sorsát irányítsák. Mivel érdekük az volt, hogy minél több gyermek szülessen, hiszen a vagyonáramlás iránya a fiatalabb generációk felől az idősek felé történt, ez magyarázza a magas termékenységet.

Ilyen formában kimondva ezt túlzásnak tartom. Egyrészt nem tudok olyan kutatásról, ami a családi javak megoszlásának egyenlőtlenségét és a családfő abszolút hatalmát kimutatta volna. Másrészt a sok gyerek egyáltalán nem volt garanciája a nagyobb jólétnek régen sem. Tény azonban, hogy a gyermeknevelés a költségeihez képest jó üzlet volt.

A vagyonáramlás elméletét azért is nehéz igazolni, mert a 19. századi és az előtti társadalmak messze nem voltak olyan homogének, mint a maiak. A feudális, illetve fél-feudális rendszerben különböző társadalmi rétegek különböző családi struktúrákkal rendelkeztek. A családi gazdaságból élő parasztság vagy jobbágyság mellett jelen volt a szintén nem homogén polgári réteg. Később elsősorban az előbbiekből alakult ki a „munkásosztály” és ott volt a megint csak másképp működő arisztokrácia is. Egy átfogó elemzéshez el kellene választani ezek gyermekvállalással kapcsolatos viselkedését. Ilyen és ehhez hasonló kérdések miatt lett a történeti demográfia egy szinte külön tudományág.

Annyi bizonyos, hogy a 19. század végén és 20. század elején ezek a társadalmi osztályok egyre inkább elkezdtek átrendeződni, összemosódni szerte Európában. Ekkorra már a termékenység szinte mindenhol érzékelhetően csökkent. Ezzel a folyamattal párhuzamosan zajlott az iparosodás és modernizáció egyre gyorsuló ütemben. Hogy ennek melyik komponense volt az, ami elindította az átmenetet, az egyelőre vita tárgyát képezi, de az átmeneti folyamat sajátosságait még meg lehet fogalmazni.

4.2 Az átmenet folyamata

Ansley Coale, talán az egyik legnevesebb demográfus központi témája volt a termékenység vizsgálata és az ezzel kapcsolatos társadalmi viselkedés megváltozása. Véleménye szerint három tényező szükséges ahhoz, hogy egy társadalom elkezdje csökkenteni a születések számát:

1. „A termékenység a házaspárok tudatos döntésének (választásának) az eredménye kell, hogy legyen. Ez azt jelenti, hogy a párok mérlegelik a gyermekszülés előnyeit és hátrányait és ezek alapján döntenek a gyermekvállalásról. Fontos dolog, hogy ez a mérlegelés a társadalom által elfogadott, vagyis az egyén környezete ezt nem tartja immorálisnak.
2. A termékenység korlátozása előnyös kell, hogy legyen. Az adott társadalmi és gazdasági viszonyok között az egyének úgy érzik, hogy számukra előnyös az, ha tudatosan korlátozzák a termékenységüket.
3. A születéskorlátozáshoz hatékony eszközök álljanak a párok rendelkezésére. A fogamzásgátló szerek és módszerek ismerete szükséges, valamint az, hogy a házastársak közötti párbeszéd kiterjedjen a szexuális élet kérdéseire is, és meg legyen bennük az akarat a fogamzásgátlásra.” (Szentgáli 1991:23)

A harmadik pontról amellet érveltem, hogy ez Európában adott volt jóval régebb óta, mint azt általában gondoljuk. Az első két pontnál Coale is lényegében a racionális döntéshozatal szükséges körülményeit írja le. Az első pont teljesülése vitatott az átmenet előtti társadalmakban. Az imént ismertetett Caldwell féle elméletben ez nem teljesül, hiszen szerinte a családfő az, aki döntési helyzetben van és nem a házaspár. A (férfi) családfőnek érdekében áll a gyermekvállalás és akarata erősebb a házastársáénál. Erre bizonyíték egyrészt nincs. Másrészt rövidebb időszakokra viszont vannak példák születésszabályozásra az átmenet előtt is, csak ezek nem voltak tartósak. Tehát ésszerű feltevés az, hogy a gyermekvállalás előnyössége az, ami megváltozott. Eddig a pontig egyet tudok érteni Caldwell vagyónáramlási hipotézisével. A nyugdíj és gyermeknevelés kapcsolatának vizsgálatánál is erről volt szó, illetve Banyár József is erre hivatkozik munkáiban.

Azzal ugyanis, hogy egyre több alternatíva nyílt meg az emberek előtt, egyre többen kikerültek a család kockázatosztó rendszeréből. A folyamat az iparosodással kezdődhetett. Ahogy a kiszámítható, de alacsony színvonalú termelés legyőzte a céhes ipart, a gazdasági rendszer is átforgalmódott. Egyre többen hagytak fel a mezőgazdasággal és elindult az urbanizáció. A gyermek nem volt felnőttkorára a szüleihez kötve. Azt, hogy a probléma náluk jelentkezett először, jól tükrözi az, hogy a társadalombiztosítási rendszereket szinte mindenhol elsőként a

munkásrétegre vezették be. Ez a családi kapcsolatokat hivatott helyettesíteni, bár ezt akkor sem ismerték fel.

Rövid távon a gyermekvállalás már egyre kevésbé vált előnyössé. A városban már nem volt magától értetődő az ellátása sem, de a munkavégző képessége is kevésbé volt kihasználható. Ráadásul a gyermekkel töltött időnek is korlátot szabott a munkaidő. Hosszú távon pedig nem volt garantálható a „megtérülés”, hiszen a családi kötelék is egyre gyengült.

Jó kérdés, hogy hova érdemes tenni egy-egy ország esetében az átmenet végét. Nehéz határt szabni Európa esetében a különböző fázisoknak, hiszen a két világháború, köztük pedig a nagy gazdasági világválság nem teszik könnyen értékelhetővé a helyzetet ebből a szempontból. Többnyire úgy szoktak érvelni, hogy a társadalmi, gazdasági folyamatok átrendeződése és beállása a második világháború után véglegesült. Véleményem szerint az 1970-es évek környékére érdemes tenni az átmenet végét, ugyanis ekkorra már széleskörű volt a nők jelenléte a munkaerőpiac legtöbb szegmensében, illetve ekkorra tudott elhelyezkedni az világháború utáni első nagyobb diplomás női generáció.

A nők oktatáshoz való hozzáférése és női egyenjogúság elfogadásával általában tapasztalható a termékenység visszaesése is, hiszen ez egyszerre késlelteti is a termékeny időszak megkezdését, másrészt alternatívákat is ad a nőknek. Elsősorban erre a tényezőre visszavezetni a termékenységi mutatók csökkenését megint csak túlzó általánosítás. Évtizedek óta a Skandináv országoké az egyik legmagasabb termékenység Európában, akik különösen híresek arról, hogy a nők egyenjogúságát támogatják. Elképzelhető, hogy ez is egy olyan jelenség, ami U alakú folyamatként jelenik meg: ahogy erősödnek a női szabadságjogok először csökken a termékenység, majd miután sikerült kitaposni és elmélyíteni ezeket, újra növekedésnek indul. Erre az elméletre sem tudok azonban alátámasztásról.

4.3 Hol tartunk ma?

Ma, az átmenet utáni társadalmakban azt tapasztalhatjuk, hogy a tényezők jelenléte, amelyek vélhetően hol jobban, hol kevésbé hatottak a termékenységre, nem szűntek meg, sőt, fel is erősödtek. A gyermeknevelés költsége egyre jobban emelkedik. A gyermeket nevelők felé is egyre nagyobb az elvárás. Ennek egyik komponense a társadalmi tényező. Sorra jelennek meg a szakkönyvek arról, hogy miként is kell ezt csinálni és hányféleképpen lehet elrontani, ezáltal egyre nagyobb nyomás nehezedik arra, aki gyermeket vállal. A másik komponens az, hogy a világ is egyre bonyolultabb és a biztos megélhetéshez jó háttér és megfelelő oktatás szükséges. Tehát általánosságban növekszik az elvárás a szülők felé, miközben a gyermek racionális haszna szinte nulla az egyén számára.

A női egyenjogúság kiharcolásának is lett egy szomorú mellékterméke. Azáltal, hogy megjelentek a munkaerőpiacon – és azzal együtt, hogy ez egy örvendetes és üdvös eredmény – megduplázódott a munkaerőkínálat. Részben ez is gyakorolhatott hatást a bérekre. Sokan észrevették (például Eric Weinstein), hogy az 1970-es évektől az USA-ban a bérek lényegében azóta is azonos színvonalon vannak, míg a gazdaság azóta is emelkedik. Nem vagyok biztos benne, hogy a nők munkába állására vezethető vissza a folyamat, de közre játszhat benne¹⁷. Annyi bizonyos, és a jelenségnek ezt a részét szeretném kiemelni, hogy ma egy család megélhetése kétkeresős modellre állt be, míg régen a piac úgy kalibrálta a munka árát, hogy elsősorban egy felnőtt feladata volt, hogy a család megélhetését biztosítsa. Ma ehhez két ember kell. Ez mindenekelőtt az időt veszi el a gyermekneveléstől.

Emellett Keynes ismert, de beteljesületlen jóslata ellenére, miszerint a munkaidő a gazdasági növekedéssel csökkenhet, még mindig nagyon sok a munkaidő. Ez is elveszi a gyerekneveléstől az időt, energiát (Banyár 2020c).

A probléma tehát nagyon összetett és nagyon sokrétű. Nagyon naivnak tűnik az a remény, hogy véges sok tényezőre bontható az egyének családtervezésre vonatkozó viselkedése. Az kijelenthető, hogy sok hely van javításra azzal kapcsolatban, hogy élhetőbb családi élet lehetőségét érzük el a fejlett országokban. Mindemellett méltatlan lenne nem elismerni, hogy tulajdonképpen soha nem látott szintű az a jólét, amit ma tapasztalunk Európában, Amerikában és még számos fejlett országban.

¹⁷ Másik magyarázat a jelenségre lehet az, hogy bár nem emelkedtek a bérek, de az életszínvonal igen, mégpedig azon keresztül, hogy a cégek egyre jobb szolgáltatásokat egyre olcsóbban adnak (például kommunikáció, internet, szórakoztatási termékek).

5 Termékenységi mutatók

Hírekből megszoktuk, hogy a termékenységet, a gyerekszületések számát egy mutatóban kapjuk meg, de ennek értelmezése nem is olyan egyszerű. Amikor azt próbáljuk megmondani, hogy egy átlagos nő hány gyermeknek hoz világra élete során, akkor egy nagyjából 30 éves időintervallumról beszélünk. Ha csak azokat a nőket vesszük figyelembe az arányszám kiszámítása során, akik már túl vannak ezen az időszakon (Completed Fertility Ratio), akkor az ezen adatból nyert arányszám aligha fogja reprezentálni a fiatal nőket. A másik megközelítés, hogy minden korcsoportban megnézzük az átlagos gyerekszületések számát, majd ezeket adjuk össze (Total Fertility Ratio). Ekkor pedig azt tapasztaljuk, hogy gyakorlatilag nincs olyan korosztály, akik teljes mértékben reprezentálva vannak ebben a mutatóban, hiszen mindenkit csupán az adott naptári évben vettünk figyelembe.

Ezen a ponton megjelenik a demográfusok egyik legnagyobb dilemmája: a társadalomnak egy időszakra vonatkozó jellemzőit szeretnénk mérni, vagy egy kohorsz viselkedését? Milyen viszony van a kettő között? Ez alapján megkülönböztethetünk időszakos és kohorsz mutatókat.

Fontos azt is tudatosítani, hogy egy mutatótól mit várunk el. Egy adott társadalomra vonatkozó konkrét kérdéseket szeretnénk megválaszolni vele (például, hogy reprodukálja-e magát a népesség), vagy csak össze akarunk hasonlítani két régiót, társadalmat? Előrejelzésre akarjuk használni, vagy két időszakot szeretnénk összehasonlítani és elemezni?

A továbbiakban a leggyakrabban használt termékenységi rátákat és értelmezésüket mutatom be röviden. A népszerűbb és a szakirodalomban leggyakrabban előforduló mutatókra később az angol nevük rövidítéseként fogok hivatkozni (így például a korszpecifikus termékenységi arányszám az angol „Age-Specific Fertility Ratio” kifejezés alapján ASFR-ként lesz rövidítve).

5.1 Időszaki mutatók

5.1.1 Nyers születési ráta

A nyers születési ráta azt mutatja meg, hogy az adott időszakban hány gyerek született 1000 lakosra vetítve. A képlet a következő:

$$\frac{\text{élve születések száma}}{\text{lakosság létszáma}} \cdot 1000$$

ahol a számláló és a nevező is egy időszakra vonatkozik, leggyakrabban egy naptári évre.

Ennek a mutatónak nagy gyengéje, hogy érzékeny a társadalom kor-összetételére. Emiatt összehasonlításra nem alkalmas.

Mindez azért van, mert itt a nevező az egész népességet tartalmazza, tehát azokat is, akik nincsenek kitéve a gyerekszülés kockázatának. A ráta azt mutatja, hogy az egész lakosság hány gyermeket produkál, nem azt, hogy azok, akik képesek gyereket szülni milyen arányban teszik ezt. A következő arányszám ezt a problémát igyekszik orvosolni.

5.1.2 Általános termékenységi ráta

Az általános termékenységi ráta már csak azokat veszi bele a nevezőbe, akiknél a gyerekszülés eseménye felmerülhet, tehát a reprodukciós korú nőket. Ez a demográfusok körében a 15-49 év közöttiek. A számláló és nevező itt is tipikusan egy évre vonatkozik.

$$\frac{\text{élve születések száma}}{15 - 49 \text{ éves nők száma}} \cdot 1000$$

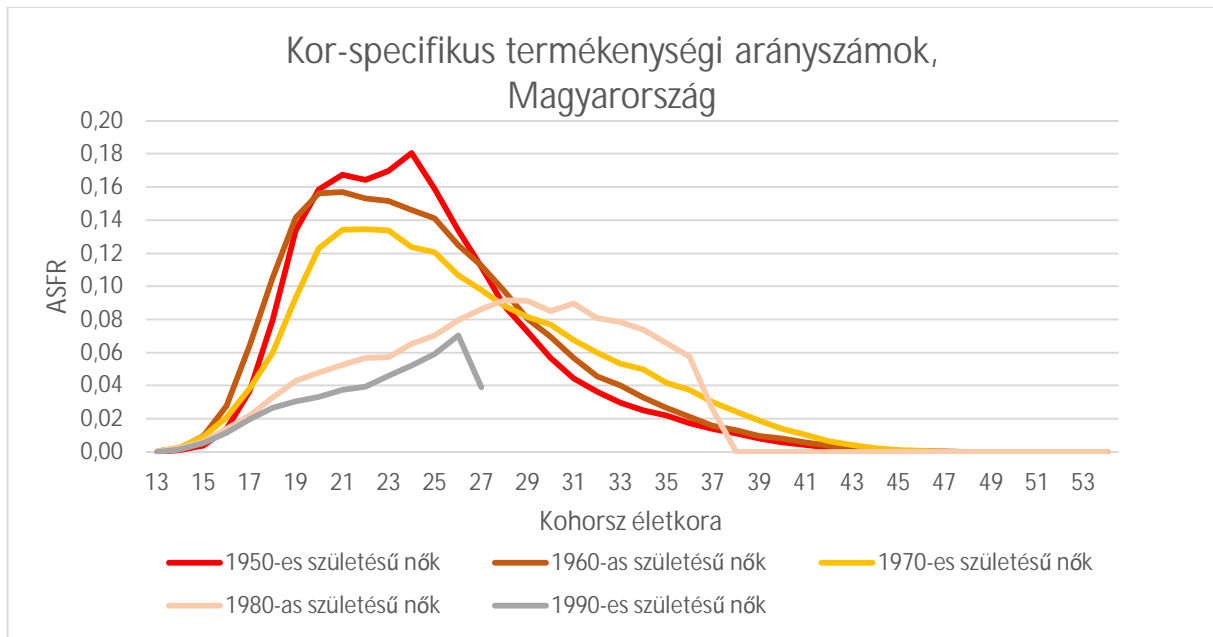
Ez a mutató már jobban alkalmazható országok közti összehasonlításra. Fontos hangsúlyozni azt is, hogy időszakot reprezentáló mutatóként ez is csupán egy adott idő (általában egy naptári év) alatt született gyerekek számát arányosítja. Ugyanakkor nem szabad összekeverni azzal az értelmezéssel, hogy egy nő egy év alatt átlagosan ennyi gyermeket szül. Bizonyos kohorszok lehet, hogy éppen abban az adott időszakban vállalják a legtöbb gyermeket, míg más kohorszok hozzájuk képest előrehozzák a gyermekvállalást, így megugrik a mutató értéke. Később pedig visszaesik, de ez mégsem jelenti a népesség csökkenését.

5.1.3 Korszpecifikus termékenységi arányszám (Age-Specific Fertility Ratio – ASFR)

Ez a mutató egy – általában 5 éves – kohorszra vetítve mutatja meg az élve születések arányát. Általában a 15-19 éves korcsoport az első és 45-49 éves az utolsó, amelyre ezt ki szokták számolni. Azonban, ha pontosabb modelleket szeretnénk, akkor érdemes egy éves kohorszokkal számolni. Később elsősorban ezek modellezését és előrejelzését vesszük górcső alá.

Az ASFR betekintést nyújt egy társadalom gyermekszülési hajlandóságába mind mennyiségi, mind ütemezési szempontból. Általában számíthatunk arra, hogy ha egy korcsoport ASFR-jét ábrázoljuk életkoruk szerint, akkor egy konkáv görbét kapunk. Ebből leolvasható, hogy milyen ütemezésben, hány gyereknek ad életet átlagosan egy korcsoportbeli anya. Napjainkban szinte bármelyik ország ASFR-jét megnézzük különböző kohorszokra, akkor egyre laposabb és elnyújtottabb grafikonok tartoznak a felnövekedő generációkhoz. Ez azt jelenti, hogy az adott országban egyrészt kitolják a gyermekvállalás időpontját (a maximum jobbra tolódik), másrészt kevesebb gyermeket is vállalnak (alacsonyabb a görbe). Az elsőből értelemszerűen következik a második is: általánosságban elmondható, hogy ha később kezd bele egy pár a „gyermek-projektbe”, a gyermekáldás esélye ettől nőni nem fog, de csökkenni csökkenhet.

Ezeket a trendeket (késleltetés és csökkenés) mutatja Magyarországi adatokon az 2. ábra. Bár későbbi életkorokban egyre több szülés történik, ez alulmarad ahhoz képest, amit az idősebb generációk produkáltak a fiatalabb éveikben.

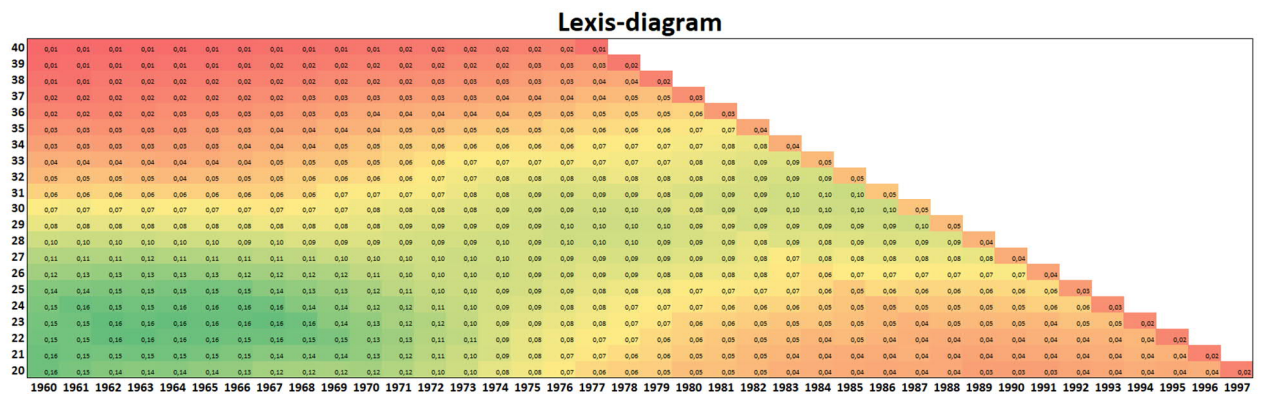


2. ábra Magyarország korszpecifikus termékenységi arányszámai különböző generációkra 2017-es adatok alapján. Forrás: Human Fertility Database.

Értelemszerűen, mint azt az 1990-es születésű nők esetében láthatjuk, az ASFR nem áll rendelkezésre minden kohorszra. Az előbb említett kohorsz 2017-ben még nem több, mint 27 éves, így nem tudhatjuk, hogy fog alakulni a gyerekszülési hajlandóságuk. A későbbiekben azzal fogunk foglalkozni, hogy épp ezekre adjunk becslést, előrejelzést, azaz a görbét a korábbi trendek alapján meghosszabbítsuk.

Egy másik szemléletes lehetőség a korszpecifikus termékenységi ráták szemléltetésére a Lexis-diagram. Ez kohorszanként mutatja be a ráták egymáshoz képesti alakulását. Előnye az előbbi ábrázolási móddal szemben, hogy itt meg jobban kirajzolódnak a trendek. A Lexis-diagram olyan táblázat, amelynek oszlopai az adott kohorsz korszpecifikus rátái, a sorai pedig az adott életkorhoz tartozó ráták idősorai a naptári éveken keresztül.

A 3. ábra Magyarország Lexis-diagramját mutatja be 1960-tól kezdve 2017-es adatok alapján. Az 1970-es évektől kezdve megfigyelhető egy egyre halványodó, átlósan felfelé húzódó zöld sáv, ami pontosan a fent már megfogalmazott késleltetést és mennyiségi csökkenést mutatja a születésekben.



3. ábra Lexis-diagram az 1960 és 1997 között született nők ASFR-jéről, 20 és 40 éves kor között, Magyarország 2017-es adatai alapján. A zöld mezők magasabb termékenységet reprezentálnak. Forrás: Human Fertility Database.

Itt is cenzorált adatokról van szó. Mivel adatbázisunk a 2017-es adatok alapján készült, ezért az 1997-es születésű 20 év fölöttiek rátáját még nem ismerjük. Az ábra alapján azonban már körvonalazódhat egy intuitív megközelítés a ráták becslésére, amelyet később majd ki is fejtünk: meg lehetne-e fogalmazni matematikailag egy olyan modellt, amely a múltban megfigyelt trendeket folytatja, azaz folytatólagosan „színezi ki” azokat a mezőket, amelyekre még nem áll adat rendelkezésre?

A Lexis-diagram kifejezést akkor fogjuk használni, amikor kifejezetten az adatok szemléltetésére gondolunk. Későbbi fejezetekben azonban nem a „színes ábrát” értjük majd alatta, hanem azt a mátrixot, amelynek elemei a különböző kohorszok ASFR-jei. Erre az esetre találóbbr a Lexis-felület elnevezés. Később látni fogjuk, hogy mátrixként kezelve ezt az adathalmazt számos szemléletes tulajdonságot megfogalmazhatunk matematikailag. Ekkor az oszlopok jellemzik az adott kohorsz gyerekszülési ütemezését, a sorok pedig az adott életkorra jellemző ASFR idősort jellemzik.

5.1.4 Teljes termékenységi arányszám (Total Fertility Ratio – TFR)

A teljes termékenységi arányszám kísérletet tesz arra, amit a fejezet bevezetésében előre bocsátottunk: megpróbálja egyetlen mutatóban reprezentálni a termékenység mértékét. A képlet a következő:

$$TFR = \sum_{t=15} ASFR_t$$

Mivel az ASFR-t gyakran 5 éves kohorszokra állapítják meg, nem pedig egy éves korcsoportokra, ezért a képlet a gyakorlatban a következőképpen is elő szokott fordulni:

$$TFR = 5 \cdot \sum ASFR_t^{t+4}$$

ahol az alsó index a korév intervallum kezdőpontját, a felső index a végpontját jelenti. Ez a legnépszerűbb, leggyakrabban idézett mutató, amit gyakran kevernek azzal, hogy egy átlagos

nő ennyi gyermeket szül. Ez azonban kissé félrevezető. Mivel a ráták nem egy korosztályra vonatkoznak, hanem egymással egy időben együtt élő korcsoportokra, ezért a mutató a következőt mondja: ha egy 15 éves nő élete során a most megfigyelt termékenységi rátákat „tapasztalja”, akkor várhatóan ennyi gyermeket fog szülni. Tehát ez egy hipotetikus kohorsz várható gyerekszámát jelenti.

A képletből adódóan a ráta érzékeny az úgy nevezett „tempó hatásra”, azaz a családalapítás késleltetésére. Mivel mára a hatékony fogamzás gátlás széles rétegekben elérhető, így a családalapítás egyéni preferenciák szerint tervezhető folyamat lett, ami a modellezésben is nehézséget jelenthet. Egy hirtelen csökkenés a TFR-ben – azaz valamelyik korszpecifikus rátában – nem biztos, hogy a gyermekáldás végleges elmulasztása miatt van, lehet, hogy csak késleltetésről van szó.

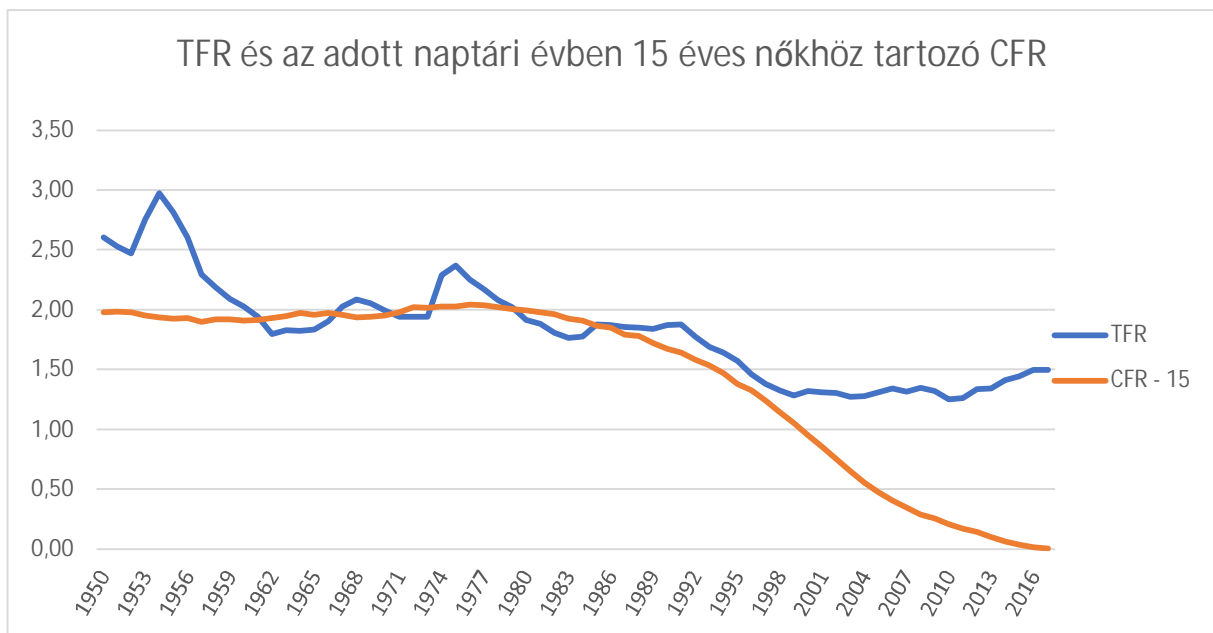
5.2 Kohorsz mutatók

5.2.1 Végleges Termékenységi Arányszám (Completed Fertility Ratio – CFR)

A CFR szintén a korszpecifikus termékenységi ráták összegéből adódik. Míg azonban a TFR-ben adott naptári évhez, de különböző kohorszok ASFR-eit összegezzük, a CFR-ben egy kohorsz ASFR-eit adjuk össze termékeny éveik alatt. Ezek pontosan a Lexis-felület oszlop-összegei. Amikor azt kérdezzük, hogy a „mai nők hány gyereket fognak szülni?”, akkor tulajdonképpen erre kérdezzük rá – még ha általában a TFR-rel is válaszolunk.

Természetesen adódik tehát a kérdés, hogy miként lehetne a két mutatót összevetni? Van-e köztük valami általánosan megfogalmazható összefüggés? Ha egy közös grafikonon ábrázoljuk a kettőt, melyik CFR értéket melyik TFR értékkel van értelme összehasonlítani?

Két megközelítés azonnal adódik: az adott naptári évhez tartozó TFR-t ábrázoljuk együtt az adott naptári évben 15 éves (azaz termékenységi korba lépő) kohorsz CFR-jével. Így láthatjuk, a TFR-beli hipotetikus kohorszhoz képest hogyan „teljesítettek”. A TFR-t ugyanis lehet tekinteni egyfajta várakozásnak. Másrésztől, oda tehetjük az adott évben 45 éves kohorsz CFR-jét is, megnézve, hogy a most termékenységi időszakuk végén járó nőkhöz képest mire számíthatunk, mint „mai” trend. (Nyilvánvalóan, az utóbbi kettő csupán eltolásai egymásnak.)



4. ábra Forrás: Magyarország teljes és végleges termékenységi rátáinak időszora 2017-ig a Human Fertility Database adatai alapján.

Természetesen, az 1997-es évtől kezdődően a CFR nem a végleges érték, hiszen az akkor 15 éves nők 2017-ben épp 45 évesek, így a későbbi évekre a befejezett termékenységi arányszám még nem tekinthető véglegesnek. Mindenesetre jól látszik, hogy a TFR jóval érzékenyebb egy-egy tempó hatásra, míg a CFR sokkal stabilabban mozog az idő során.

5.2.2 Születési sorrendek következési aránya (Parity Progression Ratio – PPR)

A PPR az eddigi rátáktól egészen eltérő megközelítéssel él. Bár nagyon hasznos mutató, talán sosem idézik demográfiai körökön kívül.

A születések száma, illetve aránya helyett azt mutatja meg, hogy adott számú gyerekkel rendelkező nők milyen aránya vállal még egy gyermeket, tehát a nőket számolja és arányosítja, nem a gyermekszületéseket. Ezt a mutatót is egy vektorként érdemes elképzelni. Az első elem azt mondja meg nekünk, hogy a nők hány százaléka vállal gyermeket. A következő elem azt, hogy az egy gyermeket vállalók közül mekkora arányban vállalnak még egy másodikat is, és így tovább. (A sorozatot egy lépéssel szokás elcsúsztatni, tehát nullás index jelöli a gyermeket vállaló nők arányát.) Képlettel a következőképpen néz ki:

$$PPR_n = \frac{\text{legalább } (n + 1) \text{ gyermekes nők száma}}{\text{legalább } n \text{ gyermekes nők száma}}$$

Egyszerű algebrai megfontolásból adódik a mutató kapcsolata az előbb bemutatott CFR-rel. A kohorsz által „produkált” gyerekek számát a CFR definíciójában úgy számoltuk ki, hogy összeadtuk koronként az átlagos születésszámot. A PPR-t használva ugyanezt kiszámolhatjuk

születési sorrend szerint is: az első gyerekek száma az anyák arányában éppen PPR_0 , a második gyerekek száma $PPR_0 \cdot PPR_1$ és így tovább. Tehát igaz az alábbi formula egy adott kohorszra:

$$CFR = PPR_0 + PPR_0 \cdot PPR_1 + PPR_0 \cdot PPR_1 \cdot PPR_2 + \dots$$

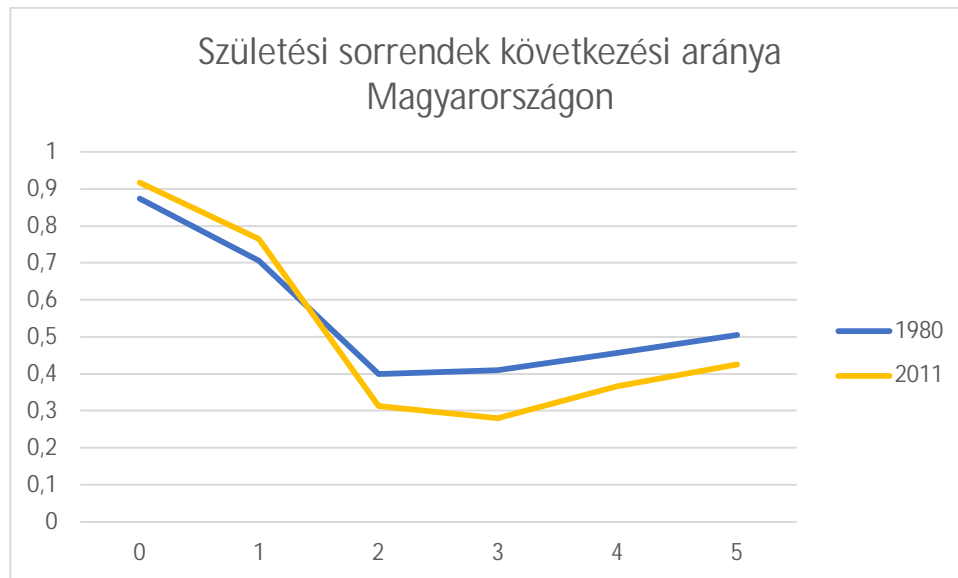
Kohorsz mutatóként a PPR-ben sem érvényesül a tempó hatás, de ezzel együtt hátránya, hogy ezt is csak olyan korosztályra lehet kiszámolni, akik már lényegében lezárták termékeny időszakukat. Legnagyobb előnye viszont az, hogy talán ez a mutató képes a leginkább érzékeltetni a tudatos családtervezés hatását. Képzeljünk el egy olyan társadalmat, ahol a születésszabályozás mesterséges eszközei nem elérhetőek, vagy nem alkalmazzák őket. Ilyenkor lényegében minden nőről anya lesz és tipikusan nem is állnak meg egy gyermeknél. Ami gátat szab a gyermekszületeknek az egyedül a biológiai termékenység, ami az életkor előrehaladtával csökken. Így egy lassan és feltehetőleg lineárisan csökkenő sorozatot várunk a PPR-re. Ilyen termékenységi mintázattal találkozhatunk Afrika számos országában, de még tipikusabb a hutterita közösségekben. A hutteriták keresztény anabaptista vallású csoport. Közösségeikben vallási meggyőződésből egyrészt korán házasodnak a nők, másrészt nem alkalmaznak semmifajta fogamzásgátló módszert, így körükben a legmagasabb az arányos születésszám.

Ettől a természetes mintától egyre jobban eltérőt kapunk, ahogy az egyre fejlettebb országokat vizsgáljuk. Az 5. ábra Magyarország adatait mutatja, összehasonlítva az 1980-ban és 2011-ben 45-54 év közötti nőket. A lineáris csökkenés helyett azt látjuk, hogy az első gyereket mindkét kohorsz túlnyomó része bevállalta, azaz viszonylag sokan váltak anyává és egészen magas köztük is azok aránya, akik második gyermeket vállalnak, de elég nagy az esés a harmadik gyermekvállalási kedvben. 2011-ben a kétgyermekes anyáknak már csak 30%-a szült harmadik gyermeket. Ez a törés nyilvánvalóan csak tudatos fogamzásgátlás eredménye lehet. Ha egy ilyen trendet kezdünk el tapasztalni a termékeny korból kilépő nők körében, akkor a TFR csökkenéséről is feltételezhetjük, hogy nem csak halasztják a gyermekszületeket, hanem el is mulasztják azt.

Az ábrán jól látható az is, hogy az egy- és kétgyermekes családok aránya, ha nem is nagy mértékben, de nőtt. Az ennél több gyereket vállalók aránya viszont sokkal nagyobb mértékben csökkent. Ez jól mutatja az egy-két gyermekes családmódel divatba jövetelét.

Másik érdekes vonás, hogy mindkét görbe konkáv. Ez azt jelenti, hogy a nagycsaládosok (háromnál több gyermekesek) körében jóval nagyobb a további gyermekvállalási kedv. Ennek oka az is lehet, hogy a társadalomnak még van egy olyan rétege, amely nem él a tudatos családtervezés lehetőségével. Ahogy lépünk előre születési sorrendben, lépésenként „szállnak

ki” azok, akik tudatosan tervezik családjukat. Ezért később – harmadik gyerekről negyedik gyerekre, majd tovább – egyre magasabb azoknak az aránya, akikre a természetes termékenység feltételei érvényesek. Vélhetően, 6-8 gyerek fölött már elenyésző a tudatos tervezők száma, így onnantól a görbe felvonná a szokásos, lassú lineáris csökkenést demonstráló mintát¹⁸.



5. ábra Születések következési aránya Magyarországon. Forrás: KSH adatok alapján saját számolásból.

A fejlett országokban jellemzően magas az első két születési sorrendre való átmenet, azaz a kétgyermekes család modell a legjellemzőbb. Utána a PPR nagyjából a felére törik le. A családtámogató intézkedések – vélhetően – ezért is túlzóan bőkezűek a harmadik gyermekvállalásától kezdve. Ha egy kormány családpolitikája növelni kívánja a születésszámot, akkor ezen a téren van a legnagyobb potenciál.

¹⁸ Megfelelő adatok hiányában nem tudtam jobban megbontani a népességet születési sorrend szerint. A KSH már a 6-9 gyermeket szülő anyák számát is egyben teszi közzé, majd a 10, vagy több élve szülést produkáló nők egy másik kategória.

6 A termékenység modellezése

A korábbi fejezetekben összefoglaltam, hogy mik lehetnek legfőbb motivációink, hogy a termékenység témakörével foglalkozunk. Szó volt a termékenység csökkenésének lehetséges okairól, az azt befolyásoló tényezőkről. A továbbiakban egzaktabb területre térünk át: matematikai modelleket vizsgálunk meg, hogy a termékenységi és népesedési folyamatokat jobban megismerjük, le tudjuk őket írni és előre tudjuk jelezni.

Mint azt már a bevezetőben is kiemeltem, a gyermekszületések modellezése tartalmaz néhány új kihívást a halálozás modellezéséhez képest. Eleve az a kérdés, hogy a termékenység modellezésekor mit modellezünk, számos lehetőséget nyit meg előttünk. Kiterjedt szakirodalmi összefoglalót és a lehetséges utak közül több, mint eleget összefoglal (Booth 2006), amely írás közel három évtized legeredményesebb megközelítéseit sorolja fel. Nem célom mindet bemutatni, minthogy terjedelemben nem is áll itt rendelkezésre ennek megfelelő hely. A számomra legígéretesebbnek a korszpecifikus termékenységi ráták modellezése tűnt. Ennek a következő előnyeit látom:

1. Jellegzetes, univerzális alakjuk van társadalomtól, földrajzi elhelyezkedéstől függetlenül.
2. Egy esetleges népesedési modellben praktikusán használható, hiszen minden kohorszra megadja, hogy átlagosan hány gyermeket hoz világra az adott életkorban egy nő.
3. Szinte minden országban elérhető és megbízható adatokat lehet hozzá találni.

Az ASFR értékek mögött a továbbiakban egy folytonos függvényt képzelünk el, ami a korszpecifikus termékenységi ráták kiterjesztésének tekinthető. Ezt a folytonos függvényt $f_c(x)$ -el fogjuk jelölni. Interpretációja az, hogy megadja, hány gyermeket szül várhatóan egy átlagos, c kohorszba tartozó x éves nő. Sokszor nem számít, hogy mely kohorszról van szó, ezért gyakran az alsóindextől eltekintünk. Ezt a függvényt termékenységi függvénynek nevezzük és az ASFR értékek ennek pontbecslései. Célunk, hogy minden kohorszra valamiféle módon megadjuk ezt a termékenységi függvényt.

6.1 A termékenységi függvény matematikai jellemzése

Szeretnénk jellemezni és a lehető legáltalánosabban parametrizálni az előzőleg bevezetett termékenységi függvényt, $f_c(x)$ -et.

A szemléletnek nem mond ellent, ha feltesszük a függvény folytonosságát mindkét változójában egyaránt. Cserébe matematikai szempontból sokkal kényelmesebb dolgozunk van.

Úgy gondolhatunk tehát $f_c(x)$ -re, hogy ez megadja, hogy a c időpont „környékén” született nők „körülbelül” x évesen hány gyereket szülnek átlagosan. Így a korábbi fejezetben bevezetett mutatók közül könnyen megkapjuk a következőket:

$$ASFR_{age} = \int_{age}^{age+1} f_c(x) dx$$

$$CFR_c = \int_u^v f_c(x) dx$$

$$TFR_y = \int_{y-v}^{y-u} f_c(y-c) dc$$

ahol u és v rendre a reprodukciós kor kezdete és vége, c az adott kohorsz születési évét, az utolsó kifejezésben pedig y az adott naptári évet jelöli. Ezekre az egyenletekre úgy fogok hivatkozni a későbbiekben, mint az adott rátára vonatkozó integrál-egyenlet. A legtöbb termékenységi függvény esetében valamelyik integrál-egyenlet segítségével fogjuk tudni a függvény valamelyik paraméterét meghatározni. Amennyiben nem lesz jelentősége a c paraméternek, a TFR-re vonatkozó integrál egyenlet egyszerűen a termékenységi függvény integráljára egyszerűsödik a termékenységi intervallumon.

A korszpecifikus termékenységi ráták bemutatásánál kifejtettük, hogy ábrázolásukkor azt várjuk el, hogy egy bizonyos életkortól kezdve (amikor egy nő termékeny korszakába lép – tipikusan 13-14 éves kortól) a pontok elkezdenek emelkedni, majd eléri a legvalószínűbb születési kort. (Ez az életkor a fejlett országokban egyre inkább kitolódott 20 éves korról 25-30 éves kor környékére.) A legvalószínűbb születési kornál a függvény eléri a maximumát, majd 45-50 év környékén 0-ra csökken. A termékenységi függvény ezen diszkrét pontokra (valamilyen hibával) illesztett görbe, ezért ez a tulajdonság lehet kiinduló pont a jellemzésekor.

Hablicsek László magyar demográfus differenciálegyenlet segítségével határozta meg az általános termékenységi függvényt (Hablicsek 1982). A legvalószínűbb születési korra a t_{max} jelölést alkalmazva felírhatjuk, hogy

$$\frac{df_c(x)}{dx} = (t_{max} - x) \cdot g(x) \cdot f_c(x)$$

ahol $h(x)$ egy pozitív függvény. Így a derivált $x < t_{max}$ esetén pozitív, t_{max} -ban nulla, egyébként negatív (azaz a monotonitási feltételeket ez garantálja). Ha még azt is bele szeretnénk foglalni a modellbe, hogy a végpontokban a termékenységi függvény gyorsabban tart a nullához, mint a deriváltja, akkor a

$$g(x) = h(x) \cdot (x - u)^{-1} \cdot (v - x)^{-1}$$

természetes választás, ahogy Habcsek is tette. Mint azt ki is emeli, ezen differenciálegyenlet megoldását egyre normálva béta-eloszláshoz jutunk, ha a h függvény konstans, azaz

$$f_c(x) = C \cdot (x - u)^{h \frac{t-u}{v-u}} \cdot (v - x)^{h \frac{v-t}{v-u}}$$

A szemlélettel összhangban lévő függvényt kapunk, amennyiben a h konstans úgy választjuk meg, hogy a kitevők egész számok legyenek. Például $h = v - u$ mindig jó választás. Ezen felül a C állandó a termékenység általános szintjét határozza meg, amit úgy számolhatunk ki, hogy például az adott TFR-hez kalibráljuk a megfelelő integrál-egyenlet megoldásával.

Számos megközelítés foglalkozott azzal is, hogy $f_c(x)$ -et rögzített x életkorra vizsgálja, mint idősort c -ben. Általános az egyetértés abban, hogy a korszpecifikus termékenységi ráták idősora autoregresszív folyamat (Booth 2006). Az idősoros megközelítés terjedelmi okokból legfeljebb érintőlegesen fog előkerülni.

A továbbiakban néhány termékenységi modellt fogok megvizsgálni, némelyiket pedig a Human Fertility Database oldaláról letölthető Magyarországról készült adatokon is alkalmazom.

6.2 Brass-féle polinom approximáció

William Brass 1948-ban költözött Nairobiba, ahol statisztikusként dolgozott¹⁹. Ekkortájt készítették el az első népszámlálást Kenyában. Brass számára tehát a legnagyobb kihívást a hiányos, olykor kevésbé megbízható adatok jelentették. Ezt a problémát orvosolta polinommal való közelítéssel (Brass 1960). Később sokkal hatékonyabb módszerek fejlődtek ki a korszpecifikus termékenységi ráták becslésére, de egyrészt egyszerűsége, másrészt időrendi elsősége miatt szerepeljen itt Brass modellje is.

Brass abból indult ki, hogy a reprodukciós időszak végén a termékenységi ráták gyorsabban tartanak a nullához, mint az elején. Ha s -sel jelöljük a kezdeti életkort, L -el pedig az időszak hosszát, akkor ezt a viselkedést tudja biztosítani az

$$f(x) = c \cdot (x - s) \cdot (s + L - x)^2$$

¹⁹ Brass életrajzi adatait és modelljének megalkotásának körülményeit a British Academy egy kiadványa foglalja össze. A pontos hivatkozást nem találtam meg, ezért a letöltési linket tudom csak megadni: <https://www.thebritishacademy.ac.uk/documents/1581/111p413.pdf>
Letöltés ideje: 2021.05.09.

termékenységi függvény. A c konstans paraméterrel a termékenység szintjét lehet beállítani. Kelet-Afrikában, ahol a központosított adminisztrációt épp csak elkezdték bevezetni, az integrál-egyenlet az idősebb nők átlagos gyerekszámára vonatkozó lehetett.

A polinom illesztést elvégeztem magyar adatokon az 1975-ben született korosztályra. A modellben az egyetlen kérdéses lépés a c konstans megválasztása, azaz el kell dönteni, hogy melyik TFR-t használjuk referenciaként. Ez attól is függ, hogy a görbe melyik részét akarjuk beszülni. Értelmszerűen nem használhatunk olyan TFR-t, amelyben a becslendő értékek valamelyike – azaz az 1975-ös kohorsz kérdéses korszpecifikus termékenységi rátája – szerepel. Három megközelítést láttam észszerűnek.

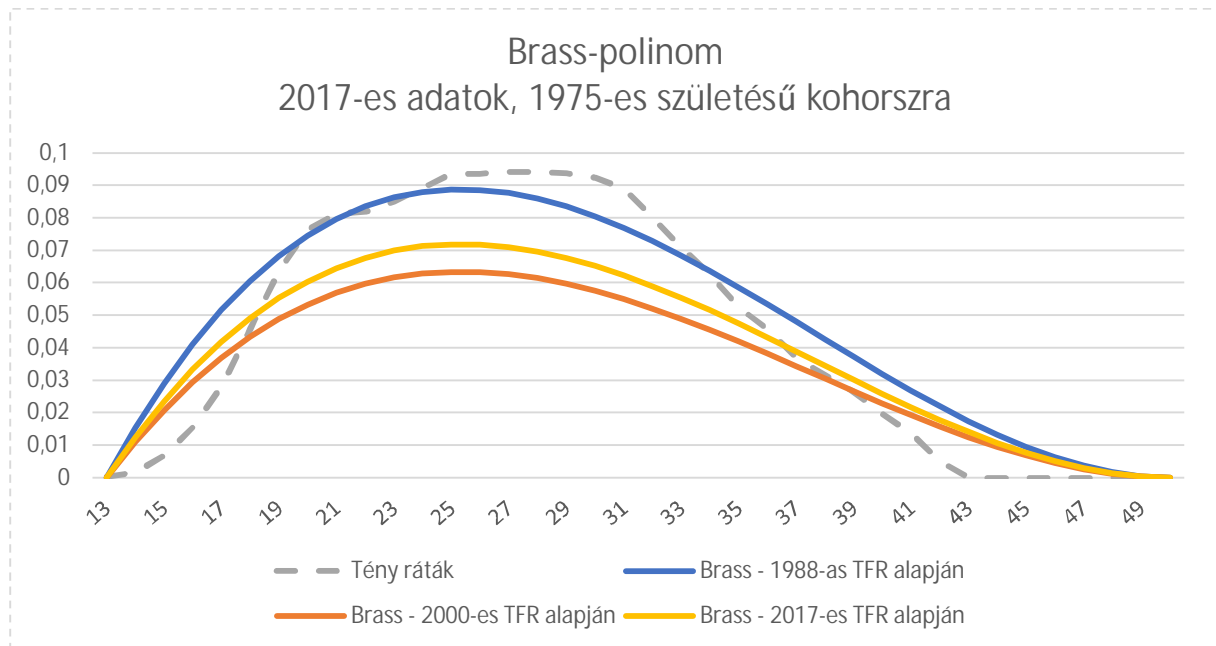
Első esetben tesztelhetjük azt, hogy amikor ez a kohorsz 13 éves volt, az akkori TFR-el kalibrált modell mennyire jelzi előre a kohorsz termékenységi mintáját. Második esetben nézhetjük azt, hogy amikor az adott kohorszról feltételezzük, hogy a legvalószínűbb születési korba lép (például 25 éves életkor), az akkori TFR értékével milyen polinomot tudunk illeszteni. Ez azért lehet releváns, mert ez az a TFR, amelyben az adott kohorsz a leginkább reprezentatív. Végül érdemes megvizsgálni azt is, hogy melyik naptári évben éppen tartunk (az általam használt, Human Fertility Database-ről letöltött adatok esetén 2017) és a hátralévő évek termékenységi rátáit vizsgáljuk meg az adott naptári év TFR-jéhez kalibrált konstanssal.

A kapott eredményeket a 6. ábra illusztrálja. Szemmel láthatóan minél későbbi TFR-t veszünk, annál pontatlanabb a modell. Ez a jelenség könnyen értelmezhető Magyarország történetének ismeretében. Éppen ez a korszak volt az, amikor nagy mértékben elkezdte elhalasztani, majd el is mulasztani a gyermekszületeket a társadalom. Ez azonban kevésbé volt még igaz a szóban forgó 1975-ös kohorszra, akik végleges termékenységi rátája 2017-ben 1,7 körüli, azaz jóval felülmúlja a 90-es és 2000-es évek TFR értékeit. Ez rá is mutat a modell egyik gyengeségére: rendkívül érzékeny a tempó hatásra. Egy átmenetben lévő népesség termékenységi adataira ezért ezt nem tanácsos alkalmazni.

Másik gyengesége a reprodukív időszak két végén figyelhető meg. Sokkal előbb indul növekedésnek a függvény és jóval lassabban simul a nullához, mint a tény adatok. Nem tudja tehát jól megfogni az életmódból, kulturális hatásokból adódó sajátosságokat. A kiskorúak termékenysége Európában már majdnem mindenhol elenyésző, hiszen elsősorban házasságból születnek a gyerekek (bár ez is egyre kevésbé igaz). A házasság időpontját pedig egyre inkább kitoljuk, így ez is hozzájárul a korai termékenység csökkenéséhez. A Brass-polinom inkább arra hasonlít, amit természetes termékenységnek szoktak nevezni, azaz születésszabályozás nélkül lehetne ilyen alakja a görbének.²⁰

²⁰ A fogalom pontosabb meghatározását később részletesebben is körbejáróm.

Bár ezeket a modell gyengeségeinek neveztük, méltánytalan lenne ezt felróni neki. Ez a módszer nem arra lett kitalálva, hogy a fejlett országok fertilitási mintáit fogja meg. Annál hatékonyabbnak bizonyulhatott a 20. század közepi Kelet-Afrikában. A termékenység szintje nagyjából állandó volt, még ma is ott csökken a leglassabban. A kiskorú anyaság pedig kulturálisan is elfogadott, így ezáltal a görbe bal vége sincs „lenyomva”, mint a fejlettebb országokban általában.



6. ábra A kohorsz 14 éves korában alkalmazott TFR alapján kalibrált termékenységi szinttel a modell nagyon jól becsüli a korszpecifikus termékenységi rátákat a legvalószínűbb gyermekszülési kor környékén. A grafikon bal végén az eltérés abból fakad, hogy a házasság kitolása miatt késik az első gyermekvállalás időpontja, a jobb végen pedig a modern fogamzásgátló eszközök teszik lehetővé a termékenységi ráták gyorsabb lecsengését. A 25 éves kortól megfigyelhető, első látásra rendellenes emelkedés vélhetően az 1998-2002-es Orbán-kormány családtámogató intézkedéseinek köszönhető.

6.3 Coale-Trussel modell

A Brass-polinom kapcsán azt láttuk, hogy a modell nem igazán alkalmas a legtöbb mai ország termékenységének modellezésére és tekintettel arra, hogy egyetlen paraméterrel rendelkezik, nem képes megfogni az egyedibb vonásokat. Azonban a függvény alakja a szemlélet alapján jól visszahozza a természetes termékenység, azaz minimális születésszabályozás mellett feltételezhető mintát. Ilyen körülmények között éppen azt várnánk el, hogy már a serdülő korú nők körében emelkedni kezd a termékenység és a görbe csúcsos, középső része csak a 30-35 éves kor után kezd el gyorsabban csökkenni. A biológiai termékenység ugyanis ebben a korban már csökken, illetve, ha egy nő már korábban sok gyereket szült, akár 8-10-et is, feltételezhető, hogy a későbbiek már egyre kisebb valószínűséggel fogannak meg.

A természetes termékenység fogalmát Louis Henry francia demográfus vezette be (Henry 1961). Azoknak a társadalmaknak vagy zárt közösségeknek a termékenységi viselkedését illette ezzel a kifejezéssel, ahol nem alkalmaztak tudatos születésszabályozást. Eleinte a meghatározást sok kritika is érte, de megállapodhatunk abban, hogy ezen definícióban azt a fajta születésszabályozást értjük, ami a gyerekszám szabályozását jelenti (Wilson et al. 1988). Nem vesszük figyelembe tehát azt, ha csupán a gyermekvállalás időzítése áll tudatos szabályozás alatt, de utána nincs jele a gyermeknemzéssel felhagyó viselkedésnek (Wilson et al. 1988 – „stopping behaviour”). Számos afrikai országban is kimutattak ugyanis tudatos késleltetést a gyerekszületéseket illetően, de attól még a gyermeknemzés szándéka nem szűnt meg. Amíg biológiailag lehetséges volt, mindig születtek új gyerekek. Ez bőven belefér még a természetes termékenység fogalmába. A természetben is előfordul olyan „stratégia”, hogy az utódlást alkalmasabb időszakra halasztják megfelelőbb körülmények reményében. Egy ilyen társadalomban tehát nincs egy áhított családméret, amelynek elérése után jellemzően felhagynak a család gyarapításával (Wilson et al. 1988). Ezt a fajta születés szabályozási viselkedést szokták paritás specifikus termékenységnek is nevezni (KSH NKI 1991).

Miután ebben sikerült tisztázni a természetes termékenység fogalmát, megnézhetjük Ansley Coale híres demográfus termékenységi modelljét, amit végül James Trussel segítségével fejlesztett tovább. Alapgondolata az, hogy ha van egy gyakorlati szempontból nagyjából elfogadható, matematikailag kifejezhető terminológiája a természetes termékenységnek, amit állandónak, „általánosan emberinek” tekinthetünk, akkor a másmilyen termékenységi mintát produkáló társadalmak termékenységi függvényét modellezhetjük úgy, hogy ezt a függvényt „tompítjuk” a születésszabályozás jelenlétének mértékével. A születésszabályozás érvényesülése az adott életkorokban szintén állandónak tekintendő. A modell legnépszerűbb formája a következő:

$$r_a = n_a \cdot M \cdot e^{m \cdot v_a}$$

ahol r_a a becslendő korszpecifikus termékenységi ráta, n_a a természetes termékenységi ráta az a életkorban, M a természetes termékenység általános szintjét meghatározó paraméter, m a születésszabályozás mértékét hivatott megadni, v_a pedig ennek érvényesülését az a életkorban (általában a v_a értékekről feltesszük, hogy negatívak). A modellben ismertnek tekintik a természetes termékenységi rátákat, amit Henry 13 társadalom adatai alapján állapított meg²¹. Ezeket a rátákat 5 éves kohorszokban adta meg, melyeket az 1. táblázat foglal össze. Később sokan javasoltak korrekciókat ezeken a rátákon, például (Xie, Pimentel 1992). A ráták alapján a természetes termékenység feltétele mellett 9-10 gyereke születne átlagosan

²¹ A vizsgált 13-ból végül hármat kizárt adatminőségi kétségek miatt (Wilson et al. 1988)

egy nőnek, de ha az M paraméter egynél nagyobb értéket vesz fel, akkor ennél magasabb általános termékenységi szint is elérhető.

A modell eredeti formájában adottnak tekintjük a korszpecifikus v_a rátákat is. Ezeket Coale és Trussel szintén univerzálisnak tekintették és 1965-ös demográfiai adatokon mérték ki 43 ország termékenységi mintáit vizsgálva.

Életkor	Természetes termékenységi ráták	v_a
20-24	0,460	0
25-29	0,431	-0,279
30-34	0,395	-0,677
35-39	0,322	-1,042
40-44	0,167	-1,414
45-49	0,024	-1,671

1. táblázat Coale-Trussel modell állandói. Forrás: (Xie, Pimentel 1992)

Első látásra a modell sok támadási felületet kínál. Ahogy arra utaltam már, a természetes termékenység kimérése is problémás. Nem adódhatnak-e olyan korok, amikor a természetes termékenység kalibrálására kijelölt társadalmakban is valamilyen oknál fogva más termékenységi minta jön ki? Ugyanez igaz a születésszabályozás korszpecifikus termékenységi rátáinak érvényesülésére is. Sőt, a Coale-Trussel modellben ez eleve azzal a feltételezéssel élünk, hogy a születésszabályozás az első korcsoportra nem is érvényesül. Ma pedig azt látjuk, hogy 25 éves kor fölé tolódik ki a legvalószínűbb szülési kor. Emiatt egyébként többen is publikáltak újra kalibrált bemeneteket ehhez a két vektorhoz, például (Xie, Pimentel 1992). Eredményeik mutattak változásokat a közel harminc évvel előttük meghatározott számokhoz képest, de nagyságrendileg ez nem volt túl jelentős. A modell mellett szól, hogy ezeket kétségtelenül lehet újra és újra kiszámolni és a modell a sok kritika ellenére széles fogadtatásra talált demográfus körökben, számos egész pontos illeszkedést produkálva.

Egy másik eredmény pedig a modell rugalmasságát illetően nyugtathat meg bennünket. Wilsonék tanulmányozták a modell két paraméterének, M és m becslésének konfidencia intervallumait (Wilson et al. 1988). Ezek adott konfidenciaszinthez kimérve, a síkon ábrázolva ellipszis alakú tartományokat adtak, egyre nagyobbakat a minta elemszámmal arányosan. Minden ilyen ellipszis alakú konfidencia-tartomány szélesebb tengelye az $x \rightarrow x$ egyeneshez közelebb, míg a másik, keskeny tengely erre merőleges. A konfidencia intervallumból akkor a legnehezebb kijutni, ha a szélességi tengely mentén haladunk, azaz M és m arányosan növekednek. Ekkor a korszpecifikus hatás változik, de a termékenység általános szintje nem. Mindez azt jelenti, hogy ha a korszpecifikus ráták el is térnek a modell által becsült értékektől,

az általános termékenység tekintetében mégis megbízható marad a modell és végső soron ez a fontos.

Ahhoz, hogy a Coale-Trussel modell paramétereire konfidencia intervallumot lehessen megállapítani és egyéb illeszkedési tulajdonságokat vizsgálni, szükségünk van további feltételezésekre is. Eredetileg ugyanis a modell két paraméterét közvetlen számolással nyerték, hiszen köszönhetően a $v_1 = 0$ feltételezésnek M közvetlen behelyettesítés után már becsülhető is, majd m adódhat például a legkisebb négyzetek módszerével. Ennek nyilvánvaló hátránya, hogy ténylegesen teljesül az a feltevés, hogy a 20-24 éves kohorsz határozza meg a termékenység szintjét, ami hamis képet mutatna a mai fejlett országokról. Ezekben talán a 20-24 éves korban erősebb is a születésszabályozás, mint a későbbi életkorokban. Szükséges tehát egy olyan módszer, ami a termékenység szintjének meghatározásához minden korcsoportoz tartozó rátát figyelembe vesz.

Broström fogalmazta át kissé a modellt, hogy az egy korcsoport által szült gyerekek száma Poisson-eloszlást kövessen (Broström 1985). Ha ez a hipotézis teljesül, akkor a korszpecifikus termékenységi ráták épp a valós gyerekszületési intenzitások maximum likelihood becslését adják, a paraméterek (M és m) pedig regresszióval becsülhetők. Ezt és a Coale-Trussel modellre vonatkozó következményeit részletesebben is bemutatom (Broström 1985) alapján.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel egy éves korcsoportokat²². Jelölje E_a az a éves nők számát ($a = 1, \dots, A$), B_a az a éves nők által szült gyerekek számát. Tegyük fel, hogy a születésszám Poisson-eloszlást követ és adott korosztályra az intenzitás állandó, λ_a . Ekkor

$$B_a \sim \text{Poisson}(\lambda_a \cdot E_a)$$

a likelihood függvény pedig

$$L(\lambda) = \prod_a \frac{(\lambda_a E_a)^{B_a}}{B_a!} \cdot e^{-\lambda_a E_a}$$

Ennek minimalizálásából adódik, hogy

$$\widehat{\lambda}_a = \frac{B_a}{E_a}$$

ami épp az a életkorra vonatkozó korszpecifikus termékenységi ráta, tehát az első állítás igazolt.

²² Broström modellje ennél általánosabb, tetszőleges, nem is szükségszerűen ekvidisztáns felosztását veszi a termékenységi időszaknak. Ekkor a kitétség (E_a) is módosul, a korcsoportbeli nők számát meg kell szorozni az intervallum hosszával, hogy éves rátákkal dolgozhassunk.

Ha a Coale-Trussel modellben alkalmazzuk a fenti terminológiát, azt kapjuk, hogy

$$\lambda_a = n_a \cdot M \cdot e^{m \cdot v_a}$$

Ezt behelyettesíthetjük a fenti likelihood-egyenletbe és így becsülhetjük M és m értékét maximum likelihood módszerrel. Ehhez célszerű bevezetni a $k = \log(M)$ helyettesítést. Ennek elsődleges előnye, hogy a modellt a log-lineáris regresszió alakjára hozhatjuk:

$$\log\left(\frac{\lambda_a}{n_a}\right) = k + m \cdot v_a$$

Írjuk át a likelihood-egyenletet is úgy, hogy az k és m függvénye és a könnyebb kezelhetőség érdekében vegyünk logaritmust:

$$\sum_a B_a \cdot (k + m \cdot v_a) - E_a \cdot e^{k+m \cdot v_a} + c$$

Bár ennek maximum helyét aligha reménykedhetünk megkapni explicit formában, numerikus módszerekkel (például Newton-Raphson iteráció) megkaphatjuk a megoldást.

Ez tulajdonképpen az általánosított lineáris modellnek egy speciális esete, ami a legkisebb négyzetek módszere helyett maximum likelihood módszerrel végzi az illesztést (Broström 1985). A regresszióban k a tengelymetszeti együttható, amiből az $M = e^k$ összefüggésből nyerhetjük a termékenység szintjének paraméterét.

Ez a fajta modellfelírás lehetővé teszi a hibabecslést, konfidencia intervallum felállítását és illeszkedés vizsgálatot. Ezzel a modellel szép eredményeket tudtak elérni a huszadik században (Booth 2006), de kérdéses, hogy az elmúlt egy-két évtizedre is aktuálisak-e a modell feltételezései. A legalapvetőbb feltételezés, ami meghatározza a modell illeszthetőségét, az az, hogy a tapasztalati ráták logaritmusai közel lineárisak a v_a értékekre nézve. Ha ránézünk a magyar naptári korszpecifikus termékenységi rátákra, akkor ez a feltételezés már szemléletes úton megbukott. Ez azzal magyarázható, amit már korábban is kiemeltünk, hogy nagy mértékben változott már a gyermekek ütemezése.

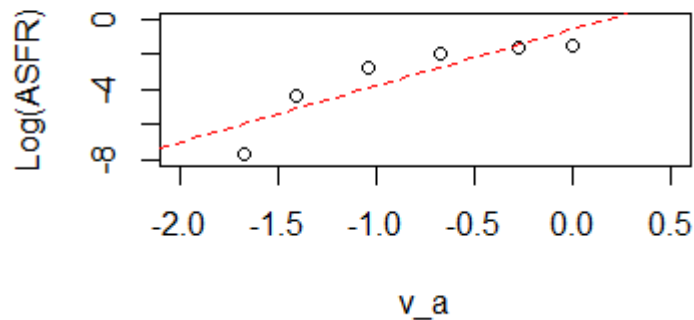
Ezen azonban lehet javítani. Bevett szokás, hogy ha nem látszik a lineáris trend, akkor a magyarázó változó négyzetét is hozzáadva a magyarázó változókhoz, újabb regressziót hajtsunk végre (Roback és Legler 2021). A 7. ábra mutatja, hogy a lineáris illesztés nem a legmegfelelőbb választás, de a négyzetes tag bevétele intuitívan jó útnak tűnik. Ezért több különböző módszerrel is elvégeztem a regresszió lépéseit. Egyrészt egy-egy modellt jelent a fent bemutatott maximum likelihood becsléssel nyert rátákkal való számolás, másrészt a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazó log-lineáris általánosított modell a Poisson eloszlás családból, logaritmusos link függvényt használva. (Roback és Lengler 2021) nyomán a

gyermekszületések számát modelleztem közvetlenül, „offset”-ként használva az adott korcsoportba tartozó nők számát. Másrészt mindkét modell esetén készítettem egy-egy modellt, ami a négyzetes tagot is beveszi, mint magyarázó változót, azaz a modell a

$$\log(\lambda_a) = k + m_1 \cdot v_a + m_2 \cdot v_a^2$$

formát ölti.

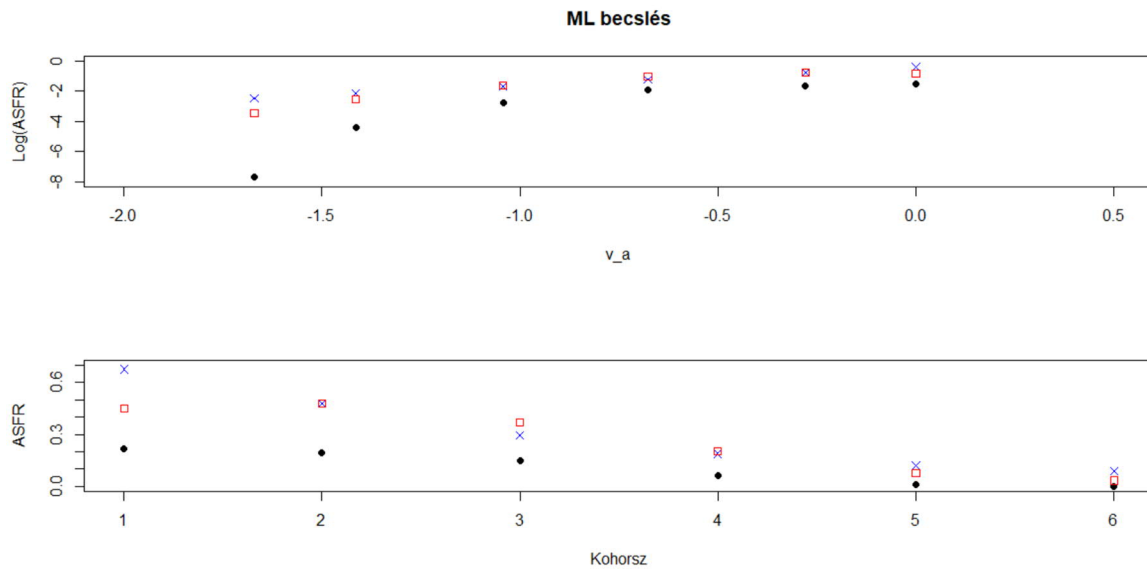
Mivel a Human Fertility Database-ről ehhez nem állt rendelkezésre megfelelő adat, ezért más forrást kellett keresnem. A KSH 2018-as Demográfiai Évkönyvében szereplő, házas nőkre vonatkozó adatokkal dolgoztam. Mivel Coale és Trussel is a házas korszpecifikus termékenységi rátákra készítették a modellt, ezért jobb illeszkedés várható, ha erre építjük a modellt.



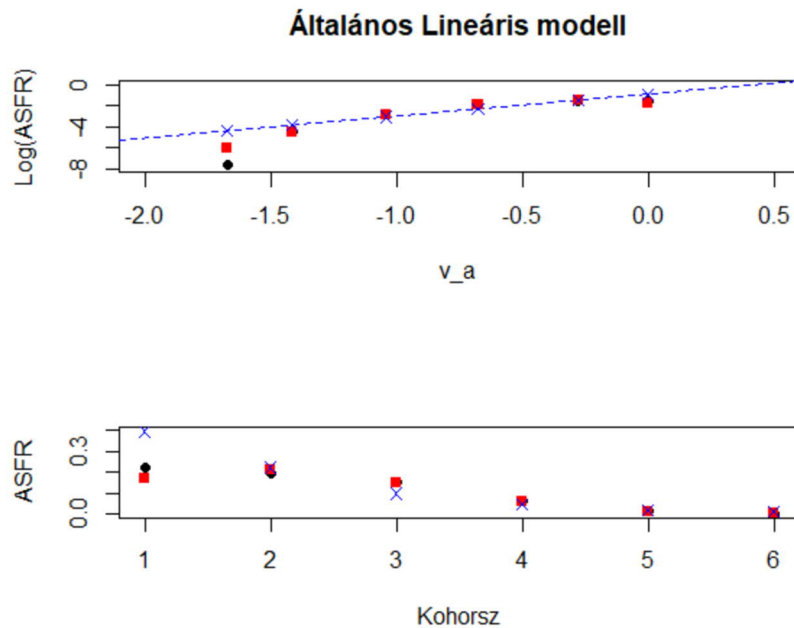
7. ábra A 2018-as naptári év korszpecifikus házas termékenységi rátái a regressziós egyenessel. Forrás: KSH demográfiai évkönyv 2018

Mind a maximum likelihood, mind az általánosított lineáris modell alkalmazása során már vizuálisan is látszik, hogy a négyzetes tag bevétele jelentősen javítja az illeszkedést. A 8. ábra mutatja a ML becslés eredményét. Bár a négyzetes tag bevétele segít a ráták alakján, de nagyon távol kerülünk így is a tapasztalati értékektől. Kézzel fogható az eltérés, ha a teljes termékenységet vizsgáljuk. A 2018-as házas TFR (kihagyva a számításból a 20 évnél fiatalabb nőket) 3,2-et ad. A lineáris és négyzetes közelítésű ML becsléssel nyert ráták rendre 9,23 és 8,08, tehát irreálisan magasak, inkább a teljes termékenységet közelítő értékek. Így ezt a modellt már a szemlélet alapján elvettem.

Szebb eredményt ad azonban az általános lineáris modell. Látható a 9. ábra alapján, hogy a négyzetes tag hozzáadása alapvetően nem sokat változtatott a lineáris közelítéshez képest, csak az első kohorsz tekintetében. Összességében az olvasható ki ez alapján, hogy a négyzetes tag egyfajta variabilitását engedi meg a termékenységi rátáknak a kohorszok között.



8. ábra Maximum likelihood becslés a 2018-as KSH adatok alapján. A piros négyzet jelöli a négyzetes tag hozzáadásával kapott becslést, a kék "x" a parameter lineáris közelítését, míg a fekete pontok az eredeti rátákat mutatják



9. ábra Poisson-családból készített általános lineáris modell becslései a 2018-as házas ASFR-re KSH adatok alapján. A piros négyzetek a négyzetes tag hozzáadásával nyert modell becslései, a kék értékek az alapmodell értékei, míg a fekete pontok a tapasztalati ráták.

Az Akaike és Bayes-i információs kritériumok szerint is jobban illeszkedik a második, négyzetes taggal kiegészült modell. A becsült együtthatókat és a hozzájuk tartozó, 95%-os szinthez számolt konfidencia intervallumokat 2. táblázat foglalja össze. Ez alapján kicsit bizonytalanabbnak mondható a másodfokú becslés abból a szempontból, hogy tágabb intervallumot ad meg.

	Lineáris becslés	Konfidencia intervallum	%	Másodfokú becslés	Konfidencia intervallum	%
k	-0,9325	[-0,9471;-0,918]	+/-1,6%	-1,7562	[-1,7815;-1,7309]	+/-1,4%
m ₁	2,0621	[2,0439;2,0802]	+/-0,9%	-1,4084	[-1,4852;-1,3318]	+/-5,4%
m ₂	-	-	-	-2,3580	[-2,4099;-2,3064]	+/-2,2%

2. táblázat

Azt látjuk, hogy a Coale-Trussel modell sokat veszített aktualitásából. A születésszabályozás mértéke ma már nem egyértelmű, hogy a korcsoport előre haladtával egyre erősödik. A modell bevezetésekor talán még érvényes lehetett ez a feltevés, hogy a nők elkezdnek gyermeket vállalni, majd amint elérték a tervezett gyermekszámot, felhagytak a további gyermekvállalástól. Ma már egyértelmű, hogy a gyermekszüléssel töltött intervallum első felét is érinti a születésszabályozás, vélhetően a tanulmányok kitolódása miatt.

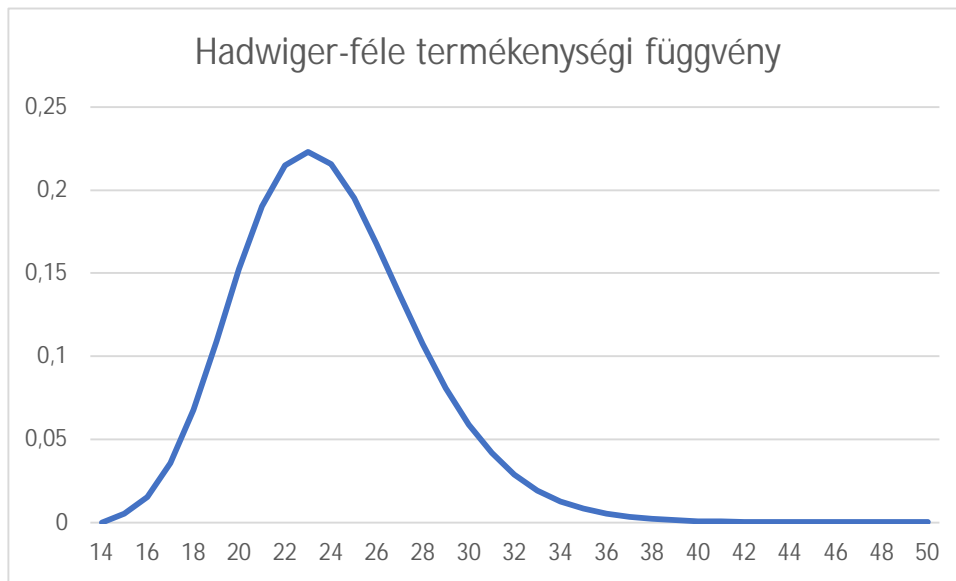
6.4 Hadwiger modell

A Hadwiger-függvény szintén a termékenységi függvény parametrikus leírására törekszik. Időrendben ez is az első modellek egyike, Hadwiger 1940-ben publikált róla először, mégis, Hadwiger-függvény alatt ennek egy későbbi finomhangolását szokták érteni (Gilje és Yntema 1970). A függvény segítségével már fejlett országok termékenységének modellezésében is szép eredményeket lehetett elérni (Hoem et al. 1981), (Chandola et al. 1999), ezért mindenképpen említésre méltó.

A négy paraméteres függvény a következő alakban definiálható:

$$f(x) = \frac{R \cdot H}{T\sqrt{\pi}} \left(\frac{T}{x-D} \right)^{3/2} \cdot \exp \left(-H^2 \cdot \left(\frac{T^2 + (x-D)^2}{T \cdot (x-D)} - 2 \right) \right)$$

Ránézésre világos, hogy az R paraméter a termékenység általános szintjéért felel. Ha megoldjuk a TFR-re vonatkozó integrál-egyenletet, akkor ez matematikailag is látszik, hiszen a integrál értéke éppen R . Ebből kiderül az is, hogy $\sqrt{\pi}$ csak normáló tényező. A függvény bonyolult szerkezete is annak a törekvésnek az ára, hogy legyen egy paraméter, ami a termékenység szintjét állítja be. Az exponenciális tényező kitevőjében közös nevezőre hozás után a számláló teljes négyzetté alakítható, amiből látszik, hogy $T + D$ a legvalószínűbb szülési kort, tehát a görbe csúcsának helyét határozza meg, de H -nak már nincs világos demográfiai interpretációja azon kívül, hogy a görbe szélességét befolyásolja. Önmagában T sem rendelkezik szemléletes, intuitív jelentéssel csak a D paraméterrel együtt, ami pedig a reprodukciós kezdeti korévénél nagyobb értéket nem vehet fel, különben nullával osztás lépne fel valamelyik x -re. Emiatt a modell túl rugalmasnak mondható. Egy függvényillesztés során nem világos az illesztésnek sem az egyértelműsége, sem az optimalitása. Intuitív magyarázó erő híján pedig az illeszkedés miéértje, a trendek vizsgálata is nehézkesebb.



10. ábra Hadwiger-függvény ábrázolása. $R=2,1$; $H=4$; $T=22$; $D=2$

A 10. ábra alapján jól látszik, hogy a fejlett országokra könnyebben értelmezhető a modell, mint a Brass-polinom. A karcsúbb, konvex módon induló emelkedés sokkal realisabb azokban a társadalmakban, ahol a nők oktatása nemhogy létező fogalom, de a reprodukzív időszakból egyre többet kíván. Emiatt laposabb a görbe bal vége. A jobb végen pedig a születésszabályozás tudatosabb és eredményesebb alkalmazása miatt intenzívebb a csökkenés.

Hátránya a modellnek, hogy ez a fajta parametrizálás nyilvánvalóan a függvény alakját kívánja „megerőszkolni”, hogy a szemléletnek megfelelő függvényt kapjunk (a Habcsek által definiált tulajdonságok mindegyikének eleget tesz – bővebben (Habcsek 1982)). Ennek során viszont egyre többet veszítünk a szemléletből.

6.5 Egy Bayes-i megközelítés

A korábbi módszerek mindegyikének alapja lényegében valamilyen előzetes elképzelés vagy elmélet volt arról, hogy miként kell kinéznie a termékenységi függvénynek. Korábbi fejezetekből is kiderül azonban, hogy a termékenységet befolyásoló tényezők miben létét nem sikerült eddig vitathatatlanul tisztázni. Minden jel arra mutat, hogy nem nagyon lehet egy állandó halmazba gyűjteni a befolyásoló faktorokat és meghatározni azok hatását a gyermekszületések számára. Ezek idővel is változhatnak.

Egy másik eddig elhallgatott, de nem leplezett gyengesége korábbi megközelítéseknek, hogy ezek általában a naptári évben megfigyelt rátákra tudnak hatékonyan illeszteni. Ezáltal egy egységes termékenységi függvényt konstruálnak az adott népességre. Ezáltal a kohorsz-hatás

nem jelenik meg bennük, pedig ez az, ami talán még fontosabb is (különösen egy olyan modellnél, amelyik előre akarja jelezni a termékenység alakulását).

Az utóbbi években a demográfia – elsősorban a halandóság modellezésének sikerein felbuzdulva és ezekből ihletődve – egy viszonylag újkeletű, Bayes-i megközelítés felé orientálódik – nem csak – a termékenység modellezés terén. A terület egyik úttörője Carl Schmertmann, a Floridai Egyetem professzora. A (Schmertmann et al. 2014) cikkben kifejlesztett módszert az eddigi egyik legpontosabb modellnek tekinthetjük (Ellison et al. 2020), bár tagadhatatlan, hogy elődeihez képest jóval nagyobb kapacitást igényel.

Ahelyett, hogy egy függvény paramétereiben próbálná összesűriteni az összes kohorsz tulajdonságait, a Lexis-felület kitöltetlen részét próbálja „kiszínezni” úgy, hogy a jelenben világosan látszó trendek érvényesek maradjanak, tehát csupán az $f_c(x)$ függvény folytonosságára alapoz mindkét változóban.

A fejezet hátralévő részében a reprodukív kor a 15 éves kortól kezdődően 45 éves korig tart, valamint a következő jelölésekkel élek:

- L a Lexis-felület, de itt nem mátrixként, hanem oszlopvektorként tekintünk rá, azaz a Lexis-felület elemeit oszlop-folytonosan egymás alá írjuk. Ennek elemeinek egy részét nem ismerjük (lásd 5.1.3), épp erre a hiányzó részre szeretnénk becslést készíteni.
- H legyen a Lexis-felület historikusan teljes része, azaz azokból a kohorszokból alkotott Lexis-felület, ahol minden korszpecifikus termékenységi ráta ismert. (Ezt már mátrixként kezeljük.)
- $\theta_{a,c}$ legyen a valós termékenységi ráta a c kohorszba tartozó nők a éves korában, tehát a Lexis-felület a -edik sorának c -edik eleme, tulajdonképpen $f_c(a)$.
- $\theta_{a,\cdot}$ és $\theta_{\cdot,c}$ jelölje rendre az a korú nők rátáinak vektorát a különböző kohorszokból és a c kohorszba tartozó nők rátáinak vektorát a különböző életkorokban. (Tehát rendre a Lexis-felület a -edik sora, illetve c -edik oszlopa. Amikor egyértelmű, hogy kohorszra, vagy korcsoportra gondolunk, akkor egyszerűen egy indexszel jelölünk, például $\theta_{c,\cdot}$.)
- y jelölje végül az adatot, azaz az összes ismert korszpecifikus termékenységi rátát.

Schmertmann és szerzőtársai a historikus mátrixból konstruálnak *a priori* eloszlást, majd Bayes-i becslést hajtanak végre. 24 európai és észak-amerikai régió termékenységi adataiból dolgoztak, 2009-ig publikált rátákból.

Célunk tehát megadni a posterior eloszlást, azaz a $P(\theta_{c,a}|y)$ sűrűségfüggvényt minden (c, a) párra. Ha $P(y|L)$ jelöli a likelihood függvényt, f az *a priori* eloszlást, akkor a Bayes-tétel szerint

$$P(L|y) = \frac{P(y|L) \cdot f(L)}{f(y)}$$

Az egyszerűbb számolás érdekében vegyük mindkét oldal logaritmusát:

$$\log P(L|y) = C + \log P(y|L) + \log f(L)$$

Schmertmann és szerzőtársainál a log-likelihood függvény normális eloszlású, ahol a szórás paramétert binomiális eloszlásból lehet becsülni:

$$\log P(y|L) = konstans - \frac{1}{2} (y - V \cdot L)^T \cdot \text{diag} \left(\frac{W_i}{y_i(1 - y_i)} \right) \cdot (y - V \cdot L)$$

ahol V az indikátor-mátrixa azon indexeknek, amelyekre áll rendelkezésre adat, tehát egyet vesz fel, ahol $\widehat{\theta}_{a,c} = y_i$ valamely indexekre és nulla egyébként. A W_i a nők számát jelöli a megfelelő kohorszban a megfelelő dátum idején (aminek y_i a tapasztalati rátája).

Az *a priori* eloszlás megválasztásakor a lehető legkevesebb előzetes feltevést magába foglaló, normális eloszlás esetén népszerű improprius priorra esett a választás:

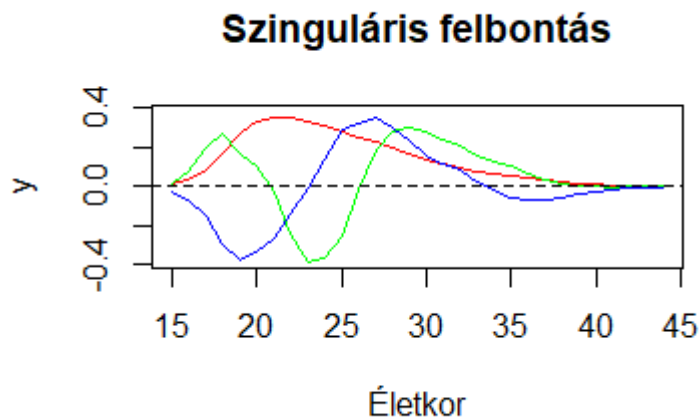
$$\log f(L) = konstans - \frac{1}{2} L^T \cdot K \cdot L$$

Bár ez nem valódi eloszlás, hiszen integrálja nem egyenlő eggyel, de az *a posteriori* eloszlás mégis valószínűségi eloszlás lesz (Schmertmann et al. 2014).

A hátralévő feladat tehát az, hogy a K mátrixot megkonstruáljuk úgy, hogy az a múltban kezdődő trendeket folytatva egészítse ki a hiányzó korszpecifikus termékenységi rátákat. Ehhez „bünteti” a tipikustól nagyon eltérő minták kialakulását. A K mátrix tehát kiszab kohorsz-büntetéseket és idősor-büntetéseket.

Mielőtt ennek nekiállunk, szükség van egy viszonyítási pontra, hogy egyáltalán mit nevezhetünk „tipikus mintának”. Ha elkészítjük a historikus mátrix szinguláris felbontását, azaz $H = U \cdot D \cdot V$ -t, akkor azt tapasztalhatjuk, hogy az első komponens (U első oszlopa) a többihez képest nagy magyarázó erővel bír, majd a következő kettő főkomponens után a többi elhanyagolható. A Human Fertility Database oldaláról letöltött magyar adatokra a 11. ábra mutatja be a főkomponenseket. (Schmertmann et al. 2014) hasonló mintát kapott saját adatain. Adataim az 1936 és 1973 között született nők korszpecifikus termékenységi rátái. Az ezekből kapott tengelyek jelentése a korábbi fejezetek alapján már szemléletből adódik: az első (piros) tengely a termékenység általános szintjét jelenti. A második (kék) tengely a gyermekszületek kitolódását 23 éves kor fölé. Ha ez a tengely nagyobb súlyt kap, az azt jelenti, hogy csökken a 23-24 éves kor előtti gyerekszülések száma, de utána viszont nő. A harmadik (zöld) tengelyt a gyerekszületek variabilitásaként lehet értelmezni, az erre a

komponensre eső súly ugyanis valamiképpen mérsékli, simítja az első két tengely által adott mintát. A három tengely együtt (attól függően, hogy milyen hosszú a historikus adat) a teljes variancia 85-95%-át magyarázza, ugyanakkor hosszabb idősr nem feltétlenül jelentett nagyobb magyarázó erőt. Bár nem az 1936-os születésű kohorsztól kezdve kaptam a legnagyobb magyarázó erővel rendelkező főkomponenseket, mégis ez volt a legszemléletesebb. Így is a teljes variancia közel 88%-át magyarázza, amivel bármelyik adatelemző elégedett lehet.



11. ábra A historikusan teljes Lexis-felület szinguláris felbontása. Az első, második és harmadik főkomponens rendre a piros, kék és zöld görbék.

Ez alapján egy kohorsz korszpecifikus rátái közelíthetők a három tengely által kifeszített altérre való vetítéssel, azaz

$$\theta_c = \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \beta_3 X_3 + \epsilon_c$$

ahol X_i a megfelelő tengelyt jelenti. Lineáris algebrából pedig azt is tudjuk, hogy ha a X -el jelöljük azt a mátrixot, aminek a három tengely az oszlopa, akkor az ezek által kifeszített altérre való vetítést leíró mátrix a $P_X = X \cdot (X^T X)^{-1} \cdot X^T$, azaz

$$\theta_c = P_X \cdot \theta_c + \epsilon_c$$

Ebből már kifejezhető a hibatag, legyen $M = I - P_X$, ahol I az egységmátrix és azt kapjuk, hogy

$$\epsilon_c = M \cdot \theta_c$$

Azon kohorszok hatását szeretnénk enyhíteni, amelyekre ez a hibatag túl nagy. (Schmertmann et al. 2014) nyomán a hiba nagyságát mérhetjük az $\Omega = \frac{1}{S} \sum_s \epsilon_s \cdot \epsilon_s^T$ mátrix-átlaggal. Ez után az adott kohorszra kiszabott büntető faktort definiálhatjuk a Ω Moore-Penrose féle pseudo-inverzének segítségével (Ω nem invertálható, mert az M 30x30-as mátrix rangja csupán 27, ugyanis a vetítő mátrix rangja három):

$$\pi_c = \epsilon_c^T \cdot \Omega^+ \cdot \epsilon_c$$

Jelöljük E_c -vel azt a vektort, amelyik mérete azonos L méretével, és minden eleme nulla, kivéve ott, ahol a c -edik kohorsz korszpecifikus termékenységi rátái állnak, ahol a vektor elemei rendre eggyel egyenlők, azaz $E_c^T \cdot L = \theta_c$. Ezt a jelölést használva felírhatjuk a faktorokat a következő alakban:

$$\pi_c = L^T \cdot (E_c^T M \Omega^+ M E_c) \cdot L$$

Ez alapján legyen $K_c = E_c^T M \Omega^+ M E_c$. A konstrukció alapján világos, hogy ezek a „büntető faktorok” nem befolyásolják a termékenységnek sem a szintjét, sem az ütemét. A lehető legkisebb érték a nulla, ami akkor fordul elő, ha a három főkomponens lineáris kombinációjaként áll elő a kohorsz termékenységi mintája. Az ettől való eltérés az, amit a faktor büntet.

A következő lépés a korszpecifikus termékenységi rátáknak, mint idősrnak a stabilitásának garantálása. Két fajta trendet különböztethetünk meg, melyeket súlyozni szeretnénk. Egy életkorra vonatkozó ráta vagy tartósan állandó marad, ezt rögzült aránynak fordítom („freeze-rate” – Schmertmann), vagy egy változó (akár emelkedő, akár csökkenő) trendet mutat, amit rögzült meredekségnek („freeze-slope”) fordítok. Az utóbbi mértékét becsülhetjük regresszióval, ahogy Schmertmann és szerzőtársai tették, de másik járható út lehet idősr illesztése is. Ezután ezt és a rögzült arányra vonatkozó korrigáló faktorok levezetése is mátrix egyenletekből adódik.

Legyen u_a az a vektor, amelynek elemei a $\theta_{a,c+1} - \theta_{a,c}$ különbségek. Ez egy lineáris leképezés, aminek mátrixát könnyen megkonstruálhatjuk, legyen ez W_1 , amelyre $u_a = W_1 \cdot \theta_a$. A korábbi E_c vektorhoz hasonlóan definiálhatjuk azt az F_a vektort, amelyre $F_a^T \cdot L = \theta_a$. Így azt kapjuk, hogy

$$u_a = W_1 \cdot F_a \cdot L$$

Hasonlóan, ha v_a az a vektor, melynek elemei a $\theta_{a,c+1} - (\theta_{a,c} - b_c)$ elemek, ahol a b_c értékeket regresszióval kapjuk a korábbi kohorszok rátái alapján, akkor ezt is felírhatjuk egy W_2 mátrix-szal úgy, hogy $v_a = W_2 \cdot \theta_a = W_2 \cdot F_a \cdot L$ teljesüljön.

Ezután már csak az marad hátra, hogy ezeket a hibatagokat valamilyen módon átlagoljuk, standardizáljuk. Schmertmannék a hibatagok varianciájának empirikus becslésével tették ezt, amit s_1^2 - és s_2^2 -tel jelölve felírható, hogy

$$p_{1,a} = \frac{1}{s_1^2} \cdot u_a^T \cdot u_a = L^T (s_1^{-2} F_a^T W_1^T W_1 F_a) L = L^T K_1 L$$

$$p_{2,a} = \frac{1}{s_2^2} \cdot v_a^T \cdot v_a = L^T (s_2^{-2} F_a^T W_2^T W_2 F_a) L = L^T K_2 L$$

Ezek segítségével megkaptuk a három korrekciós mátrixot, amelyek súlyozásából a végső K mátrix adódik.

Ez a súlyozás technikailag összetett és már csak terjedelmi okokból sem részletezem a végéig. Ehelyett inkább az elemzés végeredményét mutatom be és tanulságát vonom le a fejezet hátra lévő részében.

A modell a kohorszok végleges termékenységi mutatóját képes megadni egy statisztikai hibával (ez jelen esetben a szórás) és egy szignifikancia szinttel. A tanulmányban az 1960-as kohorsz végleges termékenységi rátája az, ami tény adat, utána évtizedes bontásban adja meg a rákövetkező kohorszok várható végleges rátáinak változását. Az 1960-ban született nők CFR-je sok országban kettő felett van (Magyarországon is 2,02). Ennek ellenére majdnem mindenhol nagyjából 80%-os valószínűséggel várható ennek csökkenése kettő alá két évtizeden belül. Feltehetjük tehát a kérdést, hogy véget ért-e egyáltalán a demográfiai átmenet?

Magyarország esetében 1960 és 1970 között született nők végleges termékenységi mutatója várhatóan 0,16-tal csökken 0,01-es szórással²³, majd a következő évtized kohorszai további 0,27-tel, 0,07 szorással. Ez azt jelenti, hogy legrosszabb esetben azok a generáció, akik 2020 és 2025 között töltik be 45-ik életévüket – és ezzel reprodukív időszakuk lényegében véget ér – átlagosan másfél gyereket hoztak világra. A későbbi évtizedek kohorszaira is további csökkenést, de legalább stagnálást jósol Schmertmann és szerzőtársainak számolása, bár erre az időszakra már meglehetősen nagy a modell bizonytalansága.

Összességében ez a Bayes-i megközelítés mondható eddig a legmodernebb modellnek. Köszönhetően annak, hogy az *a priori* eloszlás megengedő, nem terheli a modellt olyan feltételezésekkel, amik nehezen alátámaszthatók és amelyek meglétére érzékeny a számolás. A modell eddig jó fogadtatást kapott és tovább gondolásai is megjelentek már (Ellison et al. 2018). Egyetlen hátrányként legfeljebb számításgénye róható fel, de a mai technológia mellett ez egyáltalán nem jelentős hiba.

²³ Az eredmény pontos, 2018-ban az 1970-es kohorsz korszpecifikus termékenységi rátáinak összege 1,86 körüli.

7 Egy lehetséges demográfiai modell

A Schmertmann-modell eredményeit felhasználva kísérletet tehetünk arra, hogy elemezzük a jelenlegi magyar nyugdíjrendszerben felmerülő termékenységi kockázatot. Ebben a fejezetben bemutatom egy lehetséges módját annak, hogyan lehetne felépíteni egy demográfiai modellt, amelynek eredménye a nyugdíjegyenes az elkövetkező évekre. Ennek érdekében nyilván szükség van számos feltételezésre és egyszerűsítésre is. Első körben a demográfiai feltételezéseket mutatom be, majd a nyugdíjrendszerre vonatkozó egyszerűsítéseket.

Kiindulópontnak a 2018-as magyar korfát vettem. Erről feltételezhető, hogy már megbízható és utólagos módosításokat nem eszközölnék már rajta. A feladat megalkotni a népesség változásának dinamikáját leíró egyenleteket. Jelöljük az y naptári évben a éves nők és férfiak számát rendre f_a^y, m_a^y -vel. Ha elhagyom az alsó indexet, akkor azt az oszlopvektort értem m^y és f^y alatt, amelynek elemei rendre az adott korú férfiak és nők száma. Jelölje ugyanilyen logikával a korszpecifikus, a életkorú nőre az y évben vonatkozó termékenységi rátát b_a^y . A b^y vektor alatt az f^y vektorral azonos méretű vektort értek, melynek csak a reprodukció életkorhoz tartozó elemei lehetnek nullától különbözőek, így az $f^y \cdot b^y$ skaláris szorzat az y év során születetteket jelenti. Ők tulajdonképpen az $y + 1$ évnek a legfiatalabb korosztálya lesznek, tehát $m_0^{y+1} + f_0^{y+1} = f^y \cdot b^y$. Feltételeztem, hogy a fiú és lány gyermekek születésének valószínűsége egyforma.

Ha precíznek szeretnénk lenni, számolni kellene azzal is, hogy a halandósági ráták is javulnak az évek során. Ezt figyelembe kellene venni, mert a magyar nyugdíjrendszerben eddig még nem került napirendre a nyugdíj korhatár indexálása. Ez is egy olyan mulasztás, amit már jó ideje meg kellett volna lépni. A modellel azonban arra keressük a választ, hogy a termékenység alakulása mennyire fogja befolyásolni a nyugdíjrendszert és ezt el szeretném választani a hosszú élet kockázatától. Ezért olyan korhatár indexálást tételezek fel, ami az aktív és nyugdíjas időszak arányát tartja állandó szinten. Ez azért praktikus választás, mert így nem túlzó egyszerűsítés az, ha a nyugdíj korhatárt konstans 65 éves szinten tartom és a halandóság változásával sem számolok. Ezek ugyanis éppen kiütnék egymást. Ezzel összhangban tehát a szokásos q_a jelölést használom az a és $a + 1$ év közöttiek halálozási valószínűségére. A 2018-as KSH halandósági táblával számoltam. Bár ezt külön nem jelölöm, de mindenhol a férfiakra és nőkre külön-külön a rájuk vonatkozó halandósági rátákat alkalmazom. Az a korindex lehetséges értékeit 0-tól 99-ig bezárólag vettem bele a számításba.

A fentieket figyelembe véve tehát a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$f_a^{y+1} = (1 - q_{a-1}) \cdot f_{a-1}^y, \text{ ha } a > 0$$

$$m_a^{y+1} = (1 - q_{a-1}) \cdot m_{a-1}^y, \text{ ha } a > 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot b^y \cdot f^y \cdot (1 - q_0) = m_0^{y+1} = f_0^{y+1}$$

Mivel minden egyenletünk lineáris, ezért mátrix szorzással is megkaphatjuk a rendszer fejlődését. Legyen A_y az a száz dimenziós mátrix, amelynek első sora a $b^y/2$ vektor transzponáltja, ez alatt a 99-szer 99-es egységmátrix szerepel azzal a módosítással, hogy egyesek helyett az $1 - q_a$ értékeket tesszük a főátlóba, minden más elem pedig nulla. Ekkor

$$A_y \cdot f^y = f^{y+1} \quad \text{és} \quad A_y \cdot m^y = m_{y+1}$$

Ezzel megkaphatjuk a népesség feltételezett alakulását.

Fontos kérdés még, hogy a termékenység tekintetében milyen feltételezéseket használjunk. A reprodukív időszakot 15 és 50 éves kor közöttinek tekintetem. Schmertmann modelljéből megkaptuk, hogy a CFR 1960-tól 1990-ig várhatóan mennyit fog csökkenni. Bár az 1980-as évtől 1990-ig tartó csökkenés előrejelzése már bizonytalan, ezt is elfogadtam és a későbbi kohorszokra feltételeztem, hogy többet nem csökken, hanem konstans marad. Ez a végkifutási érték 1,45. Azt feltételeztem, hogy a Schmertmann modell által megadott csökkenés lineárisan fog bekövetkezni az egyes kohorszokon, így minden kohorszra megkaptam a CFR-t.

Azt gondolhatnánk, hogy mivel hosszú távra tervezünk előre a modellel, végső soron csak a végleges termékenységi ráták fognak számítani. Nagyon érzékeny azonban a modell arra, hogy milyen a termékenységi függvény alakja. A naiv megközelítés az lenne, hogy minden reprodukív korra az ismeretlen korszecifikus ráták helyére egyformának feltételezzük a gyerekszülések valószínűségét úgy, hogy a CFR az előrevetített érték legyen. Ekkor azonban túl nagy valószínűséggel fognak születni idősebb (40-50 közötti) nőknek gyerekei, ami az első néhány évben észszerűtlenül megemeli a születendő gyermekek számát. Ennek oka az, hogy 2018-ban ők éppen a Ratkó-unokák, akik sokan vannak, de elhanyagolható a szülési valószínűségük.

Megközelítem ehelyett az volt, hogy feltételeztem egy univerzális termékenységi függvény alakot (ennek megválasztására rövidesen kitérek). Minden korévre kiszámoltam az $\frac{f(x)}{\int f(x)dx}$ értéket és ennek megfelelő arányban oszlattam el a hiányzó korszecifikus rátákat a koréveken kohorszokként úgy, hogy a CFR egyezzen az előre jelzett értékkel.

Például az 1978-as kohorsznak a modellben tíz korszecifikus rátát kellett becsülni úgy, hogy a végleges termékenységi ráta 1,65 legyen (ami az 1970-es 1,86-os értékből adódik úgy, hogy a

Schmertmann modell által feltételezett 0,14-es csökkenés 80%-a már bekövetkezett, azaz $1,65 = 1,86 - \frac{1978-1970}{10} \cdot 0,14$). A 41 éves korszpecifikus rátát úgy kapjuk, hogy megnézzük az eddigi korszpecifikus ráták összegét, ami az ő esetükben 1,56 volt. Tehát átlagosan ebben a kohorszban egy nő még 0,1 gyereket szülhet. Azt feltételeztem, hogy ebből az $a > 40$ életkorokban rendre $\frac{f(a)}{\int f(x)dx} \cdot 0,1$ -et fognak megszülni átlagosan. Analóg módon egészítettem ki az összes többi hiányzó arányszámot. Értelemszerűen a 2004-es kohorsztól kezdve minden kohorsz teljes mértékben a választott termékenységi függvény szerint ütemezi gyermekeinek születését.

A kulcskérdés tehát az, hogy milyen termékenységi függvényt válasszunk. Első jelöltként a Schmertmann modell módszertanával kapott historikus adatokból számolt főkomponensek, vagy azok valamilyen lineáris kombinációja merülhet fel. Ezzel az a probléma, hogy ha csupán az első főkomponenst vesszük számításba, abban a legvalószínűbb szülési kor még 25 év alatti, hiszen a historikus adatokból lett számolva azon kohorszokra, akik már túl vannak reprodukív időszakokon. Ez múlt századi termékenységi trendeket tükröz. A termékenységi függvény alakja viszont épp azokra a kohorszokra érvényesülne így, akikre az a legkevésbé jellemző. Kipróbáltam tehát azt az illesztést, amikor a főkomponenseket összeadtam a komponenseknek megfelelő sajátértékkel súlyozva, tehát a legvalószínűbb szülési kor kitolódása és a függvény alakjának változékonysága is szerepet kapott.

A következő kérdés az, hogy egy ilyen függvény alak megfelelőségét hogyan lehet vizsgálni. Objektív mérőszámot nem tudtam felállítani a problémára, de szemlélet alapján két dolgot érdemes ellenőrizni. Egyrészt meg lehet nézni a kelesztett Lexis-felületet, hogy mennyire folytonos a „hőterkép”. Másrészt értékes információ a TFR folytonossága is. A 2018-as TFR 1,5 alatt van egy kicsivel, tehát a 2019-est is körülbelül erre a szintre várjuk, bár a 4. ábra azt mutatja, hogy a TFR évről évre is tud jelentősen változni. A főkomponensekből kapott termékenységi függvény azonban 2,6 fölé emelte a 2019-es évi TFR-t, majd onnan lassan konvergált a hosszú távra előrevetített, a Schmertmann modell által jósolt 1,45-ös értékhez. Ez annyira irreális eredmény volt, hogy kénytelen voltam elvetni. A Brass-polinom és a Coale-Trussel modell eredményei sem hoznak reális eredményt, hiszen az előbbi gyorsan emelkedik fiatal korban, ami valószerűtlen Európában, az utóbbi pedig 5 éves kohorszokra ad csak meg rátákat, tehát ezen további approximációkat kellene végrehajtani – nem is beszélve arról, hogy a 20 év alatti életkorokra egyáltalán nem is szolgáltat értéket.

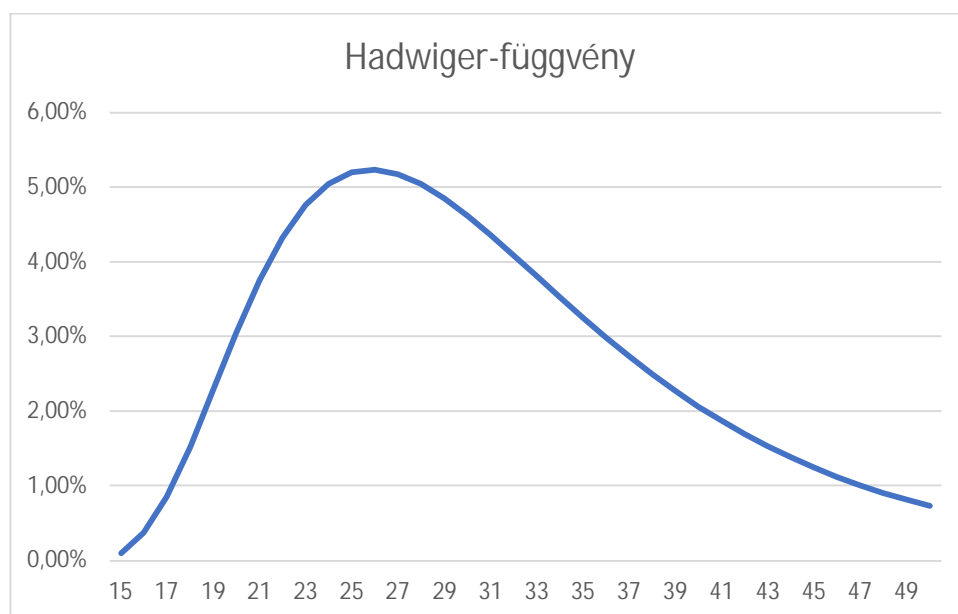
Marad tehát a Hadwiger-függvény, aminek kalibrálása nem túl szemléletes, de a leginkább alkalmazható modern társadalmak termékenységi mintázatának jellemzésére. Emlékeztetőként idézzük fel újra a Hadwiger-függvény képletét:

$$f(x) = \frac{R \cdot H}{T\sqrt{\pi}} \left(\frac{T}{x-D} \right)^{3/2} \cdot \exp \left(-H^2 \cdot \left(\frac{T^2 + (x-D)^2}{T \cdot (x-D)} - 2 \right) \right)$$

A függvény paramétereinél elsődleges szempont volt a Lexis-diagramm folytonossága és csak másodlagos a TFR-é. A 12. ábra mutatja az illesztés eredményét. A legvalószínűbb születési kort 25 év környékére tettem, bár ez elég nagyvonalú feltételezés. Ha azonban ennél is későbbre toltam ki, a TFR értékek 1,2-nél is kisebb értékről indultak, ami szintén túl nagy változás.

A mesterséges megtermékenyítés fejlődését feltételezve²⁴ elfogadhatónak tartom azt, hogy a reprodukív időszak végén a görbe magasan marad. Nem érdemes azonban tagadni, hogy ez az alak nagyon robusztus. Mégis, ettől eltérő paraméterezés esetén vagy a Lexis-diagram, vagy a TFR folytonossága sérült, de objektív mérőszámot nem találtam, amivel megfelelőbb alakot lehetett volna meghatározni. Később kitérek még a modell szülések koreloszlásától való érzékenységre.

A TFR értékek még így is mutattak ugyan egy nagyobb csökkenést az alábbi gyermekszületési eloszlás mellett is – a 2018-as 1,49-es értékről 1,31-re esett, majd onnan konvergált 1,45 felé –, de ezt még elfogadhatónak véltem, mert 2024-re már ismét 1,4 fölé emelkedett.



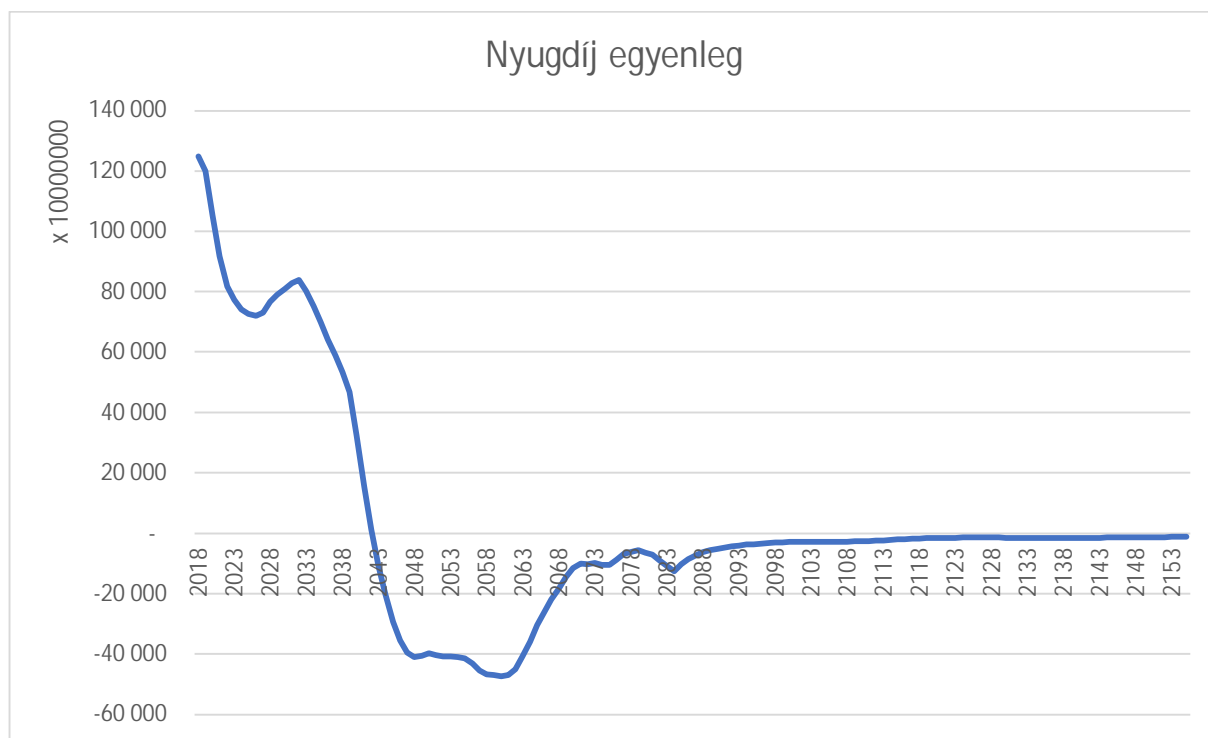
12. ábra Termékenységi függvény illesztése a Hadwiger módszerrel: $R=1,45$; $H=1,5$; $T=22$; $D=10$

A demográfiai feltételezések után meg kell határozni, hogy mit is szeretnénk kimérni a nyugdíjakkal kapcsolatban. Értelmszerűen a nyugdíj egyenleget szeretnénk meghatározni évtizedekkel előre, azaz a járulék bevételek és járadék kifizetések különbözetét. Készítettem egy számolást, ami a jelenleg érvényben lévő adó- és járulékkulcsok mellett, minden aktív korú

²⁴ A gyermekvállalás késleltetése miatt erre egyre nagyobb az igény, ezért a tudósok várhatóan érnek még el ezen a téren eredményeket. Ennek azonban van egy biológiai korlátja is.

(25-65 éves korig) állampolgár esetében átlagbért (2019 elején, ahonnan a projekció indul, 352 ezer forint²⁵) feltételezve mekkora lenne ez az egyenleg, ha 70%-os helyettesítési rátát szeretnénk garantálni. A munkanélküliséget is elhanyagoltam, mert jelentős munkanélküliség mellett a jövőbeli nyugdíj ígéretek is kisebbek a jelenlegi rendszerben. Ugyanakkor bőven észszerű lenne 3-5%-os munkanélküliségi arányt feltételezni, hiszen ez egy egészséges fluktuációt, rotálódást jelent csak a munkaerőpiacon. A bérek indexálásával sem érdemes foglalkozni, hiszen, ha a nyugdíjak színvonalát is tartani akarjuk, akkor ugyanezt az indexálást alkalmazhatnánk arra is, ami végső soron leegyszerűsödne.

A TB járulék és szociális hozzájárulási adó 84,79%-áról feltételeztem (Márkus 2013), hogy időskori ellátásra megy, így összesen a bruttó kereset 28,83%-a lett az, ami a nyugdíjak finanszírozására fordítható.



13. ábra A magyar nyugdíjegylenleg előrevetítése a feltételezett demográfiai változások függvényében.

A feltételezések elnagyolása és a sok egyszerűsítés miatt elkerülném azt, hogy messzemenő következtetéseket vonjak le az eredmények volumenéről. Látszik, hogy az eddig részletezett paraméterek mellett a nyugdíjegylenleg előjele negatívra vált és ott is marad a 2040-es évektől kezdve, amikor is a Ratkó-unokák nyugdíjba vonulnak. Könnyen lehetett a paraméterekből olyan scenáriót is kapni, hogy az egyenleg végig pozitív maradjon és azon feltételezések sem

²⁵ Forrás: https://www.ksh.hu/docs/hun/xstadat/xstadat_evkozi/e_qli029b.html

voltak túl radikálisak. Ez azonban inkább a sok egyszerűsítés eredménye, főleg a nyugdíj egyenleg számításával kapcsolatban

Az eredmény, amit szeretnék kiemelni, az az, hogy a paraméterek megválasztása csupán a görbe szintjét befolyásolta, az alakját elhanyagolható mértékben. Jelen modellben a termékenység végső szintjét stabilnak állítottam be, de az induló kor összetétel miatti volatilitás még a 2080-as évekig éreztetni fogja a hatását. A termékenységi függvény alakjának átparaméterezése sem befolyásolja igazán a nyugdíj egyenleg alakját. Az csupán a 2080-as évek utáni lecsengés tulajdonságát határozza meg, ami lehet oszcilláló is, de lehet a 13. ábra által demonstrált konvergencia is.

Ez az eredmény tehát azt tudja megbízhatóan kifejezni, hogy a termékenységi kockázat a volatilitásban biztosan megjelenik. Egy generáció kiugró, vagy alulmaradó termékenysége évtizedekkel később okozhat nagy mértékű csökkenést a nyugdíj egyenlegben. Az tehát jól látszik, hogy nem lehet sikeres családpolitikát sem folytatni folyó finanszírozású nyugdíjrendszerek fennállása mellett. Egy-egy nagyobb kiugrás a gyerekszületések számában 60-70 évvel később évtizedekig tartó hiányt is eredményezhet a rendszerben. Ki kell emelnem újra, hogy a gazdasági paraméterekkel, inflációval, munkanélküliséggel és gazdasági növekedéssel nehéz dolgozni és annak precíz meghatározása, hogy ezek függvényében az egyenleg előjele ténylegesen nulla alá megy-e vagy sem, illetve mennyivel, az túlmutat jelen dolgozat keretein.

8 Összefoglalás

A korábbiakban igyekeztem érzékeltetni, hogy a nyugdíjakról szerzett tapasztalatunk még gyerekcipőben jár. Az elméletileg megalapozottnak vélt Samuelsoni modell csak jó ötven évvel megalkotása után kerül bevezetésre és bár elfogadja a népességcsökkenés hatását, de nem kezeli, így egyre rosszabb nyugdíjakat fog adni. Ráadásul egyelőre ezt is csak néhány ország lépte meg, míg a többiek – köztük Magyarország is – halmozza az alátámasztás nélküli szolgáltatással meghatározott nyugdíjígéreteket. Azon a tényezőnek, amitől a folyó finanszírozású öregségi ellátás fedezete elsősorban függ, nevezetesen a termékenységnek a kezelését még nem célozta meg szakirodalom kellő hatékonysággal. Jelenlegi tudásunk alapján nincs okunk arra várni, hogy a termékenység szintje majd egyszer visszaáll olyan szintre, ami mellett finanszírozható a társadalombiztosítás, hiszen a csökkenés okairól sincs még alátámasztott, egzakt elmélet. A szükséges lépés tehát az, hogy a termékenységben rejlő kockázatot kezeljük.

Úgy látom, hogy ez, hosszú távú, kvantifikálható kockázat lévén, egy olyan terület, aminek helye van az aktuáriusi tudományokon belül. Meglátásom szerint a téma érzékenysége és korunk „prűdsége” miatt nem talál visszhangra a sok aggály, ami születésszám visszaesésével kapcsolatban merül fel. Ezért a legtöbb ország kormányai (már amelyik egyáltalán hajlandó foglalkozni a témával) csendben magukra vállalják a jelenlegi rendszer mesterséges életben tartását. Ennek sikerére azonban csak azoknak van reményük, akik elég nemzeti vagyonnal rendelkeznek és ezt nem sajnálják erre költeni.

Alternatív útnak a Banyár József által körvonalazott humán tőkével feltőkésített nyugdíjrendszerre való átállást látom. Ennek akadálya egyáltalán nem technikai. Ahhoz, hogy ez a javaslat komolyabb megfontolásra találjon, át kellene gondolnunk, hogy milyen értékeket szeretnénk a nyugdíjrendszer által közvetíteni. A jelenlegi nyugdíjrendszer olyan gondolatokat tükröz, amik nem is igazán bírnak értékrendi tartalommal, ráadásul nagyon úgy látom, hogy megalkotásának mikéntje inkább véletlenszerű volt, mint tudatos döntés. Tulajdonképpen a realitások talajára kellene visszatérni. A nyugdíjrendszer a hagyományos családi kapcsolatok által fenntartott biztonság helyére lett kitalálva. Működhet jobban, ha nagyobb kockázatközösség fog össze a kockázat kezelésére, de működhet rosszabbul, ha nem kezeljük az azt érintő kockázatokat.

A HT rendszert azért lehet még félteni, mert nagyon sok helyen lehet félreérteni a ma megszokott, fősodrú nézőpontból. Igyekeztem ezeket a nézőpontokat is a lehető legmélyebben bemutatni és fonákjaira fényt deríteni. Személyes aggályom az, hogy ha napirendre is veszik ezt az irányú nyugdíjreformot, politikus legyen a talpán, aki el tudja ezt

fogadtatni. A mai döntéshozók arra kényszerülnek, hogy egyszerű politikai szólamokkal, tömör és rövid szlogenekkel kommunikáljanak a társadalomhoz, amiknek egyszerű, könnyen felfogható tartalmuk van. Egy ilyen átállást nehéz lenne megfelelően közvetíteni, ami a mindenkori ellenzéknek kihagyhatatlan alkalmat ad a félreértések propaganda szerű terjesztésére. A szándékos félreértéseket kihasználó politikai haszonszerzésre pedig Magyarországon épp a legutóbbi nagyobb volumenű nyugdíjreform, a magánnyugdíj pénztárak megszüntetésének idején volt példa bőven.

9 Irodalomjegyzék

Aaron, Henry (1966) The Social Insurance Paradox. *The Canadian Journal of Economics and Political Science / Revue canadienne d'Economie et de Science politique*, Vol. 32, No. 3, p. 371-374

Banyár József (2016) Possible Reforms of Pay-as-you-go Pension Systems, *EUROPEAN JOURNAL OF SOCIAL SECURITY* 18: 3 pp. 286-308., 23 p.

Banyár József (2020a) Egy emberi tőkével feltőkésített nyugdíjrendszer körvonalai, In Banyár-Németh (szerk.) (2020)

Banyár József (2020b) Az idősödés problémájának átdefiniálása és ennek implikációi, *Biztosítás és Kockázat*, 7. évf., 3-4. szám, p. 28-48

Banyár József (2020c) A feleslegesre van pénzünk, a szükségesre pedig nincs időnk? Hozzászólás Árva László és Várhelyi Tamás *Elmозdulás a minőségi turizmus felé* című tanulmányához. *Polgári Szemle*, 16. évf. 4–6. szám, 2020, 279–284.

Becker G. S. (1974) A Theory of Social Interaction. *Journal of Political Economy* 82, p. 1063-1093

Booth, Heather (2006) Demographic forecasting: 1980 to 2005 in review, *International Journal of Forecasting* 22 (2006) 547 – 581

Brass, William (1960) *Population Studies*, Nov., 1960, Vol. 14, No. 2 (Nov., 1960), pp. 148-162

Broström, Göran (1985) Practical aspects on the estimation of the parameters in Coale's model for marital fertility. *Demography*, 22.4, pp. 625-631.

Buchanan, James (1968) Social Insurance in a Growing Economy: A Proposal for Radical Reform, *National Tax Journal*, Vol. 21, No. 4 (December 1968), pp. 386-395

Caldwell, J. C. (1976) Toward A Restatement of Demographic Transition Theory. *Population and Development Review*, Vol. 2, No. 3/4 (Sep. - Dec., 1976), pp. 321-366

Carlsson, G. (1966): The decline of fertility: innovation or adjustment process. *Population Studies*. 1966. p. 149-177.

Chandola, T.; Coleman T. A. and Hiorns R. W. (1999) Recent European fertility patterns: Fitting curves to 'distorted' distributions, *Population Studies*, 53 (1999), 317–329

Cummins, Neil (2009) Why did fertility decline?: an analysis of the individual level economics correlates of the nineteenth century fertility transition in England and France. PhD thesis, The London School of Economics and Political Science (LSE).

Demeny, P. (1987). Re-Linking Fertility Behavior and Economic Security in Old Age: A Pronatalist Reform. *Population and Development Review*, 13(1), 128-132. doi:10.2307/1972124

Easterlin, R.A. (1975): An Economic Framework for Fertility Analysis. *Studies in Family Planning*, Vol. 6. No. 3. p. 54—63.

Ellison, Joanne; Dodd, Erenkul and Forster, Jonathan (2020) Forecasting of cohort fertility under a hierarchical Bayesian approach, *Royal Statistical Society*, Volume 183, Issue 3, Pages 829-856

Gilje, E. és Yntema L. (1970) The Shifted Hadwiger Fertility Function, Working Papers from the Central Bureau of Statistics of Norway

Grósz Attila, Sárosdi Zsombor, Biró Gergely és Molnár, Péter (2020) Babaváró hitelek pénzáramának modellezése – egy újszerű megközelítés. *GAZDASÁG ÉS PÉNZÜGY*, 7 (3). pp. 258-282. ISSN 2415-8909

Hablicsek László (1982) A korszpecifikus termékenységi arányszámok modellezése, *Sigma* 1982. évi 4/4 szám

Henry, Louis (1961), "Some Data on Natural Fertility," *Eugenics Quarterly*, 8, 81-91

Hoem, J. M.; Madsen, D.; Nielsen J. M.; Olsen, E.; Hansen, H. O. and Rennermalm, B. (1981) Experiments in modelling recent Danish fertility curves, *Demography*, May, 1981, Vol. 18, No. 2 (May, 1981), pp. 231-244

KSH Népeségtudományi Kutatóintézet (1991) Történeti Demográfiai Füzetek 9. szám, pp. 7-20

Lesthaeghe, R. (1980) On the Social Control of Human Reproduction. *Population and Development Review*, Vol. 6, No. 4 (Dec., 1980), p. 527-548.

Márkus Judit (2013) A biztosítási elv teljesülésének vizsgálata a magyar nyugdíjrendszerben egy kohorsz példáján. Diplomamunka, ELTE-BCE

Németh, György (2009) A nyugdíjreformról. *Közgazdasági Szemle*, 56, pp.239-269.

Roback, Paul and Legler Julie (2021) Beyond Multiple Linear Regression. Applied Generalized Linear Models and Multilevel Models in R. <https://bookdown.org/robback/bookdown-BeyondMLR/>

Samuelson, P.A. (1958) An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money. *Journal of political economy*, 66(6), pp.467-482.

Scheubel, Beatrice (2013) Bismarck's institutions: a historical perspective on the social security hypothesis. Mohr Siebeck. pp.1-187

Schmertmann, Carl; Zagheni, Emilio; Goldstein, Joshua R. and Myrskylä Mikko (2014) Bayesian Forecasting of Cohort Fertility, *Journal of the American Statistical Association* 109(506)

Sinn, H.W. (2004) The pay-as-you-go pension system as fertility insurance and an enforcement device. *Journal of Public Economics*, 88(7-8), pp.1335-1357.

Szentgáli, T. (1991) A demográfiai átmenet elmélete. *Történeti Demográfiai Füzetek* 9. szám, p. 21-34.

Wilson, Chris; Jim Oeppen; and Mike Pardoe. 1988. "What is Natural Fertility? The Modelling of a Concept." *Population Index* 54(1):4-20.

Xie, Yu and Pimentel, Ellen Efron (1992) Age Patterns of Marital Fertility: Revising the Coale-Trussell Method, *Journal of the American Statistical Association* , Dec., 1992, Vol. 87, No. 420 (Dec., 1992), pp. 977-984

10 Függelék

10.1 Demográfiai adatok

1.2.2. A női népesség száma életkor és családi állapot szerint, 2019. január 1.

Korév (év)	Születési év	Hajadon	Házass	Özvegy	Elvált	Összesen
0	2018	45 129	–	–	–	45 129
1	2017	45 879	–	–	–	45 879
2	2016	46 405	–	–	–	46 405
3	2015	44 989	–	–	–	44 989
4	2014	45 666	–	–	–	45 666
0–4	2014–2018	228 068	–	–	–	228 068
5	2013	43 971	–	–	–	43 971
6	2012	44 301	–	–	–	44 301
7	2011	43 178	–	–	–	43 178
8	2010	44 434	–	–	–	44 434
9	2009	47 410	–	–	–	47 410
5–9	2009–2013	223 294	–	–	–	223 294
10	2008	48 887	–	–	–	48 887
11	2007	47 925	–	–	–	47 925
12	2006	49 722	–	–	–	49 722
13	2005	47 674	–	–	–	47 674
14	2004	46 215	–	–	–	46 215
10–14	2004–2008	240 423	–	–	–	240 423
15	2003	46 129	–	–	–	46 129
16	2002	47 261	82	–	–	47 343
17	2001	47 165	301	–	–	47 466
18	2000	47 663	590	2	9	48 264
19	1999	46 355	937	–	14	47 306
15–19	1999–2003	234 573	1 910	2	23	236 508
20	1998	47 789	1 516	2	36	49 343
21	1997	48 478	2 175	3	73	50 729
22	1996	51 616	3 205	5	121	54 947
23	1995	53 165	4 626	14	160	57 965
24	1994	52 663	6 288	13	314	59 278
20–24	1994–1998	253 711	17 810	37	704	272 262
25	1993	50 867	8 249	17	434	59 567
26	1992	48 771	11 196	25	645	60 637
27	1991	47 391	14 166	30	860	62 447
28	1990	44 111	16 666	26	1 019	61 822
29	1989	39 518	18 550	42	1 325	59 435
25–29	1989–1993	230 658	68 827	140	4 283	303 908
30	1988	36 238	20 887	68	1 719	58 912
31	1987	33 622	23 025	88	2 166	58 901
32	1986	31 944	25 027	130	2 819	59 920
33	1985	29 741	27 043	143	3 431	60 358
34	1984	27 444	27 102	170	3 880	58 596
30–34	1984–1988	158 989	123 084	599	14 015	296 687
35	1983	26 438	28 485	196	4 609	59 728
36	1982	25 871	30 913	278	5 520	62 582
37	1981	26 096	34 566	316	6 578	67 556
38	1980	25 981	36 195	440	8 129	70 745

39	1979	26 042	39 350	502	9 506	75 400
35-39	1979-1983	130 428	169 509	1 732	34 342	336 011
40	1978	25 444	41 610	658	11 030	78 742
41	1977	24 922	44 186	775	12 779	82 662
42	1976	23 882	46 169	966	14 752	85 769
43	1975	23 221	48 193	1 244	16 885	89 543
44	1974	20 727	46 050	1 435	17 602	85 814
40-44	1974-1978	118 196	226 208	5 078	73 048	422 530
45	1973	15 486	39 910	1 414	15 686	72 496
46	1972	14 256	39 252	1 709	16 297	71 514
47	1971	12 655	38 959	1 938	16 700	70 252
48	1970	11 595	39 652	2 333	17 744	71 324
49	1969	10 322	40 137	2 795	18 239	71 493
45-49	1969-1973	64 314	197 910	10 189	84 666	357 079
50	1968	9 377	40 561	3 381	18 529	71 848
51	1967	8 113	38 827	3 746	18 085	68 771
52	1966	6 776	35 604	3 940	16 124	62 444
53	1965	5 738	34 479	4 534	15 473	60 224
54	1964	5 249	34 142	4 952	15 020	59 363
50-54	1964-1968	35 253	183 613	20 553	83 231	322 650
55	1963	4 957	33 468	5 637	14 787	58 849
56	1962	4 317	32 565	6 178	14 201	57 261
57	1961	4 220	34 791	7 295	14 662	60 968
58	1960	4 128	35 823	8 526	15 073	63 550
59	1959	3 846	35 785	9 676	14 807	64 114
55-59	1959-1963	21 468	172 432	37 312	73 530	304 742
60	1958	3 663	36 887	10 981	15 014	66 545
61	1957	3 553	37 366	12 301	15 177	68 397
62	1956	3 803	41 744	15 092	16 654	77 293
63	1955	3 845	43 518	17 659	17 463	82 485
64	1954	3 881	43 977	19 618	17 709	85 185
60-64	1954-1958	18 745	203 492	75 651	82 017	379 905
65	1953	3 542	39 187	19 094	15 660	77 483
66	1952	2 845	34 530	18 954	13 095	69 424
67	1951	2 896	33 552	20 682	12 866	69 996
68	1950	2 759	32 444	22 300	12 067	69 570
69	1949	2 589	29 658	22 628	10 980	65 855
65-69	1949-1953	14 631	169 371	103 658	64 668	352 328
70	1948	2 368	27 663	23 770	10 263	64 064
71	1947	2 129	25 334	23 568	9 488	60 519
72	1946	1 832	21 142	21 684	7 781	52 439
73	1945	1 798	18 959	22 565	7 119	50 441
74	1944	1 788	19 995	26 862	7 225	55 870
70-74	1944-1948	9 915	113 093	118 449	41 876	283 333
75	1943	1 535	16 897	25 471	6 483	50 386
76	1942	1 516	15 578	27 406	6 047	50 547
77	1941	1 351	12 840	26 073	5 034	45 298
78	1940	1 362	11 361	27 894	4 515	45 132
79	1939	1 156	9 257	26 000	3 823	40 236
75-79	1939-1943	6 920	65 933	132 844	25 902	231 599
80	1938	1 086	7 852	25 810	3 481	38 229
81	1937	944	6 466	24 564	3 094	35 068
82	1936	877	5 314	23 517	2 633	32 341
83	1935	717	4 317	22 250	2 296	29 580
84	1934	669	3 508	20 500	1 988	26 665

80–84	1934–1938	4 293	27 457	116 641	13 492	161 883
85	1933	583	2 715	19 735	1 726	24 759
86	1932	504	2 097	18 008	1 431	22 040
87	1931	484	1 475	15 639	1 184	18 782
88	1930	470	1 226	14 200	1 003	16 899
89	1929	371	871	11 321	746	13 309
85–89	1929–1933	2 412	8 384	78 903	6 090	95 789
90–X	–1928	1 692	2 178	41 720	2 346	47 936
Összesen		1 997 983	1 751 211	743 508	604 233	5 096 935
0–14	2004–2018	691 785	–	–	–	691 785
15–39	1979–2003	1 008 359	381 140	2 510	53 367	1 445 376
40–59	1959–1978	239 231	780 163	73 132	314 475	1 407 001
60–	–1958	58 608	589 908	667 866	236 391	1 552 773
15–	–2003	1 306 198	1 751 211	743 508	604 233	4 405 150

1.2.1. A férfinépesség száma életkor és családi állapot szerint, 2019. január 1.

Korév (év)	Születési év	Nőtlen	Házias	Özvegy	Elvált	Összesen
0	2018	47 642	–	–	–	47 642
1	2017	48 309	–	–	–	48 309
2	2016	49 024	–	–	–	49 024
3	2015	47 493	–	–	–	47 493
4	2014	48 069	–	–	–	48 069
0–4	2014–2018	240 537	–	–	–	240 537
5	2013	46 503	–	–	–	46 503
6	2012	47 400	–	–	–	47 400
7	2011	45 655	–	–	–	45 655
8	2010	46 360	–	–	–	46 360
9	2009	49 967	–	–	–	49 967
5–9	2009–2013	235 885	–	–	–	235 885
10	2008	51 278	–	–	–	51 278
11	2007	50 298	–	–	–	50 298
12	2006	52 183	–	–	–	52 183
13	2005	50 922	–	–	–	50 922
14	2004	48 851	–	–	–	48 851
10–14	2004–2008	253 532	–	–	–	253 532
15	2003	48 651	–	–	–	48 651
16	2002	49 830	5	–	–	49 835
17	2001	50 272	17	–	–	50 289
18	2000	51 287	77	–	–	51 364
19	1999	50 157	250	–	–	50 407
15–19	1999–2003	250 197	349	–	–	250 546
20	1998	51 493	570	–	9	52 072
21	1997	53 656	971	–	12	54 639
22	1996	57 140	1 372	2	28	58 542
23	1995	59 386	2 118	7	78	61 589
24	1994	59 557	3 027	7	108	62 699
20–24	1994–1998	281 232	8 058	16	235	289 541
25	1993	59 119	4 006	10	161	63 296
26	1992	59 224	5 806	12	245	65 287
27	1991	58 801	7 895	10	311	67 017
28	1990	55 338	10 027	10	457	65 832
29	1989	51 045	12 335	18	616	64 014
25–29	1989–1993	283 527	40 069	60	1 790	325 446
30	1988	48 355	14 243	29	840	63 467
31	1987	45 334	16 886	26	1 142	63 388

32	1986	42 979	18 860	33	1 480	63 352
33	1985	40 943	21 119	41	1 980	64 083
34	1984	36 729	21 782	42	2 187	60 740
30-34	1984-1988	214 340	92 890	171	7 629	315 030
35	1983	35 345	23 540	54	2 733	61 672
36	1982	35 653	26 361	81	3 367	65 462
37	1981	35 649	29 160	100	4 067	68 976
38	1980	35 013	31 999	111	5 168	72 291
39	1979	35 610	35 366	142	6 287	77 405
35-39	1979-1983	177 270	146 426	488	21 622	345 806
40	1978	34 956	38 332	162	7 424	80 874
41	1977	34 520	41 200	210	8 758	84 688
42	1976	33 808	44 194	245	10 411	88 658
43	1975	33 095	46 686	300	11 979	92 060
44	1974	29 395	45 144	314	12 787	87 640
40-44	1974-1978	165 774	215 556	1 231	51 359	433 920
45	1973	23 622	38 640	322	11 526	74 110
46	1972	21 531	38 535	382	12 339	72 787
47	1971	19 850	38 232	442	12 970	71 494
48	1970	18 773	39 101	539	13 692	72 105
49	1969	17 150	39 855	599	14 542	72 146
45-49	1969-1973	100 926	194 363	2 284	65 069	362 642
50	1968	15 935	39 530	688	15 001	71 154
51	1967	13 900	38 405	761	14 512	67 578
52	1966	11 935	35 055	873	13 341	61 204
53	1965	10 695	33 945	979	12 759	58 378
54	1964	9 727	33 555	1 033	12 451	56 766
50-54	1964-1968	62 192	180 490	4 334	68 064	315 080
55	1963	9 233	32 854	1 257	11 985	55 329
56	1962	8 272	31 912	1 228	11 448	52 860
57	1961	8 267	33 454	1 651	11 830	55 202
58	1960	8 090	35 043	1 889	11 770	56 792
59	1959	7 303	34 798	2 155	11 360	55 616
55-59	1959-1963	41 165	168 061	8 180	58 393	275 799
60	1958	6 828	36 358	2 611	11 346	57 143
61	1957	6 721	37 273	2 918	11 003	57 915
62	1956	6 747	41 753	3 418	11 829	63 747
63	1955	6 436	44 734	4 066	12 282	67 518
64	1954	5 987	46 072	4 658	11 926	68 643
60-64	1954-1958	32 719	206 190	17 671	58 386	314 966
65	1953	4 854	41 628	4 306	10 205	60 993
66	1952	3 905	36 441	4 224	8 458	53 028
67	1951	3 481	36 014	4 408	7 902	51 805
68	1950	3 153	36 208	4 664	7 413	51 438
69	1949	2 614	34 015	4 768	6 348	47 745
65-69	1949-1953	18 007	184 306	22 370	40 326	265 009
70	1948	2 313	32 175	4 818	5 994	45 300
71	1947	1 971	30 198	4 840	5 209	42 218
72	1946	1 507	25 651	4 277	4 327	35 762
73	1945	1 306	23 415	4 276	3 723	32 720
74	1944	1 327	25 904	4 951	3 668	35 850
70-74	1944-1948	8 424	137 343	23 162	22 921	191 850
75	1943	1 096	22 265	4 762	3 204	31 327
76	1942	1 025	21 304	4 908	2 794	30 031
77	1941	931	18 395	4 619	2 323	26 268

78	1940	841	17 087	4 584	1 893	24 405
79	1939	718	14 324	4 271	1 463	20 776
75–79	1939–1943	4 611	93 375	23 144	11 677	132 807
80	1938	629	12 615	4 249	1 317	18 810
81	1937	492	10 765	3 971	1 048	16 276
82	1936	455	9 100	3 771	815	14 141
83	1935	383	8 208	3 672	783	13 046
84	1934	293	7 136	3 598	652	11 679
80–84	1934–1938	2 252	47 824	19 261	4 615	73 952
85	1933	286	6 100	3 545	502	10 433
86	1932	221	5 049	3 241	396	8 907
87	1931	205	4 122	2 847	328	7 502
88	1930	153	3 333	2 702	288	6 476
89	1929	143	2 399	2 188	231	4 961
85–89	1929–1933	1 008	21 003	14 523	1 745	38 279
90–X	–1928	530	5 862	8 204	598	15 194
Összesen		2 374 128	1 742 165	145 099	414 429	4 675 821
0–14	2004–2018	729 954	–	–	–	729 954
15–39	1979–2003	1 206 566	287 792	735	31 276	1 526 369
40–59	1959–1978	370 057	758 470	16 029	242 885	1 387 441
60–	–1958	67 551	695 903	128 335	140 268	1 032 057
15–	–2003	1 644 174	1 742 165	145 099	414 429	3 945 867

Továbbá korszpecifikus termékenységi ráták a Human Fertility Database honlapjáról:

Hungary, Period fertility rates by calendar year, age and birth cohort (Lexis triangles) Last modified: 14/11/2018

10.2 2018-as KSH halandósági tábla

Mortality table		KSH 2018	
Age	Male (lx)	Female	
0	100 000	100 000	
1	99 971	99 972	
2	99 940	99 961	
3	99 930	99 948	
4	99 911	99 939	
5	99 905	99 935	
6	99 902	99 931	
7	99 898	99 925	
8	99 891	99 917	
9	99 882	99 909	
10	99 873	99 902	
11	99 865	99 897	
12	99 858	99 894	
13	99 849	99 891	
14	99 831	99 883	
15	99 812	99 873	
16	99 787	99 859	
17	99 755	99 839	
18	99 715	99 813	

19	99 669	99 782
20	99 616	99 748
21	99 561	99 714
22	99 505	99 682
23	99 449	99 655
24	99 393	99 630
25	99 333	99 606
26	99 269	99 581
27	99 198	99 555
28	99 121	99 526
29	99 035	99 494
30	98 944	99 458
31	98 848	99 419
32	98 749	99 375
33	98 645	99 326
34	98 535	99 273
35	98 419	99 214
36	98 293	99 151
37	98 157	99 085
38	98 009	99 016
39	97 847	98 940
40	97 666	98 856
41	97 463	98 759
42	97 238	98 647
43	96 987	98 517
44	96 703	98 367
45	96 377	98 196
46	96 001	98 003
47	95 570	97 788
48	95 076	97 547
49	94 510	97 279
50	93 860	96 977
51	93 115	96 639
52	92 264	96 260
53	91 300	95 837
54	90 221	95 367
55	89 027	94 843
56	87 721	94 260
57	86 303	93 612
58	84 776	92 898
59	83 138	92 116
60	81 390	91 268
61	79 532	90 356
62	77 564	89 383
63	75 491	88 348
64	73 326	87 249
65	71 080	86 084
66	68 776	84 855

67	66 431	83 569
68	64 052	82 220
69	61 637	80 794
70	59 174	79 267
71	56 666	77 627
72	54 120	75 868
73	51 536	73 979
74	48 901	71 932
75	46 200	69 700
76	43 280	67 112
77	40 379	64 377
78	37 489	61 477
79	34 606	58 391
80	31 726	55 105
81	28 850	51 607
82	25 982	47 891
83	23 131	43 958
84	20 314	39 824
85	17 553	35 520
86	14 878	31 097
87	12 326	26 625
88	9 937	22 198
89	7 757	17 929
90	5 828	13 943
91	4 183	10 363
92	2 845	7 297
93	1 814	4 817
94	1 072	2 944
95	579	1 641
96	280	819
97	120	359
98	44	134
99	13	42
100	3	10

10.3 R kódok, Coale-Trussel és Scmertmann modell

```
#install.packages("HMDHFDplus")
```

```
#install.packages("readxl")
```

```
#install.packages("LexisPlotR")
```

```
#install.packages("MASS")
```

```
#install.packages("ellipse")
```

```

library(HMDHFDplus)
library(readxl)
library(LexisPlotR)
library(MASS)
library(Matrix)

obs_start<-1936
obs_end <- 2017
start_cohort <- 1950
end_cohort <- obs_end-36

hist_lexis_grid <- read_excel("hist50.xlsx") #HFD alapján
l_grid <- as.matrix(hist_lexis_grid)
l <- end_cohort - start_cohort + 1
theta <- read_excel("theta.xlsx")
th <- theta$theta
l

for(age in 15:50)
{
  for(cohort in 1936:2002)
  {
    if(cohort+age > obs_end)
    {
      l_grid[age-15+1,cohort-1936+2] <- 0
    }
  }
}

```

```
}  
}  
}
```

```
hist_matrix <- l_grid[1:36,(2+start_cohort-obs_start):(start_cohort-obs_start+l+1)]
```

```
#Singular value decomposition
```

```
hist_svd <- svd(hist_matrix)
```

```
U <- hist_svd$u
```

```
S <- diag(hist_svd$d)
```

```
d <- hist_svd$d
```

```
V <- hist_svd$v
```

```
hist_svd$d
```

```
X_unit <- U[,1:3]
```

```
#Plot components
```

```
plot(15:50,-X_unit[,1], type = "l", col="red",
```

```
ylim=c(-max(abs(X_unit)),max(abs(X_unit))),
```

```
xlab = "Életkor",
```

```
ylab = "y",
```

```
main="Szinguláris felbontás")
```

```
lines(15:50,-X_unit[,2], col="blue")
```

```
lines(15:50,-X_unit[,3], col="green")
```

```
abline(h=0,lty="dashed")
```



```
sum(hist_svd$d[1:3])/sum(hist_svd$d) #Explaining power
```

```
X <- X_unit
```

```
X1 <- -d[1]*X[,1]
```

```
X2 <- -d[2]*X[,2]
```

```
X3 <- -d[3]*X[,3]
```

```
X <- as.matrix(cbind(X1,X2,X3),nrow=30,ncol=3)
```

```
P_X<-X%%solve(t(X)%%X)%%t(X) #30x30-as mátrix
```

```
plot(15:50,+X1+X2+X3, type = "l", col="red",
```

```
  xlab = "Életkor",
```

```
  ylab = "y",
```

```
  main="General Pattern")
```

```
sum(X1,X2,X3)
```

```
for(i in 1:36)
```

```
{
```

```
  print(X1[i]+X2[i])
```

```
}
```

```
length(X1)
```

```
#Prediction with the projection matrix
```

```
#####
```

```
cohort_example <- l_grid[,1973 - obs_start+2]
```

```
sum(cohort_example)
```

```

cohort_example_cut <- c[which(c>0)]
comp1<-X1[which(cohort_example_cut>0)]
comp2<-X2[which(cohort_example_cut>0)]
comp3<-X3[which(cohort_example_cut>0)]

C <- cbind(comp1,comp2,comp3)
beta <-solve(t(C)%*%C)%*%t(C)%*%cohort_example
beta
projected <- beta[1]*X1+beta[2]*X2+beta[3]*X3
plot(15:44,projected, type="l")
lines(15:(14+length(cohort_example_cut)),cohort_example_cut,lty="dashed", col="purple")
sum(projected)

P_C<-C%*%solve(t(C)%*%C)%*%t(C)
P_C%*%cohort_example_cut

#Projection with the full matrix
projected2 <-P_X%*%cohort_example
plot(15:44,projected2, type="l")
lines(15:(14+length(cohort_example_cut)),cohort_example_cut,lty="dashed", col="purple")
sum(projected)

#####

```

```
I_30 <- matrix(diag(30),30)
```

```
M <- I_30 - P_X
```

```
eps <- M %**% hist_matrix
```

```
plot(15:44,eps[,24], type = "l", col="red",
```

```
ylim=c(-max(abs(eps)),max(abs(eps))),
```

```
xlab = "Age", ylab = "residuum")
```

```
for(i in 2:l)
```

```
{
```

```
lines(15:44, eps[,i], col="red")
```

```
}
```

```
omega <- eps%**t(eps)
```

```
omega <- omega/l
```

```
penalty <- c()
```

```
for(i in 1:l)
```

```
{
```

```
penalty[i] <- t(eps[,i])**ginv(omega)**eps[,i]
```

```
}
```

```
mean(penalty)
```

```
#Coale-Trussel
```

```
likelihood <- function(k, m, v, B, E,n)
```

```
{
```

```
s <- 0
```

```

for(i in 1:length(v))
{
  s <- s + B[i]*(k+m*v[i])-E[i]*n[i]*exp(k+m*v[i])
}
return(s)
}

```

```

likelihood2 <- function(k, m, c, v, B, E, n)
{
  s <- 0
  for(i in 1:length(v))
  {
    s <- s + B[i]*(k+m*v[i]+c*v[i]^2)-E[i]*n[i]*exp(k+m*v[i]+c*v[i]^2)
  }
  return(s)
}

```

```

library(readxl)

```

```

#Reading the data

```

```

coale_trussel <- read.csv("CT.csv")

```

```

coale_trussel

```

```

#Data preparation

```

```

exposure <- coale_trussel$exp

```

```
births <- coale_trussel$births
na <- coale_trussel$na
va <- coale_trussel$va
va2 <- va^2
asfr <- births/exposure

#Maximizing the likelihood
maxval <- -10000000
mhat <- -5
khat <- -5
for(m in seq(-1,10,0.01))
{
  for(k in seq(-2.06,11,0.01))
  {
    if(maxval < likelihood(k, m, va, births, exposure, na))
    {
      maxval <- likelihood(k, m, va, births, exposure, na)
      mhat <- m
      khat <- k
    }
  }
}
mhat
khat

hats <- c()
```

```

for(i in 1:6)
{
  hats[i] <- khat + mhat*va[i]
}

#Maximizing the likelihood2
maxval2 <- -10000000
mhat2 <- -5
khat2 <- -5
chat2 <- -5
for(m in seq(-5,5,0.1))
{
  for(k in seq(-5,5,0.1))
  {
    for(c in seq(-5,5,0.1))
    {
      if(maxval2 < likelihood2(k, m, c, va, births, exposure, na))
      {
        maxval2 <- likelihood2(k, m, c, va, births, exposure, na)
        mhat2 <- m
        khat2 <- k
        chat2 <- c
      }
    }
  }
}

```

```

}
khat2
mhat2
chat2

hats2 <- c()

for(i in 1:6)
{
  hats2[i] <- khat2 + mhat2*va[i] + chat2*va[i]^2
}

#Applying regression on the log(ASFR), with simple linear and squared model
r <- log(asfr)
plot(va,r,xlim=c(-2,0.5),ylim=c(-8,0))
lm_lin <- lm(r ~ va)
lm_squared <- lm(r ~ va + va2)
glm_lin <- glm(births ~ va,family=poisson, offset = log(exposure))
glm_squared <- glm(births ~ va + va2,family=poisson, offset = log(exposure))
glm_squared

poi_lin <- c()
for(i in 1:length(va))
{
  poi_lin[i] <- glm_lin$coefficients[1]+glm_lin$coefficients[2]*va[i]
}

```

```
squared <- c()
```

```
for(i in 1:6)
```

```
{
```

```
  squared[i] <- lm_squared$coefficients[1]+lm_squared$coefficients[2]*va[i]+
```

```
  lm_squared$coefficients[3]*va2[i]
```

```
}
```

```
poi_squared <- c()
```

```
for(i in 0:length(seq(min(va)-0.5,max(va)+0.5,0.001)))
```

```
{
```

```
  poi_squared[i] <- glm_squared$coefficients[1]+
```

```
  glm_squared$coefficients[2]*(min(va)-0.5+i*0.001)+
```

```
  glm_squared$coefficients[3]*(min(va)-0.5+i*0.001)^2
```

```
}
```

```
poi_squared_points <- c()
```

```
for(i in 1:length(va))
```

```
{
```

```
  poi_squared_points[i] <- glm_squared$coefficients[1]+
```

```
  glm_squared$coefficients[2]*va[i]+
```

```
  glm_squared$coefficients[3]*va[i]^2
```

```
}
```



```

plot(va,poi_squared_points)
plot(exp(poi_squared_points))

#PLOTS

#Likelihood estimates
par(mfrow=c(2,1))
plot(va,r,xlim=c(-2,0.5),ylim=c(-8,0), xlab="v_a",ylab="Log(ASFR)", pch=19,
     main="ML becslés")
points(va,hats,col="blue", pch=4)
points(va,hats2,col="red", pch=0)

plot(1:6, asfr, ylim=c(0,0.7), xlab="Kohorsz",ylab="ASFR", pch=19)
points(exp(hats),col="blue", pch=4)
points(exp(hats2),col="red", pch=0)
par(mfrow=c(1,1))

5*sum(exp(hats))
5*sum(exp(hats2))
sum(5*asfr)

#Poisson GLM
par(mfrow=c(2,1))
plot(va,r,xlim=c(-2,0.5),ylim=c(-8,0), xlab="v_a",ylab="Log(ASFR)", pch=19,
     main="Általános Lineáris modell")
abline(glm_lin$coefficients, col="blue", lty="dashed")
points(va, poi_squared_points, pch=15, col="red")

```

```
points(va, poi_lin, pch=4,col="blue")
```

```
plot(1:6, asfr,xlab="Kohorsz",ylab="ASFR", pch=19,ylim=c(0,0.4))
```

```
points(1:6, exp(poi_squared_points), pch=15, col="red")
```

```
points(1:6, exp(poi_lin), pch=4,col="blue")
```

```
par(mfrow=c(1,1))
```

```
glm_squared$coefficients
```

```
glm_lin$coefficients
```

```
sum(exp(poi_lin)*5)
```

```
sum(exp(poi_squared_points)*5)
```

```
sum(5*asfr)
```

```
confint(glm_squared)
```

```
confint(glm_lin)
```

```
#install.packages("ellipse")
```

```
library(ellipse)
```

```
confidence.ellipse(glm_lin)
```

```
ci <- ellipse(glm_lin, level=0.95)
```

```
plot(ci, type="l")
```

```
points(glm_lin$coefficients[1],glm_lin$coefficients[2])
```

```
confidence.ellipse(glm_squared)
```

```
ci2 <- ellipse(glm_squared, which=c(2,3),level=0.95)
```

```
plot(ci2, type="l")
```

```
points(glm_lin$coefficients[1],glm_lin$coefficients[2])
```

```
glm_squared$coefficients
```

```
AIC(glm_lin)
```

```
AIC(glm_squared)
```

```
BIC(glm_lin)
```

```
BIC(glm_squared)
```