

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

NÉPHALANDÓSÁGI MODELLEK
HOSSZÚ TÁVÚ ELŐREJELZÉSEINEK
ELEMZÉSE

DIPLOMAMUNKA

HUSZÁRIK ANNA FLÓRA

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc

TÉMAVEZETŐ: VÉKÁS PÉTER

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

OPERÁCIÓKUTATÁS ÉS AKTUÁRIUSTUDOMÁNYOK TANSZÉK



Budapest, 2021

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm elsősorban Vékás Péternek, hogy vállalta a témavezetői feladatokat, és téma kiválasztása mellett segédanyagokkal és szakmai tanácsokkal segítette a szakdolgozatom elkészültét. Köszönöm továbbá a családomnak és a barátaimnak, hogy mindig tanulásra ösztönöztek és támogattak a tanulmányaim során.

NYILATKOZAT

Név: Huszárik Anna Flóra

ELTE Természettudományi Kar, szak: Biztosítási és pénzügyi matematika MSc

NEPTUN azonosító: JIT2EL

Diplomamunka címe:

Néphalandósági modellek hosszú távú előrejelzéseinek elemzése

A **diplomamunka** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021. 12. 31.



a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

| | |
|--|-----------|
| 1. Bevezetés | 5 |
| 2. Módszertani összefoglaló | 7 |
| 2.1. Lee-Carter modell | 7 |
| 2.1.1. Paraméterbecslés | 8 |
| 2.1.2. Előrejelzés | 9 |
| 2.1.3. Kiegészítés | 11 |
| 2.2. Rotált Lee-Carter modell | 12 |
| 2.2.1. A rotáció számszerűsítése | 13 |
| 3. További népszerű halandóság-előrejelző modellek | 15 |
| 3.1. GAPC modellcsalád | 15 |
| 3.2. Poisson Lee-Carter modell | 16 |
| 3.3. Renshaw-Haberman modell | 17 |
| 3.4. APC modell | 17 |
| 3.5. Cairns-Blake-Dowd Model | 18 |
| 3.6. A Plat modell | 18 |
| 4. Szimulációk | 20 |
| 4.1. Magyar néphalandósági adatok elemzése | 20 |
| 4.2. Modellhez használt adatok és csomagok bemutatása | 23 |
| 4.3. Lee-Carter modell alkalmazása | 24 |
| 4.4. Rotációval bővített Lee-Carter modell alkalmazása | 26 |
| 4.5. Európai országok | 31 |
| 4.5.1. Szlovénia | 33 |
| 4.5.2. Észtország | 33 |
| 5. Életjáradék díj kiszámítása | 35 |
| 5.1. Alapvető fogalmak | 35 |

| | |
|--|-----------|
| 5.2. Életjáradék kalkuláció eredményei | 36 |
| 6. Összefoglalás | 38 |

1. Bevezetés

A fenntartható egészségügyi- és nyugdíjrendszer működtetésében és életbiztosítási modellekben kulcsfontosságú a halandósági ráták és a várható élettartam megbízható előrejelzése. A népességelöregedés alulbecslése nyugdíj finanszírozási problémákhoz vezethet, hiszen fontos politikai döntéseket hoznak a várható időskorú népesség alapján.

Az elmúlt évtizedekben egy egyértelmű javulást figyelhetünk meg a mortalitásban minden korosztályra, részben az orvostudomány fejlődésének és az általános tájékozottság terjedésének köszönhetően és a mortalitási adatok javulásával párhuzamosan egyre több néphalandósági modell jelent meg.

Megfigyelhető azonban, hogy míg régebben a fiatalabb korcsoportokban csökkent gyorsabb ütemben a halandósági ráta, ez a felgyorsult javulás inkább már az idősebb korosztályra jellemzőbb. Ezt a jelenséget, ami lényegében egy forgás a kortól függő halandóságjavulást leíró görbében, rotációnak nevezzük.

A halandósági ráták előrejelzésére egy vezető halandóság előrejelző módszerre vált a Lee-Carter modell (1992), ami nem veszi figyelembe a halandóságcsökkenés koronkénti ütemének időbeli megváltozását. Hosszú távon így az előrejelzések nem lesznek megbízhatóak, alulbecslik a várható élettartamot és ezáltal a szükséges fedezetet a biztosításban az időskorú népesség ellátására.

Ennek a rotációnak a figyelembevételéhez a modell egyik publikálója, Ronald D. Lee elkészítette a rotált Lee-Carter modellt (2013), amit elsősorban hosszú távra és magas várható élettartamú országok népességének modellezésére javasol.

A szakdolgozatban vizsgálni fogom az eredeti Lee-Carter modell és a rotációval bővített Lee-Carter modell által adott eredményeket, és következtetéseket vonok le arra vonatkozólag, hogy melyik módszerrel kapunk pontosabb előrejelzéseket.

Szakdolgozatomban az irodalom összefoglalása után a Lee-Carter modellt és a rotált Lee-Carter modellt fogom Európai Unió országok adataira illeszteni R-ben, majd az eredmények kiértékelése után a modellek előrejelzései alapján kiszámolom egy adott egyén életjáradék díját, hogy a modelleket még jobban össze tudjam hasonlítani.

A szakdolgozatomban a koronavírus járvány hatásával nem számoltam, így a kapott következtetéseket a járvány felkavarhatja.

A koronavírus járvány hatására sajnos a halálozások száma minden országban jelentősen megemelkedett, amely elsősorban az időskorú népességet érinti. A dolgozatomban bemutatott modellek részben az időskorú népesség gyorsuló halandóságjavulását feltételezi és a járvány legfőképpen az idősök halandóságát befolyásolja, így a kapott becslések alulbecsülhetik a valós néphalandóságot.

2. Módszertani összefoglaló

Az életbiztosítók biztonságos és nyereséges működéséhez elengedhetetlen az életbiztosítási termékekhez a megfelelő díj és tartalék kalkulálása. Ezen számolásoknak az alapja a halandósági ráták minél pontosabb becslése, hiszen ezek alapján tervezi a biztosító a jövőbeni kiadásait. A halandósági ráták becslésére számos modellt publikáltak az elmúlt évtizedekben.

Az egyik legtöbbit használt és közismert halandóság előrejelző modellt Ronald D. Lee és Lawrence R. Carter publikálta 1992-ben, amely halálozási rátákat becsül az életkor és idő múlásának a figyelembevételével.

2.1. Lee-Carter modell

Jelölje a nyers halandósági vagy más néven mortalitási rátát $x \in \{1, 2, \dots, X\}$ éves korban és $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ időben $m_{x,t}$, ekkor a logaritmus három komponensből áll elő a következőképpen:

$$\ln m_{x,t} = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t}, \quad (1)$$

ahol a_x az átlagos logaritmikus halandósági ráta, b_x fejezi ki, hogy mekkora csökkenés volt az egyes életkorokban ezekben a rátákban, hiszen máshogy csökken fiatal korban mint időskorban, és k_t a halandóság általános szintjét leíró idősor, melyet mortalitási indexnek is szokás nevezni. ϵ pedig normális eloszlású független hibtag:

$$\epsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma^2), \quad (2)$$

ahol $x \in \{1, 2, \dots, X\}$ és $t \in \{1, 2, \dots, T\}$. A halálozási ráták ekkor függetlenek és $\ln m_{x,t}$ is normális eloszlást követ:

$$\ln m_{x,t} \sim N(a_x + b_x k_t, \sigma^2) \quad (3)$$

A paraméterekre identifikációs probléma miatt a következő feltételeknek teljesülnie kell:

$$\sum_{x=0}^X b_x = 1 \quad (4)$$

$$\sum_{t=1}^T k_t = 0 \quad (5)$$

mivel enélkül, $a = a_x, b = b_x, k = k_t$, és $x \in \{1, 2, \dots, X\}, t \in \{1, 2, \dots, T\}$ vektorparaméterek esetén a következő transzformáció is teljesítené az (1) összefüggést; $\tilde{a} = a + \alpha b, \tilde{b} = \frac{1}{\beta} b, \tilde{k} = \beta(k - \alpha 1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$.

2.1.1. Paraméterbecslés

A paraméterek becslésére a széleskörűen elterjedt Maximum Likelihood módszer szokás használni. A log-likelihood függvény, amellett, hogy mortalitások logaritmusáról (2) feltettük a normális eloszlást :

$$l = -\frac{1}{2}XT \ln(2\pi) - XT \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t)^2 \quad (6)$$

Az (6) kifejezés maximalizálásához $\sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t)^2$ -t kell minimalizálni, tetszőleges $\sigma > 0$ -ra. Levezetés nélkül következnek az egyes paraméterek becslései:

$$\hat{a}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln m_{x,t} \quad (7)$$

$$\hat{b} = MM^T. \quad (8)$$

\hat{b} az MM^T mátrix maximális sajátértékéhez tartozó egységnyi normájú sajátvektor, ahol M a soronként centrált logaritmikusan mortalitási ráták mátrixa. Ekkor k_t becslése:

$$\hat{k} = M^T \hat{b} \quad (9)$$

A megoldás levezetéséről Vékás (2016) doktori értekezésében olvashatunk részletesebben.

A becslés minden halandósági megfigyelést azonos súllyal vesz figyelembe, ezért a szerzők \hat{k}_t kiigazítását javasolják. A kiigazítás szükségességét az indokolja, hogy az egyes időpontokban és korcsoportokban a népesség száma jelentősen eltérhet. A javasolt egyenletrendszer a mortalitási index kiigazítására:

$$\hat{k}^{adj} = \{k \in \mathbb{R}^T : D_t = \sum_x D_{x,t} = \sum_x E_{x,t} \exp(\hat{a}_x + \hat{b}_x k_t)\}, \quad (10)$$

ahol $D_{x,t}$ a t . időszakban x évesen elhunytak száma és $E_{x,t}$ pedig a kitettsége. Ha minden előforduló időszakban volt haláleset, akkor következik, hogy az egyenletrendszer megoldása létezik és egyértelmű.

2.1.2. Előrejelzés

A Lee-Carter modell egyik előnye, hogy a jövőbeli értékek előrejelzéséhez csak egy paramétert kell előrejelezni, k_t -t, hiszen az a_x és b_x együtthatók értékei időben állandóak. A modell szerzői azt állapították meg több idősor elemzése után, hogy az ARIMA(0,1,0) folyamat általában jól illeszkedik az adatokon. A paraméter időbeli változásának egyenlete tehát:

$$\hat{k}_t^{adj} = \hat{k}_{t-1}^{adj} + s + \epsilon_t \quad (t = 2, \dots, T), \quad (11)$$

ahol a \hat{k}_1^{adj} valós indulási érték ismert, s az eltolás paramétert jelöli és ϵ_t a hibatag. ϵ_t -k függetlenek egymástól, és normális eloszlásúak 0 várható értékkel és azonos $\sigma > 0$ szórással.

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (t = 2, \dots, T) \quad (12)$$

A mortalitás \hat{k}_t^{adj} indexről tehát tudjuk, hogy független növekményű, és azonos eloszlású valószínűségi változók, trend meredekségét pedig s mutatja:

$$\hat{k}_t^{adj} - \hat{k}_{t-1}^{adj} \sim N(s, \sigma^2) \quad (t = 2, \dots, T) \quad (13)$$

Az s eltolásos paraméter és az eloszlás varianciájának egyenleteit megkaphatjuk a Maximum Likelihood becslési eljárással:

$$\hat{s} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{k}_t^{adj} - \hat{k}_{t-1}^{adj}) = \frac{\hat{k}_T^{adj} - \hat{k}_1^{adj}}{T-1} \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{k}_t^{adj} - \hat{k}_{t-1}^{adj} - \hat{s})^2. \quad (15)$$

A kiigazított mortalitási indexek előrejelzéseit extrapolálással kapjuk meg a $T + j$. időpontra:

$$\mathbb{E}(\hat{k}_{T+j}^{adj}) = \mathbb{E}(\hat{k}_T^{adj} + \sum_{i=1}^j (\hat{k}_{T+i}^{adj} - \hat{k}_{T+i-1}^{adj})) = \quad (16)$$

$$= \hat{k}_T^{adj} + \sum_{i=1}^j \mathbb{E}(\hat{k}_{T+i}^{adj} - \hat{k}_{T+i-1}^{adj}) = \quad (17)$$

$$= \hat{k}_T^{adj} + j\hat{s} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

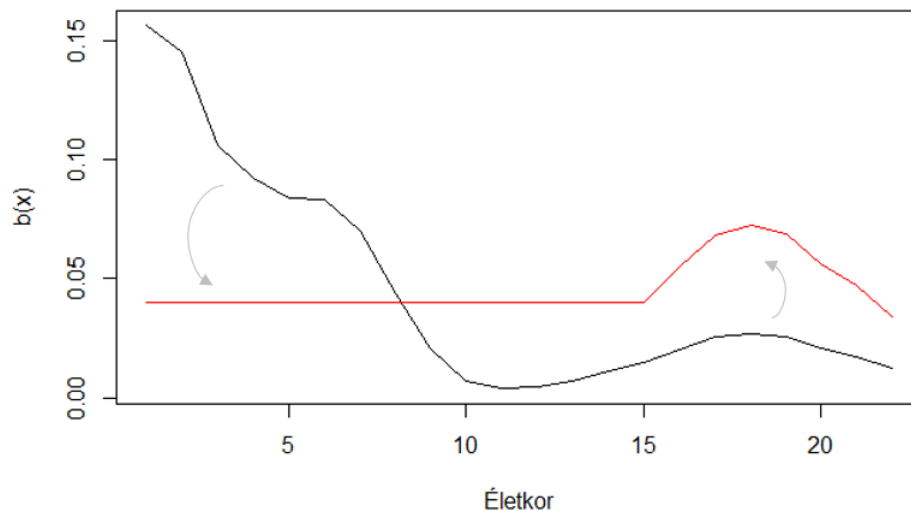
A log-halandósági ráták előrejelzése a $T + j$ -re felírható az alapegyenletbe való visszahelyettesítéssel:

$$\ln \hat{q}_{x,t} = \hat{a}_x + \hat{b}_x(\hat{k}_T^{adj} + j\hat{s}) \quad (x = 1, 2, \dots, X) \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (19)$$

2.1.3. Kiegészítés

A modellben általában feltételezik, hogy k_t valamilyen lineáris trendet követ, a b_x pedig időtől független, így a javulás mértéke a halandóságban időben állandó és csak az életkortól függ. Tehát ez a fajta módszer nem veszi figyelembe azt, hogy az évek múlásával változhat a halandóság javulása az életkorcsoportokban.

Vékás (2019) cikkében bemutatott stilizált példájához hasonlóan a rotációt a következő képen szemléltetem. Az ábra 1950-2005-ös magyar néphalandósági adatokra illesztett rotált Lee-Carter modell által visszaadott eredményt mutatja, melyet később részletesebben is bemutatok. Jól látszik, hogy a b_x görbe, amely a halandóság javulását mutatja, az idő elteltével rotálódik, és a csecsemőkorban és fiatalabb életkorokban a halandóság javulásának mértéke csökkenni, az idősebb korosztályokban pedig nőni fog.



1. ábra. Magyar halandósági adatokra illesztett példa. Saját szerkesztés

2.2. Rotált Lee-Carter modell

A Li, Lee és Gerland (2013) által bemutatott módszert alacsony halandósági rátával rendelkező országokra és elsősorban hosszútávú előrejelzésekre javasolják. A modellbővítés célja megragadni azt a rotációnak nevezett jelenséget, hogy az életkor előrehaladtával a halandóság javulása változik, vagyis csecsemőkorban és fiatal gyermekkorban a halandóság javulása lassul, míg az idősebb korosztályokban gyorsulni fog.

A rotált Lee-Carter modell az eredeti Lee-Carter modellt bővíti ki, így b_x helyett már az életkortól is függő $B_{x,t}$ szerepel benne, amelyet a kor-specifikus hanyatlás vektorának neveznek.

Az új egyenlet felírva:

$$\ln m_{x,t} = a_x + B_{x,t}k_t + \epsilon_{x,t} \quad (20)$$

Ez a $B_{x,t}$ próbálja megfogni azt a forgást, hogy a mortalitás időbeli változása az életkortól is függ, vagyis időskorban a csökkenés gyorsul, csecsemőkorban vagy fiatal korban pedig lassul.

$B_{x,t}$ képlete kiírva:

$$B_{x,t} = \begin{cases} b_0(x) & e_0(t) < 80 \\ (1 - w_s(t))b_0(x) + w_s(t)b_u(x) & 80 \leq e_0(t) < e_0^u \\ b_u(x) & e_0^u \leq e_0(t) \end{cases}$$

A $B_{x,t}$ -ben szereplő súlyfüggvény a következő:

$$w_s(t) = \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \sin \left[\frac{\pi}{2} (2w(t) - 1) \right] \right] \right\}^p \quad (21)$$

$$w(t) = \frac{[e_0(t) - 80]}{[e_0^u - 80]} \quad (22)$$

Az eredeti modellből számolt b_x -et veszi alapul és $b_u(x)$ lesz a végső érték (amin a rotáció befejeződik). Az eredeti Lee-Carter modellhez hasonlóan

$b_u(x)$ -re teljesülnie kell a feltételnek, hogy:

$$\sum_{x=0}^{\omega} b_u(x) = 1. \quad (23)$$

A kezdeti várható élettartam, $e_0(t)$, amely szintén az eredeti Lee-Carter módszerrel van számolva, egy végső értékhez tart, p -vel szabályozva a annak konvergencia ütemét.

2.2.1. A rotáció számszerűsítése

A rotáció számszerűsítéséhez következő egyenleteket használjuk fel. Minden korcsoportra kiszámítható a halandóságjavulási ráta:

$$r_{xt} = -\ln\left(\frac{m_{x,t+1}}{m_{x,t}}\right) \quad (24)$$

A halandóságjavulási ráták lineáris trendjének meredekségével felírható a hosszútávú halandóságjavulás átlagos gyorsulási rátája:

$$\beta = \frac{\sum_{t=1}^n (r_{xt} - \tilde{r}_x)(t - \tilde{t})}{\sum_{t=1}^n (t - \tilde{t})^2} \quad (25)$$

x korosztály és t naptári évek jelölések mellett.

A rotáció jelenlétének a megerősítéséhez érdemes a Spearman-féle ρ rangkorrelációs együtthatóval vizsgálni, hogy van-e összefüggés az életkor és a halandóságjavulás üteme között. Ezt vizsgálta Vékás (2019) az Európai Unió adatain, és arra következtet, hogy a tagországok nagy részében kimutatható az összefüggés, és a női halandósági adatokon jelentősebbnek mutatkozik, mint a férfiaknál.

A népességszámmal súlyozott Spearman-féle ρ rangkorrelációs együttható:

$$\rho = \frac{\sum_{t=1}^n P_x(\text{rank}(\beta_x) - \mu)(x - \nu)}{\sqrt{\sum_{t=1}^n P_x(\text{rank}(\beta_x) - \mu)^2} \sqrt{\sum_{t=1}^n P_x(x - \nu)^2}} \quad (26)$$

ahol μ és ν :

$$\mu = \frac{\sum_{t=1}^n P_x \text{rank}(\beta_x)}{\sum_{t=1}^n P_x} \quad (27)$$

$$\nu = \frac{\sum_{t=1}^n P_x x}{\sum_{t=1}^n P_x} \quad (28)$$

Tehát ezekkel az egyenletekkel meghatározhatjuk hogy milyen mértékben történt rotáció, ha volt egyáltalán. A felírt egyenletek megmutatják a gyorsulás és az életkor közötti összefüggés mértékét. Figyelembevéve, hogy népesség nagysága korcsoportonként jelentősen eltér, ezért P_x reprezentálja népesség mérete szerinti súlyokat.

3. További népszerű halandóság-előrejelző modellek

A halandóság javulása miatt a megfelelő előrejelzések készítése érdekében egyre több néphalandósági modell jelent meg, hogy gondosan előre tudják jelezni nyugdíjrendszerek és életjáradék-szolgáltatók a halálozási arányokat és a várható élettartamokat.

A szakirodalomban rengeteg alternatív halandóság-előrejelző módszerrel találkozhatunk, ezek közül fogok most bemutatni néhányat.

A következő alfejezetben a halandósági modellezésre sokak által használt GAPC modellcsalád általános modellkeretét és neveztes tagjait mutatom be.

3.1. GAPC modellcsalád

A halandóság-előrejelző módszerek egységesítésére tett kísérletet Hunt-Blake (2014), Currie (2016) és Villegas és szerzőstársai (2016). Az egységes modellkeret a GAPC modellcsalád megnevezést kapta, amely az angol *Generalized Age-Period-Cohort* (Általánosított korcsoport-időszak-kohorsz) rövidítése.

A modell felírásához szükséges adataink: $D_{x,t} \in \mathbb{N}$, vagyis a bekövetkezett halálesetek száma, és a kezdeti kitéttység $E_{x,t}^0 \in \mathbb{N}^+$, ha az időszak kezdőpontjában tekintjük a létszámot, vagy központi kitéttységek $E_{x,t}^c > 0$, ha az időszak alatt élt személyek átlagos létszámát vesszük figyelembe.

A feltételezés, hogy a halálozások számának Poisson vagy Binomiális eloszlása van a rendelkezésre álló adatoktól függően:

$$\tilde{D} \sim \text{Poisson}(E_{x,t}^c m_{x,t}^c)$$

$$\tilde{D} \sim \text{Bin}(E_{x,t}^0, m_{x,t}^0)$$

A GAPC modellcsaládban halandósági ráták egy függvényét becslik, amely függvényt linkfüggvénynek nevezzük. A linkfüggvény központi kitéttységek,

valamint Poisson-eloszlás esetében a logaritmikus:

$$g(q) = \ln q,$$

máskülönben kezdeti kitettségek és Binomiális-eloszlás használatakor pedig a logit linkfüggvény:

$$g(q) = \ln \frac{q}{1-q}.$$

A linkfüggvénybe a halandósági rátát beírva kapjuk meg a szisztematikus komponenst:

$$\eta_{x,t} = g(m_{x,t}),$$

amely segítségével már felírhatjuk a GAPC modellkeret általános egyenletét:

$$\eta_{x,t} = a_x + \sum_{i=1}^N b_x^{(i)} k_t^{(i)} + b_x^{(0)} \gamma_{t-x}.$$

Az általánosított egyenlet paraméterei:

a_x : A Lee-Carter modellhez hasonlóan, adott időszak átlagos halálozási rátái korcsoporttól függően, megragadva a halandósági görbe alakját.

$b_x^{(i)}$: Kortól függen megmutatja az halandósági ráták érzékenységét.

$k_t^{(i)}$: A mortalitási index a halandósági időbeli változását írja le.

γ_{t-x} : Jelöli a kohorszhatást, a $t - x$ időben született kohorsz mortalitás átlaghoz képesti különbözőségét mutatja.

3.2. Poisson Lee-Carter modell

Az alap Lee-Carter modell (1992) (1) egyenlet hibatag nélküli változatát írta fel Brouhns és szerzőtársai (2002):

$$\eta_{x,t} = a_x + b_x k_t \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

ahol $\eta_{x,t} = \ln m_{x,t}$ Poisson-eloszlású valószínűségi változó lesz.

Az alapegyenlethez hasonlóan identifikációs paraméter megszorítások itt is érvényesek:

$$\sum_{x=0}^X b_x = 1$$

$$\sum_{t=1}^T k_t = 0$$

3.3. Renshaw-Haberman modell

A Renshaw-Haberman modell az előző pontban bemutatott Poisson Lee-Carter modell egyik bővített változata, amely figyelembe veszi a kohorszhatást. Kohorszhatásnak nevezzük azt a jelenséget, hogy a mortalitás nem csak az évtől és életkortól függ, hanem számos más jelenség is befolyásolja, például születés év. A Renshaw és Haberman (2006) által javasolt modell, logaritmikus kapcsolást feltételezve:

$$\eta_{x,t} = a_x + b_x^{(1)} k_t^{(1)} + b_x^{(0)} \gamma_{t-x}$$

$$(x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T)$$

A javasolt paramétermegkötések az identifikációs probléma orvoslására:

$$\sum_{x=0}^X b_x^{(1)} = 1 \quad \sum_{x=0}^X b_x^{(0)}(x) = 1$$

$$\sum_{t=1}^T k_t = 0 \quad \sum_{i=1-X}^{T-1} \gamma_i = 0$$

3.4. APC modell

Az APC (*Age-Period-Cohort*) modellt Cartensen (2007) javasolta, amely az előző bekezdésben bemutatott Renshaw-Haberman modell egy speciális változata, $b^{(0)}(x) = 1$ és $b_x^{(1)} = 1$ feltételek fennállása esetén. A modell:

$$\eta_{x,t} = a_x + k_t^{(1)} + \gamma_{t-x}$$

$$(x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T)$$

A következő identifikációs megszorítások szükségesek:

$$\sum_{t=1}^T k_t = 0$$

$$\sum_{i=1-X}^{T-1} \gamma_i = 0$$

$$\sum_{i=1-X}^{T-1} i\gamma_i = 0$$

3.5. Cairns-Blake-Dowd Model

A hosszú élettartam kockázat modellezésére javasolt az additív életkorhatás és kohorszhatás nélküli Cairns–Blake–Dowd (2006) modell. A kéttényezős CBD modell a következőképpen fejezhető ki:

$$\eta_{x,t} = a_x + k_t^{(1)} + (x - \tilde{x})k_t^{(2)}$$

$$(x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

ahol jelölje $\tilde{x} = \frac{1+X}{2}$ a korcsoportok számtani átlagát.

A modell alkalmazását elsősorban $x_0 = 60$ éves kor feletti halandóság-előrejelzésére javasolják a szerzők, ahol $\eta_{x,t}$ az $x_0 + x$ évesek halandóságát fejezi ki. A CBD modellben nincs szükség identifikációs megszorításokra.

3.6. A Plat modell

A modelleszaládban utolsóként a Plat (2009) modellt mutatom be, amely a fiatalabb életkorú halandóság nem lineáris jellemzőit építi be modellbe. Az

alapul szolgáló CBD modellt egészíti ki háromtényezősé és a Lee-Carter modellből is épít be elemeket:

$$\eta_{x,t} = a_x + k_t^{(1)} + (x - \tilde{x})k_t^{(2)} + (\tilde{x} - x)^+ k_t^{(3)} + \gamma_{t-x}$$

$$(x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

ahol $(\tilde{x} - x)^+$ jelöli $\max\{\tilde{x} - x; 0\}$ és $\tilde{x} = \frac{1+X}{2}$ továbbra is a korcsoportok számtani átlaga. A Plat modellnél a következő megkötések javasoltak:

$$\sum_{t=1}^T k_t^{(1)} = 0 \quad \sum_{t=1}^T k_t^{(2)} = 0 \quad \sum_{t=1}^T k_t^{(3)} = 0$$

$$\sum_{t=1-X}^{T-1} \gamma_i = 0 \quad \sum_{t=1-X}^{T-1} i\gamma_i = 0$$

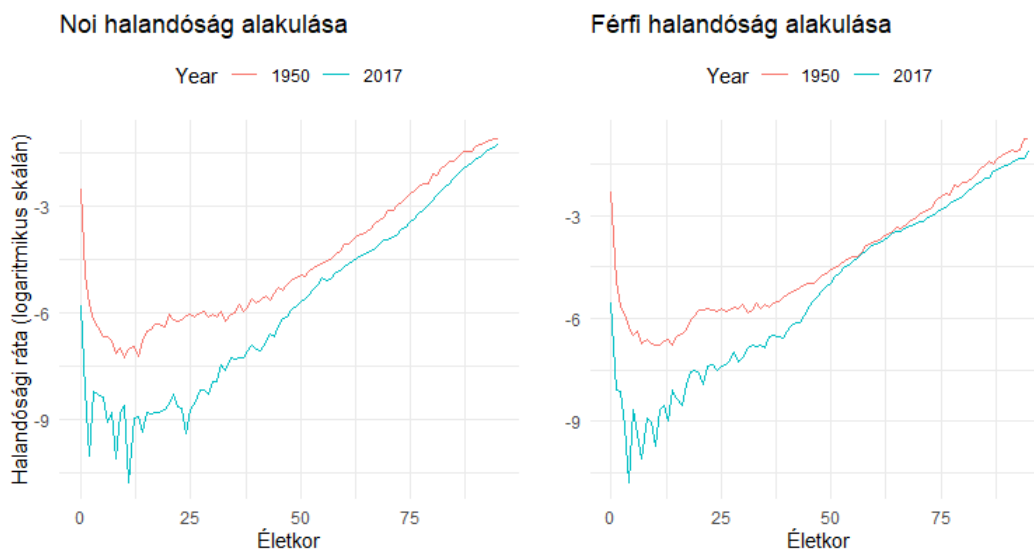
4. Szimulációk

Az elemzéseket a nyílt forráskódú RStudio fejlesztési környezetben készítettem R nyelvvel.

4.1. Magyar néphalandsági adatok elemzése

A vizualizációk elkészítéséhez a dplyr, ggplot2 és gridExtra csomagokat használtam. A vizualizációkhoz felhasznált adatokat Human Mortality Database oldaláról töltöttem le.

Az első ábrán magyar halandsági rátákat látjuk logaritmikus skálán a legkorábbi (1950) és a legkésőbbi (2017) elérhető évben.



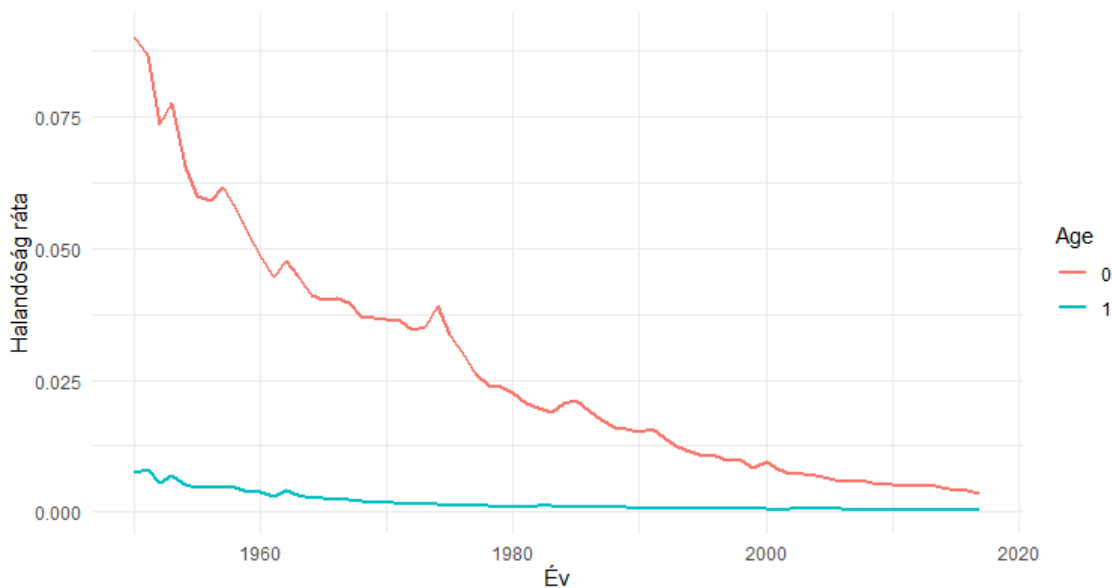
2. ábra. Magyar halandsági ráták 1950-ben és 2017-ben. Saját szerkesztés

Láthatjuk, hogy a halandsági ráta magas értékeket vesz fel 0 éves korban, amely a csecsemőhalandságot mutatja. Ugyanazt a szintet 2017-ben 45 éves kor körül éri el újra a görbe. Ezután a korai gyermekkorban egy gyorsuló csökkenés figyelhető meg. Bár nem vehető ki nagyon élesen, de utána

következik a fiataloknál és fiatal felnőttkorban baleset miatt előforduló halálások miatti úgynevezett baleseti púp. A felnőtt és időskorban pedig az életkor előrehaladtával viszonylag egyenletes ütemben nő a mortalitás.

Az elmúlt majdnem 70 évben jelentősen csökkent egyaránt a gyermekágyi és időskori mortalitás is. Észrevehető, hogy egyes életkorokban sokkal jelentősebben, gyorsabban változnak, mint máshol. A halandósági ráta változása életkoronként erősen eltér, ezért érdemes a korszpecifikus rátákat évenkénti bontásban is megnézni.

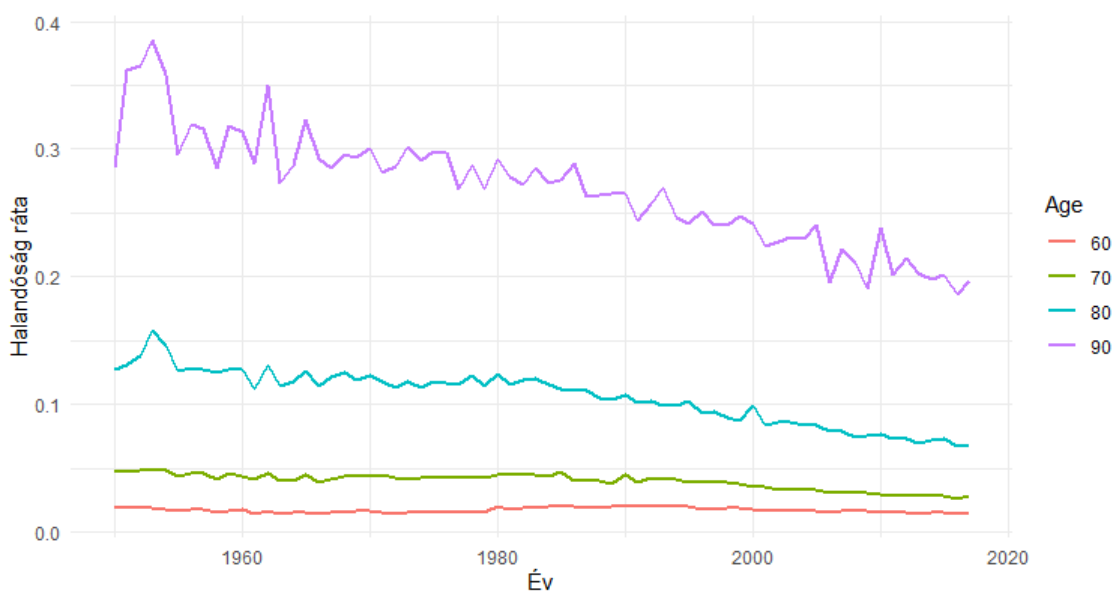
A modellezésnél azonban nem mindegy, hogy a javulás mértéke idővel függ-e a korcsoporttól, ezt próbálok megnézni a következő ábrában. Az uniszex halandósági rátát ábrázolom, mert a női és férfi ráták nagyon hasonlóan alakulnak.



3. ábra. Magyar halandósági ráták javulása a fiatalabb korcsoportokra. Saját szerkesztés

A piros görbe reprezentálja a csecsemők halandóságát az elmúlt 70 évben,

amelyben jól láthatóan egy jelentős javulás történt. Leggyorsabban 1980-ig csökken a csecsemőhalandóság, utána egy lassuló javulás látszik a grafikonon. A csökkenés vélhetően a családi környezet javulásának, különböző egészségügyi politikai döntéseknek és a modern orvostudomány megjelenésének köszönhető. Faragó (2011) tanulmányában részletesebb betekintést kaphatunk a csecsemőhalandóság további kor alapú bontásáról és a javulás okairól.



4. ábra. Magyar halandósági ráták javulása idősebb korcsoportokra. Saját szerkesztés

Az időskorú népesség halandóságában is egy jól látható javulás történt a naptári évek haladásával. A két legmagasabb görbe a 80 és 90 évesek korcsoportjainak halandósági rátái. 1980-ig egy inkább lassabb csökkenés, míg 1980 után inkább egy meredekebb csökkenés látszik. A javulás pozitív következménye a meghosszabbodott várható emberi élettartam.

A várható élettartam növekedésével a nyugdíjrendszerben és életbiztosításokban bizonytalan képet kapunk a várható jövőbeni kifizetésekről és bevé-

telekről, mely jelenséget élettartam-kockázatnak neveznek szakirodalmakban (Májér-Kovács, 2011).

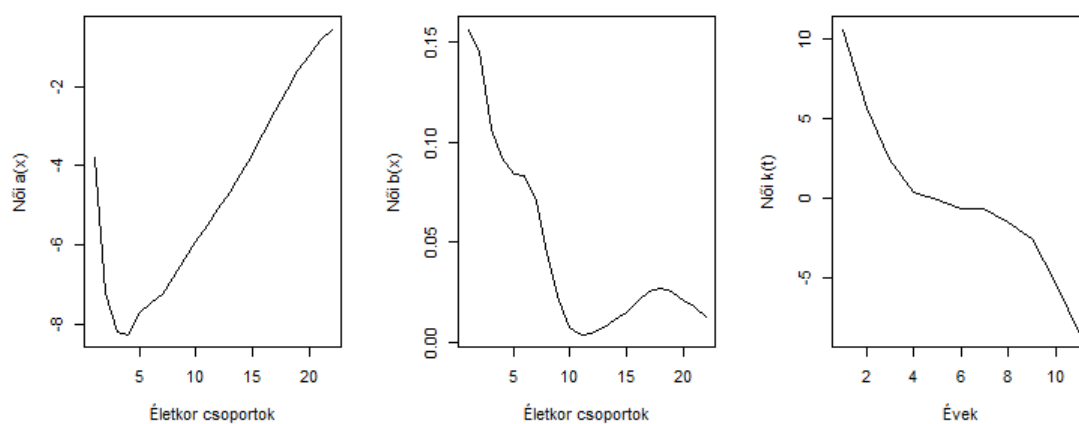
A halandóság kedvező alakulásának összetett okai közé tartozik az orvosi ellátás fejlődése mellett az egészségtudatos életmód és felelősségteljesebb életvitel kialakulása, amelyben a népesség ösztönzésével további javulást lehetne elérni.

4.2. Modellhez használt adatok és csomagok bemutatása

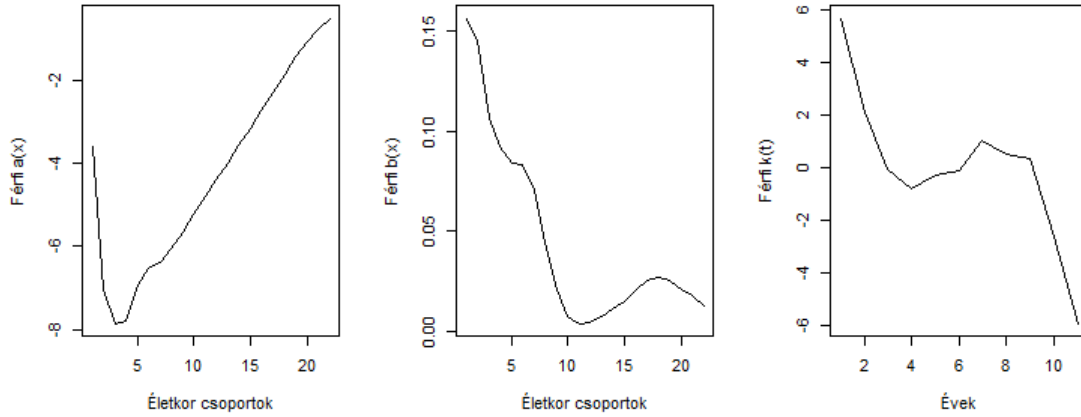
A felhasznált függvényeket a következő programcsomagokból töltöttem be: wpp2017, MortCast. Az adatokat a Human Mortality Database oldaláról töltöttem le. A dokumentációban ezt az adathalmazt használják a példákban és a példabeli kódokból indulok ki én is. Az adatok nemekre bontva tartalmazzák 5 éves intervallumokra és 5 éves életkor-csoportokra aggregált halandósági rátáit több mint 20 országra.

4.3. Lee-Carter modell alkalmazása

A Lee-Carter modellt először magyar adatokra illeszttem és abból jeleztem előre először halandósági rátákat. Az adatok, amelyeken a modell tanult, az 1950-2005 éveket ölelik fel. Az utolsó 10 évet, 2005-2015-ig, levágtam a visszaméréshez és összehasonlításához.



5. ábra. Lee-Carter modell becsült paraméterei nők esetében. Saját szerkesztés

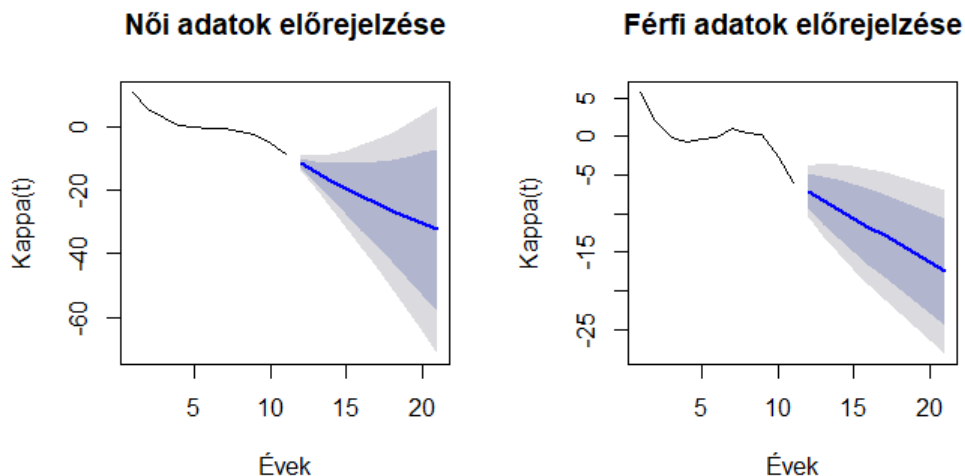


6. ábra. Lee-Carter modell becsült paramétereit férfiak esetében. Saját szerkesztés

Az első grafikonokon látható az a_x paraméter becslése, amely a logaritmi-
 kus halandósági ráták átlagát mutatja be korfüggően. Először egy meredek
 csökkenés látható benne csecsemőkorban, utána a kor előrehaladtával pedig
 lineárisan emelkedik, azaz jól leírja a halandósági görbék általános trendjét.

A második grafikonon a b_x paraméter becslése van szemlélítve, amely
 azt mutatja, hogy a mortalitás csökkenése mennyire érzékeny az egyes élet-
 korokra. Jól látszik, hogy kisgyermek korban a legnagyobb, hiszen ebben az
 életkorokban javult a legjelentősebben a halandósági ráták. Időskorban egy
 újabb (70-80 éves korokban) emelkedés figyelhető meg, mivel időskorban is
 javult a mortalitás.

A harmadik grafikonokon pedig a k_t paraméter becslése látszik, amely a
 középső mortalitási szintet mutatja. Mindkét esetben középen egy lassulás
 látható, de összességében csökkenést mutat, amely a várható élettartamok
 növekedését is mutatja. Nézzük meg az előrejelzéseit is.



7. ábra. Lee-Carter modell által becsült k_t értékek előrejelzése ARIMA modellekkel. Saját szerkesztés

A Lee-Carter modell által becsült k_t értékekre ARIMA(1,1,0) és ARIMA(0,1,0) modellek illeszkedtek a legjobban az Akaike információs kritérium (AIC) alapján és feltételezik, hogy a csökkenő tendencia folytatódik a jövőben is.

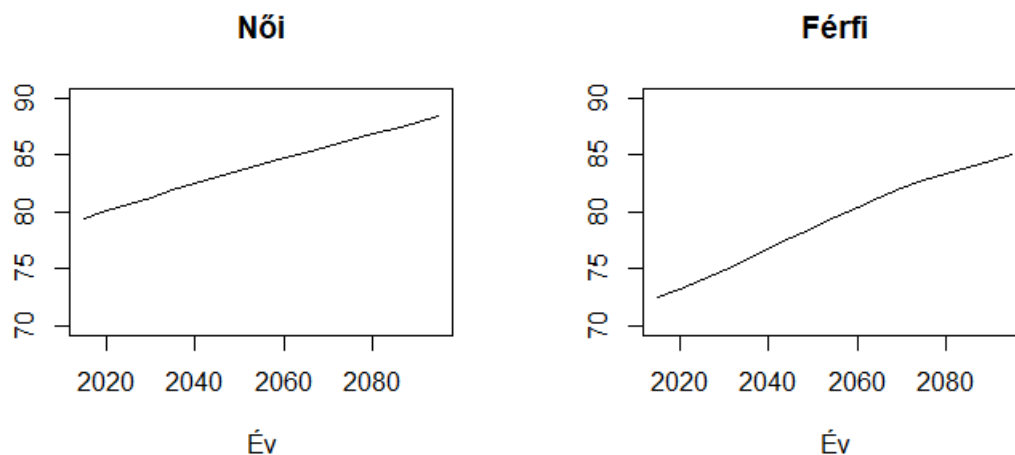
4.4. Rotációval bővített Lee-Carter modell alkalmazása

A sima Lee-Carter módszer nem veszi figyelembe a javulás változását az életkor előrehaladtával, vagyis hogy fiatal korban lassuló ütemben csökken a mortalitás, idős korban pedig gyorsuló ütemben csökken az évek elteltével.

Ha ezt a modellt használjuk hosszú távon, akkor az torzíthatja az előrejelzéseket, mert alulbecsüljük vele a várható élettartamot.

A modell illesztéshez az egyik argumentumban meg kell adni az előrejelzett születéskor várható élettartamokat, amelyhez a wpp2017 package által tartalmazott adatokat használok fel. Összehasonlítva, a KSH által megadott

születéskor várható átlagos élettartam 2019-ben a férfiaknál: 72.8, nőknél: 79.3, ehhez képest a csomagból letöltött születéskor várható élettartam adatokat a következő ábra szemlélteti:

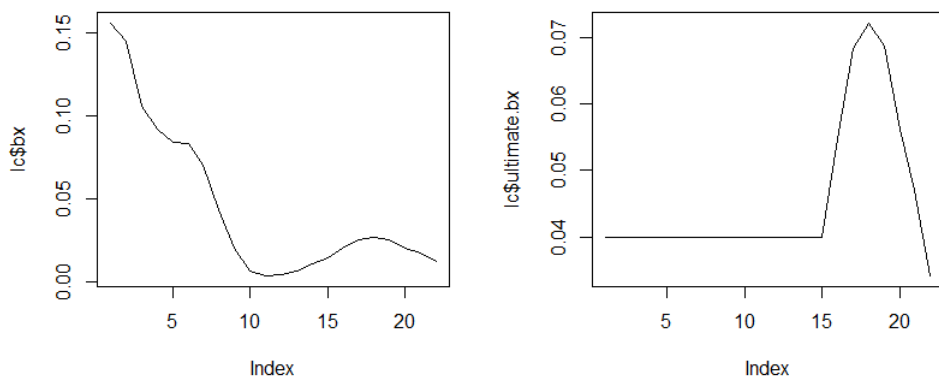


8. ábra. Az előrejelzett születéskor várható élettartam adatok. Saját szerkesztés

Nézzük meg a bővített Lee-Carter módszert a magyar halandósági adatokra, hogy megbízhatóbb hosszú távú előrejelzéseket kapjunk.

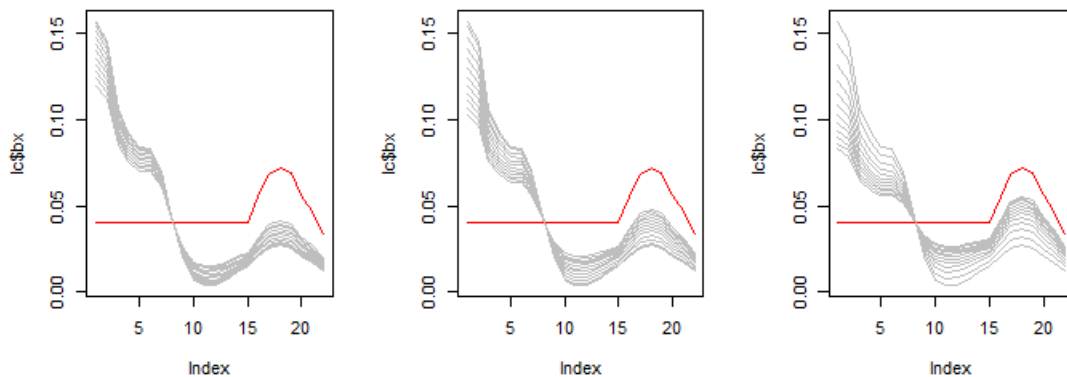
Az eredeti b_x és a végső "ultimate" b_x amihez tart: mennyivel javul az egyes életkorokban, első ábrán azt látjuk hogy mi volt eddig: csecsemőkorban sokat javult és idősebb korban is javult valamennyit a mortalitás.

A végső b_x -hez tartás azt mutatja, hogy a mortalitás egy idő után már kevésbé javul, de az időskorú népesség esetében jobban, és van egy életkor beállítva, amelyet ha elér a születéskor várható élettartam, akkor ott már jobban nem tud javulni (100 éves kor).



9. ábra. A rotált Lee-Carter modell által becsült $B_{x,t}$ értékek előrejelzése. Saját szerkesztés

A 2.2 bekezdésben a (21.) képletben található p értéke alapértelmezésként $p = 0.5$ -re van beállítva, amely a forgás sebességét szabályozza, de a valóságban ez nem biztos, hogy ennyi. Példák $p = 0.25, 0.5, 0.75$ értékekre:



10. ábra. A $B_{x,t}$ értékei rendre $p = 0.75, p = 0.5$ és $p = 0.25$ sebességű forgás esetén. Saját szerkesztés

A modellek összehasonlítását a legkisebb négyzetes hiba minimalizálásának alapján végzem, amely az illesztett modell és a eredeti adatok eltérésének négyzetét összegzi. Az eredeti adatok a korábban levágott 10 évet jelentik (2005-2015). A rotált Lee-Carter módszert elsősorban hosszú távú előrejelzésekre javasolják a szerzők, de adatok hiányában csak ezen az időszakon ellenőrzöm a modellt.

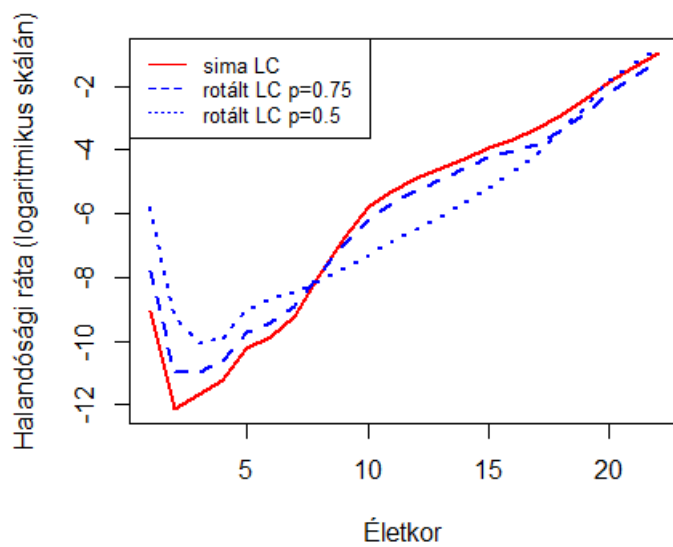
A kapott eredmények alapján a legjobb eredményt a sima Lee-Carter modell adta, a rotált Lee-Carter modellek közül pedig a legjobban $p = 0.75$ forgási sebességű modell szerepelt. A pontos számok a következő táblázatban láthatóak, amely az első oszlop a sima Lee-Carter módszer által adott eredményeket mutatja, a következő három oszlopban pedig a rotált Lee-Carter módszer által visszaadott értékeket, adott forgási sebesség mellett.

| | alap LC | LC (p=0.25) | LC (p=0.5) | LC (p=0.75) |
|-------|---------|-------------|------------|-------------|
| női | 0.034 | 0.066 | 0.112 | 0.047 |
| férfi | 0.001 | 0.008 | 0.025 | 0.003 |

1. táblázat. Négyzetes hibák. Saját szerkesztés

A sima Lee-Carter módszer, a rotált Lee-Carter módszer alap 0.5-ös és legjobban szerepelt 0.75 forgási sebességű modellek által előrejelzett mortalitási görbéket a következő ábrán láthatjuk.

Az értékeket 2090-re jeleztem előre, ahol a különbségek már jobban ki-
vehetőek. Az ábrán jól látszik a módosított modellek által belevitt rotáció,
vagyis hogy a fiatalabb korcsoportokban kisebb halandóság-javulást feltéte-
leznek a modellek, mint az idősebb korcsoportokban.

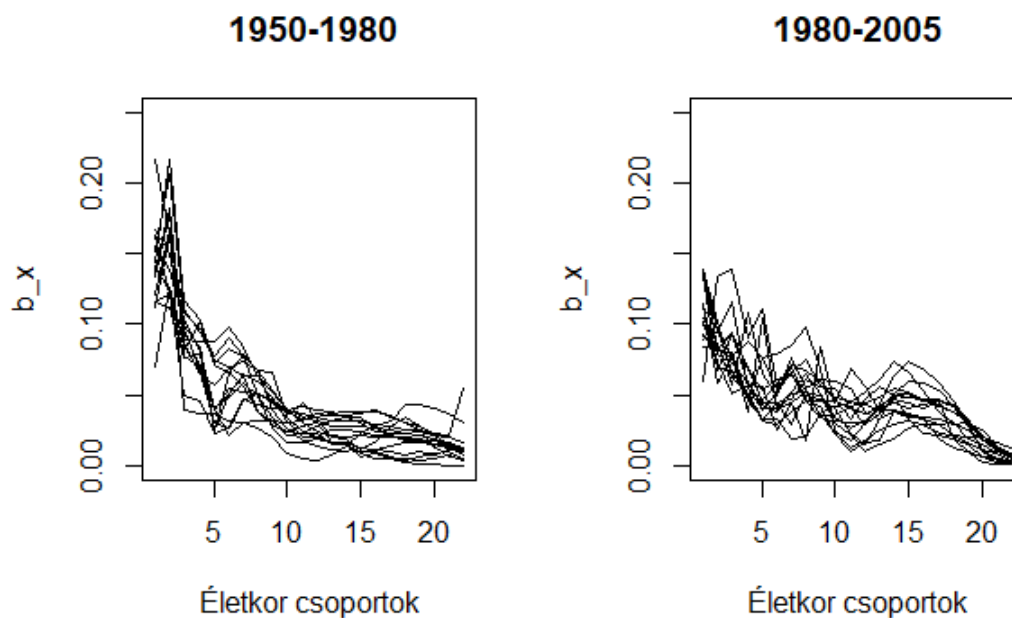


11. ábra. Összehasonlítás. A modellek előrejelzései 2090-re. Saját szerkesztés

4.5. Európai országok

A Lee-Carter modell rotációval bővített verzióját az Európai Unió országain is megvizsgáltam. Az elemzéshez használt adatok forrása szintén a Human Mortality Database.

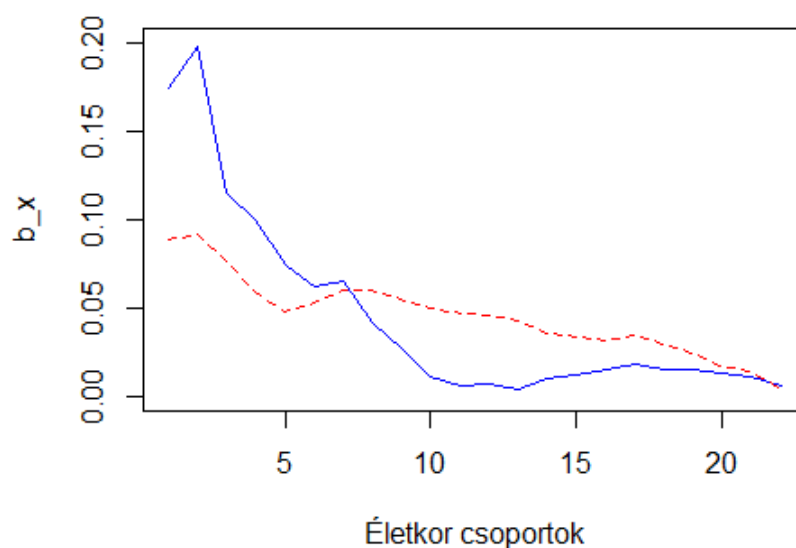
Az uniós országokra futatott rotáció nélküli Lee-Carter módszer b_x -einek ábrázolásánál jól látszik, hogy országonként mennyire különböző életkorcsoportonkénti javulást fogtak meg az egyes modellek. Az 1950-1980-as és az 1980-2005-ös adatokra illesztett görbéken változás látható, 0 éves korban például jelentősen csökkentek, míg az idősebb életkorokban nőttek az értékek.



12. ábra. Az uniós országok 1950-1980 és 1980-2005-re illesztett b_x -ei . Saját szerkesztés

A csecsemőkori és gyermekkori mortalitási arányok jelentősen magasabbak, mint serdülőkorban és felnőttkorban, amely a mortalitási ráták előre

jelzett értékeinek csökkenéséhez vezet. Látható a 12. ábrán, hogy b_x értékei jelentősen magasabbak csecsemő és gyermekkorban, mint bármelyik másik életkorokban. Tehát, a halandóság hosszú távú változásainak előrejelzéséhez b_x forgásának modellezésére szükség van, amelyet a rotált Lee-Carter modell szerzői elsősorban alacsony halandósági rátával rendelkező populációkra és hosszútávú előrejelzésekre javasolnak.



13. ábra. Észtország és Szlovénia (1950-2005) b_x -ei . Saját szerkesztés

A legeltérőbb b_x értékekkel Észtország (kék, folytonos vonallal) és Szlovénia (piros, szaggatott vonallal) rendelkezik az Európai Unión belül. Magyarországhoz képest Észtország magasabb, Szlovénia pedig alacsonyabb halandósági rátákkal rendelkezik. A két Európai Unió ország között nagy különbséget mutat a fiatalok mortalitás javulásában.

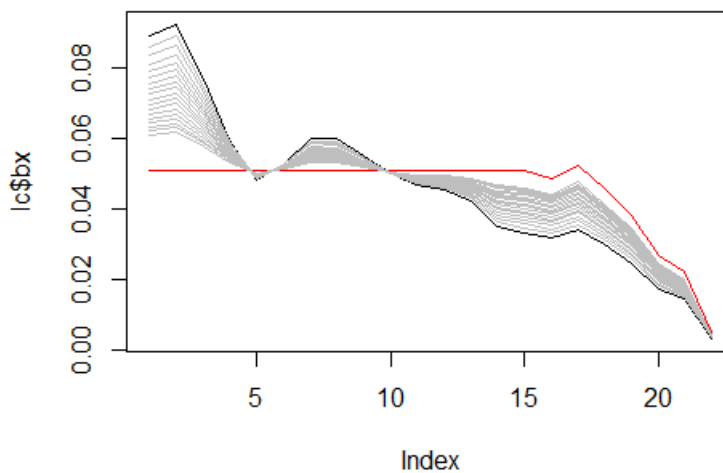
A javulás üteme hosszú távon megkérdőjelezhető, hiszen a végtelenségig

nem javulhat Észtország csecsemőkori halandósági rátája kétszer gyorsabban mint Szlovéniáé.

4.5.1. Szlovénia

A rotált Lee-Carter modell most Szlovénia mortalitási adatain nézem meg, Magyarországhoz hasonlóan.

A következő ábrán az időben elforgatott $B_{x,t}$ görbék láthatóak az alapértelmezett $p = 0.5$ beállítású forgási sebesség mellett. Jól kivehető, hogy az eredeti Lee-Carter modell által adott b_x egy jóval egyenesebb végső $b_u(x)$ -hez tart.

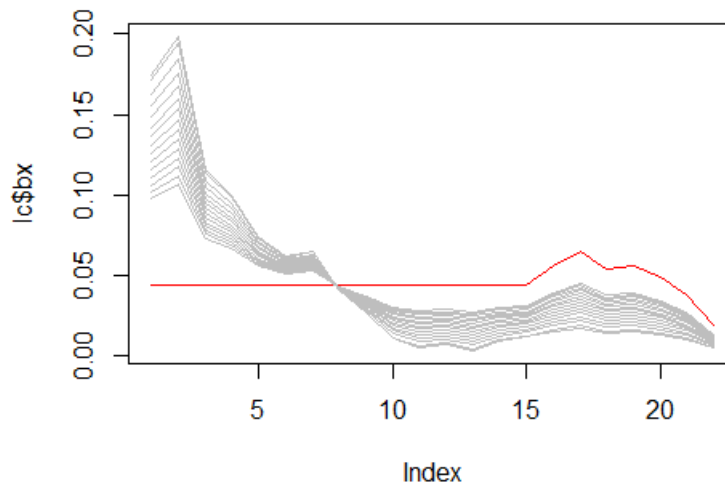


14. ábra. Szlovénia $B_{x,t}$ -ei rotáció esetén. Saját szerkesztés

4.5.2. Észtország

A következő ábrán Észtország időben rotált $B_{x,t}$ -t szemléltetem szintén az alapértelmezett $p = 0.5$ beállítású forgási sebesség mellett. A b_x eredeti

szintjéről, az előző ábrához hasonlóan, szintén egy egyenesebb végső $b_u(x)$ -et mutat. Csecsemő- és kisgyermekkorban a kezdeti magas halandóság javulási ütem nagyot esik.



15. ábra. Észtország $B_{x,t}$ -ei rotáció esetén. Saját szerkesztés

Szlovénia és Észtország halandósági adatain az eredeti Lee-Carter modell alkalmazásakor a javulás ütemének mértékét meghatározó b_x -k nagyon különböző alakot vesznek fel, főleg kisgyermekkorban. Hosszú távon azonban megkérdőjelezhető, hogy két Unión belüli ország egymástól ennyire eltérően fejlődjön. A rotált Lee-Carter módszer szerint a kezdeti különbségek ellenére mindkettő ország b_x -ei nagyjából a 0.05-höz behúzott egyeneshez tartanak.

Vékás (2019) Spearman-féle ρ rangkorrelációs együtthatóval is vizsgálta, hogy van-e rotáció az Európai Unió tagországaiban, és arra a következtetésre jutott, hogy Észtországban mind a nők és férfiak esetében és kimutatható a rotáció jelenléte, Szlovénia esetében azonban csak a nők esetében van szignifikáns rotáció.

5. Életjáradék díj kiszámítása

Ebben a fejezetben az alapfogalmak bemutatása után megvizsgálom a korábban bemutatott modellezési eredmények alapján kalkulált életjáradék díját az alap és a rotált Lee-Carter módszerrel. A kalkuláció célja megnézni, hogy magyar adatokon mennyi az életjáradék díja egyik és másik esetben, mennyit téved, aki a másik modellt használja.

5.1. Alapvető fogalmak

Az életjáradék lényege, hogy egy egyszeri díj befizetése után a szerződő (abban az esetben, ha a szerződő, biztosított és kedvezményezett megegyezik) járadékot kap egy adott tartam végéig vagy amíg életben van, mi esetünkben most az élethosszig tartó járadékokat vizsgáljuk.

A nettó díjak kiszámításánál figyelembe kell venni az ekvivalencia-elvet (Banyár, 2003), mely szerint:

$$\text{bevételek várható jelenértéke} = \text{kiadások várható jelenértéke}$$

Így az azonnal induló, évi 1Ft összegű, egyszeri díjas életjáradék-biztosítás nettó díja a következőképpen alakul:

$$\ddot{a} = \sum_{i=0}^{\omega-x} \left[v^i \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j}) \right],$$

ahol:

- $x = 0, 1, \dots, \omega$ jelöli a biztosított belépési életkorát
- q_x a halálozási valószínűséget x éves korban
- v pedig az i technikai kamatlábból kiszámolt diszkonttényező: $v = \frac{1}{1+i}$

A nettó díj csak a kockázatok fedezésére szolgál, melyet a biztosító átvállalt. A bruttó díjnak nevezzük azt az összeget, amelyet a nettó díjból képezve már tartalmazza a biztosító költségeit és nyeresége lesz a biztosítónak.

Fontos megjegyezni, hogy az élethosszig tartó ellátásokban a biztosító annak a kockázattal is számolnia kell, hogy nőnek a születéskor várható élettartamok, vagyis az élettartamok kitolódnak (angolul *longevity risk*). Ha a biztosítottak a vártnál hosszabb ideig élnek, akkor a biztosítók alulbecsülhetik a várható kiadásait a jövőben. A rotált Lee-Carter módszer ezért egy jobb becslést adhat a biztosítóknak, mivel a modell szerint az idősebb korcsoportokban gyorsabban javul a halandóság.

Egy másik probléma, amely felmerül és az életbiztosítási díjak számításánál figyelembe kell venni az antiszelekció, vagyis hogy a járadéktermékeket főleg olyan ügyfelek vásárolják, akiknek a halandósági rátája jellemzően alacsonyabb mint az országos átlagé.

5.2. Életjáradék kalkuláció eredményei

A kalkulációban a 2013. évi néphalandósági táblát, a rotáció nélküli Lee-Carter és a $p = 0.75$ forgású rotált Lee-Carter módszerek által 2010-2015-re előrejelzett magyar értékeket használtam fel. Ezeket a számításokat Microsoft Excelben készítettem.

A nemek szerinti megkülönböztetés kiküszöbölésére a női és férfi halandósági rátákat összevontam, és az átlagukkal számoltam tovább. A következő táblázat tartalmazza a nettó díjak összegét, 1000 Ft járadékra, 35 éves belépési kor esetén, a technikai kamatot 2% -nak vettem.

| | 2013. év | | rotált Lee-Carter (p=0.75) |
|-----------|-----------------|-------|----------------------------|
| | alap Lee-Carter | | |
| nettó díj | 34.31 | 34.71 | 34.81 |

2. táblázat. Életjáradék nettó díja (ezer Ft). Saját szerkesztés

A táblázatból látszik, hogy a Lee-Carter modellekkel magasabb díjakat kapunk mint a tény adatokon számolt díj, mivel a modellek előrejelzései alacsonyabb halandósági rátákat jósolnak az időskorú népességre.

6. Összefoglalás

Szakdolgozatom célja a Lee-Carter modellek közti különbségek megvizsgálása és összefoglalása volt.

Először áttekintettem a hozzájuk tartozó irodalmat és a Lee-Carter és rotált Lee-Carter módszer részletes ismertetése után feltérképeztem más elterjedt néphalandsági modelleket. A korábbi fejezetekben bemutattam egy elemzést a magyar halandsági ráták alakulásáról az elmúlt 70 évről. Az elemzésből kiderült, hogy a csecsemő- és fiatalkori mortalitás jelentősen javult, de az időskori mortalitás is, csak kisebb mértékben.

A következő fejezetben bemutattam az alap Lee-Carter és rotált Lee-Carter modellek illesztésének eredményeit. A magyar adatokon részletesen is bemutattam és értékeltem a kapott eredményeket. Legjobban az alap Lee-Carter módszer szerepelt, utána rotált Lee-Carter modellek közül a leggyorsabb forgási sebességű modell lett a befutó, és előrejeleztem Magyarország halandságát a bemutatott modellekkel.

A modell illesztéseket elvégeztem a különböző európai országok különböző halandsági adataira. Érdekességként külön szót ejtettem Észtország és Szlovénia halandsági görbéiről.

A két Európai Unió ország halandsági adataira illesztett Lee-Carter modellek nagyon eltérő b_x -ket mutattak, amiből az lenne feltételezhető, hogy Észtországban a csecsemőkori halandsági ráták gyorsabban csökkennek mint Szlovéniában, ami hosszú távon megkérdőjelezhető.

Utolsó lépésként megnéztem a életjáradéknál díjbeli különbségeket az egyes modellekkel és levontam a következtetéseket miszerint a modellezéssel magasabb összeget kalkuláltunk ki nettó díjnak, és mivel az alacsonyabb halandságú egyének vásárolják a járadékot, melynek díját így minden módszer alulbecsüli.

Hivatkozások

- [1] Lee, R.D. & Carter, L.R. (1992) *Modeling and Forecasting the Time Series of U.S. Mortality*, Journal of the American Statistical Association 87 (September): 659–671
- [2] Li N., Lee R., Gerland P. (2013) *Extending the Lee-carter method to model the rotation of age patterns of mortality decline for long-term projections*, Demography. ;50(6):2037–2051.
- [3] Vékás P. (2019) *Rotation of the age pattern of mortality improvements in the European Union*, Cent Eur J Oper Res 28, 1031–1048 (2020).
- [4] Faragó T. (2011) *Bevezetés a történeti demográfiába, I. kötet*
- [5] Májer I. & Kovács E. (2011) *Élettartam-kockázat – a nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher*, Statisztikai Szemle. 89. évf. 7–8. sz. 790–812. old.
- [6] Vékás P. (2011) *Nyugdíjcéli életjáradékok élettartam-kockázata az általánosított korcsoport-időszak-kohorsz modellkeretben*, Statisztikai Szemle. 95. évf. 2. sz. 139–165. old.
- [7] Hunt A. Blake D. (2014) *A general procedure for constructing mortality models*, North American Actuarial Journal, 18(1):116–138.
- [8] Currie I. (2016) *On fitting generalized linear and non-linear models of mortality*, Scandinavian Actuarial Journal, 2016(4):356–383.
- [9] Villegas A. M., Kaishev V. Millossovich P. (2016) *StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling* <https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette>
- [10] Brouhns N., Denuit M. Vermunt J.K. (2002) *A Poisson logbilinear regression approach to the construction of projected lifetables*, Insurance: Mathematics and Economics, 31:373–393.

- [11] Renshaw A. Haberman S. (2006) *A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors*, Insurance: Mathematics and Economics, 38(3):556–570.
- [12] Carstensen B. (2007) *Age–period–cohort models for the Lexis diagram*, Statistics in Medicine, 26:3018–3045.
- [13] Cairns A. J. G., Blake D. Dowd K. (2006) *A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration*, Journal of Risk and Insurance, 73(4):687–718.
- [14] Plat R. (2009) *On stochastic mortality modeling*, Insurance: Mathematics and Economics, 45(3):393–404.
- [15] R Development Core Team (2008) *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.
- [16] Banyár J. (2003) *Életbiztosítás*, Aula Kiadó, Budapest, ISBN9789639478381.
- [17] Vékás P. (2016) *Az élettartam-kockázat modellezése* (doktori értekezés, 178p.). Budapesti Corvinus Egyetem, Általános és Kvantitatív Közgazdaságtan Doktori Iskola.
- [18] *Human Mortality Database*. University of California, Berkeley (USA), and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). www.mortality.org (Letöltés dátuma: 2021.04.05.)