Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Topologikus entrópia

Keszthelyi Gabriella

MSc szakdolgozat

Témavezető: Buczolich Zoltán
egyetemi docens
Analízis Tanszék

Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

0.1 Bevezetés 3

1 Elméleti bevezető **4**

1.1 Dinamikai rendszerek 4

1.1.1 Topologikus dinamikai rendszerek 5

1.2 Topologikus entrópia 9

1.2.1 Bowen-gömbök 9

1.2.2 Nyílt fedések 11

1.3 Intervallum-leképezések 15

1.3.1 Fixpontok 15

1.3.2 Szakaszonként monoton leképezések entrópiája 18

1.3.3 Markov-gráfok és lópatkók 21

1.3.4 Topologikusan tranzitív és keverő leképezések tulajdonságai 27

2 Sátor-leképezés **33**

2.1 Fixpontok 34

2.2 A sátor-leképezés jellegzetességei 38

2.3 Topologikus entrópia és keverés 43

2.4 Lópatkók és periodikus pályák 51

2.5 Konklúzió 55

A Programok **57**

0.1. Bevezetés

Az alábbi szakdolgozatban a dinamikai rendszerek, a káosz és az ezekhez tartozó fogalmak áttekintéséről olvashatunk, mindezt egy konkrét rendszer vizsgálatán keresztül. A káosz Lorenz-cel robbant be a köztudatba a '60-as években, amikor számítógépes modellt készített meteorológiai előrejelzésekhez: nagyon közeli kezdeti értékekből teljesen más eredményeket kapott, azaz felfedezte, hogy az előrejelzést modellező rendszer érzékeny a kezdeti feltételekre (ez él a köztudatban „pillangó-hatás" néven, és ez tette Lorenzet a káoszelmélet ikonikus alakjává). Sarkovszkij más szemszögből közelítette meg a káoszt: bebizonyította, hogy ha egy rendszernek van 3 szerint periodikus pályája, akkor minden egész szám szerinti periódusú pálya létezik (ugyanerre az eredményre jutott tőle függetlenül a Li-Yorke páros). A rendszerre teljesül továbbá, hogy van egy nem megszámlálhatóan végtelen halmaza, amire igaz, hogy ha ebből kiveszünk x-et és y-t, akkor $f^n(x)$ és $f^n(y)$ tetszőlegesen közel mehetnek egymáshoz bizonyos n esetén, ugyanakkor ha n tart végtelenbe, akkor makroszkópikus méretben eltávolodnak egymástól. (Ezt a tulajdonságot Li és Yorke nevezte először kaotikusnak.) A sor Devaney-vel folytatódik: az ő káoszra adott definíciója erősebb az előzőeknél; megköveteli az érzékenységet a kezdeti feltételkre, a periodikus pályák sűrű voltát, és azt, hogy a rendszer legyen topologikusan tranzitív: létezzen legalább egy pont, aminek a pályája sűrű (ne lehessen a rendszert úgy két részre vágni, hogy ez a két rész ne legyen kölcsönhatásban a rendszer fejlődése közben). Ehhez szokták még hozzávenni azt a feltételt, hogy a rendszer topologikus entrópiája legyen pozitív (ami annyit tesz, hogy a különböző n hosszúságú pályák száma egy idő után exponenciálisan növekszik). A szakdolgozat fő vonala ez a fogalom lesz. Az elméleti bevezetőhöz főként Sylvie Ruette könyvét [1] használtam, továbbá [2]-t illetve [3]-at.

1. fejezet

Elméleti bevezető

1.1. Dinamikai rendszerek

Azok a rendszerek, ahol felüti fejét a káosz, rendelkeznek egy fázistérrel, amin adva van egy leképezés, amely megszabja a rendszer viselkedését. Feltesszük, hogy az időbeli fejlődés determinisztikus, azaz adott kiindulópontból csak egyetlen jövőbeli állapotba juthatunk. Mivel a lépések rövidek, így sokszor kell egymás után végrehajtani őket (iterálni) és a szabály hiába determinisztikus, hosszú távon nehéz kikövetkeztetni a rendszer fejlődését. A kérdés az, hogy mi lesz a rendszer sorsa hosszú távon.

1. Definíció. *Legyen (X, d) adott metrikus tér és $T : X \to X$ transzformáció. Ezeket együtt dinamikai rendszernek nevezzük.*

A rendszer viselkedésétől függően három típusba sorolható be:

1. Differenciálható (dinamikai) rendszer: X differenciálható sokaság, T diffeomorfizmus. (Pl. a Naprendszerben a bolygók mozgása.)

2. Ergodikus rendszer: X mérhető tér, T mértéktartó leképezés, azaz $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. (Pl. a klasszikus mechanika Hamilton-rendszerei, ahol az ún. Liouville-mérték mindig invariáns az időbeli fejlődésre vonatkozólag.)

3. Topologikus (dinamikai) rendszer: X topologikus tér, T homeomorfizmus. (Pl. logisztikus leképezéscsalád.)

A szakdolgozat folyamán a topologikus dinamikát vizsgáljuk (azon belül is főleg az intervallum-leképezéseket).

1.1.1. Topologikus dinamikai rendszerek

Az X a továbbiakban atommentes szeparábilis teret jelöl. (Legtöbbször R részhalmaza.)

2. Definíció. *Legyen $x \in X$. Az $\mathcal{O}_{\mathcal{T}} = T^n(x)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot az x pont pályájának (**orbit**jának) nevezzük.*

3. Definíció. *Legyen (X, d) adott kompakt metrikus tér és $T : X \to X$ folytonos leképezés. A T transzformáció **topologikusan tranzitív**, ha minden nemüres U, $V \subset X$ halmazra létezik $n \geq 0$, hogy $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*
***Tranzitív halmaznak** nevezzük azon zárt $E \subset X$ halmazt, amire $T(E) \subset E$ és $T|_E$ tranzitív.*

1. Megjegyzés. A topologikus tranzitivitásra két definíció létezik, a most következő definíció a topologikus tranzitivitásról ekvivalens az előzővel.

4. Definíció. *Legyen (X, d) adott kompakt metrikus tér, és $T : X \to X$ folytonos leképezés. A T transzformáció **topologikusan tranzitív** akkor és csak akkor, ha létezik olyan $x \in X$, aminek a pályája sűrű.*

2. Megjegyzés. A második definíció az ismertebb és a bevezetésben is az szerepelt. Belátjuk, hogy a két definíció ekvivalens. Ehhez elengedhetetlen az alábbi lemma.

1. Lemma. *Ha $\mathcal{O}_T(x_0)$ sűrű X-ben, akkor minden n egészre $\mathcal{O}_T(T^n(x_0))$ is sűrű X-ben.*

Bizonyítás. Legyen U nyílt halmaz. Ahhoz, hogy bizonyítsuk, hogy $\mathcal{O}_T(T^n(x_0))$ sűrű, meg kell mutatnunk, hogy létezik $m \geq n$, hogy $T^m(x) \in U$. Mivel

$\mathcal{O}_T(x_0)$ sűrű, létezik $k \geq 0$, hogy $T^k(x_0) \in U$. Ha $k \geq m$, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor válasszunk egy kisebb $V \subset U$ halmazt, ami nem tartalmaz olyan pontot $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(T^n(x_0))$-ból, ami $f^{k'}(x)$ alakú, ahol $0 \leq k' < n$ (ez megtehető, hiszen véges sok ilyen pont van, elegendő, ha egy olyan gömböt választunk, aminek a sugara kisebb, mint ezeknek a pontoknak az egymástól való távolsága). Ekkor - újfent a sűrűség miatt - létezik m, hogy $T^m(x) \in V \subset U$, így m nem lehet kisebb n-nél a V konstrukciója miatt, tehát $m \geq n$. □

2. Lemma. *A topologikus tranzitivitás két definíciója ekvivalens.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy létezik olyan x_0, aminek a pályája sűrű X-ben. Adottak U, V halmazok és a sűrűségből adódik, hogy létezik olyan n, amire $T^n(x_0) \in U$. Mivel $\mathcal{O}_T(T^n(x_0))$ is sűrű, így létezik m, hogy $T^m(T^n(x_0)) \in V$. Így

$$T^{m+n}(x_0) \in T^m(U) \cap V,$$

azaz $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

A fordított állításhoz tegyük fel, hogy létezik m, hogy $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Mivel X kompakt, ezért van megszámlálható sűrű részhalmaza. Legyen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ez a részhalmaz. Ahhoz, hogy igazoljuk, hogy van sűrű pályájú x pont, elegendő megmutatni, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-hez és $n \in \mathbb{N}$-hez létezik m, hogy $T^m(x) \in B(x_n, 1/k)$. Hiszen minden nyílt U halmaz tartalmaz valamilyen n-re x_n-t a sűrűség miatt, és mivel nyílt halmazokról van szó, így tartalmazza a $B(x_n, 1/k)$ gömböt is valamilyen $k \in \mathbb{N}$-re. Így ha $T^m(x) \in B(x_n, 1/k) \subset U$, akkor $\mathcal{O}_T(x) \cap U \neq \emptyset$. A $B(x_n, 1/k)$-k megszámlálható sokan vannak, rendezzük őket a következőképpen:

$$\{B(x_n, 1/k),\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}\} = \{U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\}.$$

Legyen $B_0 = B(x, \varepsilon)$ tetszőleges, és $\overline{B_0} = \{y : d(x, y) \leq \varepsilon\}$. A feltevés szerint létezik N_1, hogy $T^{N_1}(B_0) \cap U_1 \neq \emptyset$. Így ki tudunk választani egy gömböt a nemüres nyílt $B_0 \cap T^{-N_1}(U_1)$ halmaz belsejéből. A sugár csökkentésével

feltehetjük, hogy van egy kisebb B_1 gömb, hogy

$$\overline{B_1} \subset B_0 \cap T^{-N_1}(U_1).$$

A feltevés szerint létezik N_2, hogy $T^{N_2}(B_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Ezáltal tudunk mutatni egy kisebb B_2 gömböt, hogy

$$\overline{B_2} \subset B_1 \cap T^{-N_2}(U_2).$$

Indukcióval konstruálunk B_n gömb-sorozatot, hogy

$$\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap T^{-N_{n+1}}(U_{n+1}).$$

Mivel a gömbök egymásba ágyazottak: $\overline{B_{n+1}} \subset B_n$, és mivel kompakt téren vagyunk, így ez a gömbsorozat metszete nemüres. Ha $x \in \cap_n \overline{B_n}$, akkor $T^{N_n}(x) \in U_n$ minden n-re, és így a x pályája sűrű. $\square$

5. Definíció. *Legyen (X, d) adott kompakt metrikus tér, és $T : X \to X$ folytonos leképezés. A T transzformáció* ***totálisan tranzitív****, ha $T^n : X \to X$ tranzitív minden $n \geq 1$-re.*

6. Definíció. *A $T : X \to X$ transzformáció* ***topologikusan keverő****, ha tetszőleges $U, V \subset X$ halmazhoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$-re $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

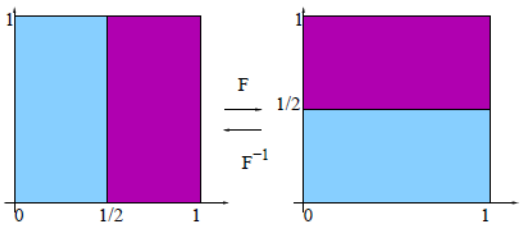
3. Megjegyzés. A keverés szemléletesen azt a jelentést hordozza magában, hogy bármely U halmazra elég sokszor alkalmazva a T-t az U *szétterül* X-en, azaz bármely V-re és megfelelően nagy n-re $T^n(U)$ belemetsz V-be. Látható, hogy a keverés implikálja a topologikus tranzitivitást, a keverés valami erősebbet állít: nem csak bizonyos n-re teljesül, hogy $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$, hanem valahonnan kezdve az összes egészre is. A következő példák rávilágítanak a különbségre.

1. Példa. Legyen S^1 az egység kerületű kör, T_α pedig az α-szöggel való forgatás. Ekkor a $T_\alpha : S^1 \to S^1$ <u>nem</u> topologikusan keverő tarnszformáció. Legyen $\alpha < \pi/2$, U, V pedig két ív, mindkettő hossza kisebb, mint $\pi\alpha$.

Ekkor végtelen sok k létezik, amire $T_\alpha^k(U)$ nem metsz bele V-be. Ugyanis minden $\lfloor 1/\alpha \rfloor$ iteráció ($\lfloor 1/\alpha \rfloor$ az egészrésze annak a számnak, ahány iteráció alatt T_α körbeér a körvonalon) alatt $T_\alpha(U)$ legfeljebb egyszer metsz bele V-be. Ugyanakkor belátható, hogy irracionális α-ra T_α topologikusan tranzitív (sőt, ennél több is állítható, nevezetesen T_α minimális, azaz minden pont pályája sűrű). Tegyük fel, hogy rögzített x-re és irracionális α-ra $E = \overline{\mathcal{O}_{T_\alpha}(x)}$ nem adja ki az egész S^1-et, hanem $E \subset S^1$. Legyen $z \in E \setminus \mathcal{O}_{T_\alpha}(x)$, ekkor létezik n_k részsorozat, hogy $T_\alpha^{n_k}(x) \to z$, ha $k \to \infty$, továbbá $T_\alpha^{n_k+1}(x) \to T_\alpha(z)$, $T_\alpha^{n_k-1}(x) \to T_\alpha^{-1}(z)$. Azaz $z \in E$-ből következik, hogy $T_\alpha(z) \in E$ és $T_\alpha^{-1}(z) \in E$, így $T_\alpha(E) = E$. Definiáljuk a $G = S^1 \setminus E$ halmazt, ez nyílt és invariáns, azaz interpretálható megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallum uniójaként. Legyen ezek közül a leghosszabb I. A $T_\alpha^n(I)$-k nem nyúlhatnak egymásba, ugyanis ha $T_\alpha^{n_1}(I)$ és $T_\alpha^{n_2}(I)$ egymásba nyúlna, akkor az uniójuk egy, az I-nél hosszabb G-beli intervallum lenne. Mivel α irracionális, így $T_\alpha^{n_1}(I)$ és $T_\alpha^{n_2}(I)$ nem eshetnek egybe, ekkor viszont $T_\alpha^n(I)$-k egyforma hosszú, diszjunkt intervallumok, ez viszont nem lehetséges, hiszen $|S^1| = 1$, így G pedig az üres halmaz.

2. Példa. A pék $T : [0,1)^2 \to [0,1)^2$ leképezése topologikusan keverő.

$$T(x) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}) & \text{ha } 0 \le x < \frac{1}{2}; \\ (2x-1, \frac{y+1}{2}) & \text{ha } \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$$



1.1. ábra. A pék automorfizmusa [1]

Ahogy az 1.1 ábra is mutatja, ez a leképezés megnyújta horizontálisan az egységnégyzetet, egyúttal pedig vertikálisan össze is nyomja (mindeközben

az idom területe továbbra is egységnyi marad), ezután pedig az egységnégyzetből kilógó részt a tetejére hajtogatja. (Valami ilyesmit csinál a pék is, amikor a kenyér tésztáját gyúrja.) Lássuk be, hogy ez a leképezés keverő. Legyen U, V két X-beli nyílt halmaz. Mivel U tartalmaz egy kis gömböt, így tartalmaznia kell egy $\frac{1}{2^n}$ oldalhosszúságú diadikus négyzetet is:

$$Q = \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right], \ 0 \leq i, j \leq 2^n - 1.$$

Tekintsük a $T^k(Q)$ iteráltakat. Minden $k = 1, 2, \ldots, n$-re T a fent említett módon hat, tehát duplázza a szélességet, és felezi a magasságot, azaz k lépés után a keletkező téglalap szélessége $2^k(1/2^n) = 1/2^{n-k}$, magassága pedig $(1/2)^k(1/2)^n = 1/2^{n+k}$.
Tehát $T^n(Q)$ a $k = n$-re a legvékonyabb és a maximálisan 1 szélességű téglalap. Egy ilyen maximális szélességű téglalap képe két vízszintes téglalapból áll, akiknek a hosszanti távolsága legfeljebb $1/2$. Mivel minden további T iteráció kettébontja a maximális szélességű téglalapot, így a $T^{k+n}(Q)$ 2^k darab vízszintes téglalapból áll, amiknek a szélessége 1, magassága pedig nem több mint $1/2^k$. Így ha V tartalmaz egy $B(y, \varepsilon)$ kis gömböt, és k olyan, hogy $1/2^k < \varepsilon$, akkor a $T^{k+n}(Q)$ halmaz szétvág bármely ε-sugarú gömböt, így magát V-t is.

1.2. Topologikus entrópia

1.2.1. Bowen-gömbök

Legyen (X, d) kompakt metrikus tér $T : X \to X$ folytonos leképezés. Szeretnénk egy olyan metrikát bevezetni, ami képes mérni, hogy hány "elegendően különböző" pályánk van T-re nézve.
Legyen $d_T^1 = d$, és $d_T^n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n} d(T^i(x), T^i(y))$.
Könnyen látható, hogy a d_T^n-k metrikák és $d_T^n(x, y) \leq d_T^{n+1}(x, y)$. A d_T^n metrika azt méri, hogy az $\{x, \ldots, T^n x\}$ és az $\{y, \ldots, T^n y\}$ pályadarabok legfeljebb

milyen messze kerülnek egymástól.
Definiáljuk továbbá a $B_T(x,\varepsilon,n) = \{y \in X : d_T^n(x,y) < \varepsilon\}$ nyílt gömböket.

7. Definíció. *(Bowen) Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Az $E \subset X$ halmazt az X tér T-szerinti (n,ε)-**feszítő halmaz**ának nevezzük, ha teljesül, hogy*

$$X \subset \bigcup_{x\in E} \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} B(T^i x, \varepsilon)$$

azaz ha $X \subset \bigcup_{x\in E} B_T(x,\varepsilon,n)$ (minden $y \in X$-hez létezik $x \in E$, hogy az $\{x,\dots,T^{n-1}x\}$ pályadarab ε-jól közelíti $\{y,\dots,T^{n-1}y\}$ -t). Legyen $S_d(T,\varepsilon,n) = \min\{\#E : E(n,\varepsilon)$-feszítő$\}$, ekkor

$$h_d(T,\varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log S_d(T,\varepsilon,n). \qquad (1.1)$$

4. Megjegyzés. $S_d(T,\varepsilon,n)$ tehát azon kezdeti feltételek minimális száma, amelyek n időig (iteráltig) tetszőleges pályát ε-jól közelítenek, $h_d(T,\varepsilon)$ pedig az $S_d(T,\varepsilon,n)$ **exponenciális növekedési sebessége**.

Nyilván $h_d(T,\varepsilon') \le h_d(T,\varepsilon)$, ha $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, ebből pedig következik, hogy létezik a következő határérték: $h_d(T) = h(T) = h_{top}(T) = \lim_{\varepsilon\to 0+} h_d(T,\varepsilon)$, amit a T leképezés **topologikus entrópiájának** nevezünk.

5. Megjegyzés. A topologikus entrópiát analóg módon lehet definiálni (n,ε)-szeparáló halmazokkal. Legyen $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, az $S \subset X$ (n,ε)-szeparáló halmaz, ha minden x, $y \in S$-re $d_T^n(x,y) \ge \varepsilon$. Legyen $U_d(T,\varepsilon,n)$=max$\{\#S : S$ (n,ε)-feszítő$\}$, ekkor

$$\mathrm{h}_d(T,\varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log U_d(T,\varepsilon,n). \qquad (1.2)$$

Az 1.1 és 1.2 megegyezik.

1.2.2. Nyílt fedések

8. Definíció. *Legyen X kompakt metrikus tér, $T : X \to X$ folytonos leképezés. Az $\alpha = \{A_1, A_2, ..., A_p\}$-t és a $\beta = \{B_1, B_2, ..., B_q\}$-t is nyílt fedésnek nevezzük, ha $A_1 \cup ... \cup A_p = X$, illetve $B_1 \cup ... \cup B_q = X$, továbbá $\{A_1, A_2, ..., A_p\}$ és $\{B_1, B_2, ..., B_q\}$ nyílt halmazok. Az α és a β* ***közös finomítása*** *a következő:*

$$\alpha \vee \beta = \{A_i \cap B_j | 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}.$$

Az α ***finomabb****, mint β ha α minden eleme benne van β valamely elemében, ezt $\alpha > \beta$ -val jelöljük.*

9. Definíció. *Ha adott X egy $\alpha = \{A_1, \ldots, A_n\}$ fedése, akkor $\beta > \alpha$-ra β-t* ***részfedés****nek nevezzük, ha szintén X fedése, azaz*

$$X = \bigcup_{B \in \beta} B.$$

10. Definíció. *Legyen $T : X \to X$ folytonos, invertálható leképezés, α pedig X egy fedése. Ekkor*

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha = \alpha \vee T^{-1}(\alpha) \vee T^{-2}(\alpha) ... \vee T^{-(n-1)}(\alpha)$$

X-nek a (T, n)-által generált fedése*.*

11. Definíció. *Jelölje $N(\alpha)$ azt a legkisebb számot, amely α egy részfedésének számossága lehet:*

$$N(\alpha) = \{\min k \mid \textit{létezik } i_1, \ldots, i_k;\ i_k \in \{1, \ldots, p\}, X = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}\}.$$

6. Megjegyzés. Ha $\alpha < \beta$, akkor $N(\alpha) < N(\beta)$. Hiszen legyen $\{B_1, \ldots, B_{N(\beta)}\}$ β egy minimális számosságú részfedése. Ekkor minden i-re létezik $A_i \in \alpha$, hogy $A_i \supseteq B_i$. Így $\{A_1, \ldots, A_{N(\alpha)}\}$ fedi X-et, és részfedése α-nak, tehát $N(\alpha) < N(\beta)$.

Vezessük be a következő jelölést:

$$N_n(T, \alpha) = N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right).$$

12. Definíció. *Az α* ***fedés topologikus entrópiája*** $\log N(\alpha) = H(\alpha)$.

Ekkor a T leképezés α fedésére vonatkozó topologikus entrópiája:

$$h(T,\alpha) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N_n(T,\alpha)}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha)}{n}.$$

3. Lemma. I. $H(\alpha) \geq 0$.

II. *Ha $\alpha \leq \beta$, akkor $H(\alpha) \leq H(\beta)$.*

III. *Ha α és β X két véges fedése, akkor*

$$H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta).$$

IV. *Ha T folytonos, akkor $H(T^{-1}\alpha) \leq H(\alpha)$. Ha T szürjektív is, akkor $H(T^{-1}\alpha) = H(\alpha)$.*

Bizonyítás. I. és II. triviális.
III. Legyen

$$\alpha < \alpha' = \{A_1, \ldots, A_p\} \text{ és } \beta < \beta' = \{B_1, \ldots, B_q\}$$

Ezek α és β minimális számosságú részfedései. Ekkor

$$\alpha' \vee \beta' = \{A_i \cap B_j |\, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q,\ A_i \cap B_j \neq \emptyset\}.$$

Ez $\alpha\vee\beta$-nak részfedése és elemszáma legfeljebb nm. Így $H(\alpha\vee\beta) \leq \log nm = \log n + \log m = \log N(\alpha) + \log N(\beta) = H(\alpha) + H(\beta)$.
IV. Ha α-nak az $\{A_1, \ldots, A_{N(\alpha)}\}$ α egy minimális számosságú részfedése, akkor
$\{T^{-1}A_1, \ldots, T^{-1}A_{N(\alpha)}\}$ részfedése $T^{-1}\alpha$-nak, így $N(T^{-1}\alpha) \leq N(\alpha)$. Ha T szürjektív, és $\{T^{-1}A_1, \ldots, T^{-1}A_{N(T^{-1}\alpha)}\}$ minimális számosságú részfedése $T^{-1}\alpha$-nak, akkor $\{A_1, \ldots, A_{N(T^{-1}\alpha)}\}$ szintén X fedése és $N(\alpha) \leq N(T^{-1}\alpha)$.

□

13. Definíció. *Az* (a_k) *sorozat* ***szubadditív****, ha* $a_{k+m} \leq a_k + a_m$ *minden* $k, m \in \mathbb{N}$*-re.*

1. Állítás. *Ha* $a_n = H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha)$*, akkor az* (a_n) *sorozat szubadditív.*

Bizonyítás.

$$a_{n+k} = H\left(\bigvee_{i=0}^{n+m-1} T^{-i}\alpha\right) \leq H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) + H\left(\bigvee_{i=n}^{n+m-1} T^{-i}\alpha\right) \leq$$

$$\leq H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) + H\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha\right) = a_n + a_k$$

Az utolsó egyenlőtlenség azért teljesül, mert $H\left(T^{-i}\alpha\right)_{i=n}^{n+m-1} \leq H\left(T^{-i}\alpha\right)_{i=1}^{m-1}$ tagonként. $\square$

2. Állítás. *Ha* (a_k) *szubadditív, akkor* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{k} = \inf_{k\geq 1} \frac{a_k}{k} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Bizonyítás. Legyen $m \in \mathbb{N}$ és $k = q_k m + r_k$. Ezenkívül q_k-ról tegyük fel, hogy egész és $0 \leq r_k \leq m - 1$.
Ha $k \geq m$, akkor

$$\frac{a_k}{k} = \frac{a_{q_k m + r_k}}{q_k m + r_k} \leq \frac{a_{q_k m} + a_{r_k}}{q_k m} \leq \frac{q_k a_m + a_{r_k}}{q_k m} = \frac{a_m}{m} + \frac{a_{r_k}}{q_k m}.$$

Továbbá, ha $k \to \infty$ akkor $q_k \to \infty$, tehát

$$\limsup \frac{a_k}{k} \leq \frac{a_m}{m}$$

így

$$\limsup \frac{a_k}{k} \leq \inf \frac{a_m}{m}.$$

De

$$\inf \frac{a_m}{m} \leq \liminf \frac{a_k}{k},$$

így $\lim a_k/k$ létezik és megegyezik $\inf a_k/k$-val. $\square$

Mivel $(\log N_n(T,\alpha))_{n\geq 1}$ szubbadditív, így

$$h_{top}(T,\alpha) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N_n(T,\alpha)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N_n(T,\alpha)}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{\log N_n(T,\alpha)}{n}$$

a topologikus entrópiát pedig a következő módon definiáljuk:

$$h_{top}(T) = \sup\{h_{top}(T,\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \text{ véges, nyílt fedése } X\text{-nek}\}.$$

7. Megjegyzés. Legyen X kompakt metrikus tér, $T : X \to X$ folytonos leképezés. Ekkor a következők teljesülnek:

- Minden $n \geq 1$ egészre $h_{top}(X, T^n) = n \cdot (X, T)$.
- Ha Y egy kompakt részhalmaza X-nek és $T(Y) \subset Y$, akkor $h_{top}(Y,T) \leq h_{top}(X,T)$.

14. Definíció. *Metrikus terekben tudjuk definiálni a halmazok és ezáltal a fedések átmérőjét is. Legyen az α* ***fedés átmérője*** *(diam α)*

$$\sup_{A\in\alpha} diam(A).$$

1. Tétel. *Legyen (X,d) kompakt metrikus tér, T folytonos leképezés. Ha $\{\alpha_n\}_1^\infty$ egy minden határon túl finomodó fedések sorozata (azaz $diam(\alpha_n) \to 0$), akkor*

$$\lim_{n\to\infty} h_{top}(T,\alpha_n) = h(T).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $h_{top}(T) < \infty$. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszuk a γ fedést úgy, hogy $h(T,\gamma) > h_{top}(T) - \varepsilon$. Legyen δ a γ Lebesgue-száma (azaz minden δ-átmérőjű gömböt tartalmaz valamelyik halmaz γ-ból). Válasszuk meg N-et úgy, hogy minden $n \geq N$ -re $diam(\alpha_n) < \delta$. Ekkor $\gamma < \alpha_n$, így $h_{top}(T,\gamma) \leq h_{top}(T,\alpha_n)$, ha $n \geq N$, továbbá

$$h_{top}(T) \geq h_{top}(T,\alpha_n) > h_{top}(T,\gamma) > h_{top}(T) - \varepsilon,$$

így $\lim_{n\to\infty} h_{top}(T,\alpha_n) = h_{top}(T)$. Amennyiben $h_{top}(T) = \infty$, a bizonyítás teljesen hasonló. $\square$

15. Definíció. *Az α véges fedést a $T : X \to X$ folytonos leképezés* ***(erős) generátorá****nak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $N > 0$, hogy $\mathcal{C} = \bigvee_{i=0}^{N} T^{-i}\alpha = \{C_1, \ldots, C_m\}$-re $diam(\mathcal{C}) < \varepsilon$ teljesül. (Ekkor $\mathcal{C}$ egy minden határon túl finomodó fedések sorozata.)*

2. Tétel. *Ha $\mathcal{C}$ a $T : X \to X$ folytonos leképezés (homeomorfizmus) erős generátora, akkor $h_{top}(T,\mathcal{C}) = h_{top}(T)$.*

Ez nyilván ekvivalens a fenti Bowen-féle topologikus entrópiával.

1.3. Intervallum-leképezések

1.3.1. Fixpontok

A továbbiakban az alaphalmaz I illetve $[a,b]$, mely minden esetben $\mathbb{R}$ részhalmaza.

16. Definíció. *Legyen $T : I \to I$ folytonos leképezés. Az x pontot* ***periodikus pont****nak nevezzük, ha létezik $n \geq 1$ természetes szám, hogy $T^n(x) = x$. Az x pont* ***periódus****a az a legkisebb $p \geq 1$ egész, amire $T^p(x) = x$; ha $T^n(x) = x$, akkor n többszöröse p-nek. Ha $T(x) = x$, akkor x-et* ***fixpont****nak nevezzük.*
Jelöljük P_n-nel azon periodikus pontok halmazát, amiknek a periódusa osztja n-et:

$$P_n(T) = \{x \in I \mid T^n(x) = x\}.$$

17. Definíció. *Az $x \in I$, n szerint* ***végperiodikus*** *ha létezik $m > 0$, hogy minden $i \geq m$-re $T^{n+i}(x) = T^i(x)$. Ha $n = 1$ akkor x* ***végfixpont****.*

4. Lemma. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos leképezés. Ha $f([a,b]) \subset [a,b]$ vagy $f([a,b]) \supset [a,b]$, akkor f-nek van fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $g(x) = f(x) - x$. Ha $f([a,b]) \subset [a,b]$, akkor

$$g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0 \;\; s \;\; g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0;$$

g folytonossága miatt létezik $c \in [a,b]$, hogy $g(c) = 0$. Ha $f([a,b]) \supset [a,b]$, akkor létezik $x,\ y \in [a,b]$, hogy $f(x) \leq a$ és $f(y) \geq b$. Ekkor

$$g(x) = f(x) - x \leq a - x \leq 0 \;\; s \;\; g(y) = f(y) - y \geq b - y \geq 0,$$

így létezik $c \in [x,y]$, hogy $g(c) = 0$. Mindkét esetben c fixpontja f-nek. □

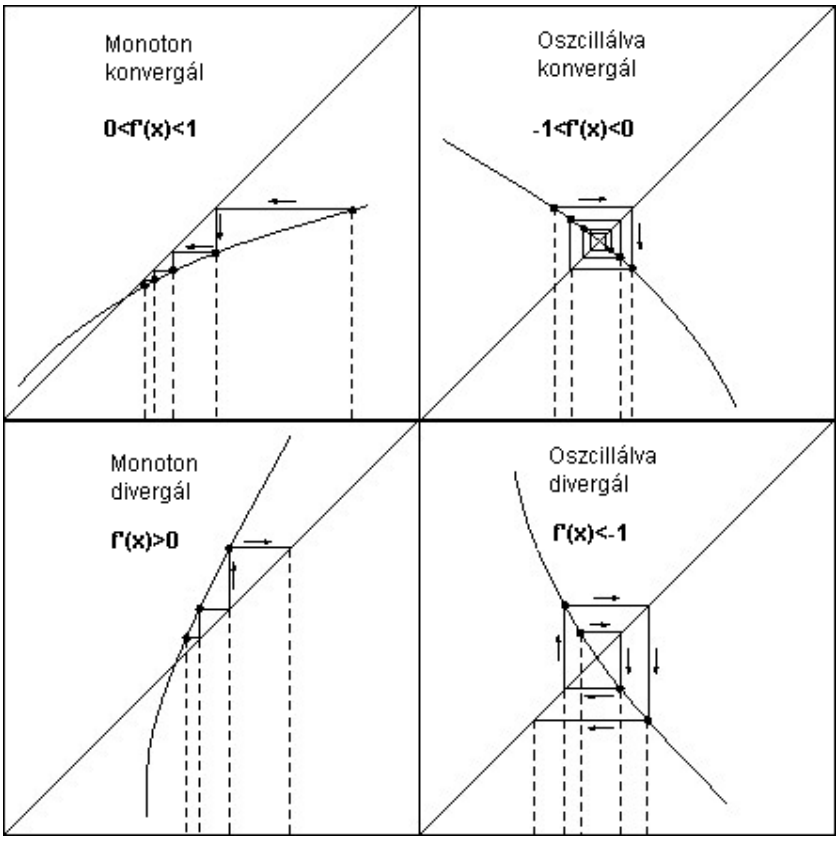
3. Állítás. *Legyen $f : (a,b) \to (a,b)$ leképezés, $x_0 \in (a,b)$, x_0 fixpont és $|f'(x_0)| < 1$. Ekkor létezik az x_0-nak U környezete, hogy minden $x \in U$-ra $f^n(x) \to x_0$, azaz x_0 vonzó fixpont.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon = \frac{1-|f'(x_0)|}{2}$, *azaz* $|f'(x_0)| + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Ekkor létezik az x_0-nak olyan U környezete, hogy $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$ minden $x \in U$-ra, így $|f(x) - f(x_0)| < (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0| = (1-\varepsilon) \cdot |x - x_0|$. Felhasználva, hogy $f(x_0) = x_0$, azt kapjuk, hogy $|f(x) - x_0| < (1-\varepsilon) \cdot |x - x_0|$, ebből pedig $|f(f(x)) - x_0| < (1-\varepsilon) \cdot (f(x) - x_0) < (1-\varepsilon) \cdot (1-\varepsilon) \cdot (x - x_0)$, amiből indukcióval következik $|f^n(x) - x_0| < (1-\varepsilon)^n \cdot |x - x_0|$. □

4. Állítás. *Legyen $f : (a,b) \to (a,b)$ leképezés, $x_0 \in (a,b)$, x_0 fixpont és $|f'(x_0)| > 1$. Ekkor létezik az x_0-nak olyan U környezete, hogy minden $x \in U \setminus \{x_0\}$-ra létezik n_x, hogy $f^{n_x}(x) \notin U$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon = \frac{|f'(x_0)|-1}{2}$, *azaz* $|f'(x_0)| - \varepsilon = 1 + \varepsilon$. Ekkor létezik az x_0-nak olyan U környezete, hogy $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$ minden $x \in U$-ra, így $|f(x) - f(x_0)| > (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0| = (1+\varepsilon) \cdot |x - x_0|$. Felhasználva, hogy $f(x_0) = x_0$, azt kapjuk, hogy $|f(x) - x_0| > (1+\varepsilon) \cdot |x - x_0|$. Mivel $f(x) \in U$, ezért iterálható a korábbi becslés, és $f(x),\ f^2(x),\ \ldots,\ f^{k-1}(x) \in U$, $|f^k(x) - x_0| > (1+\varepsilon)^k \cdot |x - x_0|$, de a jobb oldali kifejezés tart végtelenhez, ha k tart végtelenhez. □

18. Definíció. *Legyen $f : (a, b) \to (a, b)$ leképezés, $x_0 \in (a, b)$ fixpont. Ha létezik $f'(x_0)$ és $|f'(x_0)| \neq 1$, akkor x_0-t* ***hiperbolikus fixpont****nak nevezzük. Általánosabban megfogalmazva: ha létezik $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x_0) = x_0$ amire n a minimális periódus, továbbá $|(f^n)'(x_0)| \neq 1$, akkor az x_0* ***hiperbolikus periodikus pont****, $k = 1, 2, \ldots, n - re$ $f^k(x_0)$ pedig hiperbolikus periodikus pálya. Az $(f^n)'(x_0)$-t a* ***periodikus pont multiplikátorának*** *nevezzük. Ha teljesül, hogy $|(f^n)'(x_0)| < 1$, akkor x_0-t* ***vonzó periodikus pontnak*** *(nyelőnek) nevezzük. Ha $f(x_0) = x_0$ és $f'(x_0) = 0$, akkor x_0* ***szupervonzó fixpont****.*



1.2. ábra. fixpontok típusai [2]

8. Megjegyzés. A fenti U környezetet, amire teljesül, hogy minden $x \in U$-ra $f^n(x) \to x_0$ (ahol x_0 hiperbolikus fixpont), **lokális stabil környezetnek** nevezzük és W^s_{loc}-kal jelöljük.

Általánosabban megfogalmazva: ha f folytonos, x_0 hiperbolikus vonzó periodikus pont, akkor szintén létezik U környezete x_0-nak, hogy minden $x \in U$-ra $f^{kn}(x) \to x_0$, ha $k \to \infty$, akkor U lokális stabil környezet.

9. Megjegyzés. Ha x_0 egy hiperbolikus taszító fixpont, akkor a fentiekhez hasonlóan létezik egy olyan U környezete, hogy minden $x \neq x_0 \in U$-hoz létezik $n_x > 0$ úgy, hogy $f^{n_x}(x) \notin U$. Az ilyen U-t **lokális instabil környezetnek** nevezzük, és W^u_{loc}-kal jelöljük.

1.3.2. Szakaszonként monoton leképezések entrópiája

19. Definíció. *Legyen $f : I \to I$ egy szakaszonként monoton leképezés. f^n* ***monoton fedés****nek azt az α fedést nevezzük, amire teljesül, hogy minden $A \in \alpha$ -ra $f^n|_A$ monoton. A monoton partíciót hasonlóan definiáljuk.*

10. Megjegyzés. Ha f egy szakaszonként monoton leképezés, akkor meg lehet adni egy felső korlátot f entrópiájára, vagy ki is lehet számolni pontosan, ha ismert bizonyos n-ekre (vagy az összesre) az f^n monoton részintervallumainak száma (továbbiakban c_n, azaz cikkcakkszám).

5. Lemma. *Legyen $f : I \to I$ intervallum-leképezés és $\mathcal{C}$ egy páronként egymásba nem nyúló intervallumokból álló fedés. Ekkor létezik olyan $\mathcal{U}$ nyílt fedés, hogy $h_{top}(\mathcal{C}, f) \leq h_{top}(\mathcal{U}, f) + \log(3)$*

Bizonyítás. Legyen $E = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \partial C$ a $\mathcal{C}$ végpontjainak halmaza, és definiáljunk egy nyílt fedést:

$$\mathcal{U} = \{Int(C) | C \in \mathcal{C}\} \cup \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap I | x \in E\}.$$

Ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi, akkor $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ -nak legfeljebb 3 $\mathcal{C}$-beli elemmel van metszete (eggyel balról, eggyel jobbról, és esetleg x-szel, ha az is egy $\mathcal{C}$-beli halmaz), ugyanakkor minden egyes $Int(C)$-nek csak egyetlen $\mathcal{C}$-beli elemmel van nemüres metszete. Legyen $n \geq 1$, és $\widetilde{\mathcal{U}}^n$ pedig egy (f, n)-által generált fedés minimális számosságú részfedése. Ha x egy $B \in \mathcal{C}^n$-hez tartozik, akkor

létezik $V \in \widetilde{\mathcal{U}}^n$, hogy $x \in V$ és minden $V = U_0 \cap f^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(U_{n-1})$-nek, $U_i \in \mathcal{U}$-nak legfeljebb 3^n darab olyan B-vel van metszete, ahol $B = C_0 \cap f^{-1}(C_1) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(C_{n-1}) \in \mathcal{C}^n$, $C_i \in \mathcal{C}$ alakú. Következésképp:

$$N_n(\mathcal{C}, f) \leq \#\mathcal{C}^n \leq 3^n N_n(\mathcal{U}, f).$$

Határértéket véve pedig megkapjuk a kívánt $h_{top}(\mathcal{C}, f) \leq h_{top}(\mathcal{U}, f) + \log(3)$ egyenlőtlenséget. □

6. Lemma. *Legyen $f : I \to I$ szakaszonként monoton leképezés, és $\mathcal{A}$ egy monoton fedés. Ekkor $h_{top}(f) \leq h_{top}(\mathcal{A}, f)$.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $h_{top}(\mathcal{U}, f) \leq h_{top}(\mathcal{A}, f)$ bármely $\mathcal{U}$ nyílt fedésre. Legyen $n \geq 1$ rögzített és $A \in \mathcal{A}^n$, ekkor minden $0 \leq k < n$-re A részintervalluma $\mathcal{A}^k$ egy elemének, továbbá $f^k|_A$ monoton. (Ez igaz, hiszen legyen J, K két intervallum, amin f^n, illetve f^k monoton, ekkor $g = f^n|_J$-re $g^{-1}(K) = J \cap f^{-n}(K)$ intervallum, sőt $f^{n+k}|_{J \cap f^{-n}(K)} = f^k|_K \circ g$ monoton, mert monoton függvények kompozíciója. Ebből következik, hogy ha $\mathcal{A}$ monoton fedése f-nek, akkor $\mathcal{A}^n$ monoton fedése f^n-nek, továbbá hogy $\mathcal{A}_n \vee f^{-n}(\mathcal{A}_k)$ monoton partíció f^{n+k}-ra nézve.) Következésképp minden $U \in \mathcal{U}$-ra $A \cap f^{-l}(U)$ egy nyílt intervallum. Legyen $\mathcal{U} \cap A = \{V \cap A | V \in \mathcal{U}^n\}$. $\mathcal{U} \cap A$ egy eleme intervallum, amelynek végpontjai az

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \partial(A \cap f^{-k}(U))$$

halmazhoz tartoznak, így az $\mathcal{U} \cap A$-beli elemek összes végpontjának száma legfeljebb $2n \cdot \#\mathcal{U}$. Mivel egy nyílt intervallum a két végpontjával jellemezhető, azt kapjuk, hogy $\#(\mathcal{U}^n \cap A) \leq (2n \cdot \#\mathcal{U})^2$. Újfent használva az $\widetilde{\mathcal{U}}^n$ jelölést:

$$\#(\widetilde{\mathcal{U}}^n) \leq \sum_{A \in \widetilde{\mathcal{A}}^n} \#(\widetilde{\mathcal{U}}^n \cap A) \leq (\#\widetilde{\mathcal{A}}^n)(2n \cdot \#\mathcal{U})^2,$$

így

$$\frac{1}{n} \log N_n(\mathcal{U}, f) \leq \frac{1}{n} \log N_n(\mathcal{A}, f) + \frac{2}{n} \log(2n \cdot \#\mathcal{U}).$$

Határértéket véve megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget. □

1. Következmény. *(Misiurewicz-Szlenk) Legyen $f : I \to I$ egy szakaszonként monoton leképezés és c_n a cikkcakkszám (azaz minimális számosságú monoton partíció f^n-re nézve.) Ekkor $h_{top}(f) \leq \frac{1}{n} \log c_n$ minden $n \geq 1$-re, és $h_{top}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}_n$ az f^n-re nézve egy c_n számosságú monoton partíció. Ekkor tudjuk, hogy $h_{top}(f^n) \leq h_{top}(\mathcal{A}_n, f^n) \leq \log \#\mathcal{A}_n$, így

$$h_{top}(f) = \frac{1}{n} h_{top}(f^n) \leq \frac{1}{n} \log c_n.$$

Ezzel kész is a következmény első fele. A továbbiakhoz alkalmazzuk, hogy $A_n \vee f^{-n}(\mathcal{A}_k)$ monoton partíció f^{n+k}-ra nézve, így

$$c_{n+k} \leq \#(\mathcal{A}_n \vee f^{-n}(\mathcal{A}_k)) \leq \#\mathcal{A}_n \cdot \#\mathcal{A}_k = c_n \cdot c_k.$$

Mivel a $(\log c_n)$ sorozat szubadditív, így létezik $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n$ és $h_{top}(f) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n$.

Hátravan még a fordított egyenlőtlenség. Legyen $n \geq 1$ rögzített. Ekkor létezik olyan $\mathcal{U}$ nyílt fedés, hogy

$$\tfrac{1}{n} h_{top}(\mathcal{A}_n, f^n) \leq \tfrac{1}{n} h_{top}(\mathcal{U}, f^n) + \tfrac{1}{n} \log 3. \tag{1.3}$$

Sőt

$$h_{top}(\mathcal{A}_n, f^n) = \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{k} \log N_k(\mathcal{A}_n, f^n).$$

Mivel $\mathcal{A}_n \vee f^{-n}(\mathcal{A}_n) \vee \cdots \vee f^{-(k-1)n}(\mathcal{A}_n)$ egy monoton partíció f^{nk}-ra nézve, így $N_k(\mathcal{A}_n, f^n) \geq c_{nk}$. Ekkor

$$\tfrac{1}{n} h_{top}(\mathcal{A}_n, f^n) \geq \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{nk} \log c_{nk} = \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{k} \log c_k. \tag{1.4}$$

Kombinálva (1.3)-at és (1.4)-et és szuprémumot véve kapjuk

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log c_k \leq h_{top}(f) + \frac{1}{n} \log 3.$$

Határértékét véve (1.4)-nek (n szerint) a megfelelő egyenlőtlenséghez jutunk, amivel készen van a bizonyítás. □

5. Állítás. *Legyen $f : I \to I$ egy intervallum-leképezés. Ha f-re teljesül, hogy λ-Lipschitz $\lambda \geq 1$ konstansra, akkor $h_{top}(f) \leq \log \lambda$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$ és E egy (n, ε)-szeparáló halmaz, számossága pedig $U_d(f, \varepsilon, n)$. Ha x és y két különböző pont E-ből, akkor létezik $0 \leq k < n$, hogy $|f^k(x) - f^k(y)| > \varepsilon$. Mivel f λ-Lipschitz, így

$$|f^k(x) - f^k(y)| \leq \lambda^k |x - y| \leq \lambda^n |x - y|,$$

amiből következik, hogy $|x - y| \geq \frac{\varepsilon}{\lambda^n}$. Mivel E maximális számosságú szeparáló halmaz, így

$$U_d(f, \varepsilon, n) \leq \left\lfloor \frac{|I|}{\varepsilon} \lambda^n \right\rfloor + 1.$$

Tudjuk, hogy $h_d(f, \varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log U_d(f, \varepsilon, n)$, ezért

$$h_{top}(f) \leq \log \lambda.$$

□

1.3.3. Markov-gráfok és lópatkók

Az alábbiakban az entrópia cikkcakkszámtól eltérő megközelítését mutatom be.

20. Definíció. *Ha I zárt, diszjunkt, nem elfajuló részintervallumai $J_1, \ldots, J_n$, és $f(J_i) = J_{i+1 \bmod n}$ minden $1 \leq i \leq n$, akkor $(J_1, \ldots, J_n)$-et* ***ciklikus intervallumok****nak nevezzük.*

21. Definíció. *Legyen $f : I \to I$ egy intervallum-leképezés. Ha I zárt részintervallumai $J_0, \ldots, J_n$, és minden $1 \leq i \leq n$-re $J_i \subset f(J_{i-1})$, akkor a $(J_0, J_1, \ldots, J_n)$-t (f-szerinti)* ***intervallumlánc****nak nevezzük.*

7. Lemma. *Legyen $f : I \to I$.*

I. *Ha $(J_0^i, \ldots, J_n^i)$ egy intervallumlánc, akkor létezik $K \subset J_0$, hogy $f^n(K) = J_n$ és $f^i(K) \subset J_i$ teljesül minden $0 \leq i \leq n$-re.*
Továbbá ha fennáll, hogy $J_0 \supset J_n$, akkor létezik $x \in K$, hogy $f^n(x) = x$ és $f^i(x) \in J_i$ teljesül minden $0 \leq i \leq n$-re.

II. *Tegyük fel, hogy minden* $1 \leq i \leq p$*-re* $(J_0^i, \ldots, J_n^i)$ *egy intervallumlánc és ha* $i \neq j$*, akkor létezik* $0 \leq k \leq n$*, hogy* J_k^i*-nek és* J_k^j*-nek diszjunkt a belseje. Ekkor léteznek* $K_1, \ldots, K_p$ *zárt részintervallumok, hogy* $f^n(K_i) = J_n^i$ *és* $f^k(K_i) \subset J_k^i$ *teljesül minden* $0 \leq k \leq n$*-re és* $1 \leq i \leq p$*-re.*

Bizonyítás. I. Indukcióval látjuk be: $n = 1$-re legyen $J_1 = [a, b]$, ekkor létezik $x, y \in J_0$, hogy $f(x) = a$ és $f(y) = b$. Tegyük fel, hogy $x < y$, ekkor

$$y' = \min\{z \geq x | f(z) = b\},\ x' = \max\{z \leq y' | f(z) = a\}$$

Legyen $K = [x', y']$. Ekkor $f(K) = J_1$.
Tekintsük a $(J_1, \ldots, J_n, J_{n+1})$ intervallumláncot és tegyük fel, hogy n-re teljesülnek a feltételek, azaz: $K \subset J_0$, $f^n(K) = J_n$ és $f^i(K) \subset J_i$ minden $1 \leq i \leq n$-re, továbbá mivel $(J_1, \ldots, J_n, J_{n+1})$ intervallumlánc, így $f(J_n) = f^{n+1}(K) \supset J_{n+1}$. Alkalmazzuk az $n = 1$ esetet a $g = f^{n+1}$ leképezésre, és a (K, J_{n+1}) intervallumláncra. Kapunk egy $K' \subset K$ intervallumot, amire $f^{n+1}(K') = J_{n+1}$. Továbbá $f^i(K') \subset J_i$ minden $0 \leq i \leq n$-re, hiszen $K' \subset K$. Ha $J_0 \supset J_n$, akkor $f^n(K) \supset K$, így $f^n|_K$-nak van fixpontja K-n, továbbá teljesül, hogy $f^i(x) \in J_i$ minden $0 \leq i \leq n-1$-re.

II: Legyen $(J_0^i, \ldots, J_n^i)$, $1 \leq i \leq p$ intervallumlánc. Minden $1 \leq i \leq p$-re és $0 \leq m \leq n$-re legyen K_i^m az I. állításban szerepeltetett zárt részintervallum $(J_0^i, \ldots, J_m^i)$-re, és $K_i = K_i^n$. Legyen $j \neq i$ rögzített. Feltevésünk szerint létezik $0 \leq k \leq n$ úgy, hogy J_k^i és J_k^j egymásba nem nyúló. Ha $k = 0$, akkor $K_i \subset J_0^i$ és $K_j \subset J_0^j$ nyilvánvalóan egymásba nem nyúló. Legyen $k \geq 1$. Ha $K_i^k \cap K_j^k$ nemüres, abból következik, hogy J_k^i-nak és J_k^j-nak van közös b végpontja, és $f^k(K_i^k \cap K_j^k) = \{b\}$. A konstrukcióból adódóan egyetlen z pont létezik a K_i^k-ban, hogy $f^k(z) = b$, és ugyanez teljesül K_j^k-ra. Így $K_i^k \cap K_j^k$ legfeljebb egy pontot tartalmaz. Mivel $K_i \subset K_i^k$ és $K_j \subset K_j^k$, ezért K_i és K_j egymásba nem nyúló. □

22. Definíció. *Legyen* G *irányított gráf, aminek csúcsai* $\{I_1, I_2, \ldots, I_p\}$ *zárt, nem elfajuló intervallumok, és* $I_i \to I_j$ *akkor és csak akkor, ha* $f(I_i) \supset I_j$*. A* G*-t* ***Markov-gráf****nak nevezzük és függ az* $\{I_1, I_2, \ldots, I_p\}$*-től, valamint* f*-től.*

23. Definíció. *Legyen G Markov-gráf, ekkor G-nek az* ***incidenciamátrix****a (vagy más néven* ***átmenetmátrix****a) az $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mátrix, ahol $m_{ij} = 1$, ha $I_i \to I_j$, és 0 egyébként.*

24. Definíció. *Legyen $f : I \to I$ egy intervallum-leképezés és x egy n szerint periodikus pont. Rendezzük növekedő sorrendbe az $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ pontokat: $x_1 < \cdots < x_n$ és legyen $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ minden $1 \leq j \leq n-1$-re. Legyen $I_j \to I_k$, ha $I_k \subset \langle f(x_j), f(x_{j+1})\rangle$, ahol $\langle a, b\rangle$ jelöli $[a, b]$-t, vagy $[b, a]$-t, attól függően, hogy a vagy b a nagyobb. Az így kapott gráfot nevezzük az* ***x periodikus pont gráfjá****nak.*

25. Definíció. *Egy gráfban a* ***séta*** *csúcsok és élek váltakozó sorozata, ahol az élek az őket megelőző, illetve az őket követő csúcsokat kötik össze. A séta csúccsal kezdődik és csúcsban végződik, egy csúcsot többször is érinthet.*

26. Definíció. *Legyen A egy $k \times k$-as mátrix. Ekkor A-t* ***nemnegatív mátrixnak*** *nevezzük, ha minden $1 \leq i, j \leq k$-ra $a_{ij} \geq 0$. A* ***irreducibilis****, ha minden $1 \leq i, j \leq k$-ra létezik $n \geq 1$, hogy $a_{ij}^n > 0$.*

11. Megjegyzés. Az M átmenetmátrix nemnegatív.

8. Lemma. *Legyen A nemnegatív mátrix. Ekkor létezik P permutációmátrix, hogy $M = P^{-1}AP$ egy alsó háromszög (blokk)mátrix, aminek a diagonálisában irreducibilis blokkok állnak, alatta pedig nemnegatív részmátrixok.*

Bizonyítás. Lásd [1]-ben. □

9. Lemma. *Minden $1 \leq i, j \leq N$-re az I_i-ben kezdődő és I_j-ben végződő n-hosszú séták száma G-ben megegyezik $(M^n)_{ij}$-vel.*

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk. Az $n = 1$ esetben a séta annyit tesz, hogy van oda és vissza is irányított él I_i és I_j között. G és M definíciójából következően ez igaz. Tegyük fel, hogy n-re teljesül. Ekkor az I_i-ből I_j-be vezető $n+1$-hosszú sétákat fel lehet úgy fogni, mint az I_i-ből I_k-ba vezető n-hosszú séta plusz az I_k-ból I_j-be vezető él. Tudjuk, hogy az I_i-ből I_k-ba vezető n-hosszú séták száma M_{ik}^n, így

$$\# \{ \ n+1\text{-hosszú séták száma } I_i\text{-ből } I_j\text{-be } \}=$$

$$\sum_{k=1}^{N} \# \{n\text{-hosszú séták száma } I_i\text{-ből } I_k\text{-ba } \} \cdot \# \{I_k\text{-k száma, amelyekből vezet él } I_j\text{-be } \}=$$

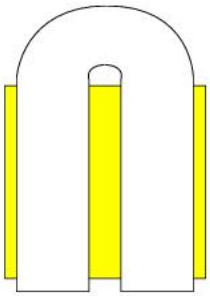
$$= \sum_{k=1}^{N} M_{ik}^{n} M_{kj} = M_{ij}^{n+1}.$$

□

27. Definíció. *$I_1, I_2, \ldots, I_k$ intervallumok **k-lópatkót** alkotnak f-re nézve, ha $(I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k) \subset f(I_j)$ (minden $j = 1, \ldots k$-ra).*

28. Definíció. *Az $f : I \to I$ függvény **lópatkó** az $[a, b]$-n akkor, ha létezik $a < c < b$ úgy, hogy $[a, b] \subset f([a, c]) \cap f([c, b])$. (Azaz a k-lópatkó $k = 2$ esete.)*

A legrégebbi lópatkó-leképezés Smale-től ered, ez az egységnégyzet transzformálásának sorozatából áll: először megnyújtjuk vertikálisan több mint a kétszeresére, ezután pedig összenyomjuk kevesebb mint a felére horizontálisan. Az így kapott vékony téglalapot meghajlítjuk, így keletkezik a lópatkóforma, amely hosszanti irányban túlnyúlik az egységnégyzeten, széltében viszont belefér anélkül hogy érintené annak jobb illetve bal oldalát. (Ennek ismételge- tésével kapjuk a lópatkó-attraktort.) Smale lópatkó-leképezéséről



1.3. ábra. Smale lópatkó [3]

egyébként be lehet látni, hogy megszámlálhatóan végtelen sok periodikus

pályája van és topologikusan tranzitív. Ezek a tulajdonságok, amik igazán felkeltették a matematikusok figyelmét az ilyen leképezések iránt, azóta a kaotikus rendszerek vizsgálatában is a lópatkótalálás igen szerencsés jelenségnek számít. Ha egy leképezésnek van lópatkója, akkor pozitív az entrópiája. Pontosabban, teljesül a következő állítás:

6. Állítás. *Ha $f : I \to I$-nek van lópatkója, akkor $h_{top}(f) \geq \log 2$, illetve k-lópatkó esetén $h_{top}(f) \geq \log k$.*

Bizonyítás. Legyenek $J_1, \ldots, J_p$ egymásba nem nyúló, zárt részintervallumok, a p-lópatkó definíciójának megfelelően. Tegyük fel, hogy $J_1, \ldots, J_p$ diszjunktak. Ezesetben léteznek $U_1, \ldots, U_p$ diszjunkt nyílt intervallumok és $J_i \subset U_i$ minden $1 \leq i \leq p$-re. Legyen $U_{p+1} = I \setminus \bigcup_{i=1}^{p} J_i$. Ekkor $\mathcal{U} = (U_1, \ldots, U_p, U_{p+1})$ egy nyílt fedése I-nek, és $U_{p+1} \cap J_i = \emptyset$ minden $1 \leq i \leq p$. Minden $(i_0, \ldots, i_{n-1}) \in \{1, \ldots, p\}^n$ n-esre definiáljuk a következő halmazt:

$$J_{i_0,\ldots,i_{n-1}} = \{x \in I \mid f^k(x) \in J_{i_k}, 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Ha a $J_1, \ldots, J_p$ egy p-lópatkó, akkor a $J_{i_0,\ldots,i_{n-1}}$ halmaz nemüres. Sőt, pontosan egy elemét tartalmazza

$$\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{U})\text{-nak},$$

ami nem más, mint

$$U_{i_0} \cap f^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f^{-(n-1)}(U_{i_{n-1}}).$$

Így $N_n(\mathcal{U}, f) \geq p^n$ minden n egészre, és

$$h_{top}(f) \geq h_{top}(\mathcal{U}, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(\mathcal{U}, f)}{n} \geq \log p.$$

Most lássuk az általános esetet, amikor $J_1, \ldots, J_p$-nek esetleg van közös végpontja. Legyen $n \geq 1$. Alkalmazva az intervallumláncokról szóló 7. Lemmát minden $(J_{i_1}, \ldots, J_{i_n})$-re, $i_k \in \{1, \ldots, p\}$, láthatjuk, hogy f^n-nek van

p^n-lópatkója. Számozzuk meg ennek a lópatkónak a p^n darab intervallumát balról jobbra I-ben, és csak azokat vegyük figyelembe, amelyeknek a sorszáma páratlan. Így kapunk egy $\lceil \frac{p^n}{2} \rceil$-lópatkót, aminek az intervallumai diszjunktak. Használva a bizonyítás első felét:

$$h_{top}(f^n) \geq \log \left(\frac{p^n}{2} \right).$$

Hogy megkapjuk f-re a becslést, osszunk le n-nel:

$$h_{top}(f) \geq \frac{n \cdot \log \left(\frac{p}{\sqrt[n]{2}} \right)}{n}$$

Határértéket véve megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget. □

2. Következmény. *Ha f^n-nek van k-lópatkója, akkor*

$$h_{top}(f) \geq \frac{log(k)}{n}.$$

3. Tétel. *(Misiurewicz) Tegyük fel, hogy az $f : I \to I$ leképezésnek pozitív az entrópiája. Ekkor minden t-re, amire teljesül $0 < t < h_{top}(f)$ és minden N-re léteznek diszjunkt intervallumok $J_1, J_2, \ldots, J_k$ úgy, hogy minden $n \geq N$-re $J_1, \ldots, J_k$ egy k-lópatkó f^n-re és $\frac{log(k)}{n} \geq t$.*

Bizonyítás. Bizonyítás megtalálható a [4]-ben. □

4. Tétel. *(Block-Guckenheimer-Misiurewicz-Young) Legyen $f : I \to I$ egy intervallum-leképezés, és $I_1, \ldots, I_n$ zárt, nem elfajuló részintervallumok, diszjunkt belsőkkel (legfeljebb a végpontokban érintkezhetnek). Legyen M az I_1, $\ldots, I_n$ intervallumok átmenetmátrixa. Ha M' részmátrixa M-nek, akkor $h_{top}(f) \geq log\lambda'$, ahol λ' az M' maximális sajátértéke.*

Bizonyítás. Legyen G az $I_1, \ldots, I_n$ intervallumokból készített Markov-gráf, és G' részgráfja G-nek, aminek átmenetmátrixa M'. Hozzuk M'-t Jordan normálalakra, és legyenek $M_1, \ldots, M_k$ a diagonálisban helyet foglaló blokkok. M'-nek a maximális λ' sajátértéke maximális sajátértéke M_m-nek is,

valamilyen $1 \leq m \leq k$-ra. Legyen $(M_m)^n = (a_{ij}^n)_{ij\in\mathcal{I}}$, ahol $\mathcal{I}$ -ben az M_m méretének megfelelő indexek vannak. Tudjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \|(M_m)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lambda'.$$

Mivel $\|(M_m)^n\| = \sum_{i,j\in\mathcal{I}} a_{ij}^n$, létezik $i, j \in \mathcal{I}$ index, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} (a_{ij}^n)^{\frac{1}{n}} = \lambda'.$$

M_m irreducibilis, így létezik út j-ből i-be a G' gráfban, legyen n_0 a hossza ennek az sétának. Az i-ből i-be vezető $n + n_0$ hosszú séták száma nagyobb vagy egyenlő, mint az n hosszú i-ből j-be vezető séták száma, azaz $a_{ii}^{n_0+n} \geq a_{ij}^n$ minden $n \geq 0$-ra. Így

$$\limsup_{n\to\infty} (a_{ii}^n)^{\frac{1}{n}} = \lambda'.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és $n \geq 1$, hogy

$$a_{ii}^n \geq (\lambda - \varepsilon)^n.$$

Legyen $N = a_{ii}^n$ ami az n hosszú séták száma i-ből i-be a G'-ben, és minden $(i_0, \ldots, i_n)$ sétára az $(I_{i_0}, \ldots, I_{i_n})$ egy intervallumlánc. Ekkor létezik $K_1, \ldots, K_N$ zárt, páronként egymásba nem nyúló intervallum, hogy $K_k \subset I_{i_0} = I_i$ minden $1 \leq k \leq N$-re. Ez annyit tesz, hogy f^n-nek van N-lópatkója, tehát $h_{top}(f) = \frac{1}{n} h_{top}(f^n) \geq \frac{1}{n} \log N \geq \lambda' - \varepsilon$, amiből már következik az állítás. □

1.3.4. Topologikusan tranzitív és keverő leképezések tulajdonságai

10. Lemma. *Legyen $f : [a, b] \to [a, b]$ intervallum-leképezés. Az f akkor és csak akkor keverő, ha minden $\varepsilon > 0$-ra és minden nem elfajuló J intervallumra létezik N egész, hogy minden $n \geq N$-re $f^n(J) \supset [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f keverő és rögzítsük az $U_1 = (a, a+\varepsilon)$ és $U_2 = (b - \varepsilon, b)$ intervallumokat. Ha J egy nemüres nyílt intervallum, akkor létezik

N_1, hogy minden $n \geq N_1$-re $f^n(J) \cap U_1 \neq \emptyset$, hiszen f keverő. Hasonlóan létezik egy N_2, hogy minden $n \geq N_2$-re $f^n(J) \cap U_2 \neq \emptyset$. Így minden $n \geq \max\{N_1, N_2\}$-re $f^n(J)$ belemetsz U_1-be és U_2-be is, amiből következik, hogy $f^n(J) \supset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ az $f^n(J)$ összefüggősége miatt.
Most tegyük fel, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra és J nem elfajuló részintervallumra létezik N, hogy minden $n \geq N$-re $f^n(J) \supset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Legyen U, V nemüres nyílt halmaz $[a, b]$-ben. Legyen J, K két nem elfajuló részintervallum úgy, hogy $J \subset U$, $K \subset V$, és sem a sem b nem végpontja K-nak, továbbá legyen $\varepsilon > 0$, hogy $K \subset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. A feltevés szerint létezik N, hogy minden $n \geq N$-re $f^n(J) \supset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, amiből következik, hogy $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Tehát f keverő. □

11. Lemma. *Legyen $f : I \to I$ intervallum-leképezés, J egy részintervallum, amely nem tartalmaz periodikus pontot. Ha x, y, $f^m(x)$ és $f^n(y)$ is J-ben van és $y < x < f^m(x)$, akkor $y < f^n(y)$.*

Bizonyítás. Legyen $g = f^m$. Először indukcióval belátjuk, hogy minden $k \geq 1$-re $g^k(x) > x$. A feltétel szerint ez teljesül $k = 1$-re.
Tegyük fel, hogy minden $1 \leq i \leq k-1$-re $g^i(x) > x$, és $g^k(x) \leq x$. Rendezzük a $\{g^i(x) \mid 0 \leq i \leq k-1\}$ halmazt: $g^k(x) \leq x = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1}$. Legyen $1 \leq j \leq k-1$ olyan, hogy $x_1 = f^j(x)$; az x_1 a J-ben van, hiszen $x_1 \leq g(x)$. Teljesül, hogy $g^{k-j}([x_0, x_1]) \supset [g^k(x), g^{k-j}(x)] \supset [x_0, x_1]$, így a 4. Lemma alapján $g = f^m$-nek van fixpontja $[x_0, x_1] \subset J$-ben, azaz f-nek periodikus pontja van ugyanitt, ami lehetetlen, tehát $g^k(x) > x$.
Ha $f^n(y) < y$, akkor minden $k \geq 1$-re $f^{kn}(y) < y$. Ekkor

$$f^{mn}(y) < y < x < f^{mn}(x),$$

így $f^{mn}([y, x]) \subset [y, x]$, tehát f-nek van periodikus pontja $[y, x] \subset J$-ben, ami ellentmondás. □

7. Állítás. *Ha $f : I \to I$ tranzitív intervallum-leképezés, akkor a periodikus pontok sűrűn helyezkednek el I-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik egy nemüres részintervallum $J = (a, b)$, ami nem tartalmaz periodikus pontot. Mivel f tranzitív, létezik $x \in J$, aminek sűrű a pályája. Ekkor létezik $m > 0$ és $0 < p < q$ és $a < f^q(x) < f^p(x) < x$. Legyen $y = f^p(x)$. Így

$$f^{q-p}(y) < y < x < f^m(x);$$

x, y, $f^m(x)$, $f^{q-p}(y)$ mind J-ben vannak, ami nem lehetséges. □

8. Állítás. *Legyen $f : [a, b] \to [a, b]$ tranzitív intervallum-leképezés. Ekkor a következő esetek teljesülhetnek:*

I. f totálisan tranzitív (azaz f^n tranzitív minden $n \geq 1$-re).

II. Létezik $c \in (a, b)$ úgy, hogy $J = [a, c]$ és $K = [c, b]$, ekkor $f(J) = K$ és $f(K) = J$; sőt $f^2|_J$ és $f^2|_K$ totálisan tranzitív, és c az egyetlen fixpontja f-nek.

Bizonyítás. Legyen x_0 az a pont, aminek a pályája sűrű $[a, b]$-ben, így $\overline{O_f(x_0)} = [a, b]$. Jelöljük $\omega(x, f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x) \mid k \geq n\}}$-nel az x omega-limeszhalmazát. Rögzítsük $n \geq 1$-et, és legyen $W_i = \omega(f^i(x_0), f^n)$ minden $0 \leq i \leq n - 1$-re. Mivel $[a, b] = W_0 \cup \cdots \cup W_{n-1}$, a Baire-tétel miatt legalább egynek a belseje nemüres. Sőt, $f(W_i) = W_{i+1\ (mod\, n)}$ minden $0 \leq i \leq n - 1$-re, így egyik W_i-nek sem üres a belseje.
Most megmutatjuk, hogy $Int(W_i) \cap Int(W_j) \neq \emptyset$, akkor $W_i = W_j$. Ugyanis a feltevésből következik, hogy létezik $k \geq 0$, hogy $f^{kn+i}(x_0) \in Int(W_i) \cap Int(W_j)$; W_j invariáns f^n-re, így $f^{k'n+i}(x_0) \in W_j$ minden $k' \geq k$-ra, tehát $W_i \subset W_j$. Hasonlóan megkapható, hogy $W_j \subset W_i$, így $W_i = W_j$.
Definiáljuk ε_n-t mint az $Int(W_i)$ halmazok összefüggő komponenseinek halmazát. Az ε_n diszjunkt nyílt halmazok uniója, ami sűrű $[a, b]$-ben. Minden $C \in \varepsilon_n$-re $f(\overline{C})$ egy zárt, nem elfajuló intervallum, és tartalmazza őt valamelyik W_i, így létezik $C' \in \varepsilon_n$, hogy $f(\overline{C}) \subset \overline{C'}$. Sőt, ha rögzítünk egy adott $C \in \varepsilon_n$-t, akkor minden $C' \in \varepsilon_n$-re létezik $k \geq 1$, hogy $f^k(\overline{C}) \cap \overline{C'} \neq \emptyset$, mivel x_0 pályája sűrű, így $f^k(\overline{C}) \subset \overline{C'}$. Ebből viszont következik, hogy

ε_n véges, és elemei egymás között permutálódnak az f hatására. Jelöljük $\varepsilon_n = \{C_1, \ldots, C_p\}$-vel sorban az $f(\overline{C_i}) \subset \overline{C_{i+1\ (mod\, p)}}$-ket minden $1 \leq i \leq p$-re; a tartalmazások valójában egyenlőségek, hiszen az $\bigcup C_i$ halmaz sűrű, így $\bigcup f(C_i)$ szintén sűrű.

Ha minden $n \geq 1$-re az ε_n elemeinek száma 1, akkor $\omega(x_0, f^n) = [a, b]$ és f totálisan tranzitív, tehát ebben az esetben az I. állítás teljesül. Tegyük fel, hogy adott n-re az ε_n elemeinek p száma szigorúan nagyobb, mint 1. Megmutatjuk, hogy $p = 2$. Legyen f fixpontja c. Ha létezik $C \in \varepsilon_n$ úgy, hogy $c \in C$, akkor $f(\overline{C}) = \overline{C}$, ami lehetetlen, mert ε_n elemei egymás között ciklikusan permutálódnak. Hasonlóan nem lehet $[a, b]$-nek a c végpontja sem. Következésképp a c csak a közös végpontja lehet két különböző C-nek és C'-nek ε_n-ből. Ekkor $f(\overline{C}) = \overline{C'}$, és $f(\overline{C'}) = \overline{C}$, ami csak akkor lehetséges, ha $p = 2$. Ebből szintén az következik, hogy n páros. Ha $J = [a, c]$ és $K = [c, b]$, akkor $\varepsilon_n = \{Int(J), Int(K)\}$, és

$$f(J) = K, \quad f(K) = J.$$

Sőt, ha c az egyetlen fixpontja f-nek, akkor c nem végpont. Mivel n páros, így $\omega(x_0, f) \subset \omega(x_0, f^2)$, így $\varepsilon_2 = \{Int(J), Int(K)\}$. Így $f^2|_J$ és $f^2|_K$ is tranzitív. Ha $f^2|_J$ nem totálisan tranzitív, akkor $f^2|_J$-nek egyetlen fixpontja van c', és $a < c' < c$. De c már fixpontja $f^2|_J$-nek, így $f^2|_J$ totálisan tranzitív, ahogy $f^2|_K$ is. Ez pedig pontosan a II. állítás. □

3. Következmény. *Legyen $f : I \to I$ intervallum-leképezés. Ha f totálisan tranzitív, akkor keverő.*

Bizonyítás. Legyen $I = [a, b]$, J egy nem elfajuló részintervallum, és $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $(a, a+\varepsilon) \cap J = \emptyset$. Ekkor f tranzitivitása miatt van x periodikus pont J-ben, továbbá létezik x_1 periodikus pont $(a, a+\varepsilon)$-ben, hogy $f^n(x_1) \notin \{a, b\}$ minden $n \geq 0$-ra. Legyen

$$y_1 = \min\{f^n(x_1) \mid n \geq 0\} \quad \text{és } z_1 = \max\{f^n(x_1) \mid n \geq 0\}.$$

Hasonlóan, létezik x_2 periodikus pont (a, b)-ben, hogy a maximális z_2 pont $(b - \varepsilon, b)$-hez tartozik; legyen y_2 a minimális pontja x_2 pályájának. Legyen

k a közös többszöröse x, x_1 és x_2 periódusának. Rögzítsük $g = f^k$-t, mivel f totálisan tranzitív, ezért g tranzitív. Így létezik $v \in J$ és p_1, p_2, hogy $g^{p_1}(v) < y_1$ és $g^{p_2}(v) < y_2$ illetve létezik $w \in J$ és q_1, q_2 hogy $g^{q_1}(w) > z_1$, $g^{q_2}(w) > z_2$. Mivel az x fixpont g-re nézve, az összefüggőség miatt $g^{p_1}(J) \supset [g^{p_1}(v), x]$, illetve $g^{q_1}(J) \supset [x, g^{q_1}(w)]$, illetve hasonló teljesül p_2-re és q_2-re. Legyen $N = \max\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, ekkor $g^N(J) \supset [g^{p_i}(v), g^{q_i}(w)]$, és mivel y_1, y_2, z_1, z_2 szintén fixpontok g-re nézve (hiszen az x_i-k periodikus pályájához tartoznak) így az összefüggőség miatt ők is benne vannak $g^N(J)$-ben. Az y_i, z_i választása miatt a $g^N(J) = f^{kN}(J)$ tartalmazza az y_i és z_i egész pályáját, így $[y_i, z_i] \subset f^n(J)$ minden $n \geq kN$-re. Mivel $y_1 < a + \varepsilon$ és $z_2 > b - \varepsilon$, ebből következik, hogy $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset f^n(J)$ minden $n \geq kN$-re, ami annyit tesz, hogy f keverő. □

4. Következmény. *Legyen $f : I \to I$ tranzitív leképezés. Ekkor f akkor és csak akkor keverő, ha van páratlan periódusú periodikus pontja, aminek periódusa különbözik 1-től.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f keverő, az f fixpontjai zárt halmazt alkotnak. Legyen J egy nem elfajuló zárt részintervallum I belsejében, ami nem tartalmaz fixpontot. Ekkor a 10. Lemma alapján létezik N egész, hogy $f^n(J) \supset J$ minden $n \geq N$-re. Legyen $n \geq N$ páratlan, ekkor f^n-nek van x fixpontja J-ben. Legyen p az x periódusa f-re nézve, p osztja n-t, így p páratlan, továbbá $p > 1$, mert $x \in J$.
Most tegyük fel, hogy f tranzitív, de nem keverő. Ekkor létezik J, K intervallum úgy, hogy $f(J) = K$, és $f(K) = J$, továbbá $J \cup K = I$. Következésképp, ha f-nek van periodikus pontja, az csak páros periódusú lehet, kivéve a J és K közös végpontját, ami viszont egy fixpont. □

9. Állítás. *Legyen $f : I \to I$ intervallum-leképezés.*

I. Ha f tranzitív, akkor $h_{top}(f) \geq \frac{\log 2}{2}$.

II. Ha f keverő, akkor $h_{top}(f) > \frac{\log 2}{2}$.

Sőt, ezek a korlátok élesek, azaz létezik $\frac{\log 2}{2}$ entrópiájú tranzitív leképezés, és keverő leképezések sorozata is létezik, melyek entrópiája $\frac{\log 2}{2}$-höz tart.

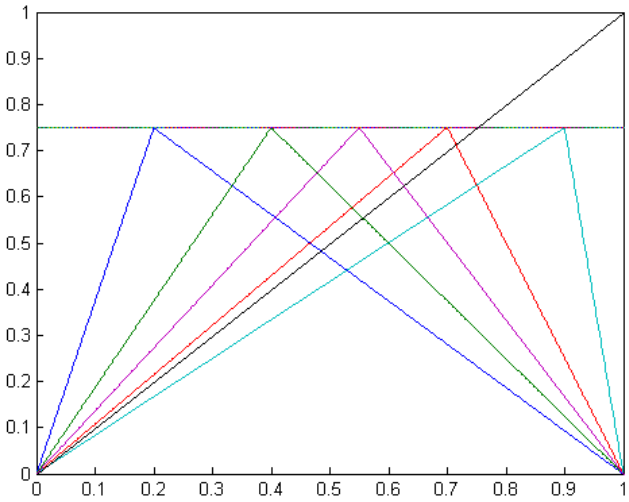
Bizonyítás. Először a II. állítást bizonyítjuk. Ha f keverő, akkor van 1-től különböző páratlan periódusú pontja, továbbá létezik két diszjunkt zárt J, K intervallum, amik nem érintkeznek I végpontjaival és lópatkót alkotnak f^2-re nézve. (Ennek a részállításnak a bizonyítását lásd itt: [1]) Legyen L egy nem elfajuló intervallum J és K között. Legyen A a $J \cup K$ konvex burka; ez egy zárt intervallum, ami nem tartalmazza I végpontjait. A összefüggősége miatt tartalmazza L-t, és $f^2(J) \supset A \supset J \cup K$, hasonlóan $f^2(K) \supset A$. Mivel f keverő, így létezik $n \geq 1$, hogy $f^{2n}(L) \supset A$, az intervallumláncos 7. Lemma alapján pedig létezik $(I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}, A)$ intervallumlánc a következő szereposztással: $I_i = J$ vagy K, továbbá létezik 2^n egymásba nem nyúló zárt részintervallum, amik $J \cup K$-ban helyezkednek el (jelöljük őket $(L_i)_{1 \leq i \leq 2^n}$-el), méghozzá a következő módon: $f^{2n}(L_i) \supset A \supset J \cup L \cup K$. Ilyeténképpen $(L_1, L_2, \ldots, L_{2^n}, L)$ egy $(2^n + 1)$-lópatkó f^{2n}-re nézve. Így

$$h_{top}(f) = \frac{1}{2n} h_{top}(f^{2n}) \geq \frac{\log(2^n + 1)}{2n} > \frac{\log 2}{2}.$$

Most lássuk az I. állítást. Ha f tranzitív és keverő, akkor teljesül, hogy $h_{top}(f) \geq \frac{\log 2}{2}$. Ha f tranzitív, de nem keverő, akkor az I intervallum szétesik J és K intervallumra, amikre megszorítva f^2-et keverő lesz. Amennyiben $\{x\} = J \cap K$ fixpontja f-nek, akkor fixpontja $f^2|_K$-nak és $f^2|_J$-nek is, továbbá x nincs a J belsejében. (Ez a részállítás szintén nem kerül itt bizonyításra, részletesen lásd: [1]-ben.) Ekkor $f^2|_K$-nak és $f^2|_J$-nek is van lópatkója, ami annyit tesz, hogy $h_{top}(f^2) \geq \log 2$, így a 7. Megjegyzés alapján $h_{top}(f) = \frac{1}{2} h_{top}(f^2) \geq \frac{\log 2}{2}$. $\square$

2. fejezet

Sátor-leképezés



$c = 0.2, c = 0.4, c = 0.55, c = 0.7, c = 0.9$

Ebben a fejezetben rátérek arra a rendszerre ($T_c(x)$ sátor-leképezés), aminek a topologikus entrópiáját számolni fogom. A szakdolgozatom kitűzött célja, hogy minél többet megtudjak ennek a rendszernek a dinamikájáról, arról hogy mennyire kaotikus, illetve hogy különböző c-kre mennyi $T_c(x)$ topologikus entrópiája. Az előző fejezetben felvázolt elmélet támogatja az itt

leírtakat.

A sátor-leképezést az alábbi lineáris függvény prezentálja:

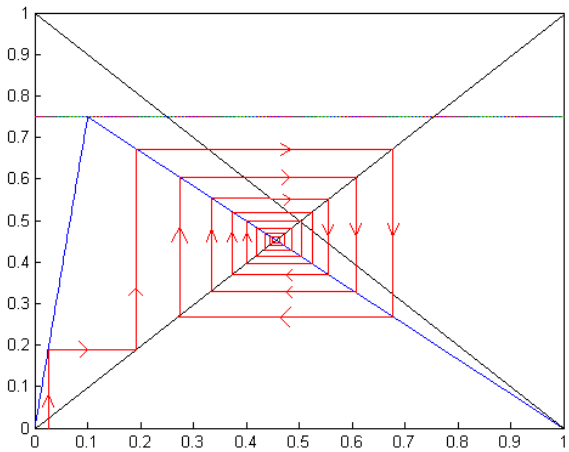
$$T_c(x) = \begin{cases} \frac{3}{4c}x & \text{ha } x < c; \\ \frac{3}{4(1-c)}(1-x) & \text{ha } x \geq c. \end{cases}$$

Ennek a függvénynek a paramétere c, ami azt adja meg, hogy hol legyen a sátor csúcsa a $3/4$ magasságú szakaszon. Azt fogjuk vizsgálni, hogy különböző c-kre hogyan viselkedik a rendszer hosszú távon.

2.1. Fixpontok

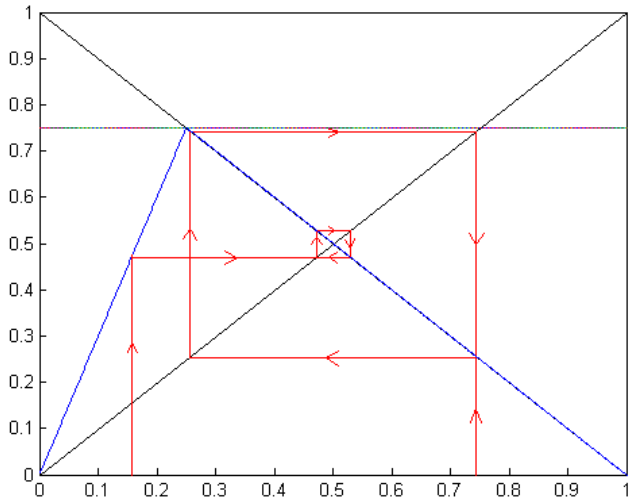
Jól látható a bevezető ábrán, hogy a sátor-leképezésnek vannak fixpontjai. A 0 minden esetben fixpont, és általában van még egy a $\frac{3}{7-4c}$ helyen. (Amennyiben $c \leq 0.75$, egyenlőség esetén minden pont fixpont, egyébként pedig nincs egy fixpont sem).

Vizsgáljuk meg ezeket a fixpontokat különböző c-k esetén! Először az $\frac{1}{4}$-nél kisebb c-kre:



2.1. ábra. c=0.1

Az értelmezési tartományban a fixponttól jobbra eső pontok a sátor negatív meredekségű jobb oldala miatt átvándorolnak a bal oldalra, ugyanakkor a nulla egy taszító fixpont, "belelöki" a pontokat a középső $\frac{3}{7-4c}$ fixpontba. Ez utóbbi azért van, mert $\frac{1}{4}$-nél kisebb c-kre a sátor bal oldalának meredeksége nagyobb mint 1, így a nullából mindenképpen kirepülnek a pontok, viszont a jobb oldal meredeksége 0 és -1 között van, ezért a $\frac{3}{7-4c}$ már hiperbolikus vonzó fixpont lesz, a $(0, 1]$ pedig stabil környezet.
A $c = \frac{1}{4}$ paraméterérték esetén:



2.2. ábra. c=0.25

Ekkor a függvény bal oldala $3x$, míg a jobb oldala $1 - x$. A nulla továbbra is taszító fixpont, a sátor bal oldalának meredeksége nagyobb mint 1, viszont a sátor jobb oldalának meredeksége éppen -1, ennek köszönhető a meglepő dinamika, ami létrejön ennél a paraméterértéknél.
A $[\frac{3}{4}, 1]$ intervallumnak a képe a $[0, \frac{1}{4}]$, és azok a pontok, amelyek 0 és $\frac{1}{4}$ között helyezkednek el, szükségszerűen belépnek az $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ intervallumba, ebben az intervallumban pedig csak az $1-x$ leképezés hat, ami kettő szerint periodikus:

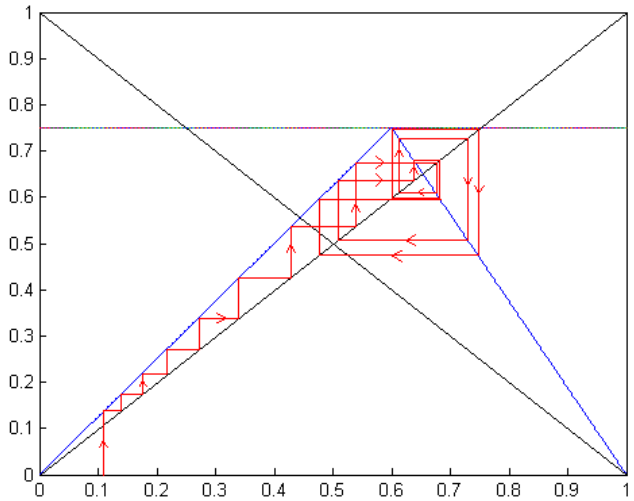
$1-(1-x)=x$.

Fontos megjegyezni, hogy az $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$-ben minden pont periodikus pont, és *ezek mind különböző pályához tartoznak*. Tehát az $\frac{1}{4}$ paraméterértéknél a rendszer bifurkál, kontinuum sok periodikus pálya jön létre.

Az egész intervallumon összegezve a pontok viselkedését: a 0-t kivéve minden pont periodikus, vagy *végperiodikus*: a $(0,\frac{1}{4})\cup(\frac{3}{4},1]$ pontok "rátekerednek" egy alkalmas $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$-ből induló periodikus pályára.

Ahogy a c értéke átlépi az $\frac{1}{4}$ értéket a $\frac{3}{7-4c}$ fixpont vonzó hiperbolikusból taszító fixponttá fog alakulni, innentől válik érdekessé a dinamika.

A $\frac{1}{4}<c<\frac{3}{4}$ paraméterértékek:

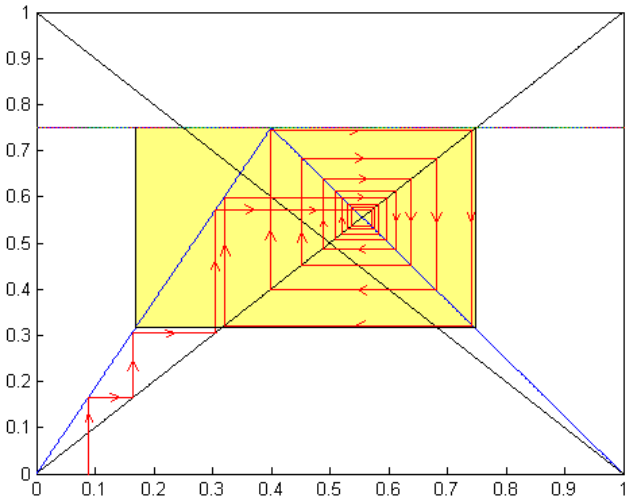


2.3. ábra. c=0.6

Ebben az esetben a sátor jobb oldalának meredeksége kisebb mint -1, ettől még a $\frac{3}{7-4c}$-től jobbra lévő pontok mind átmennek bal oldalra, a 0 viszont továbbra is taszító fixpont marad, hiszen a bal oldali meredekség nagyobb mint 1. Továbbá a $\frac{3}{7-4c}$-ből taszító hiperbolikus fixpont válik. Ugyanakkor ennek a fixpontnak - hiába taszító - lesz egy olyan V vonzó környezete, amibe ha belép egy pont, többé már nem tud kijönni. Ez annak köszönhető,

hogy a függvény maximum értéke nem 1, hanem $\frac{3}{4}$, így ha a függvény felvesz $T(3/4) = \frac{3}{16(1-c)}$-nél nagyobb vagy egyenlő értéket, akkor a $[\frac{3}{16(1-c)}, \frac{3}{4}]$ intervallumból már soha nem kerülhet ki, ugyanis ehhez az kellene, hogy $[\frac{3}{16(1-c)}, \frac{3}{4}]$ intervallumon a függvény vegyen fel $\frac{3}{16(1-c)}$-nél kisebb, vagy $\frac{3}{4}$-nél nagyobb értéket, ami nyilvánvalóan nem lehetséges. Minden pont a $(0, 1]$-ből belekerül ebbe a V környezetbe.

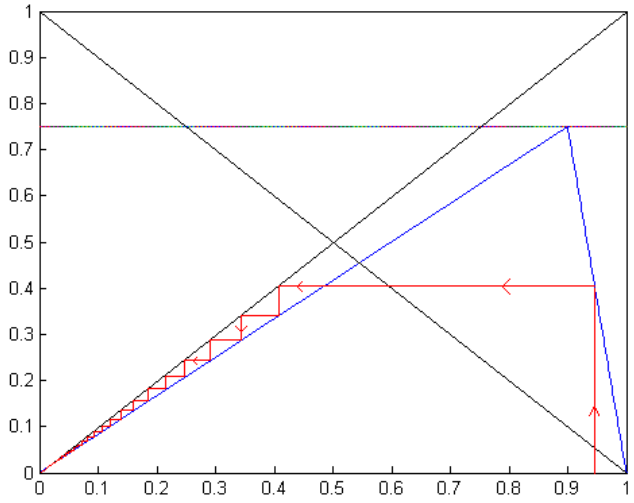
Ez a V környezet annál nagyobb, minél kisebb c, tekintve, hogy nagyságát a $T_c(3/4)$ érték határozza meg.



2.4. ábra. c=0.4; V vonzó környezet

A legérdektelenebbek a $c \geq \frac{3}{4}$ paraméterértékek, a bal oldal meredeksége lecsökken 1 alá, így a 0 vonzó fixponttá válik. Ezesetben szintén az egész $[0, 1)$ stabil környezete a 0 fixpontnak.

A továbbiakban többnyire csak a $\frac{1}{4} \leq c \leq \frac{3}{4}$ paraméterértékekkel fogok foglalkozni.



2.5. ábra. c=0.9

2.2. A sátor-leképezés jellegzetességei

Szeretnénk tudni, hogyan néz ki néhány iteráció után a sátor-függvény, különböző c-kre. Mivel $T_c(x)$ szakaszonként szigorúan monoton, így $T_c^k(x)$ is szakaszonként szigorúan monoton lesz, tehát várhatóan egy elég "tüskés" függvényt kapunk. Az, hogy megnnyire tüskés a függvény, meghatározza a következő definíció:

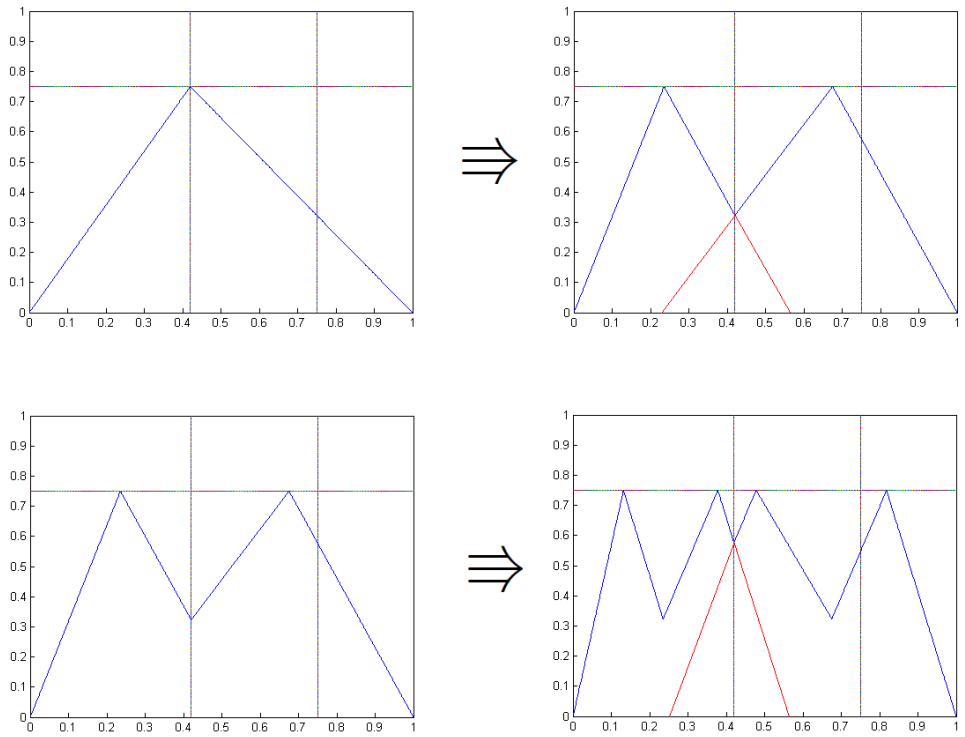
29. Definíció. *Legyen $f : I \to I$ intervallum-leképezés, az f-et* ***λ-expandernek*** *nevezzük, ha minden x, $y \in J \subset I$, amin f monoton, $|f(x) - f(y)| \geq \lambda|x - y|$.*

Minél nagyobb ez a λ, annál meredekebb a függvény, és annál tüskésebb is lesz, továbbá ahogy az 5. Állításból tudjuk, $T_c(x)$ entrópiája felülről becsülhető a λ-val. Mivel azonban c mozgatásával a sátor egyik oldalának meredeksége nő, a másik meg csökken, így csak az a paramétertartomány érdekel bennünket, ahol a sátor mindkét oldalának meredeksége nagyobb mint 1 (abszolútértékben). Ez pedig $\frac{1}{4} < c < \frac{3}{4}$ esetén teljesül. Valójában ez a becslés egy ennél is kisebb intervallumon hasznos csak, hiszen magának a le-

képezésnek az entrópiája nem lehet nagyobb $\frac{\log(2)}{2}$-nél, mert ennyi a monoton partíció minimális elemszáma $[0,1]$-en $T_c(x)$-re, a λ-s becslés pedig sok c-re nagyobb értéket ad ennél. (Lásd 2.8 ábra.)

$T_c(x)$-nek van egy "másolási és kettőződési" tulajdonsága, a következő értelemben:

A függvény bal ága vízszintesen összenyomja y-t $\frac{4c}{3}$ arányban (azaz az értelmezési tartománya összemegy ekkorára) és levágja c-nél, továbbá a függvény jobb ága összenyomja y-t $\frac{4(1-c)}{3}$ arányban, levágja a c-n túlnyúló részt és tükrözi $x = c$ egyenesre.



2.6. ábra. $T_{0.42}(x), T^2_{0.42}(x), T^3_{0.42}(x)$

Ez alapján azt is gondolhatnánk, hogy minden lépésben megkettőződik a csúcsok száma, de nem ez történik: ugyanis ami a $[0, \frac{3}{4}]$-en helyezkedik el

adott iterációban, az fog "túlélni" és megkettőződni a következőben. Tehát minden csúcs, aminek a helye az értelmezési tartományban $\frac{3}{4}$-nél nagyobb, a következő iterációban kihullik.

A továbbiakban vizsgáljuk meg az egyes pontok ősképeit. Mivel $T_c(x)$ nem invertálható, így megszorítom a leképezést először $[0, c]$-re és ennek veszem az inverzét $(T^{-1}_{c(b)}(x))$, illetve megszorítom $[c, 1]$-re és ennek is veszem az inverzét $(T^{-1}_{c(j)}(x))$.

$$T_c^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{4c}{3}x & \text{"bal oldali";} \\ -\frac{4(1-c)}{3}x + 1 & \text{"jobb oldali".} \end{cases}$$

Így egy adott x-re alkalmazva T_c^{-1}-et két ősképet kapunk, egyet a bal oldalról, és egyet a jobbról. Hogyan informálnak minket az ősképek a cikkcakkszámról? Ha egy vízszintes vonallal elmetsszük $T_c^k(x)$ értékeit, akkor minden egyes monotonitási intervallumban lesz egy metszéspont, így pontosan a cikkcakkszámot kapjuk meg.

Ha ezt a két inverzet minden egyes lépésben alkalmazzuk az adott iterációban keletkező pontokra, akkor minden alkalommal megkettőződik az ősképek száma. De ha ez valóban így van, akkor minden egyes c-re a k-adik iterációban 2^k db metszéspont és ezzel együtt ennyi cikkcakk is van. Ez nyilván nem igaz: vizsgáljuk meg, mi történik valójában. Az alábbi ábrán különböző c-kre láthatjuk a $\frac{3}{4}$ ősképeit néhány iteráción keresztül. Amik pirosak, azok hamis ősképek, ugyanis "nem azon az oldalon voltak, amelyiken lenniük kellett volna". Ezt úgy kell érteni, hogy ha "bal oldali" inverzet alkalmaztunk rá, akkor a c-nél kisebbnek kell lennie, ha pedig "jobb oldalit", akkor c-nél nagyobbnak. A kékek azokat a pontokat jelzik, amelyeknek a "gyerekei" hamisak lesznek. Ezeket könnyű felismerni, ha a pont értéke nagyobb, mint $3/4$, akkor a gyerekei hamis ősképek lesznek. Lássuk, miért:

Legyen $d > 3/4$, ekkor $d\frac{4c}{3} > c$, hiszen $d\frac{4}{3} > 1$, ugyanígy $1 - d\frac{4(1-c)}{3} < c$.

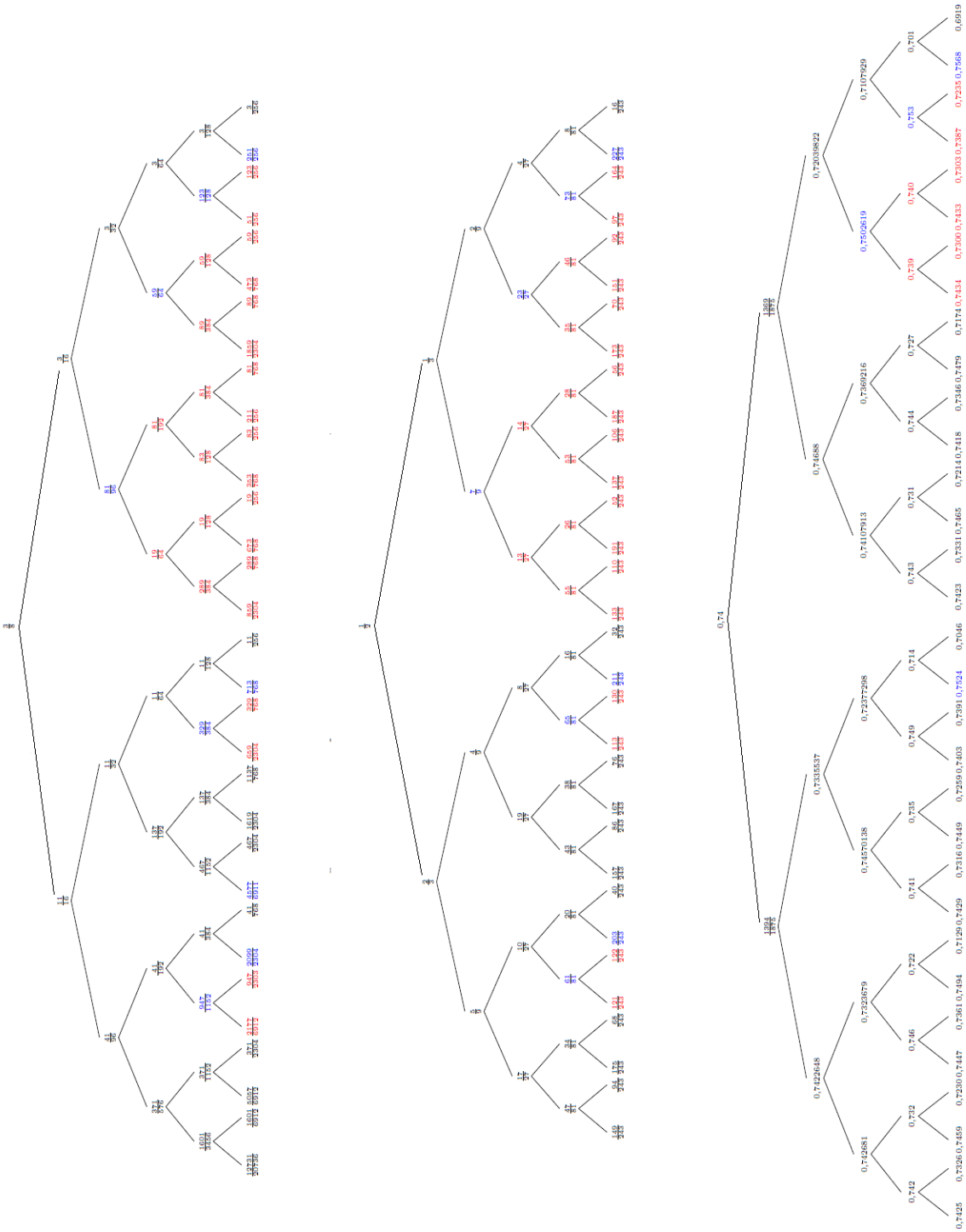
A 2.7-es ábrán jól látszik, hogy nagyobb c-kre a hamis ősképek száma lecsökken, tehát a cikkcakkszám a c-ben növekedő tendenciát mutat. Amennyiben a cikkcakkok "egyenletesen" kitöltik az értékkészletet (vagy annak egy összefüggő részét), akkor elegendő egyetlen értéknek az ősképeit vizsgálni (mivel

ekkor létezik megfelelő magasságban egyetlen vonal, amely átmetszi az összes cikkcakkot). Később látni fogjuk, hogy a sátor-leképezés egyes c értékeire ez nem teljesül, lesznek olyan c-k, amikre a cikkcakkok értékkészlete szétesik két diszjunkt intervallumra. Ebben az esetben két értéket kell választani, tehát a módszert csupán meg kell ismételni egy másik értékre is, de a tendencia megmutatkozik már egyetlen érték vizsgálatánál is.

Amennyiben $c < \frac{1}{4}$ a cikkcakkszám elég unalmasnak ígérkezik: ahogy azt a fixpontos résznél láttuk, ebben az esetben a $\frac{3}{7-4c}$ fixpont vonzó hiperbolikus lesz. Ez annyit tesz, hogy néhány iteráció után minden pont belép a fixpont vonzó környezetébe, ahol már az 1-nél kisebb meredekségű jobb oldal hatása fog érvényesülni. Emiatt a cikkcakkok idővel "kisimulnak", és a leképezés a $\frac{3}{7-4c}$-en áthaladó "konstans függvényé" válik (valójában az intervallum két szélén lemegy nullába, de nullától és az egytől eltekintve egy jó közelítése a konstans függvénynek), így a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log c_n$ is 0-hoz tart.

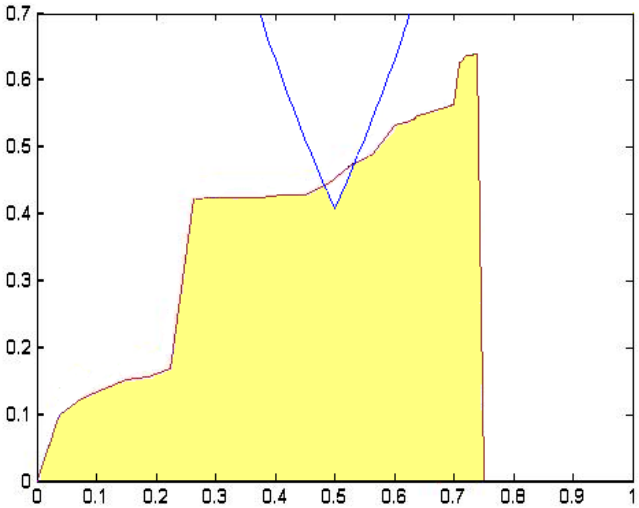
A $c > \frac{3}{4}$ paraméterértékekere nincs értelme arról beszélni, hogy "a függvény bal ága vízszintesen összenyomja y-t $\frac{4c}{3}$ arányban", mivel a $\frac{4c}{3}$ ebben ez esetben nagyobb, mint 1, így inkább nyújtásról van szó. Viszont ha kinyújtjuk az értelmezési tartományt, akkor a csúcs a c-től jobbra fog elhelyezkedni, ami levágásra kerül. Ugyanígy a jobb oldali ág esetében: a csúcs a c-től balra fog elhelyezkedni, ezért szintén levágódik. Ezért a c-ben két lineáris függvény találkozik minden egyes iterációban, amiknek a meredeksége folyamatosan csökken. Így ebben az esetben is nulla lesz az entrópia.

Az általános séma után nézzünk egy numerikus szimulációt. Itt már egy direkt megközelítést alkalmazok. A program a meredekség megváltozását figyeli, ezáltal összeszámolva a monoton intervallumokat (és így a cikkcakkszámot). A topologikus entrópia definíciója alapján az iterációszámmal végtelenbe kell tartani, de ez a program keretei között erősen korlátozott, tekintve hogy a csúcsok számának növekedése exponenciális nagyságú.



2.7. ábra. c=3/8, c= 1/2, c=0.74

De az 1. Következmény (Misiurewicz-Szlenk) alapján tudjuk, hogy bármely k-ra az $1/k \cdot \log c_k$ felülről becsli a topologikus entrópiát. (Mivel ez egy csökkenő sorozat, a magasabb iteráció egy jobb közelítést ad.)
A program forráskódja és részletes elemzése a Függelékben megtekinthető (3. program).
A 2.8-as ábrán összegeztem, amit eddig tudunk a topologikus entrópiáról. Először is, hogy a leképezés topologikus entrópiája biztosan kisebb vagy egyenlő mint log(2). A λ-expanderség miatt kapunk egyrészről egy felső becslést (ez a "v-alak"), továbbá a cikkcakkszám alapján kapunk egy másik felső becslést. A program maximálisan $k = 16$-ra futott le, tehát 16 iteráció alapján adtam becslést a cikkcakkszámra.



2.8. ábra. Topologikus entrópia sáv

2.3. Topologikus entrópia és keverés

10. Állítás. *A sátor-leképezés topologikus entrópiája* $c = \frac{7}{16}$ *paraméterértékre* $\frac{\log(2)}{2}$.

12. Megjegyzés. Ezt az állítást úgy fogom igazolni, hogy először belátom, a leképezés ilyen c-re topologikusan tranzitív egy alkalmas intervallumon, az ilyen leképezésekről ugyanis tudjuk a 9. Állítás alapján, hogy entrópiájuk nagyobb vagy egyenlő mint $\frac{\log(2)}{2}$. Látható, hogy $T_c(x)$ nem lehet az egész $[0,1]$-en tranzitív, hiszen az értékkészlete csupán a $[0,\frac{3}{4}]$, ezért nem létezhet olyan pont, aminek a pályája sűrű a $[0,1]$-en (sőt, még olyan sem, aminek a $[0,\frac{3}{4}]$-en). Ezért egy tranzitív halmazt fogok keresni. Ehhez a dinamikus magot hívom segítségül.

30. Definíció. *A $[T_c^2(c), T_c(c)]$ által kifeszített intervallumot a **dinamikus rendszer magjá**nak nevezzük.*

Tekintsük a $J = [\frac{4c}{7-4c}, \frac{3}{7-4c}]$ intervallumot. A $\frac{3}{7-4c}$ fixpont, a $\frac{4c}{7-4c}$ pedig végfixpont, hiszen $\frac{4c}{7-4c} < c$ és $\frac{4c}{7-4c} \cdot \frac{3}{4c} = \frac{3}{7-4c}$. Ekkor a második iterálttól kezdve az intervallum két végpontja helyben marad. Az intervallumon $T_c(x)$ maximuma $\frac{3}{4}$, a minimuma pedig $T_c^2 = \frac{3}{16(1-c)}$. Legyen $K = [\frac{3}{7-4c}, \frac{3}{4}]$. A $J \times [J,K]$ halmaz a rendszer dinamikus magja.

11. Állítás. *A H=$[\frac{4c}{7-4c}, \frac{3}{4}] = [J,K]$ intervallum tranzitív halmaz $T_{\frac{7}{16}}(x)$-re nézve.*

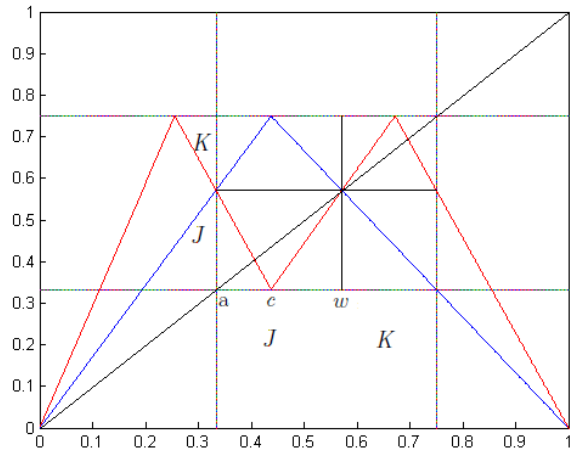
A $H \times f(H)$ halmazt az első illetve a második iterált bal oldali metszéspontja illetve a $\frac{3}{4}$ adja ki, melynek teteje $\frac{3}{4}$, az alja pedig $\frac{3}{16(1-c)}$ magasságban van. A $c = \frac{7}{16}$-ra a $H \times f(H)$ pontosan négyzet alakú, ugyanis a

$$\frac{3}{4} - \frac{4c}{7-4c} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4(1-c)}(1 - \frac{3}{4})$$

egyenlet megoldásai $c_1 = \frac{7}{16}$, $c_2 = \frac{3}{4}$.

Bizonyítás. Lássuk, hogy H mitől tranzitív halmaz. Tudjuk, hogy $x \in H$-ra sem mehet $T_{\frac{7}{16}}(x)$ értéke a $\frac{3}{4}$ fölé, továbbá a leképezés minimumát megadja az első iteráció értéke a $\frac{3}{4}$-ben. (Ugyanis a másolási tulajdonság miatt az első iteráció értéke a 3/4-ben megadja a legmélyebb völgy értékét a következő iterációkban. Mivel a sátor meredeksége kétoldalt növekszik az iterációk során, így az első iterációban a legkisebb a $\frac{3}{4}$-ben az érték.) Tehát $f(H) \subset H$.

Arra van még szükség, hogy $T_{\frac{7}{16}}(x)$ (a továbbiakban $T_c(x)$) tranzitív ezen a halmazon.



2.9. ábra. $H \times f(H)$

Legyen $w = \frac{3}{7-4c}$ - azaz a fixpont, a pedig $\frac{4c}{7-4c}$ - azaz a végfixpont.
Belátom, hogy a második iterálástól kezdve J és K cserélődő intervallumok, azaz $T_c(J) = K$, $T_c(K) = J$, továbbá $T_c^2(x)|_K$ és $T_c^2(x)|_J$ keverő transzformáció.
A $T_c(K) = [\frac{3}{16(1-c)}, \frac{3}{7-4c}]$, míg $T_c(J) = [\frac{3}{7-4c}, \frac{3}{4})$. Mivel minden $x \in K$-ra $x > c$, így a $T_c(x)$ jobb oldali ágát kell rá alkalmazni, ami monoton csökkenő, ezen az intervallumon a maximuma $T_c(w) = \frac{3}{7-4c}$, a minimuma pedig $T_c(c) = \frac{3}{16(1-c)}$. Így $T_c(K) = [\frac{3}{16(1-c)}, \frac{3}{7-4c}] = J$. Hasonlóan J-re: itt nem igaz, hogy minden $x \in J$-re a $T_c(x)$-nek csak az egyik ágát alkalamzhatnánk: a $[\frac{4c}{7-4c}, c]$-re a bal oldali ágat kell alkalmazni, ez monoton növekedő, így a maximum $T_c(c) = \frac{3}{4}$, a minimum $T_c(4c/(7-4c)) = \frac{3}{7-4c} = w$. A $[c, \frac{3}{7-4c}]$-re újból a jobb oldali ágat kell alkalmazni, a minimum $T_c(c) = \frac{3}{16(1-c)}$, a maximum $T_c(\frac{3}{7-4c}) = \frac{3}{7-4c} = w$. Így $T_c(J) = K$, ebből pedig az következik, hogy J és K egymás között cserélődő intervallumok.

$T_c^2(x)$-et jelölöm g-vel. A g egy λ-expander, ahol λ=min $\left\{\frac{3}{4\cdot\frac{7}{16}}, \frac{3}{4\cdot\frac{9}{16}}\right\}$=$\frac{4}{3} > 1$. Ekkor g a $[c, w]$ intervallumon monoton növekedő. Válasszuk ε-t úgy, hogy $w - \varepsilon > c$, ekkor $g[w - \varepsilon, w] \supset [w - \lambda\varepsilon, w]$ és $g^k[w - \varepsilon, w] \supset [w - \lambda^k\varepsilon, w]$, és mivel $\lambda > 1$, lesz olyan k, amire $g^k[w - \varepsilon, w] \supset [c, w]$. Ugyanakkor ezt a sátor másik felével is el lehet játszani, hiszen $g(\frac{4c}{7-4c}) = \frac{3}{7-4c}$ végfixpontja J-ben a g-nek. Lássuk, mi történik egy olyan itervallummal, amelyikben nincs benne a fixpont. Legyen $I = [d, e]$ egy J-beli intervallum, ami tartalmazza c-t, továbbá legyen $\upsilon = \min\{c - a, w - c\}$. Ekkor $g(I)$ tartalmazza w-t, és $g(I)$-re teljesülnek a fenti feltételek. Tegyük fel, hogy I nem tartalmazza c-t, ekkor $I \subset [a, c]$ vagy $I \subset [c, w]$. Legyen $I \subset [a, c]$, ha $c \in g(I)$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $g(I) \subset [a, c]$, tudjuk, hogy $|g(I)| \geq \lambda \cdot |I|$, és mivel $\lambda > 1$, létezik olyan k, amire $\lambda^k \cdot |I| > \upsilon$. Tegyük fel, hogy $k - 1$ iteráción keresztül $c \notin g^{k-1}(I)$, ekkor viszont $c \in g^k(I)$. Tehát tetszőleges J-beli U, V halmazra teljesül, hogy létezik olyan N, hogy minden $n \geq N$-re $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

K-ra teljesen hasonló a bizonyítás.

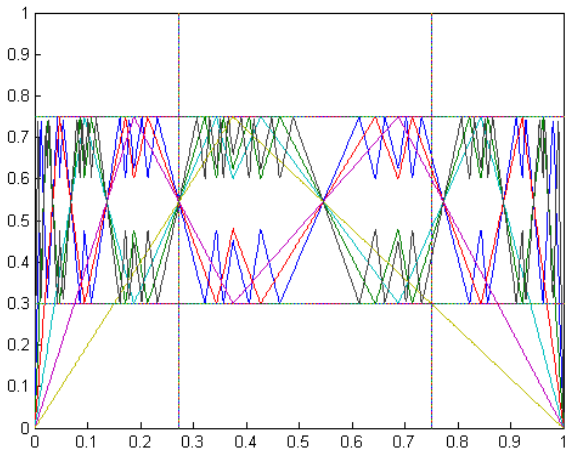
Akár úgy választjuk U-t, hogy $U \cap J \neq \emptyset$, akkor lesz olyan n, hogy $g^n(U) \subset J$, akár úgy, hogy $U \cap K \neq \emptyset$, akkor lesz olyan n, hogy $g^n(U) \subset K$. Mindkét esetben létezik olyan n, hogy $T^n_{\frac{7}{16}}(U) \cup T^{n+1}_{\frac{7}{16}}(U) = H$, tehát $T_{\frac{7}{16}}(x)$ tranzitív H-n. Még be kell látni, hogy az entrópia nem lehet nagyobb, mint $\frac{\log(2)}{2}$. Ez azért teljesül, mert g-nek az entrópiája kisebb vagy egyenlő mint $\log(2)$. Ugyanakkor $g = T^2_{\frac{7}{16}}(x)$, és $n \cdot h_{top}(f) = h_{top}(f^n)$, tehát $h_{top}(T_{\frac{7}{16}}) \leq \frac{\log(2)}{2}$. $\square$

13. Megjegyzés. A tétel előtt hangsúlyoztam, hogy H négyzet alakú. Ez valóban fontos, hiszen tegyük fel, hogy $c < \frac{7}{16}$, ekkor $T_c^2(\frac{3}{4})$ nem a $\frac{4c}{7-4c}$-ben felvett értékkel egyenlő, hanem nagyobb annál, $T_c^3(\frac{3}{4})$-beli érték pedig kisebb. Így egy "rés" keletkezik az értékkészletben, az ebben lévő értékeket a függvény csupán a fixpont és a végfixpont ($\frac{4c}{7-4c}$) egyre szűkülő környezetében veszi fel, ezért $c < \frac{7}{16}$-ra a transzformáció semmiképp sem lehet tranzitív a H-n.

Bizonyítás. Legyen $J = [\frac{4c}{7-4c}, \frac{3}{7-4c}]$ és K=$[\frac{3}{7-4c}, \frac{3}{4}]$ ahogy eddig is, és te-

kintsük a $J \cup K$ intervallumot, azon pedig a $T_c^2(x)$-et. Látható, hogy a $T_c^2(J) = [\frac{3}{16(1-c)}, \frac{3}{7-4c}]$, míg $T_c^2(K) = [\frac{3}{7-4c}, \frac{3}{4})$. Ugyanúgy, ahogy $c = \frac{7}{16}$-ra beláttam, itt is belátható, hogy a $T_c^2(J) = J$ és $T_c^2(K) = K$ egymás között cserélődő intervallumok a $T_c(x)$-re nézve. Belátom, hogy tranzitivitás másik feltétele, nevezetesen, hogy $g = T_c^2(x)$ keverő legyen az intervallumokra megszorítva, nem teljesül.

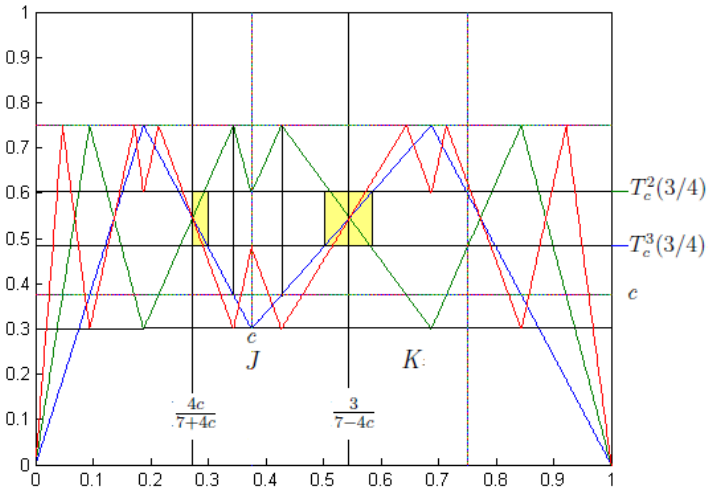
A kritikus sáv a $[T_c^3(3/4), T_c^2(3/4)]$ intervallum, ebbe az intervallumba csak a (vég)fixpontok kis környezetében (2.11-es ábrán sárga terület) lép be a $T_c(x)$ (így a g is), és ez a lokális környezet iterációról iterációra szűkül: a pontok kirepülnek belőle. Egy ilyen sáv megléténél a g nem lehet keverő H-n.



2.10. ábra. c=3/8

Tekintsük J-t. A két széle, a (vég)fixpontok minden iterációnál globális minimumok/maximumok lesznek J-n. A $T_c^2(x) < c$-kre alkalmazva a $\frac{3}{4c}x$-et a legkisebb érték, amit kaphatunk, az $\frac{9}{64c(1-c)} = T_c(\frac{3}{16(1-c)}) = T_c^2(3/4)$, hiszen a $\frac{3}{4c}x$ monoton növekedő, a $\frac{3}{16(1-c)}$ pedig a minimum a $T_c^2(J)$-n. Ugyanakkor ez nem globális minimum J-n, hiszen a (vég)fixpontokban kisebb értéket vesz fel. Ha még egyet iterálunk, akkor mivel az értékek nagyobbak, mint

$\frac{3}{7-4c}$, ezért a $\frac{3}{4(1-c)}x$ ágat kell alkalmazni, ez viszont monoton csökkenő lesz J-n. Így az előző lokális minimum ebben az iterációban lokális maximummá válik, az értéke pedig $\frac{192c(1-c)-36c}{256c(1-c)^2} = T_c(\frac{3}{16(1-c)}) = T_c^3(3/4)$. Itt egész pontosan a c-nek az iteráltjairól van szó, amik minden esetben a sátor (lokális) minimumát/maximumát adják meg a J-n. Így a lokális minimum/maximum kívül marad a sávon, csakis a (vég)fixpotnok közelében tud a függvény belépni a kritikus sávba. A $T_c^{2k}(x) \geq c$ csak azokra a pontokra teljesül, ahol a $T_c^3(3/4) \leq T_c^{2k-1}(x) \leq T_c^2(3/4)$. Mivel $T_c(x)$ λ-expander $\lambda > 1$ értékkel, így azoknak az x-eknek száma, amikre a fenti egyenlőtlenség teljesül, $k \to \infty$-re 0-hoz tart. Ugyanígy $T_c^{2k+1}(x) \leq c$ a $T_c^{2k+1}(x)$ csak azokra a pontokra teljesül, ahol a $T_c^3(3/4) \leq T_c^{2k}(x) \leq T_c^2(3/4)$, és azoknak az x-eknek a száma, amikre ez teljesül, a λ-expanderség miatt szintén csökken.
A K-ra teljesen hasonló a bizonyítás. □

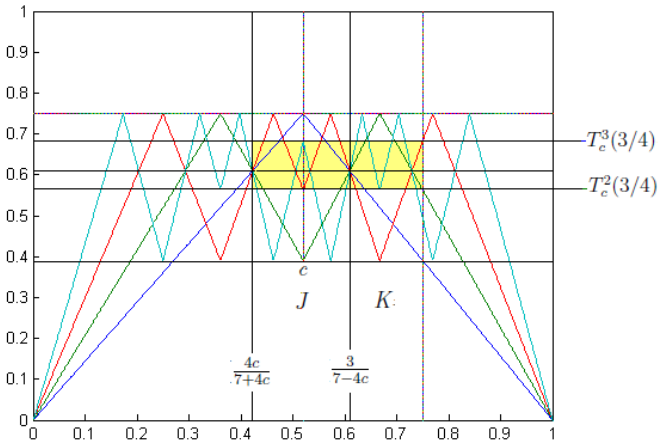


2.11. ábra. Kritikus sáv, c=3/8

14. Megjegyzés. Ha $\frac{3}{4} > c > \frac{7}{16}$, akkor a $H \times f(H)$ egy álló téglalap lesz, és $T_c(x)$ keverővé válik a H-n.

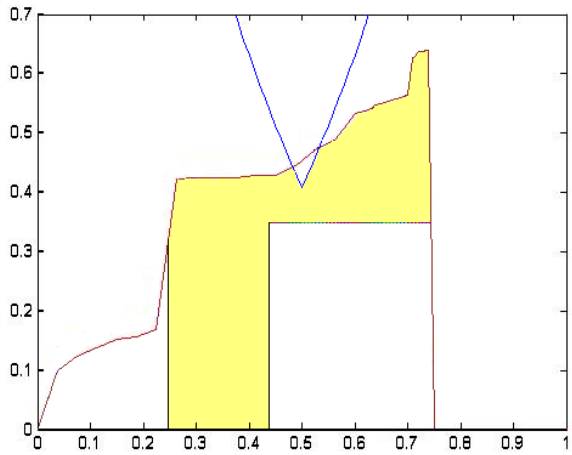
Bizonyítás. Legyenek J, K a már megszokott intervallumok. Látható, hogy $T_c^2(x)|_J$ és $T_c^2(x)|_K$ ugyanúgy keverők lesznek, mint a $c{=}\frac{7}{16}$ esetnél. Belátom, hogy $T_c^2(x)$ az egész $H = J \cup K$-n keverő lesz, amiből már következik az állítás.

A $T_c^2(3/4)$ és a $T_c^3(3/4)$ közötti részt továbbra is kritikus sávnak nevezem, és G-vel jelölöm. A $T_c^2(3/4)$ és $T_c^3(3/4)$ helyet cserélnek a $c < \frac{7}{16}$-hoz képest, így a G sávban mind a J-beli x-eknek, mind a K-belieknek lesz képe $T_c^2(x)$-re nézve, sőt bármely nem elfajuló $U \in H$-hoz létezik k, hogy $G \subset T^{2k}(U)$. Ez igaz, hiszen elég, ha U valahányadik iteráltjának eleme b, ami ugyanúgy belátható, ahogy a tranzitivitás bizonyításánál. Ekkor, ha $V \cap G \neq \emptyset$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $U \subset K \setminus G$, míg $V \subset J \setminus G$. Mivel $T_c^2(x)$ keverő K-n, ezért U-nak van olyan iteráltja, amelyre $G \subset T_c^{2k}(U)$. Ekkor viszont $[T_c^3(x), \frac{3}{7-4c}] \subset T^{2k}(U)$. Ugyanakkor $J = [\frac{4c}{7-4c}, \frac{3}{7-4c}]$, és $T_c^2(x)$ J-re megszorítva is keverő transzformáció, ezért létezik n, hogy minden $m > n$-re $T_c^m([T_c^3(x), \frac{3}{7-4c}]) \subset T_c^m(T_c^{2k}(U))$, és $T_c^m([T_c^3(x), \frac{3}{7-4c}]) \cap V \neq \emptyset$, így $T_c^m(T_c^{2k}(U) \cap V \neq \emptyset)$. $\square$



2.12. ábra. Kritikus sáv, $c = 0,52$

15. Megjegyzés. Mivel csak egy topologikusan tranzitív halmazra becsültem az entrópiát, így előfordulhat, hogy az entrópia az egész $[0,1]$ intervallumon valójában nagyobb, mint a H halmazon.
A $T_c(x)$ függvény λ-expander, és ha c értéke $\frac{1}{4}$ és $\frac{3}{4}$ között van, akkor $\lambda > 1$. Ezért minden $x \in (0,1)$-re létezik olyan k, hogy $T_c^k(x)$ belép a H halmazba, és $T_c^k(x)$ keverő lesz. Ugyanakkor ha $T_c^k(x)$ keverő, akkor $T_c(x)$ is keverő, ezért a becslés az egész intervallumra érvényes.



2.13. ábra. Entrópia sáv, keverés

12. Állítás. *Ha* $\frac{7}{16} < c < \frac{3}{4}$, *akkor* $T_c(x)$ *topologikus entrópiája nagyobb mint* $\frac{\log(2)}{2}$.

Bizonyítás. Ez a 9. Állításból következik. □

16. Megjegyzés. Belátható, hogy $T^2(x)|_K$-nak, illetve $T^2(x)|_J$-nek van lópatkója.
Lássuk $T^2(x)|_J$ esetet. Mivel $T^2(x)|_J$ értékkészlete a $[\frac{3}{16(1-c)}, T_c^3(3/4)]$, és

$T_c^3(3/4) > \frac{3}{7-4c}$, ezért lesz egy $L \subset J$, hogy $T_c^2(L) = [\frac{3}{7-4c}, T_c^3(3/4)]$, méghozzá ez az intervallum tartalmazza c-t. Ekkor viszont J szétesik két diszjunkt intervallumra, amiknek az értékkészlete $T_c^2(x)$-re nézve tartalmazza $[\frac{3}{16(1-c)}, c]$-t, azaz J-t.

A 2.13-as ábrán látható, hogyan változott az entrópiáról kapott információ a keverés miatt: a $\frac{7}{16} < c < \frac{3}{4}$ intervallumon az entrópia nagyobb mint $\frac{\log(2)}{2}$.

2.4. Lópatkók és periodikus pályák

A lópatkótalálás szerencsét hoz ugyan, de magához lópatkótaláláshoz is szerencse kell. Azt tudjuk, hogy $T_c(x)$-nek nincs lópatkója, hiszen az értékkészlete csupán a $[0, \frac{3}{4}]$.
Lehet teljesen vaktában lövöldözni, hiszen $T_c^k(x)$-ból a c és a k is változhat. Valójában többet tudunk a paraméterekről: mivel ha $c > \frac{3}{4}$ vagy $c < \frac{1}{4}$, akkor az entrópia nulla, így csak a kettő közé eső tartományt kell vizsgálni. Azt is tudjuk, hogy $\frac{1}{4} < c < \frac{7}{16}$ paraméterértékekre a leképezésnek csak páros periodikus pályái vannak (lásd lejjebb, a periodikus pályáknál), ezért a k-nak párosnak kell lennie. Továbbá, mivel a $\frac{7}{16} < c < \frac{3}{4}$-re az entrópia nagyobb vagy egyenlő mint $\frac{\log(2)}{2}$, így olyan n-lópatkót kell találni, amire $n/k > 1$, hiszen $h_{top}(T_c(x)) \geq \log(n)/k$ a 3. Következmény alapján.
A lópatkókat szintén program segítségével kerestem meg (kódja és leírása megtalálható a Függelékben, 7. program).
Nem nehéz lópatkót találni viszonylag nagy c-kre, pl.:
$c = 0.7$
I=$[0,627; 0,653; 0,664] = [0,627; 0,653] \cup [0,653; 0,664]$ ez a két intervallum lópatkót alkot:

$$T_c([0,627; 0,653]) = [0,6259; 0.70057], T_c([0,653; 0,664]) = [0,6259; 0,6964] \rightarrow$$

$$T_c([0,627; 0,653]) \cap T_c([0,653; 0,664]) = [0,6259; 0,6964] \supset [0,627; 0,664]$$

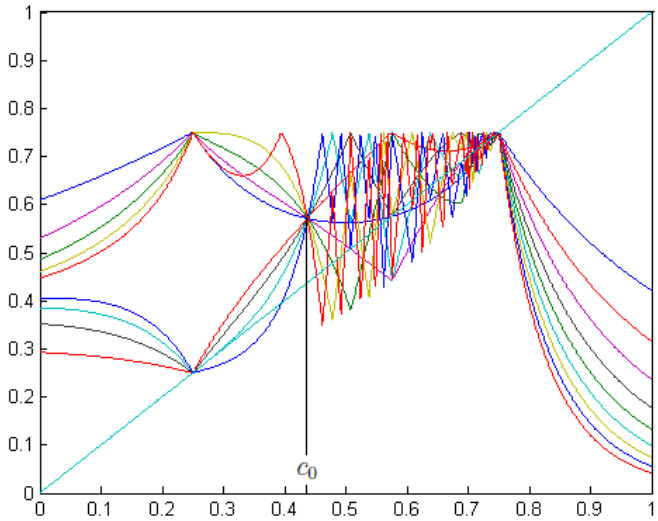
de ez csak azt a becslést támasztja alá, amit már amúgyis tudunk (azaz, hogy az entrópia nagy c-kre nagyobb, mint $\log(2)/2$).

Sajnos a keresés nem járt sikerrel nagyobb n/k arányokra, alig találtam "nagy" (azaz $n = 2$-nél nagyobb) lópatkókat, azt is csak jóval nagyobb k-kra, pl.:
$c = 0,74$, $k = 6$
$[0.7261; 0.7270][0.7270; 0.7290][0.7290; 0.7310]$
$T_c^6([0.7261; 0.7270]) = [0.7237; 0.7467]$
$T_c^6([0.7270; 0.7290]) = [0.7237; 0.7378]$
$T_c^6([0.7290; 0.7310]) = [0.7261; 0.7378]$.
De ez csak egy $\log(3)/6$-os alsó becslést ad nekünk.
Egyedül az $(\frac{1}{4}, \frac{7}{16})$ paramétertartományban volt eredményes a lópatkókeresés: $k = 4$-re 2-es lópatkók vannak ebben a tartományban, ami annyit jelent, hogy itt pozitív az entrópia és legalább $\frac{\log(2)}{4}$.

c=0.27	$[0.2610, 0.2650] \cup [0.2650, 0.2670]$
c=0.29	$[0.7030, 0.7250] \cup [0, 7250, 0.7340]]$
c=0.31	$[0.6850, 0.7140] \cup [0.7140, 0.7280]$
c=0.33	$[0.2940, 0.3100] \cup [0.3100, 0.3180]$
c=0.35	$[0.3060, 0.3250] \cup [0.3250, 0.3350]$
c=0.37	$[0.6460, 0.6890] \cup [0.6890, 0.7140]$
c=0.39	$[0.6380\ ,\ 0.6820] \cup [0.6820, 0.7110]$
c=0.41	$[0.3450,\ 0.3700] \cup [0.3700, 0.3870]$

Amikor a lópatkók cserbenhagyják az embert, akkor lehet előhúzni a periodikus pályákat. Mivel a lópatkótalálás erős összefüggésben áll a leképezés Markov-gráfjával, így bevett dolog a Markov-gráfok azon típusához fordulni, amelyik a periodikus pályák alapján áll elő. Hogyan függ össze a topologikus entrópia a periodikus pályákkal? Ha magára hagyjuk például a sátras rendszert, és rápillantunk egy idő eltelte után, akkor megfigyelve a különböző n hosszú pályákat azt vehetjük észre, hogy nagyobb n-ekre sokkal több pálya van, sőt az n függvényében az n hosszú pályák száma exponenciálisan nő. Ennek az exponenciális növekedésnek az ütemét adja meg a topologikus entrópia. Kézenfekvő az n hossszú pályáknál n hosszú periodikus pályákkal

kísérletezni, hogy miért, azt a sokat emlegett Markov-gráfok válaszolják meg.



2.14. ábra. $T_c^k(c)$

Vizsgáljuk meg c függvényében a periodikus pályákat, azaz tekintsünk olyan c paraméterértékeket, amikre $T_c(x)$ szélsőértékhelye (azaz c) periodikus lesz valamilyen $k \in \mathbb{N}$ értékre. A különböző periodikus pályákat egy program segítségével kerestem meg, aminek kódja megtekinthető a Függelékben (4., 5., 6. program). A mechanizmus az ábrán látható: a $T_c^k(c)$-t rajzoltattam ki több k-ra, és megfigyeltem, hogy hol metszi az identitás 45°-os egyenesét. Ezután meghatároztam pontosan ezeket az értékeket.

17. Megjegyzés. A pontos érték nagy számítási igénye miatt előre szűkítenem kellett a vizsgálandó intervallumot.

Lássunk például egy 5 szerint periodikus pályát:

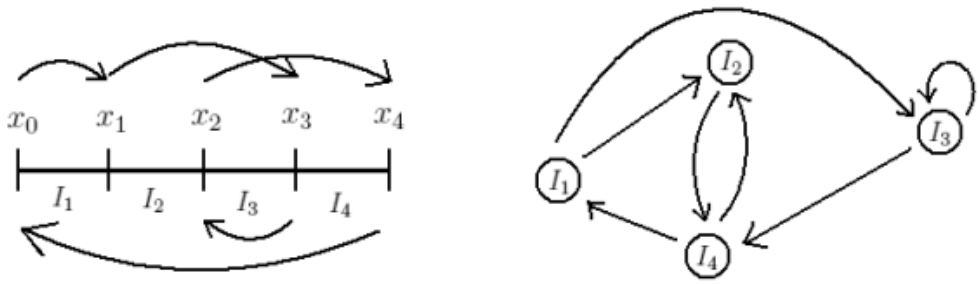
$$c = 0.68928 \to 0.75 \to 0.60343 \to 0.65659 \to 0.71443 \to c$$

Rendezzük ezeket növekvő sorrendbe:
$x_0 = 0.60343$ $x_1 = 0.65659$ $x_2 = 0.68928$ $x_3 = 0.71443$ $x_4 = 0.75$

A kapott I_1, I_2, I_3, I_4 intervallumok (ahol $I_j = [x_{j-1}, x_j]$) útját követi nyomon a Markov-gráf, amiben az élek következőképpen vannak: $I_j \to I_k$, ha $I_k \subset f(I_j)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A Markov-gráfot reprezentálhatjuk az M átmenetmátrixával, ahol $M_{ij} = 1$, ha $I_i \to I_j$, és 0 egyébként. Ekkor a 4. Tétel alapján, az M mátrix spektrálsugarának logaritmusa alulról becsli a $T_c(x)$ topologikus entrópiáját (ez a 0.68928-ra körülbelül 0.54353 lesz).



2.15. ábra. Periodikus pont (0.68928) fázisképe és Markov-gráfja

18. Megjegyzés. Ez a becslés akkor éles, hogy ha a periodikus pont által partíció monoton $T_c^k(x)$-ra. Gyakorlati megvalósítása során ugyanolyan korlátokba ütköztem, mint a cikkcakkszám numerikus kiértékelésnél: a monoton partícióhoz exponenciálisan növekedő felosztás kell a $[0, 1]$ intervallumon.

A 2.14-es ábrán látható "masni" (azaz olyan c, amire az iterációk száma szerint $T_c^k(c) = \frac{3}{7-4c}$ minden $k > 2$ egészre) mintha valamiféle vízválasztó lenne a periodikus pályák között. Jobban megvizsgálva kiderül, hogy valóban erről van szó: ez a pont választja el a páros és a páratlan periódusú periodikus pontokat, pontosabban ettől a ponttól kezdve jelennek meg olyan c-k, amikre a szélsőértékhely (c) pályája páratlan periódusú. Sőt, a masni előtt bármely adott c paraméterre $T_c(x)$-nek semmilyen x-re nincs páratlan periódusú pályája. Keressük meg azt a c_0 pontot, amire teljesül, hogy masni. Mivel $T_c^3(c) = \frac{3}{7-4c}$ kell, így elegendő, ha teljesül, hogy $T_c^2(c) = \frac{4c}{7-4c}$.

$$T_c(c) = \frac{3}{4(1-c)} \cdot (1-c) = \frac{3}{4}$$

$$T_c(3/4) = \frac{3}{4(1-c)} \cdot (1-3/4) = \frac{3}{16(1-c)}.$$

A $\frac{3}{16(1-c)} = \frac{4c}{7-4c}$ teljesül $c = \frac{7}{16}$-ra.

19. Megjegyzés. Ez egész egyszerűen azért van, mert a $c > \frac{7}{16}$-ra a $T_c(x)$ keverő, ezért lesznek páratlan periódusú pályái, míg kisebbekre pedig nem keverő, így nem lehet páratlan periódusú pályája.

Lássuk, hogy tényleg lesz olyan $c > \frac{7}{16}$ és páratlan k, amire $T_c^k(c) = c$. Az egyszerűség kedvéért keressünk 3 szerint periodikus szélsőértékhelyet. Ekkor $T_c^2(c) = \frac{3}{16(1-c)}$. Mivel a $\frac{3}{16(1-c)} \leq c$ ha $\frac{1}{4} \leq c \leq \frac{3}{4}$, így

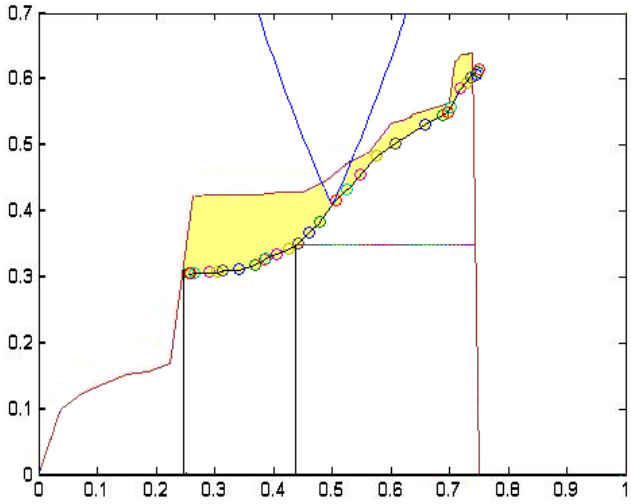
$$T_c(3/16(1-c)) = \frac{3}{16(1-c)} \cdot \frac{3}{4c} = \frac{9}{64c(1-c)}$$

A $\frac{9}{64c(1-c)} = c$ megoldása a $(\frac{7}{16}, \frac{3}{4})$-en: $c = \frac{1}{8}(1+\sqrt{13}) \approx 0.575694$.

Több $\frac{1}{4}$ és $\frac{3}{4}$ közötti c-kre megvizsgálva a periodikus pályákat újabb alsó becslést kapunk az entrópiára, ezt a 2.16-os ábra illusztrálja.

2.5. Konklúzió

A sátor-leképezés $\frac{1}{4} \leq c \leq \frac{3}{4}$ értékekre mutat érdekes dinamikát. A $c = \frac{1}{4}$ értékre minden pálya periodikus vagy végperiodikus. A $\frac{3}{4} > c \geq \frac{7}{16}$ értékekre



2.16. ábra. Entrópia sáv, periodikus pontok segítségével új alsó becslés

a $T_c(x)$ topologikusan tranzitív, illetve keverő alkalmas intervallumon. Így a topologikus entrópia $c = \frac{7}{16}$-ra $\frac{\log(2)}{2}$, nagyobb c-kre pedig $\geq \frac{\log(2)}{2}$.
A bevezetésben szót ejtettem arról, hogy mit is neveznek a szakirodalomban kaotikusnak. A topologikus entrópia pozitivitása mellett szükséges a periodikus pályák sűrű volta (ami jelen esetben a $[\frac{7}{16}, 34]$ intervallumon teljesül), illetve a kezdeti feltételekre való érzékenység. Az elsőről tudjuk, hogy következik a topologikus tranzitivitásból.
A kezdeti feltételekre való érzékenység a következőképpen fogalmazható meg: Az (X, T) rendszer ε-érzékeny a kezdeti feltételekre (vagy más néven ε-érzékeny), ha minden $x \in X$-re és x minden U környezetére létezik $y \in U$ és $n \geq 0$, hogy $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \varepsilon$. Az (X, T) rendszer érzékeny a kezdeti feltételekre, ha ε-érzékeny valamilyen $\varepsilon > 0$-ra. Tudjuk, hogy $T_c(x)$ λ-expander, és $\lambda = \min\{\frac{3}{4c}, \frac{3}{4(1-c)}\}$. Ekkor a $\frac{1}{4} \leq c \leq \frac{3}{4}$ paraméterértékekre $\lambda > 1$, és $I = [x, y]$ esetén, ha $T_c(x)$ monoton I-n, akkor $|T^n(I)| = \lambda^n \cdot |I|$, tehát létezik $\varepsilon > 0$, hogy $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \varepsilon$.
Mindezek mellett kijelenthetjük, hogy $\frac{7}{16} \leq c \leq \frac{3}{4}$ esetén $T_c(x)$ kaotikus.

A. függelék

Programok

A programokat Matlabban írtam, a kódok ezen a nyelven szerepelnek. Minden parancsot, ami nem magától értetődő, megmagyarázok. Legelőször két alapvető programot említenék meg, amelyiket általában a többi is használ. Az első egész egyszerűen a sátor-leképezést számolja ki:

1. Sátor-leképezés

```
function y=sator2(x,c)
  if (x<c)
    y=(3/(4*c))*x;
  else
    y=(3/(4*(1-c)))*(1-x);
  end
  x=mod(x,1);
end
```

A másik pedig a sátor-leképezés deriváltját számolja ki:

2. Sátor-leképezés deriváltja

```
function y=dsator2(x,c)
  if (x<c)
    y=(3/(4*c));
  else
    y=-(3/(4*(1-c)));
  end
```

```
7 end
```

3. Cikkcakkszámoló program

Ez a program a derivált segítségével kiszámolja a $T_c(x)$ cikkcakkszámát, azaz monotoni szakaszok számát. Az inputjai c és k, azaz hogy hányadik iteráltnak a cikkcakkszámát szeretnénk tudni. Egyszerűen összeszámolja, hogy a derivált hányszor vált előjelet (14-19. sor).

20. Megjegyzés. A programban a felosztás exponenciális k függvényében, így nem lehet túl nagy k-ra futtatni.

```
1  function cikkcakk=cikkcakk2(c,k)
2  d=2^(k+9)
3  x=0:1/d:1;
4  y=x;
5  yd=ones(1,d+1);
6  for n=1:k
7  for i=1:d+1
8      yd(i)=dsator2(y(i),c)*yd(i);
9      y(i)=sator2(y(i),c);
10 end
11 end
12 y(d+1)=0;
13 cikkcakk=0;
14 for i=1:d-1
15   if sign(yd(i))~=sign(yd(i+1))
16     cikkcakk=cikkcakk+1;
17     f(i)=yd(i);
18   end
19 end
20 cikkcakk
21 if cikkcakk <= 1
22     cikkcakk=0
23 else
24     format long
25 cikkcakk=(log((cikkcakk-1)))/k
26 end
```

4. Periodikus c kereső program

Ennek a programnak a segítségével rajzoltatom ki, hogy a $T_c^k(c)$ mikor metszi az identitást, azaz hogy milyen c paraméterérték periodikus k szerint. Inputja csupán a k, kiiratja azon $y(i)$-ket és $c(i)$-ket, amik ε-nál kisebb távolságra vannak, és kirajzolja $T_c^k(c)$-t.

```
function period(k)
c=0:1/10000:1;
y=c;
    for n=1:k
        for i=1:10001
        y(i)=sator2(y(i),c(i));
        end
    end
for i=1:10001
    if abs(y(i)-c(i))<0.0001
        c(i)
        y(i)
    end
end

hold all
plot(c,y);
plot(c,c);
end
```

5. Periodikus c finomító program

Finomítja a periodikus c találatokat.

```
function period2(k,c1,c2)
d=100000000;
c=c1:1/d:c2;
y=c;
  format long
    for n=1:k
        for i=1:((c2-c1)*d)
        y(i)=sator2(y(i),c(i));
        end
```

```
    end
    eps=1/(2*1.9*(c2-c1)*d);
for i=1:((c2-c1)*d)
    if abs(y(i)-c(i))<eps
        c(i)
        y(i)
    end
end
```

6. Periodikus c-kre entrópiát számoló program

Ebben a programban nem hívom segítségül a sator2-t, hanem az elején számolom ki a sátor-leképezés értékeit. Az x vektorban összegyűjtöm a c pont pályájának pontjait, azaz $x = c, T_c(c), T_c^2(c), \ldots, T_c^{k-1}(c)$. Létrehozom y, z csupa nulla k-as vektorokat, hogy növekvő sorrendbe tudjam rendezni a c pályájának pontjait. A z vektorban tárolom azt a sorrendet, amiben a pálya elemei eredetileg voltak, y-ban pedig növekedő sorrendbe rendezem őket. y-nak a k-adik helyére beteszem c-t, amennyiben a pálya soron következő eleme kisebb, mint c, akkor besorolom elé. Ha nagyobb, akkor berakom c helyére, és c-t sorolom eggyel előrébb. Az összehasonlítás mindig az y-ban lévő utolsó elemtől indul, ha annál kisebb, akkor összehasonlítom az utolsó előttivel, stb. Így mindig növekedő sorrendben lesznek y-ban az elemek (a továbbiakban ezek $x_1, x_2, \ldots$, míg az eredeti sorrendjükben a sorszámukat indexnek fogom nevezni).

Ezután az indexeket ciklikussá teszem k szerint, és a továbbiakban az u-ban tárolom. Létrohozok egy $(k-1) \times (k-1)$-es mátrixot, ez lesz az átmenetmátrix. Kitöltöm a mátrixot a Markov-gráf szabálya alapján. (A gráf pontjai az $I_1, I_2, \ldots$ intervallumok, amiket az $x_1, x_2, x_3, \ldots$ feszítenek ki.) Mivel az elemek növekedő sorrendben vannak, így szükség van arra, hogy adott x_i elemnek mi a pályán az indexe, illetve hogy az eggyel nagyobb indexű elem hol található. Ez utóbbit h-ban fogom tárolni, $h(i)$ tehát azt jelzi, hogy hányadik a növekedő sorrendben az az elem, ahova x_i menni fog. Ha tehát I_j egy adott intervallum,

aminek két végpontja x_j és x_{j+1}, akkor $z(j)$ és $z(j+1)$ jelzi az indexüket, $h(j)$ és $h(j+1)$ pedig a rákövetkező index helyét. Tegyük fel, hogy $h(j) < h(j+1)$. Ekkor a $T_c(I_j)$ a $h(j), h(j)+1, \ldots, h(j+1)-1$ intervallumokat fogja bekebelezni. (Itt szükség van egy elágazásra (49. sor), ha $h(j) > h(j+1)$, akkor értelemszerűen $h(j+1), h(j+1)+1, \ldots, h(j)-1$ lesznek a bekebelezendő intervallumok.)

Ezután már csak kiszámolom A spektrálsugarát, ebből megkapom az entrópiát.

```
1  function inter(c,k)
2  y=c;
3  for i=1:k-1
4    if (y<c)
5      y=3*y/(4*c);
6    else
7      y=(3*(1-y))/(4*(1-c));
8    end
9      d(i+1)=y;
10 end
11 d(1)=c;
12 x=d;
13 y=zeros(1,k);
14 y(k)=x(1)
15 z=zeros(1,k);
16 z(k)=1;
17 for i=2:k
18     for j=k:-1:1
19         if x(i)>y(j)
20             c=j
21                 for l=2:c
22                     y(l-1)=y(l);
23                     z(l-1)=z(l);
24                 end
25         y(c)=x(i);
26         z(c)=i;
27         break
28         end
```

```
    end
end
for v=1:k
u(v)=z(v)+1;
end
for v=1:k
    for l=1:k
        if u(v)>k

            u(v)=mod(u(v),k);
        end
            if z(l)==u(v)
            h(v)=l;
        end
    end
end
A=zeros(k-1);
for i=1:k
    for j=1:k-1
        d=abs(h(j)-h(j+1));
        if   h(j)<h(j+1)
            for t=1:d
                if h(j)+t-1>k
                    m=mod(h(j)+t-1,k);
                else
                    m=h(j)+t-1;
                end
            A(j,m)=1;
            end
        else
            for t=1:d
                    if h(j+1)+t-1>k
                        m=mod(h(j+1)+t-1,k);
                    else
                        m=h(j+1)+t-1;
                    end
                A(j,m)=1;
            end
```

```
67            end
68        end
69    end
70    log(max(abs(eig(A))))
```

7. Lópatkótaláló program

Ebben a programban az input a c paraméter, illetve a k iterációszám. Először is megkeresem a CIKKCAKK2 programmal a monotonitásváltás helyeit $T_c^k(x)$-re nézve (2. sor), ez lesz a $[0,1]$ intervallum felosztásának alapja (x vektorban eltárolva). Készítek egy A mátrixot, aminek nagysága x méretével arányos, ez lesz az átmenetmátrix. Az átmenetmátrixot kitöltöm a szokásos módon:

Ha teljesül, hogy $T_c(x_i) \leq T_c(x_{i+1})$, és $T_c(x_i) \leq x_j, x_{j+1}$, továbbá $T_c(x_{i+1}) \geq x_j, x_{j+1}$, akkor $A_{ij} = 1$. (Vagy fordítva, ha $T_c(x_i) \geq T_c(x_{i+1})$.)

Ezután átvizsgálom A diagonálisát, ugyanis ha találok 1×1-nél nagyobb csupa egy blokkot, akkor a blokk méretének megfelelő k-lópatkóra bukkantunk. A program maradék részében az A átvizsgálása zajlik, a p, g, h vektorokban tárolom a lehetséges intervallumok közül - amik 2-es, 3-as vagy 4-es lópatkót alkotnak - az elsőnek a sorszámát. Első ránézésre úgy tűnhet, hogy elegendő erre a p vektor is (amely a 2-es lópatkókat tárolja), hiszen ha sorszámban két egymást követő intervallum bukkan fel p-ben, akkor azt gondolhatnánk 3-as lópatkónak. De lehetséges, hogy két csupa egy kettes blokk összetételéből származó 3×3-asról van szó: azaz ahol $a_{1,3}$ és $a_{3,1}$ elemek nullák. Ezért van szükség az $a_{1,3}$ és $a_{3,1}$ elemek vizsgálatára, továbbá a g vektora, amely eltárolja a 3-as lóatkókat, továbbá az $a_{1,4}$ és $a_{4,1}$ elemek vizsgálatára és a h vektorra. A végén megszámolom, hogy hány darab intervallum bukkan fel h-ban, megkeresem és eltárolom ezeket az intervallumokat a B vektorban, a végén pedig kiiratom.

```
1  function B=int2(c,k)
2  x=cikkcakk(c,k);
```

```
n=size(x);
f=x;
for j=1:k
    for i=1:n(2)-1
    f(i)=sator2(f(i),c);
    end
end
f;
A=zeros(n(2));
for j=1:n(2)-1
    for i=1:n(2)-1

        if (f(i)<f(i+1) && f(i)<=x(j) && f(i)<=x(j+1)
           && f(i+1)>=x(j) && f(i+1)>=x(j+1))
               A(i,j)=1;
        end

        if (f(i)>=f(i+1) && f(i)>=x(j) && f(i)>=x(j+1)
           && f(i+1)<=x(j) && f(i+1)<=x(j+1))
                A(i,j)=1;
        end
    end
end
A;
p=zeros(n(2)-1,1);
g=zeros(n(2)-1,1);
h=zeros(n(2)-1,1);
t=0;
u=0;
e=0;
for i=1:n(2)-2
if A(i,i)==1 && A(i+1,i+1)==1

    if A(i,i+1)==1 && A(i+1,i)==1

        if A(i+2,i+2)==1 && A(i+2,i+1)==1 && A(i+2,i)==1
           && A(i,i+2)==1 && A(i+1,i+2)==1

```

```
                if A(i+3,i+3)==1 && A(i+3,i+2)==1 && A(i+3,i+1)==1
                   && A(i+3,i)==1 && A(i,i+3)==1 && A(i+1,i+3)==1
                     A(i+2,i+3)==1
                     e=e+1;
                     p(e)=i;
                else
                     u=u+1;
                     g(u)=i;
                end

            else
                t=t+1;
                h(t)=i;
            end
        end
end
end
h
g
p
z=0;
l=size(h);
for i=1:l(2)
if h(i)>0
        z=z+1;
end
end
z
s=size(z);
if z>0
for i=1:s
        B(i,1)=x(h(i));
        B(i,2)=x(h(i)+1);
end
B
end
log(max(abs(eig(A))))
end
```

Utószó

Szakdolgozatomban igyekeztem bepillantást nyújtani a dinamikai rendszerekbe, és körüljárni bizonyos tulajdonságaikat (főként a kaotikusságot). A szemléletesség és az pragmaticizmus jegyében egy konkrét rendszert vizsgáltam meg elméleti és gyakorlati úton. Az a cél vezérelt, hogy bárki, akinek van némi matematikai előképzettsége, megérthesse az intervallum-leképezéseken keresztül a dinamikai rendszerek és a káosz fogalmait.

Szeretnék köszönetet mondani a konzulensemnek - Buczolich Zoltánnak - a kritikai észrevételeivel rengeteget egyengette munkámat. Köszönöm a családomnak, hogy támogattak az 5 egyetemi év alatt és így létrejöhetett ez a szakdolgozat. Sok segítséget kaptam Varga Zsolttól és Retek Dávidtól, akiknek matlabos és latexes jártasságuk, valamint mindennemű hozzászólásuk szintén jelentősen előmozdította a szakdolgozat elkészülését.

Szeretném ezt a szakdolgozatot Édesapámnak és a Nagymamámnak ajánlani.

Keszthelyi Gabriella

Dorog, 2011. május 26.

Irodalomjegyzék

[1] Sylvie Ruette, *Chaos for continuous interval maps a survey of relationship between the various sorts of chaos* `http://www.math.u-psud.fr/~ruette/articles/chaos-int.pdf`

[2] Corinna Ulcigrai, *Dynamical Systems and Ergodic Theory* `http://www.maths.bristol.ac.uk/~maxcu/DynSysErgTh.html`

[3] Peter Walters, *An introduction to ergodic theory (Graduate Texts in Mathematics)* Springer, 2000, ISBN: 0387951520

[4] L. S. Young, L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, *Periodic points and topological entropy of one dimentional maps.* In Global Theory of Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics, no. 819, pages 1834. Springer-Verlag, 1980.

[5] Jorge Duarte, Luís Silva, J. Sousa Ramos, *Computation of the topological entropy in chaotic biophysical bursting models for excitable cells* Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society Volume 2006, Article ID 60918, Pages 118 DOI 10.1155/DDNS/2006/60918

[6] Gary Froyland, Oliver Junge, Gunter Ochs, *Rigorous computation of topological entropy with respect to a finite partition* Physica D 154 (2001) 6884

[7] Zbigniew H. Nitecki, *Topological Entropy and the Preimage Structure of Maps* Based on a talk given June 23, 2003 at Summer Symposium in Real Analysis XXVII, Hradec nad Moravic´ý, Czech Republic

Külső forrásból származó ábrák:

1. http://www.maths.bristol.ac.uk/~maxcu/baker.pdf
2. http://pathfinder.scar.utoronto.ca/~dyer/csca57/book_P/img141.jpg
3. http://mathworld.wolfram.com/SmaleHorseshoeMap.html