

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

EGY SZUBSZONIKUS ÁRAMLÁSI FELADAT NUMERIKUS MEGOLDÁSA

MSc szakdolgozat

Írta: Egyed Boglárka

Alkalmazott matematikus MSc, Alkalmazott analízis szakirány

Témavezetők:

Karátson János, egyetemi docens

Horváth Tamás, tudományos segédmunkatárs

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. A vizsgált áramlási feladat	3
2.1. Fizikai háttér	3
2.2. Megoldhatóság	7
3. Alkalmazott módszerek	11
3.1. A Ritz-Galjorkin-módszer	11
3.1.1. A módszer alkalmazása a vizsgált feladatra	13
3.2. A csillapított Newton-iteráció	14
3.2.1. A módszer alkalmazása a vizsgált feladatra	16
3.3. A végeelem-módszer	18
4. Megvalósítás	21
4.1. A segédfeladat végeelemes diszkretizációja	21
4.1.1. Affin lineáris leképezés	23
4.1.2. A globális mátrix felépítése	25
4.1.3. Az egyenletrendszer jobb oldala	27
4.2. Az iteráció megvalósítása	28
4.3. A paraméterértékek megválasztása	32
5. Eredmények	34
5.1. Futtatás szubszonikus feltételek mellett	35
5.2. Futtatás a \tilde{v}_∞ paraméterérték növelésével	38
Irodalomjegyzék	44

1. fejezet

Bevezetés

A gyakorlati életben természetes módon adódik az igény konkrét fizikai, mérnöki feladatok és modellproblémák matematikai módszerekkel történő megoldására. Ha az analitikus megoldás nem ismert, a megoldást numerikus módon próbáljuk közelíteni.

Jelen dolgozatban az O. Axelsson és J. Maubach *Updating and assembly of the Hessian matrix in FEM* [1] című cikkében ismertetett konkrét repülőmérnöki modellt tekintjük, amely egy, a repülőgépszárnyak felett kialakuló szélcsatornában írja le az áramlási folyamatokat szubszonikus, azaz hangsebesség alatti repülési sebesség esetén.

Célom az volt, hogy a feladat megértésétől és fizikai hátterének feldolgozásától kezdődően bemutassam, hogyan építhető fel a megoldási folyamat egy konkrét gyakorlati problémára. A főbb lépések közé tartozik a megoldhatóság vizsgálata, a megfelelő megoldó módszerek kiválasztása és alkalmazása, ezek megvalósítása - például egy számítógépes program keretében -, végül a kapott eredmények kiértékelése és ellenőrzése.

Ennek mintájára elsőként az áramlási feladat vizsgálata során felmerülő fizikai fogalmakat ismertetem, majd kitérek az áramlást leíró parciális differenciálegyenlet megoldhatóságának kérdésére.

A következő fejezetben a megoldás során felhasznált módszereket mutatom be, illetve alkalmazom a vizsgált feladatra. Elsőként a Ritz-Galjorkin-módszerről ejtek szót, amellyel a megoldhatósági vizsgálat során nyert operátoregyenlet diszkretizá-

ciója végezhető el, ezt azonban csak elméletben hajtjuk végre, a megvalósítás során erre ténylegesen nem kerül sor. A következő módszer az úgynevezett csillapított Newton-iteráció, amelyet a vizsgált egyenlet nemlinearitása végett kell alkalmaznunk. Látni fogjuk, hogy az iterációs módszer alkalmazásával a feladat visszavezethető egy lineáris segédfeladat iterációnkénti megoldására, amelynek diszkretizációját és megoldását a közismert végeselem-módszer segítségével hajtjuk végre, a fejezet utolsó szakaszában ennek algoritmusát ismertetem.

A negyedik fejezetben a módszerek megvalósításának menetét vázolom a diszkretizációtól kezdődően az egyenletben szereplő paraméterek értékének megválasztásáig. Az előfeldolgozást, azaz a tartomány rácshálójával való borítását a HyperMesh szoftver segítségével hajtottam végre, az alkalmazott módszereket pedig MATLAB programnyelven valósítottam meg, amelynek eredményeképpen létrejött egy komplex, több alprogramot is magában foglaló alkalmazás, amely a vizsgált feladatot tetszőleges peremfeltételek esetén megoldja.

Végül, az utolsó fejezetben néhány konkrét példa kiragadásával szemléltetem a különböző futtatási feltételek mellett kapott eredményeket, amelyek alapján elmondható, hogy a megírt program jól működik, a valóságban tapasztalt megfigyelésekhez közeli eredményeket képes produkálni.

2. fejezet

A vizsgált áramlási feladat

2.1. Fizikai háttér

Tekintsük a következő nemlineáris parciális differenciálegyenletet, amely egy szubsonikus áramlási folyamatot modellez adott $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon [1], és ahol Γ jelöli a tartomány peremét, Γ_i ($i = 1, \dots, 4$) pedig annak egyes részeit:

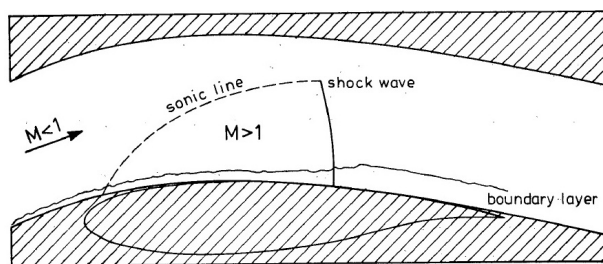
$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\rho(|\nabla u|^2) \nabla u) = 0 & \text{az } \Omega \text{ tartományon} \\ \rho(|\nabla u|^2) \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{a } \Gamma_{1,3} \text{ peremen} \\ \rho(|\nabla u|^2) \nabla u \cdot \mathbf{n} = \tilde{v}_\infty & \text{a } \Gamma_2 \text{ peremen} \\ u = v_\infty \cdot \mathbf{x} & \text{a } \Gamma_4 \text{ peremen,} \end{cases} \quad (2.1)$$

ahol

$$\rho(|\nabla u|^2) := \rho_\infty \left(1 - \frac{1}{5}(|\nabla u|^2 - M_\infty^2)\right)^{5/2}, \quad (2.2)$$

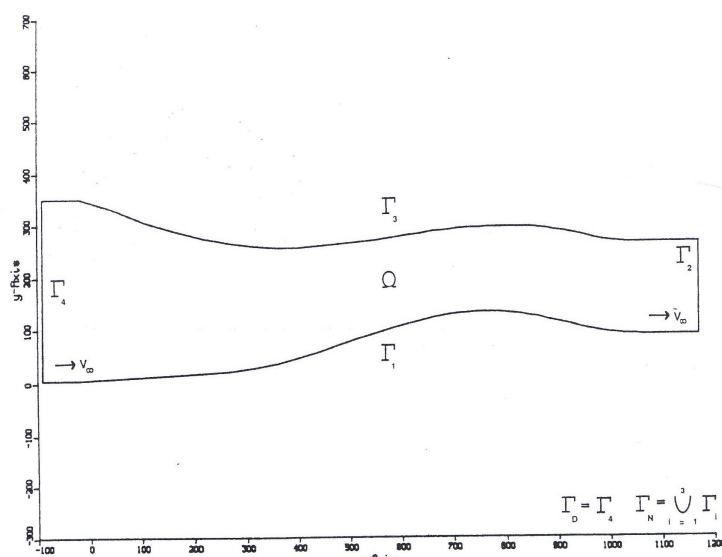
továbbá $\Gamma_N := \cup_{i=1}^3 \Gamma_i$, illetve $\Gamma_D := \Gamma_4$ a perem Neumann-, valamint Dirichlet-feltétellel ellátott részei.

Itt az $\mathbf{x} := (x, y)$ jelöléssel $u = u(x, y)$ a sebességi potenciál, $\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$ a sebességvektor, $|\nabla u|^2$ pedig a sebesség nagyságának négyzete. Az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, amelyen az egyenletet tekintjük, egy, a repülőgépek szárnya felett kialakuló szélcsatorna kétdimenziós modellje.



2.1. ábra. A repülőgépszárny felett kialakuló szélcsatorna modellje

A szélcsatorna geometriáját a következő ábra szemlélteti, a tengelyek beosztása mm -ben adott, ezt figyelembe kell majd vennünk a számítások végzése során is:



2.2. ábra. A szélcsatorna geometriája

A potenciál az a skaláris függvény, amelynek gradienseként az áramlási sebesség előáll. Potenciális áramlásról akkor beszélünk, ha $\text{rot}(u) = 0$, azaz az áramlás örvénymentes [6], ez esetben ugyanis létezik sebességi potenciál.

Az egyenletekben ρ_∞ jelöli az áramló közeg sűrűségét, az alsó indexbeli " ∞ " pedig a zavartalan, tehát például a beérkező áramlás jellemzőivel számított értékre utal. Mivel most repülőgépszárny feletti áramlásról lesz szó, az áramló közeg a levegő, ennek sűrűsége:

$$\rho_\infty = 1,225 \frac{kg}{m^3}.$$

Egy, az egyenletekben szereplő másik fontos paraméter az M_∞ , amely a Mach-számot jelöli, szintén zavartalan körülmények között. A Mach-szám egy arányszám [11], amely egy objektum sebessége vagy egy áramlási sebesség és a helyi hangsebesség hányadosaként kapható meg, azaz

$$M = \frac{v_{\text{objektum}}}{c},$$

ahol c jelöli a hangsebességet.

A Mach-számot alkalmazzák egyrészt valamilyen közegben haladó nagy sebességű objektumok jellemzésére, másrészt nagy sebességű közegeknek csatornában, fúvókákban történő áramlása során. Mivel két sebesség hányadosaként definiáljuk, a Mach-szám dimenzió nélküli mennyiség. A Mach-szám képletében szereplő fontos tényező a hangsebesség [11], amelyről külön szót kell ejtenünk.

A hangsebesség fontos jellemzője, hogy függ a közegtől, amelyben a hanghullámok terjednek, mi a feladat jellegéből adódóan a levegőbeli sebességet fogjuk tekinteni. A hangsebesség értéke függ a légköri tényezőktől, legnagyobb mértékben a hőmérséklettől, kisebb százalékban a páratartalomtól, valamint a légnyomástól is. Nagyobb tengerszint feletti magasságban a hang lassabban terjed, elsősorban a hőmérséklet változása miatt. A hangsebesség értéke az alábbi képlettel számolható:

$$c = \sqrt{\kappa RT}, \quad (2.3)$$

ahol

- κ az adiabatikus kitevő [11], vagyis az állandó nyomáson és az állandó térfogaton mért fajhő hányadosa, egy mértékegység nélküli mennyiség, értéke 1,4,
- R az egyetemes gázállandó [11], értéke $287 \frac{J}{kg \cdot K}$,
- T a levegő abszolút hőmérséklete [11], amely a Celsius-skálán mért t hőmérsékletből a $T = t + 273,16K$ összefüggés alapján számítható ki.

A (2.3) képlet alapján számított hangsebesség mértékegysége

$$\sqrt{\frac{J}{kg \cdot K} \cdot K} = \sqrt{\frac{kg \cdot \frac{m^2}{s^2}}{kg}} = \frac{m}{s}$$

lesz. Az M_∞ paraméter értéke tehát könnyen kiszámolható a közegben haladó objektum - esetünkben a repülőgép - sebességének és a c_∞ zavartalan hangsebességnek a hányadosaként.

A Mach-szám fontos tényező az (2.1) feladat tekintetében, mert nagyban befolyásolja az abban szereplő egyenlet típusát. Azt mondjuk, hogy az áramlás a Mach-szám függvényében

- szubszonikus, ha $M < 1$;
- szonikus, ha $M = 1$;
- transzszonikus, ha $0,8 < M < 1,2$;
- szuperszonikus, ha $1,2 < M < 5$;
- hiperszonikus, ha $5 < M$.

Itt az intervallumok tekintetében léteznek átfedések, amely annak köszönhető, hogy egy áramlási folyamat során a Mach-szám értéke lokálisan változhat. Transzszonikus sebességeknél egy objektum körüli áramlás tartalmazhat szub- és szuperszonikus területeket is, maga a transzszonikus áramlás már akkor elkezdődik, amikor az első $M > 1$ zóna kialakul az objektum körül.

Fennáll, hogy a sebességi potenciál egyenletei hangsebesség alatt, azaz szubszonikus áramlás esetén elliptikusak, pont a hangsebességnél, azaz szonikus áramlás esetén parabolikusak és hangsebesség felett, azaz szuperszonikus áramlás esetén pedig hiperbolikusak. A továbbiakban csak a szubszonikus esetet fogjuk tekinteni, azaz csak elliptikus egyenletekkel foglalkozunk.

Végül, a v_∞ paraméter a Γ_4 peremen belépő levegő sebességének potenciálját, \tilde{v}_∞ pedig a Γ_2 peremen kilépő sebességet jelöli. Az alsó indexbeli " ∞ " továbbra is a zavartalan körülmények esetén számított értékekre utal.

2.2. Megoldhatóság

A (2.1) feladat megoldhatóságának vizsgálatához a feladatot gyenge alakba fogjuk átírni, amelyhez definiáljuk a következő Szoboljev-teret a [2] szerint:

$$H_D^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_D} = 0\}, \quad (2.4)$$

továbbá az így kapott téren értelmezzük az alábbi skalárszorzatot:

$$\langle u, v \rangle_{H_D^1} := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad (\forall u, v \in H_D^1(\Omega)). \quad (2.5)$$

A (2.2) monoton csökkenő függvénynek tekintsük az alábbi módosítását:

$$\tilde{\rho}(r) := \begin{cases} \rho(r), & \text{ha } r \leq R_0, \\ \varepsilon, & \text{ha } r > R_0, \end{cases}$$

ahol

$$R_0 < \sup_{r>0, \rho(r)>0} r \quad \text{és} \quad \varepsilon := \rho(R_0), \quad (2.6)$$

az R_0 értéke pedig később határozandó meg az elliptikusság megőrzéséhez. Ezzel a módosítással biztosítjuk azt, hogy a $\tilde{\rho}$ függvény nem veszi fel a 0 értéket, továbbá létezik alsó és felső korlátja is, amely a későbbi megoldhatósági tételek szempontjából fontos tulajdonság lesz. Ez a módosítás a megoldhatóság vizsgálatát tekintve nem okoz gondot, mivel az eredeti feladat szubszonikus megoldásai megegyeznek a módosított feladat azon megoldásaival, amelyekre $|\nabla u| \leq R_0$ az egész Ω tartományon valamely alkalmas R_0 mellett. A továbbiakban a $\rho := \tilde{\rho}$ jelöléssel élünk.

Ahhoz, hogy gyenge alakot kapjunk, szorozzuk az egyenletet egy $v \in H_D^1(\Omega)$ tesztfüggvénnyel, majd integráljuk az Ω tartományon. Tekintsük az így kapott egyenlet bal oldalát:

$$\int_{\Omega} \rho(|\nabla u|^2) \nabla u \cdot \nabla v.$$

2.2.1. Tétel. *Egyértelműen létezik olyan $F : H_D^1(\Omega) \rightarrow H_D^1(\Omega)$ differenciáloperátor, hogy minden $u \in H_D^1(\Omega)$ és $v \in H_D^1(\Omega)$ esetén*

$$\langle F(u), v \rangle_{H_D^1} = \int_{\Omega} \rho(|\nabla u|^2) \nabla u \cdot \nabla v.$$

A tétel a Riesz-féle reprezentációs tétel segítségével egyszerűen belátható [4]. A kapott egyenlet jobb oldala hasonlóan felírható gyenge alakban, ehhez tekintsük a $v \mapsto \int_{\Gamma_N} \tilde{v}_\infty v$ leképezést a $H_D^1(\Omega)$ téren, amely folytonos lineáris funkcionálja lesz v -nek, ugyanis

$$\left| \int_{\Gamma_N} \tilde{v}_\infty v \right| \leq \|\tilde{v}_\infty\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{const} \|v\|_{H_D^1(\Omega)}.$$

Ekkor pedig a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint egyértelműen létezik $b \in H_D^1(\Omega)$, hogy

$$\langle b, v \rangle_{H_D^1} = \int_{\Gamma_N} \tilde{v}_\infty v d\sigma.$$

A (2.1) feladat gyenge alakja tehát a következőképpen írható fel:

$$\langle F(u), v \rangle_{H_D^1} = \langle b, v \rangle_{H_D^1} \quad (v \in H_D^1(\Omega)), \quad (2.7)$$

vagyis a feladat ekvivalens az alábbi operátoregyenlettel:

$$F(u) = b. \quad (2.8)$$

Tekintsük az alábbi, [4] szerinti feltételt adott f függvényre:

2.2.1. Feltétel. *Tegyük fel, hogy*

(i) $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$,

(ii) a $\frac{\partial f(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta}$ deriváltmátrixok szimmetrikusak (ha $\mathbf{x} \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^2$),

(iii) léteznek olyan $M \geq m > 0$ állandók, hogy

$$m|\xi|^2 \leq \frac{\partial f(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta} \xi \cdot \xi \leq M|\xi|^2.$$

2.2.2. Tétel. *Ha az $f(x, \eta) := \rho(|\eta|^2)\eta$ választás mellett teljesül a 2.2.1. feltétel mindhárom pontja, akkor a (2.1) peremértékfeladatnak egyértelműen létezik $u^* \in H_D^1(\Omega)$ gyenge megoldása.*

A fenti választással tehát az $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény a következő:

$$\rho(|\eta|^2) = \begin{cases} \rho_\infty \left(1 - \frac{1}{5}(|\eta|^2 - M_\infty^2)\right)^{5/2}, & \text{ha } r \leq R_0, \\ \varepsilon, & \text{ha } r > R_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Ekkor a 2.2.1. feltétel és a 2.2.2. tétel segítségével a (2.1) feladat megoldhatóságát visszavezethetjük a (2.8) operátoregyenlet megoldhatóságára a [4]-ben leírtak alapján. A tétel alkalmazhatóságához szükséges, hogy a 2.2.1. feltétel mindhárom pontja teljesüljön az előzőekben definiált f függvényre. Az (i) feltétel majdnem mindenütt igaz, mert ρ egy pontban nem differenciálható, a (ii) feltételhez számítsuk ki az f függvényhez tartozó Jacobi-mátrixot. Koordinátáinként felírva f -et:

$$f_i(\mathbf{x}, \eta) = \rho(|\eta|^2)\eta_i,$$

a parciális deriváltak ekkor:

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta_k} = \rho(|\eta|^2)\delta_{ik} + \rho'(|\eta|^2)2\eta_k\eta_i,$$

vagyis végeredményben:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta} = \rho(|\eta|^2)I + 2\rho'(|\eta|^2)(\eta\eta^T),$$

ahonnan már könnyen leolvasható, hogy a $\frac{\partial f(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ szimmetrikus mátrix.

A (iii) feltétel vizsgálatához feltesszük, hogy a módosított ρ függvényre léteznek $M \geq m > 0$ állandók úgy, hogy:

$$0 < m \leq \rho(r^2) \leq (\rho(r^2))' \leq M \quad (r \geq 0). \quad (2.10)$$

Ez a feltétel részletesebben azt jelenti, hogy $r \geq 0$ esetén

$$m \leq \rho(r^2), \quad 0 \leq \rho'(r^2), \quad \rho(r^2) + 2\rho'(r^2)r^2 \leq M.$$

Ekkor a 2.2.1. feltétel (iii) pontja teljesülni fog, ugyanis a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta} \xi \cdot \xi &= \rho(|\eta|^2)|\xi|^2 + 2\rho'(|\eta|^2)(\eta\eta^T)\xi \cdot \xi \\ &= \rho(|\eta|^2)|\xi|^2 + 2\rho'(|\eta|^2)(\eta \cdot \xi)^2, \end{aligned}$$

kvadratikus alakot tekintve a Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség alapján az alsó határ:

$$m|\xi|^2 \leq \rho(|\eta|^2)|\xi|^2 \leq \frac{\partial f(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta} \xi \cdot \xi,$$

és ugyanígy a felső határ:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta} \xi \cdot \xi \leq (\rho(|\eta|^2) + 2\rho'(|\eta|^2)|\eta|^2) |\xi|^2 \leq M|\xi|^2,$$

vagyis a 2.2.2. megoldhatósági tétel alkalmazható a vizsgált feladatra.

Mindez a módosított ρ függvényt tekintve azt fogja jelenteni, hogy az $r \geq 0$ értékekre elvárjuk az

$$0 < \rho(r^2) \quad \text{és} \quad 0 < r(\rho(r^2))'$$

egyenlőtlenségek teljesülését, mivel ekkor a lokális elliptikusságnak is szükségszerűen teljesülnie kell. Ez a (2.1) feladatban szereplő paraméterekkel kifejezve a következő feltételeket fogja adni az r^2 változóra:

$$r^2 < M_\infty^2 + 5 \quad \text{és} \quad r^2 < \frac{(\frac{1}{5})^{\frac{5}{2}}(M_\infty^2 + 5)}{(\frac{1}{5})^{\frac{5}{2}} + (\frac{1}{5})^{\frac{3}{2}}} \quad (r \geq 0),$$

azaz összességében:

$$r^2 < \frac{(\frac{1}{5})^{\frac{5}{2}}(M_\infty^2 + 5)}{(\frac{1}{5})^{\frac{5}{2}} + (\frac{1}{5})^{\frac{3}{2}}} \quad (r \geq 0).$$

Ezzel megkaptuk a (2.6) szerint értelmezett lehetséges R_0^2 értékek supremumát, amit jelöljön R_1^2 . A (2.1) feladat elliptikusságának elvesztését végeredményben tehát nem a korábban bevezetett univerzális

$$M = \frac{v_{\text{objektum}}}{c}$$

hányados segítségével tudjuk majd nyomon követni, hanem az

$$\widehat{M} := \frac{r}{\sqrt{\frac{(\frac{1}{5})^{\frac{5}{2}}(M_\infty^2 + 5)}{(\frac{1}{5})^{\frac{5}{2}} + (\frac{1}{5})^{\frac{3}{2}}}}} \quad (2.11)$$

arányszámmal, ahol $r := |\nabla u|$, amely pontonként más-más értéket fog felvenni, tehát végeredményben \widehat{M} egy lokális jellemzője lesz az áramlásnak.

Az operátoregyenlet u^* gyenge megoldását a csillapított Newton-iteráció módszerével fogjuk közelíteni, ehhez azonban előbb diszkretizálnunk kell a feladatot, amit pedig a Ritz-Galjorkin-módszer alkalmazásával hajtunk végre.

3. fejezet

Alkalmazott módszerek

3.1. A Ritz-Galjorkin-módszer

A Ritz-Galjorkin-módszer általában a végtelen dimenziós térben felírt operátor-egyenletek közelítő megoldásának megkeresésére ad eljárást. Alapgondolata, hogy az alapteret egy véges dimenziós alterével helyettesítjük, majd az eredeti egyenletet levetítjük erre az altérre, így a kapott véges dimenziós feladat - amely egy algebrai egyenletrendszer lesz - már könnyedén megoldható a témában közismert módszerekkel. A módszert a [4] alapján vezetjük be.

Tekintsük most csak a nemlineáris operátoregyenletek esetét, legyen H valós Hilbert-tér és $A : H \rightarrow H$ adott nemlineáris operátor.

3.1.1. Feltétel. *Tegyük fel, hogy*

(1) *A Lipschitz-folytonos, azaz létezik $Q > 0$, hogy*

$$\|A(u) - A(v)\| \leq Q\|u - v\| \quad (\forall u, v \in H),$$

(2) *A egyenletesen monoton, azaz létezik $q > 0$, hogy*

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq q\|u - v\|^2 \quad (\forall u, v \in H).$$

Tekintsük az

$$A(u) = b \quad (b \in H)$$

egyenletet, amelynek megoldhatóságát a következő tétel garantálja:

3.1.1. Tétel. Legyen $A : H \rightarrow H$ adott operátor, amelyre teljesül a 3.1.1. feltétel. Ekkor minden $b \in H$ esetén az $A(u) = b$ egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása.

Az egyenlet átírható gyenge alakba:

$$\langle A(u), v \rangle = \langle b, v \rangle \quad (\forall v \in H). \quad (3.1)$$

Legyenek $H_n := \text{span}\{\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \dots, \phi_n^{(n)}\} \subset H$ alterek ($n \in \mathbb{N}^+$), ahol $\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \dots, \phi_n^{(n)}$ lineárisan független elemek és bármely $u \in H$ esetén

$$\text{dist}(u, H_n) := \min\{\|u - v_n\| : v_n \in H_n\} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Az $\hat{u}_n \in H_n$ közelítés konstrukciója ekkor a következőképpen történik:

$$\hat{u}_n = \sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \phi_i^{(n)},$$

tehát a feladat az $\omega_i^{(n)}$ együtthatók meghatározására redukálódik. Ez alapján a (3.1) feladat az alábbi módon írható a $v := \phi_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$) választás mellett:

$$\left\langle A\left(\sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \phi_i^{(n)}\right), \phi_k^{(n)} \right\rangle = \langle b, \phi_k^{(n)} \rangle.$$

Vezessük be az $\omega^{(n)} := (\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \dots, \omega_n^{(n)})$ jelölést, majd legyen

$$\alpha_k(\omega^{(n)}) := \left\langle A\left(\sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \phi_i^{(n)}\right), \phi_k^{(n)} \right\rangle, \quad (3.3)$$

és

$$\beta_k(\omega^{(n)}) := \langle b, \phi_k^{(n)} \rangle. \quad (3.4)$$

Az ezekből összerakott $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény és $\beta \in \mathbb{R}^n$ vektor mellett tehát az

$$\alpha(\omega^{(n)}) = \beta$$

nemlineáris egyenletrendszer kapjuk, amelynek megoldása megadja az \hat{u}_n közelítés keresett együtthatóit.

Igazolható továbbá - lásd [4] -, hogy teljesül a hiba ortogonalitása is, azaz minden $v_n \in H_n$ esetén, az u^* gyenge megoldásra és bármely \hat{u}_n közelítésre:

$$\langle A(u^*) - A(\hat{u}_n), v_n \rangle = 0,$$

valamint érvényes az úgynevezett Céa-lemma nemlineáris megfelelője is alkalmas \widehat{C} állandóval:

$$\|u^* - \hat{u}_n\| \leq \widehat{C} \min\{\|u^* - v_n\| : v_n \in H_n\}.$$

Mindezek következményeképpen $\|u^* - \hat{u}_n\| \rightarrow 0$, amennyiben teljesül a (3.2) feltétel.

3.1.1. A módszer alkalmazása a vizsgált feladatra

Tekintsük a második fejezetben felírt (2.8) operátoregyenletet, ahol az operátor $F : H_D^1(\Omega) \rightarrow H_D^1(\Omega)$, továbbá $u, b \in H_D^1(\Omega)$:

$$F(u) = b.$$

A 3.1.1. tétel alapján a fenti operátoregyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H_D^1(\Omega)$ megoldása, amit az eljárás során egy V altérbeli megoldással közelítünk. Az operátoregyenlet gyenge alakját már korábban felírtuk a (2.7) egyenlettel:

$$\langle F(u), v \rangle_{H_D^1} = \langle b, v \rangle_{H_D^1} \quad (\forall v \in H_D^1).$$

Az előzőekkel analóg módon legyenek $V_n := \text{span}\{\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \dots, \phi_n^{(n)}\} \subset H_D^1(\Omega)$ alterek ($n \in \mathbb{N}^+$), ahol $\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \dots, \phi_n^{(n)}$ lineárisan független elemek és bármely $u \in H_D^1(\Omega)$ esetén

$$\text{dist}(u, V_n) := \min\{\|u - v_n\| : v_n \in V_n\} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Az $\hat{u}_n \in V_n$ közelítés konstrukciója ekkor:

$$\hat{u}_n = \sum_{i=1}^n \omega_i \phi_i^{(n)},$$

azaz a (2.7) gyenge alak a $v := \phi_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$) választás mellett írható az alábbi formába:

$$\left\langle F\left(\sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \phi_i^{(n)}\right), \phi_k^{(n)} \right\rangle = \langle b, \phi_k^{(n)} \rangle.$$

Bevezetve az

$$\omega^{(n)} := (\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \dots, \omega_n^{(n)}),$$

illetve

$$\alpha_k(\omega^{(n)}) := \left\langle F\left(\sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \phi_i^{(n)}\right), \phi_k^{(n)} \right\rangle,$$

és

$$\beta_k(\omega^{(n)}) := \langle b, \phi_k^{(n)} \rangle$$

jelöléseket, az ezekből összerakott $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény és $\beta \in \mathbb{R}^n$ vektor mellett tehát az

$$\alpha(\omega^{(n)}) = \beta$$

nemlineáris egyenletrendszer kapjuk, amelynek megoldása megadja a \hat{u}_n közelítés keresett együtthatóit. Mivel az egyenletrendszer nemlineáris, megoldását iterációs módszerrel, esetünkben csillapított Newton-iterációval végezzük el.

3.2. A csillapított Newton-iteráció

A (2.1) feladat nemlinearitása miatt a megoldás közelítésére csillapított Newton-iterációt kell alkalmaznunk, amelynek algoritmusát először egy általános alakú peremértékfeladaton szemléltetjük [2] alapján. Tekintsük a következő parciális differenciálegyenletet:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot f(\mathbf{x}, \nabla u) = g & \text{az } \Omega \text{ tartományon} \\ u = 0 & \text{a } \Gamma_D \text{ peremen} \\ f(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \mathbf{n} = \gamma & \text{a } \Gamma_N \text{ peremen,} \end{cases} \quad (3.5)$$

ahol Γ_D a peremnek a Dirichlet-, Γ_N pedig a Neumann-feltétellel ellátott része. A $H_D^1(\Omega)$ Szoboljev-teret és a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_D^1}$ skalárszorzatot ugyanúgy értelmezzük, mint az előző fejezetben a (2.4) és (2.5) képletekkel. Az általános alakú peremértékfeladatot a következő feltételek mellett tekintjük:

3.2.1. Feltétel. *Tegyük fel, hogy*

- (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ korlátos tartomány, $\partial\Omega$ szakaszonként sima, $\Gamma_D, \Gamma_N \subset \partial\Omega$ mérhető, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ és $\Gamma_D \neq \emptyset$,
- (ii) $g \in L^2(\Omega)$ és $\gamma \in L^2(\Gamma_N)$,
- (iii) $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ mérhető függvény, $\mathbf{x} \in \Omega$ változóra nézve korlátos, $\eta \in \mathbb{R}^N$ változóra nézve pedig C^1 -beli,

(iv) minden $(\mathbf{x}, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ esetén $\frac{\partial f(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta} \in \mathbb{R}^N$ szimmetrikus mátrix, továbbá λ sajátértékek kielégítik a $0 < \mu_1 \leq \lambda \leq \mu_2 < \infty$ egyenlőtlenséget, ahol $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$ (\mathbf{x}, η) -től független konstansok,

(v) az alábbi

$$\langle F(u), v \rangle_{H_D^1} := \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla v$$

képlettel definiált általánosított $F : H_D^1(\Omega) \rightarrow H_D^1(\Omega)$ differenciáloperátor deriváltja Lipschitz-folytonos.

Legyen $b \in H_D^1(\Omega)$ olyan, hogy

$$\langle b, v \rangle_{H_D^1} = \int_{\Omega} gv + \int_{\Gamma_N} \gamma v d\sigma \quad (\forall v \in H_D^1(\Omega)),$$

továbbá jelölje $u^* \in H_D^1(\Omega)$ a (3.5) gyenge megoldását, azaz felírható:

$$\langle F(u^*), v \rangle_{H_D^1} = \langle b, v \rangle_{H_D^1}.$$

Legyen $u_0 \in H_D^1(\Omega)$ tetszőleges, az (u_n) sorozatot pedig definiáljuk a következő iterációval: ha az n . lépésben az u_n közelítő függvényt kaptuk, akkor az $(n+1)$. lépésbeli közelítés:

$$u_{n+1} := u_n + \tau_n p_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol $p_n \in H_D^1(\Omega)$ a következő lineáris segédfeladat megoldása:

$$\langle F'(u_n)p_n, v \rangle_{H_D^1} = -\langle F(u_n) - b, v \rangle_{H_D^1} \quad (\forall v \in H_D^1(\Omega))$$

vagy

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, \nabla u_n) \nabla p_n \cdot \nabla v = - \int_{\Omega} \left(f(x, \nabla u_n) \cdot \nabla v - gv \right) + \int_{\Gamma_N} \gamma v d\sigma \quad (\forall v \in H_D^1(\Omega)),$$

továbbá

$$\tau_n = \min \left\{ 1, \frac{\mu_1}{L \|p_n\|_{H_D^1}} \right\} \in (0, 1],$$

ahol L jelöli az F' operátorhoz tartozó Lipschitz-konstanst az (v) feltételnek megfelelően.

3.2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesül a 3.2.1. feltétel minden pontja. Ekkor az előzőek alapján konstruált (u_n) sorozatra*

$$\|u_n - u^*\|_{H_D^1} \leq \mu_1^{-1} \|F(u_n) - b\|_{H_D^1} \rightarrow 0 \quad \text{monoton módon,}$$

továbbá a konvergencia lokálisan kvadratikus, azaz

$$\|F(u_{n+1}) - b\|_{H_D^1} \leq c_1 \|F(u_n) - b\|_{H_D^1}^2 \quad (n \geq n_0)$$

valamely $n_0 \in \mathbb{N}$ index és $c_1 > 0$ konstans mellett, amely egyben konvergenciabecslést ad a gyenge kvadratikus rendre is:

$$\|F(u_n) - b\|_{H_D^1} \leq d_1 q^{2^n} \quad (n \geq n_0),$$

megfelelő $0 < q < 1$ és $d_1 > 0$ konstans értékekkel.

3.2.1. A módszer alkalmazása a vizsgált feladatra

Mindezeket alkalmazzuk a vizsgált (2.1) feladatra, ahol az f függvényt a (2.9) képlettel definiáltuk. Az 3.2.1. feltételben (i) pont nyilvánvaló módon teljesül, hiszen a vizsgált $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány korlátos, határa szakaszonként sima, továbbá Γ_N és Γ_D peremek mérhetőek, valamint $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ és $\Gamma_D \neq \emptyset$ is fent áll. A (ii) feltétel szintén teljesül, hiszen most $g \equiv 0$, azaz $g \in L^2(\Omega)$, illetve γ konstans, tehát $\gamma \in L^2(\Gamma_N)$ szintén. A (iii) – (iv) feltételekről az előző fejezetben már ejtettünk szót a 2.2.1. feltétel tárgyalásakor.

Végül, az (v) feltételt csak véges dimenziós altér felett tudjuk garantálni. Legyen $V \subset H_D^1(\Omega)$ egy, a Ritz-Galjorkin-féle diszkretizáció során nyert véges dimenziós altér ugyanazon skalárszorozattal és legyen $F : V \rightarrow V$ az a differenciáloperátor, amelyre

$$\langle F(u), v \rangle_{H_D^1} = \int_{\Omega} \rho(|\nabla u|^2) \nabla u \cdot \nabla v \quad (\forall v \in V),$$

a $b \in H_D^1(\Omega)$ pedig definiálja azt az elemet, amelyre

$$\langle b, v \rangle_{H_D^1} = \int_{\Gamma_N} \tilde{v}_{\infty} v d\sigma \quad (\forall v \in V).$$

Jelölje most is $u^* \in H_D^1(\Omega)$ a gyenge megoldást, azaz

$$\langle F(u^*), v \rangle_{H_D^1} = \langle b, v \rangle_{H_D^1} \quad (\forall v \in V).$$

Először [4] alapján megmutatjuk, hogy az F operátor Gateaux-deriválható. Legyen $u \in V$ tetszőleges elem, ekkor rögzített $h, v \in V$ elemek esetén

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle F(u + th) - F(u), v \rangle_{H_D^1} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{t} (f(\mathbf{x}, \nabla u + t \nabla h) - f(\mathbf{x}, \nabla u)) \cdot \nabla v.$$

Az $f \in C^1$ feltétel miatt a fenti integrandus majdnem mindenütt pontonként konvergál, limesze:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\mathbf{x}, \nabla u + t \nabla h) - f(\mathbf{x}, \nabla u)) \cdot \nabla v = \frac{\partial f}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \nabla u) \nabla h \cdot \nabla v,$$

a Lebesgue-tétel és a (iv) feltétel miatt ekkor maga az integrál is tartani fog a fenti határérték integráljához. A limesz létezését a Riesz-tétel garantálja, ugyanis a fenti integrál folytonos lineáris funkcionálja v -nek, továbbá a $h \mapsto F'(u)h$ korlátos és lineáris operátor. Így tehát F Gateaux-deriválható és bármely $u, v, h \in V$ esetén

$$\langle F'(u)h, v \rangle_{H_D^1} = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \nabla u) \nabla h \cdot \nabla v.$$

Mivel V véges dimenziós altér, az F' operátor örökli $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ Lipschitz-folytonosságát, vagyis, ha L jelöli az F' operátorhoz tartozó Lipschitz-konstanst, az $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ Lipschitz-konstansából megbecsülhető, ugyanis [2] szerint, ha létezik $L_f > 0$ konstans, hogy

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \eta_1) - \frac{\partial f}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \eta_2) \right| \leq L_f |\eta_1 - \eta_2|,$$

ahol $(\mathbf{x}, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$, akkor

$$\begin{aligned} \left| \langle (F'(u) - F'(v))z, z \rangle_{H_D^1} \right| &= \left| \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \nabla u) - \frac{\partial f}{\partial \eta}(\mathbf{x}, \nabla v) \right) \nabla z \cdot \nabla z \right| \\ &\leq L_f \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v| |\nabla z|^2 \\ &\leq L_f \|\nabla u - \nabla v\|_{L^\infty(\Omega)} \|z\|_{H_D^1}^2 \end{aligned}$$

a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_D^1}$ skalárszorzatot felhasználva. Ennélfogva:

$$\|F'(u) - F'(v)\|_{H_D^1} = \sup_{z \in V, \|z\|_{H_D^1} = 1} \left| \langle (F'(u) - F'(v))z, z \rangle_{H_D^1} \right| \leq L_f \|\nabla u - \nabla v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ekkor bevezetve a

$$K(V) := \sup_{z \in V \setminus 0} \frac{\|z\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|z\|_{L^2(\Omega)}}$$

jelölést, azt kapjuk, hogy

$$\|F'(u) - F'(v)\|_{H_D^1} \leq L_f K(V) \|u - v\|_{H_D^1},$$

ahol $K(V)$ véges, hiszen V véges dimenziós altere $H_D^1(\Omega)$ -nak. Tehát az F' operátorhoz tartozó L Lipschitz-konstansra a következő becslés adható:

$$L \leq L_f K(V).$$

Mindezek alapján a (2.1) feladat megoldása a következő iterációs eljárással történik. Legyen $u_0 \in V$ tetszőleges, az (u_n) sorozatot pedig definiáljuk a következő iterációval: ha az n . lépésben az u_n közelítő függvényt kaptuk, akkor az $(n+1)$. lépésbeli közelítés:

$$u_{n+1} := u_n + \tau_n p_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Itt $p_n \in V$ a következő lineáris segédfeladat megoldása:

$$\int_{\Omega} A_n \nabla p_n \cdot \nabla v = - \int_{\Omega} \rho(|\nabla u_n|^2) \nabla u_n \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_2} \tilde{v}_{\infty} v d\sigma \quad (\forall v \in V), \quad (3.6)$$

ahol

$$A_n := \rho(|\nabla u_n|^2) I + 2\rho'(|\nabla u_n|^2) (\nabla u_n \cdot (\nabla u_n)^T).$$

Továbbá

$$\tau_n = \min \left\{ 1, \frac{\mu_1}{L \|p_n\|_{H_D^1}} \right\} \in (0, 1], \quad (3.7)$$

ahol L továbbra is az F' operátorhoz tartozó Lipschitz-konstanst jelöli.

A kapott (3.6) segédfeladatot a végeelem-módszer segítségével oldjuk meg, ami minden egyes iterációs lépésben egy egyenletrendszer megoldását fogja jelenteni.

3.3. A végeelem-módszer

A végeelem-módszer a Ritz-Galjorkin-módszer alkalmazásának tekinthető, amelyet elsősorban a differenciálegyenletek peremértékfeladatainak megoldására alkalmazunk. Ebben a szakaszban a [3] szerinti gondolatmenet alapján bemutatjuk a végeelem-módszer általános felépítését lineáris feladat esetén.

Legyen $p \geq p_0 > 0$, $p \in L_{\infty}(\Omega)$, illetve $k \geq 0$, $k \in L_{\infty}(\Omega)$ és tekintsük a következő parciális differenciálegyenletet egy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (p \nabla u) + ku = f & \text{az } \Omega \text{ tartományon} \\ u = 0 & \text{a } \Gamma_D \text{ peremen} \\ p \nabla u \cdot \mathbf{n} = \psi & \text{a } \Gamma_N \text{ peremen} \end{cases}$$

Írjuk át az egyenletet gyenge alakba, azaz szorozzuk meg egy kellően sima v teszt-függvénnyel, amelyre $v|_{\Gamma_D} = 0$, majd integráljuk az Ω tartományon:

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (p \nabla u) v + \int_{\Omega} k u v = \int_{\Omega} f v.$$

Ez a Green-formula alapján a következő alakba írható át:

$$\underbrace{\int_{\Omega} p \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} k u v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} \psi v}_{\varphi(v)}.$$

Értelmezzük a $H_D^1(\Omega)$ Szoboljev-teret a második fejezetbeli (2.4) képlet alapján. Ekkor $a : H_D^1(\Omega) \times H_D^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, bilineáris, koercitív és szimmetrikus forma, amely a téren vett skalárszorzatként tekinthető, míg $\varphi : H_D^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál. Azaz a fenti egyenletet átírtuk az alábbi alakba:

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad (\forall v \in H_D^1(\Omega)),$$

amelynek $u \in H_D^1(\Omega)$ megoldását keressük.

3.3.1. Tétel. (Lax-Milgram-lemma, [4]) *Tegyük fel, hogy $\varphi : H_D^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál, valamint $a : H_D^1(\Omega) \times H_D^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, bilineáris, koercitív és szimmetrikus forma. Ekkor az*

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

feladatnak létezik egyértelmű $u \in H_D^1(\Omega)$ gyenge megoldása.

A végeelem-módszer lényege, hogy a feladatot egy $V_h \subset H_D^1(\Omega)$ véges dimenziós altér felett tekintjük, továbbá azt az $u_h \in V_h$ elemet keressük, amelyre:

$$a(u_h, v_h) = \varphi(v_h) \quad (\forall v_h \in V_h). \quad (3.8)$$

Itt V_h az úgynevezett végeelem altér, egy Hilbert-tér, így alkalmazható a Riesz-tétel, tehát V_h altéren is igaz lesz az 3.3.1. tétel, automatikusan átöröklődik minden, ami a $H_D^1(\Omega)$ téren igaz volt. Minden $v_h \in V_h$ esetén fennáll továbbá a Ritz-Galjorkin-módszernél már említett Galjorkin-ortogonalitás:

$$a(u - u_h, v_h) = 0$$

és ebből igazolható, hogy a véges dimenziós altéren kapott u_h diszkrét megoldás kvázioptimális, azaz a hiba arányos a lehető legkisebbel. Ezt a tulajdonságot ismét a Céa-lemma fogalmazza meg, nevezetesen

$$\|u - u_h\|_{H_D^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H_D^1(\Omega)},$$

ahol $C > 0$ megfelelő konstans érték.

Ilyen $V_h \subset H_D^1(\Omega)$ véges dimenziós alteret az Ω tartomány diszkretizációjával kaphatunk, két dimenzióban Ω -át feloszthatjuk például háromszög vagy négyszög elemekre, a kapott véges elemeken pedig elemenként legfeljebb k -adfokú polinomokat vehetünk. Jelölje például N a V_h altér dimenzióját, $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ pedig egy bázisát, ekkor minden $v_h \in V_h$ elem felírható

$$v_h = \sum_{i=1}^N \omega_i \phi_i$$

alakban, ahol ω_i -k jelölik a megfelelő együtthatók értékét. Ez alapján a (3.8) véges feladat a következőképpen fog kinézni:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^N \omega_j \underbrace{a(\phi_j, \phi_i)}_{a_{ij}}}_{(A\omega)_i} = \underbrace{\varphi(\phi_i)}_{b_i} \quad (1 \leq i \leq N).$$

Ezzel tehát egy lineáris egyenletrendszeret kaptunk, amelynek mátrixa reguláris lesz a feladat tulajdonságai miatt, következésképpen létezik egyértelmű megoldás, amely a közelítés együtthatóit fogja megadni nekünk, és amely a közismert matematikai módszerek segítségével kiszámolható.

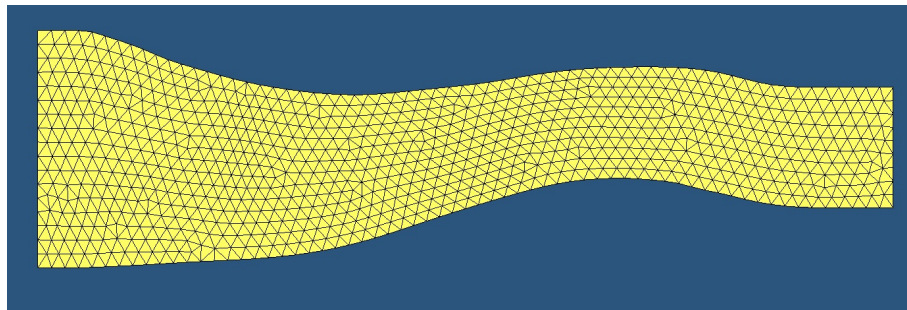
4. fejezet

Megvalósítás

4.1. A segédfeladat végelelemes diszkretizációja

A feladat megoldását MATLAB programnyelven valósítottam meg, ehhez előzetesen szükség volt a tartomány rácshálójával való borítására, hiszen az alkalmazott módszerekkel végzett számításokat a rácspontokban hajtjuk végre.

A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy az Ω tartomány 2.2. ábrán ismertetett geometriáját az úgynevezett HyperMesh előfeldolgozó szoftver segítségével véges elemekre bontottam, majd a MATLAB számára olvasható formátumba írtam át. A HyperMesh szoftver használatának előnye, hogy tetszőleges tartományt tetszőleges sűrűségű és tulajdonságú rácshálójával boríthatunk, mindezt gyorsan és könnyedén. Az alábbi ábra egy, az említett szoftver segítségével készített rácshálót szemléltet:



4.1. ábra. HyperMesh segítségével készített háromszögháló

Ebben a dolgozatban Courant-, azaz úgynevezett nem elfajult háromszög elemekkel dolgozunk, amelyeket a [10] szerinti gondolatmenet alapján definiálunk. Jelölje az i . elemet E_i ($i = 1, \dots, M$), amely Lipschitz-folytonos résztartománya az Ω tartománynak, továbbá igaz az, hogy

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M \bar{E}_i$,
- $E_i \cap E_j = \emptyset$ ($i \neq j$),
- $\bar{E}_i \cap \bar{E}_j = \begin{cases} \bar{E}_i \text{ és } \bar{E}_j & \text{közös pontja, vagy} \\ \bar{E}_i \text{ és } \bar{E}_j & \text{közös oldala, vagy} \\ \emptyset. \end{cases}$

Az Ω tartomány ilyen, a fenti tulajdonságokat teljesítő $\{E_i\}_{i=1}^M$ felosztását konform triangulációnak nevezzük. Egy E_i háromszög elem csúcspontjait jelölje (x_1^i, y_1^i) , (x_2^i, y_2^i) és (x_3^i, y_3^i) , amelyeket nem csak lokálisan, de globálisan is megszámozzunk, amivel az egész rácsháló $\{(x^l, y^l)\}_{l=1}^N$ rácsponthalmazát kapjuk meg. Minden (x^l, y^l) rácsponthoz hozzárendelünk egy ϕ_l függvényt úgy, hogy ϕ_l leszűkítése E_i -re egy $p_{i,l}$ -vel jelölt polinom, továbbá minden egyes E_i -n a $\{p_{i,l}\}$ polinomok a $\mathcal{P}(E_i)$ halmazt alkotják. Ha $\phi_l(x^m, y^m) = \delta_{ml}$, akkor az így konstruált V_h végeselem altér bázisa éppen $\{\phi_l\}_{l=1}^N$, ahol a h paraméter a trianguláció finomságát jelöli.

Legyen most $\mathcal{P}(E_i) = \mathcal{P}^1(E_i)$ az E_i háromszög felett definiált, legfeljebb elsőfokú, azaz $a_i + b_i x + c_i y$ alakú függvények tere, ennek egy bázisát pedig jelölje $\{\phi_i\}_{i=1}^N$.

Tekintsük ezek után a 3. fejezetben ismertetett csillapított Newton-iteráció elemeit és a felírt (3.6) segédfeladatot. Az iteráció n . lépésében az aktuális közelítés így írható fel:

$$u_n = \sum_{i=1}^N c_i^n \phi_i,$$

míg a (3.6) segédfeladat megoldása:

$$p_n = \sum_{i=1}^N d_i^n \phi_i.$$

Ekkor a segédfeladat a

$$G_n := \rho(|\nabla u_n|^2) \nabla u_n$$

jelölés mellett a következő alakú lesz:

$$\int_{\Omega} A_n \sum d_i^n \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = - \int_{\Omega} G_n \nabla \phi_j + \int_{\Gamma_2} \tilde{v}_{\infty} \phi_j \quad (1 \leq j \leq N),$$

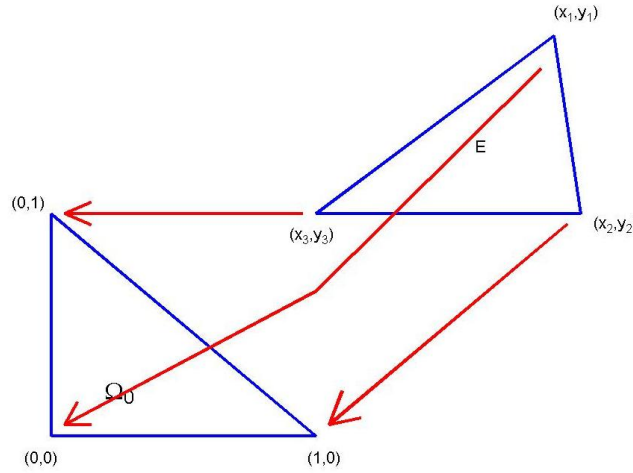
amellyel az alábbi lineáris egyenletrendszer adódik:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \int_{\Omega} A_n \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1 & \int_{\Omega} A_n \nabla \phi_2 \cdot \nabla \phi_1 & \dots \\ \int_{\Omega} A_n \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 & \int_{\Omega} A_n \nabla \phi_2 \cdot \nabla \phi_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{S_n} \underbrace{\begin{pmatrix} d_1^n \\ d_2^n \\ \vdots \end{pmatrix}}_{w_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} - \int_{\Omega} G_n \nabla \phi_1 + \int_{\Gamma_2} \tilde{v}_{\infty} \phi_1 \\ - \int_{\Omega} G_n \nabla \phi_2 + \int_{\Gamma_2} \tilde{v}_{\infty} \phi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{w_n}. \quad (4.1)$$

A fenti egyenletrendszer S_n mátrixát globális mátrixnak nevezzük, ezt és a jobb oldal w_n vektorát elemenként építjük fel, amely eljárást elemenkénti összefűzésnek hívjuk, angolul *element-by-element assembling*.

4.1.1. Affin lineáris leképezés

Tekintsük azt a háromszöget, amelynek három csúcspontja $(0,0)$, $(1,0)$ és $(0,1)$. Ezt a háromszöget referenciaelemnek nevezzük, funkciója pedig, hogy a globális mátrix, valamint a jobb oldal összefűzése során az elemeket a számítások megkönnyítése végett affin lineáris módon leképezzük ebbe a háromszögbe. Jelölje a referenciaelemet Ω_0 , egy tetszőleges elemet pedig most $E_i \equiv E$, amelynek csúcspontjai rendre (x_1, y_1) , (x_2, y_2) és (x_3, y_3) .



4.2. ábra. Affin lineáris leképezés

Legyen az Ω_0 -ról E -re ható affin lineáris leképezés:

$$\mathcal{A}_E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b_E,$$

míg az E -ről Ω_0 -ra ható:

$$\mathcal{C}_E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d_E.$$

Legyenek \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 kétdimenziós vektorok olyanok, hogy

$$\mathbf{v}_1 = \mathcal{A}_E \mathbf{v}_2 + b_E,$$

akkor

$$\mathbf{v}_1 - b_E = \mathcal{A}_E \mathbf{v}_2,$$

ahol legyen

$$\mathcal{C}_E := \mathcal{A}_E^{-1} \text{ és } d_E := \mathcal{A}_E^{-1} b_E.$$

Az \mathcal{A}_E mátrix a következő módon állítható elő az általunk vett E elem és a referenciaelem között:

$$\mathcal{A}_E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \text{ azaz } b_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

valamint

$$\mathcal{A}_E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_E = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

tehát

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Továbbá

$$\mathcal{A}_E \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_E = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

azaz

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Az elemen vett integrálok kiszámításához szükségünk lesz a háromszögek területére is, amely az alábbi egyenlet átrendezésével kapható meg:

$$|\Omega_0| = \int_{\Omega_0} 1 d\vartheta d\nu = \int_E \frac{1}{|\det \mathcal{A}_E|} dx dy = \frac{1}{|\det \mathcal{A}_E|} |E|,$$

ugyanakkor a MATLAB beépített `det` parancsának segítségével ennek az egyenletnek a kiszámítása is egyszerűen kiküszöbölhetővé válik.

4.1.2. A globális mátrix felépítése

Térjünk vissza az (4.1) egyenletrendszerhez és vizsgáljuk meg, hogyan számítható ki az S_n globális mátrix j . sorának i . eleme. Egy ilyen elem a következőképpen néz ki:

$$\int_{\Omega} A_n \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \int_{E_{m_1}} A_n \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j + \int_{E_{m_2}} A_n \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j + \dots, \quad (4.2)$$

ahol m_1, m_2, \dots azoknak az elemeknek az indexei, amelyek részei ϕ_i és ϕ_j közös tartójának. Tekintsük a (4.2)-beli összeg egy tagját:

$$\begin{aligned} \int_{E_{m_k}} A_n \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j &= \int_{E_{m_k}} A_n \begin{pmatrix} \partial_x \phi_i \\ \partial_y \phi_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \phi_j \\ \partial_y \phi_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} \partial_x \phi_i + A_{12} \partial_y \phi_i \\ A_{21} \partial_x \phi_i + A_{22} \partial_y \phi_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \phi_j \\ \partial_y \phi_j \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Jelölje $\phi_i^{\Omega_0}$ a referenciaelemhez tartozó i . bázisfüggvényt - úgynevezett referencia bázisfüggvényt -, ezek rendre:

$$\phi_1^{\Omega_0} \equiv \phi_{(0,0)}^{\Omega_0} = 1 - x - y,$$

$$\phi_2^{\Omega_0} \equiv \phi_{(1,0)}^{\Omega_0} = x,$$

$$\phi_3^{\Omega_0} \equiv \phi_{(0,1)}^{\Omega_0} = y.$$

A referencia bázisfüggvények segítségével az E elemhez tartozó i . bázisfüggvény:

$$\phi_i(x, y) = \phi_i^{\Omega_0}(\mathcal{C}_E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d_E) = \phi_i^{\Omega_0}(\underbrace{c_{11}x + c_{12}y + d_{E1}}_{\alpha}, \underbrace{c_{21}x + c_{22}y + d_{E2}}_{\beta}),$$

az első, illetve második változó szerinti deriváltja pedig:

$$\partial_x \phi_i(x, y) = \partial_x \phi_i^{\Omega_0}(\alpha, \beta) c_{11} + \partial_y \phi_i^{\Omega_0}(\alpha, \beta) c_{21} = \nabla \phi_i^{\Omega_0}(\alpha, \beta) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix},$$

illetve

$$\partial_y \phi_i(x, y) = \partial_x \phi_i^{\Omega_0}(\alpha, \beta) c_{12} + \partial_y \phi_i^{\Omega_0}(\alpha, \beta) c_{22} = \nabla \phi_i^{\Omega_0}(\alpha, \beta) \cdot \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}.$$

Ez alapján a (4.3) skalárszorzat első tagja:

$$\begin{aligned}
\int_{E_{m_k}} A_{11} \partial_x \phi_i \partial_x \phi_j &= \int_{E_{m_k}} \left(A_{11} \nabla \phi_i^{\Omega_0}(\alpha, \beta) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\nabla \phi_j^{\Omega_0}(\alpha, \beta) \cdot \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} \right) \\
&= \int_{E_{m_k}} A_{11} \left(\partial_x \phi_i^{\Omega_0}(\alpha, \beta) \partial_x \phi_j^{\Omega_0}(\alpha, \beta) c_{11}^2 + \dots \right) \\
&= \frac{1}{|\det \mathcal{C}_{E_{m_k}}|} \int_{\Omega_0} A_{11} \left(\partial_x \phi_i^{\Omega_0}(\alpha, \beta) \partial_x \phi_j^{\Omega_0}(\alpha, \beta) c_{11}^2 + \dots \right),
\end{aligned}$$

a többi tag pedig analóg módon megkapható. Számítsuk ki azokat a mátrixokat, amelyek (i, j) . eleme a következő:

$$(M_{xx})_{ij} := \int_{\Omega_0} \partial_x \phi_i^{\Omega_0} \partial_x \phi_j^{\Omega_0},$$

$$(M_{yy})_{ij} := \int_{\Omega_0} \partial_y \phi_i^{\Omega_0} \partial_y \phi_j^{\Omega_0},$$

$$(M_{xy})_{ij} := \int_{\Omega_0} \partial_x \phi_i^{\Omega_0} \partial_y \phi_j^{\Omega_0},$$

$$(M_{yx})_{ij} := \int_{\Omega_0} \partial_y \phi_i^{\Omega_0} \partial_x \phi_j^{\Omega_0}.$$

Ekkor M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} és M_{yx} az úgynevezett referencia mátrixok, amelyek pontos alakja:

$$\begin{aligned}
M_{xx} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{yy} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
M_{xy} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{yx} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ezeket felhasználva az S_n globális mátrix felépítése során az alábbi tagokat kell elemenként a mátrixhoz fűznünk:

$$\int_{E_{m_k}} A_n \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \int_{E_{m_k}} (A_n)_{pq} \partial_q \phi_i \partial_p \phi_j,$$

ami a referencia mátrixok segítségével felírva:

$$\frac{1}{|\det \mathcal{C}_{E_{m_k}}|} \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (A_n)_{pq} (M_{xx} c_{1q} c_{1p} + M_{xy} c_{1q} c_{2p} + M_{yx} c_{2q} c_{1p} + M_{yy} c_{2q} c_{2p}).$$

4.1.3. Az egyenletrendszer jobb oldala

Vizsgáljuk most meg a (4.1) egyenletrendszer w_n vektorát. Ennek a vektornak minden eleme egy kéttagú összegből áll, amelynek egyik tagja egy, az Ω tartományon, másik tagja pedig egy, a Γ_2 peremen vett integrál. A jobb oldal vektorának felépítése a globális mátrix esetéhez hasonlóan elemenkénti összefűzéssel történik. Tekintsük először a vektor i . elemében szereplő összeg első tagját:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} G_n \nabla \phi_i &= - \int_{\Omega} \rho(|\nabla u_n|^2) \nabla u_n \cdot \nabla \phi_i \\ &= - \int_{E_{m_1}} \rho(|\nabla u_n|^2) \nabla u_n \cdot \nabla \phi_i - \int_{E_{m_2}} \rho(|\nabla u_n|^2) \nabla u_n \cdot \nabla \phi_i - \dots \end{aligned}$$

Ennek a kifejezésnek egy tagja:

$$- \int_{E_{m_k}} \rho(|\nabla u_n|^2) \underbrace{\nabla u_n \cdot \nabla \phi_i}_{\kappa_n} = -\rho(|\nabla u_n|^2) \kappa_n \int_{E_{m_k}} 1 dx dy = -\rho(|\nabla u_n|^2) \kappa_n |E_{m_k}|,$$

ahol, ha \mathbf{a}_{m_k} és \mathbf{b}_{m_k} az E_{m_k} elem két oldalát meghatározó vektorok, akkor

$$|E_{m_k}| = \frac{|\mathbf{a}_{m_k} \times \mathbf{b}_{m_k}|}{2}.$$

A κ_n konstans ∇u_n és $\nabla \phi_i$ skalárszorzatából adódik, amelyeket síkillesztéses módszerrel tudunk egyszerűen kiszámolni. Tekintsünk ismét egy általános E elemet, amelynek csúcspontjai (x_1, y_1) , (x_2, y_2) és (x_3, y_3) . Tegyük fel továbbá, hogy az n . iterációs lépésbeli u_n közelítő függvény ezen csúcsokhoz tartozó elemeinek globális indexe rendre r , s és t . Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n(x^r, y^r) \\ u_n(x^s, y^s) \\ u_n(x^t, y^t) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Ekkor

$$\nabla u_n = \begin{pmatrix} g_2 \\ g_3 \end{pmatrix},$$

a $\nabla \phi_i$ pedig analóg módon kiszámítható, sőt, a jobb oldal leegyszerűsödik, mivel adott csúcsponthoz tartozó bázisfüggvény az adott csúcspontban 1, a többi pontban pedig 0 értéket vesz fel, tehát a jobb oldal vektora egy elem kivételével csupa 0 elemből fog állni.

A w_n vektor i . elembeli összegének második tagja:

$$\int_{\Gamma_2} \tilde{v}_\infty \phi_i = \tilde{v}_\infty \int_{\Gamma_2} \phi_i,$$

ahol ϕ_i legfeljebb elsőfokú polinom. Az integrál kiszámítása ismét elemenként fog történni egy alappontú Gauss-kvadratúraformula [11] alkalmazásával. Az egyetlen alappont az integrációs tartomány, azaz az éppen aktuális E_{m_k} elem Γ_2 peremre eső oldalának felezőpontja lesz, ahol az adott oldal végpontjaihoz tartozó bázisfüggvények $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ értéket vesznek fel. A kvadratúraformulában szereplő súly értéke 2, az integrációs tartomány hossza pedig l_{m_k} , amelynek értéke egyszerű algebrai számolással megkapható. Mindezek segítségével az integrál egy E_{m_k} elemen az alábbi alakban írható fel:

$$\tilde{v}_\infty \int_{E_{m_k}} \phi_i = \tilde{v}_\infty 2 \frac{1}{2} \frac{l_{m_k}}{2} = \tilde{v}_\infty \frac{l_{m_k}}{2}.$$

Az S_n és w_n által meghatározott lineáris egyenletrendszer megoldása során azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy a Dirichlet-peremre nézve homogenizált segédfeladatot tekintünk. Ezzel nem veszítünk információt, ugyanakkor csökkentjük a futásidőt, az egész eljárás végén pedig az adott peremfeltételnek megfelelő konstans értéket hozzáadjuk a kapott megoldásvektor megfelelő indexű elemeihez.

4.2. Az iteráció megvalósítása

Az előző szakaszban láttuk, miként diszkrétizálható a (3.6) segédfeladat a végelem-módszer segítségével, valamint hogyan épül fel az azzal ekvivalens véges dimenziós lineáris algebrai egyenletrendszer. Ha mindezek az elemek megvannak és az egyenletrendszert megoldottuk, alkalmazhatjuk a csillapított Newton-iteráció algoritmusát, amely a következőképpen nézett ki: ha az n . lépésben az u_n közelítő függvényt kaptuk, akkor az $(n+1)$. lépésbeli közelítés:

$$u_{n+1} := u_n + \tau_n p_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Itt $p_n \in V_h$ az előző szakaszban felépített lineáris egyenletrendszer megoldása, τ_n értéke pedig:

$$\tau_n = \min \left\{ 1, \frac{\mu_1}{L \|p_n\|_{H_D^1}} \right\} \in (0, 1],$$

ahol μ_1 és L a 3.2.1. feltétel (iii) és (v) pontja alapján értelmezett konstans értékek.

Az iteráció megvalósítása során ismét egyszerűsítéssel élünk, amely a számítást hivatott megkönnyíteni, és amellyel a τ_n pontos értékének kiszámítását küszöböljük ki. Ahelyett ugyanis, hogy kiszámolnánk a képletben szereplő konstans paraméterek értékeit, majd pedig ezek segítségével magát τ_n -et, adaptívvá tesszük a módszert és leállási kritériumot építünk be minden egyes iterációs lépésben.

Tekintsük a (2.1) feladat gyenge alakját azon véges V_h altér felett, amelyet az előző szakaszban konstruáltunk a végeselem-módszer segítségével, ez az alak már többször szerepelt a korábbiakban:

$$\langle F(u_h), v_h \rangle_{H_D^1} = \langle b, v_h \rangle_{H_D^1} \quad (\forall u_h, v_h \in V_h).$$

Definiáljuk az n . iterációs lépésbeli úgynevezett reziduális függvényt az

$$r_n := F(u_n) - b$$

képlettel. Ekkor az adaptív módszer legyen a következő: minden iterációs lépés elején definiáljuk τ_n értékét 1-nek, és az $(n+1)$. lépésben kiszámított

$$u_{n+1} := u_n + \tau_n p_n$$

közelítő függvényt akkor fogadjuk el, ha a megfelelő reziduális függvényekre fennáll:

$$\|r_n\|_{H_D^1} > \|r_{n+1}\|_{H_D^1}. \quad (4.5)$$

Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor csökkentjük τ_n értékét, legyen például

$$\tau_n := 0.7\tau_n$$

addig, amíg az új τ_n értékkel számolt u_{n+1} és r_{n+1} függvényekkel nem teljesül a (4.5) feltétel.

Ennek a módszernek az alkalmazásához minden egyes lépésben ki kell számítanunk az $\|r_n\|_{H_D^1}$ és $\|r_{n+1}\|_{H_D^1}$ értékeket, amihez tehát ismernünk kell az r_n és r_{n+1} reziduális függvényeket. Ehhez egy másik, egyszerűbb segédfeladatot kell megoldanunk, ugyanis tetszőleges $v \in H_D^1(\Omega)$ esetén fennáll:

$$\langle r_n, v \rangle_{H_D^1} = \langle F(u_n), v \rangle_{H_D^1} - \langle b, v \rangle_{H_D^1},$$

azaz

$$\int_{\Omega} \nabla r_n \cdot \nabla v = \int_{\Omega} \rho(|\nabla u_n|^2) \nabla u_n \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_2} \tilde{v}_{\infty} v,$$

vagyis a Green-formula alapján az alábbi segédfeladat megoldásaként kaphatjuk meg az r_n reziduális függvényt:

$$\begin{cases} -\Delta r_n = -\nabla \cdot (\rho(|\nabla u_n|^2) \nabla u_n) & \text{az } \Omega \text{ tartományon} \\ \nabla r_n \cdot \mathbf{n} = \rho(|\nabla u_n|^2) \nabla u_n & \text{a } \Gamma_{1,3} \text{ peremen} \\ \nabla r_n \cdot \mathbf{n} = \rho(|\nabla u_n|^2) \nabla u_n - \tilde{v}_{\infty} & \text{a } \Gamma_2 \text{ peremen} \\ r_n = 0 & \text{a } \Gamma_4 \text{ peremen,} \end{cases} \quad (4.6)$$

ahol

$$\rho(|\nabla u|^2) := \rho_{\infty} \left(1 - \frac{1}{5} (|\nabla u|^2 - M_{\infty}^2)\right)^{5/2}.$$

A reziduális segédfeladatot ugyanazon az elven oldjuk meg, mint az eredeti segédfeladatot: végelem-módszer segítségével diszkretizáljuk, majd a kapott lineáris egyenletrendszert a MATLAB beépített \ parancsával - amely LU-felbontást alkalmaz - megoldjuk, a megoldás pedig a diszkrét r_n reziduális vektor lesz. Az $\|r_n\|_{H_D^1}$ értéket ezután már egyszerűen ki tudjuk számítani a kapott vektorra, ugyanis definíció szerint

$$\|r_n\|_{H_D^1} := \|\nabla r_n\|_{L^2} = \int_{\Omega} |\nabla r_n|^2,$$

amit a már jól ismert elemenkénti összefűzés módszerével számolunk ki, az E_{m_k} elemen például:

$$\int_{E_{m_k}} |\nabla r_n|^2 = \int_{E_{m_k}} (\partial_x r_n)^2 + (\partial_y r_n)^2 = |E_{m_k}| ((\partial_x r_n)^2 + (\partial_y r_n)^2).$$

Mindez tehát azt jelenti, hogy a kezdeti r_0 vektor kiszámítása után minden egyes iterációs lépésben meg kell oldanunk még egy, a reziduális függvényre felírt segédfeladatot is.

Itt a globális mátrix ugyanúgy épül fel, mint a (4.6) segédfeladat esetében, csupán az abban szereplő A_n súlymátrix nem szerepel. Igaz továbbá az is, hogy a globális mátrix minden itereációs lépésben ugyanaz lesz, mivel nem függ az aktuálisan kiszámolt u_n közelítés értékétől. Jelöljük ezért a reziduális segédfeladathoz tartozó súlyozatlan globális mátrixot Z -vel.

Hasonlóan meggondolható, hogy az egyenletrendszer jobb oldala a (4.6) jobb oldalának negáltja lesz, azaz $-w_n$. Felmerül a kérdés, milyen többletköltséggel jár számunkra a reziduális függvényre felírt segédfeladat megoldása? A következő műveletek átlagos futásidejét vizsgáltam ezzel kapcsolatban:

- az eredeti (3.6) lineáris segédfeladat végeselemes diszkretizációjával adódó S_n globális mátrix felépítése,
- a (4.6) reziduális segédfeladat végeselemes diszkretizációjával adódó Z globális mátrix felépítése,
- az $S_n p_n = w_n$ egyenletrendszer megoldása,
- a $Z r_n = -w_n$ egyenletrendszer megoldása.

Az eredményeket egy konkrét példán szemléltetem, amelynek során a Dirichlet-peremfeltételt homogénnek vettem, a Neumann-peremfeltételt pedig adott értékeken futtatam, előidézve ezzel az egyenlet elliptikusságának bizonyos pontokbeli lokális elvesztését. Mindez azért szemléletes számunkra, mert a \tilde{v}_∞ érték növelésével a módszer nehezedik, azaz az egyes műveletek futásideje növekedhet.

4.1. táblázat. A részfolyamatok átlagos futásideje (sec)

	Lineáris segédfeladat		Reziduális segédfeladat	
	S_n felépítése	$S_n \setminus w_n$	Z felépítése	$Z \setminus -w_n$
$\tilde{v}_{\infty,1}$	0.0228	0.0004	0.0227	0.0002
$\tilde{v}_{\infty,2}$	0.0229	0.0005	0.0226	0.0002
$\tilde{v}_{\infty,3}$	0.0232	0.0005	0.0229	0.0002
$\tilde{v}_{\infty,4}$	0.0232	0.0006	0.0228	0.0003
$\tilde{v}_{\infty,5}$	0.0233	0.0006	0.0231	0.0003
$\tilde{v}_{\infty,6}$	0.0238	0.0006	0.0233	0.0003
$\tilde{v}_{\infty,7}$	0.0243	0.0006	0.0237	0.0003

A fenti táblázatból leolvasható, hogy a Z globális mátrix felépítésének műveletigénye közel azonos az S_n felépítéséhez szükséges műveleti igénnyel, valamivel kisebb annál. A program szempontjából ez azt jelenti, hogy a 0. iterációs lépésben ennek a

részfolyamatnak a futásidejét megkétszerezzük, a további lépések során azonban Z -t már nem kell kiszámítanunk újból, tehát ez a műveleti költség ott már nem fog jelentkezni. Mivel az eredeti lineáris, valamint a reziduális segédfeladatra a jobb oldal vektora azonos, ezért ezt elegendő iterációnként egyszer kiszámítani, itt tehát egyáltalán nem jelentkezik többletköltség. A végeselemes diszkretizációval nyert egyenletrendszer megoldásának futásideje elhanyagolhatónak mondható, a reziduális segédfeladat esetében ráadásul feleződik, tehát ez sem fogja megnövelni az egész program futásidejét.

Végeredményben azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a (4.6) reziduális függvényre felírt egyenlet megoldásával felmerülő többletköltség elhanyagolható, azaz az iteráció adaptívan történő megvalósításával nem nehezítettük a programot.

Végül a leállási kritérium a következő lesz: a program egy bemenő paramétereként megadhatjuk az elvárt maximális iterációs számot, a program pedig addig fut, amíg el nem éri ezt az iterációs számot, vagy pedig az aktuális közelítéshez tartozó reziduális függvény normája egy előre megadott érték alá nem esik. A program futtatásai során tapasztalt eredmények alapján az általam választott korlát a következő:

$$\|r_n\|_{H_D} \leq 10^{-10}.$$

4.3. A paraméterértékek megválasztása

Az előző szakaszok alapján megírt program futtatásához meg kell határoznunk a (2.1) egyenletben szereplő M_∞ , ρ_∞ , valamint a v_∞ és \tilde{v}_∞ paraméterek értékét.

Ezek közül a ρ_∞ értékét már korábban, a 2. fejezetben megadtuk, ez a paraméter jelölte a levegő sűrűségét zavartalan körülmények között, amely tehát:

$$\rho_\infty = 1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Az M_∞ Mach-szám meghatározásához az

$$M_\infty = \frac{(v_{\text{objektum}})_\infty}{c_\infty} \quad (4.7)$$

egyenletre van szükségünk, ahol elsőként a c_∞ hangsebességet határozzuk meg. Ennek értéke a (2.3) képlet alapján, felhasználva, hogy a gázturbinás repülőgépek szokásos magassága tengerszint felett 10 000 m [11], ilyen magasságban pedig a levegő

hőmérséklete körülbelül $-57\text{ }^{\circ}\text{C}$:

$$c_{\infty} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot (-57 + 273,16)} \approx 295 \frac{m}{s}.$$

Az adott magasságban a repülők megközelítőleg $800 \frac{km}{h}$ sebességgel közlekednek, ami körülbelül $222,2222 \frac{m}{s}$ -nak felel meg. Ezek alapján a (2.2) képlettel megadott $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényben az

$$M_{\infty} = \frac{222,2222}{295} \approx 0,7533$$

értékkel fogunk számolni. A v_{∞} és \tilde{v}_{∞} paraméterek értékét pedig a futtatások során önkényesen fogjuk változtatni.

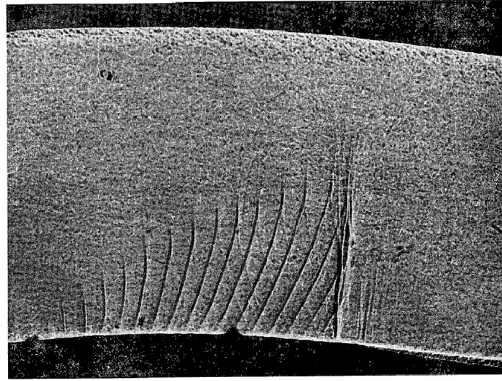
5. fejezet

Eredmények

E dolgozat célja volt egyrészt a (2.1) alapegyenlet numerikus megoldása matematikai módszerek segítségével, másrészt a munka alapjául szolgáló [1, 7, 8, 9] cikkek által közölt megfigyelésekhez hasonló eredmények elérése. Mit is jelent ez pontosan?

Egyrészt, azt szerettük volna elérni, hogy egy mérnöki vagy fizikai modellproblémát pusztán matematikai módszerek segítségével közelítőleg megoldjunk. Ennek fényében az alapegyenletet szubszonikus áramlási feltételek mellett tekintettük, biztosítva ezzel, hogy az egyenlet végig elliptikus maradjon, azaz a felhasznált módszerek és eljárások alkalmazhatóak legyenek. Kijelenthetjük, hogy ez a vizsgálat sikeres volt, a módszerek jól működtek, tehát a megoldáshoz szükséges feltételeink teljesültek.

Másrészt, megfigyelhető, hogy amint a szubszonikus áramlási sebességek elkezdenek átlépni transzszonikusba, a vizsgált szélcsatornában elkezdenek kialakulni az $\widehat{M} > 1$ zónák, ezek is tipikusan a repülőgépszárny felett. A [1, 7, 8, 9] cikkek leírják, hogy ekkor a repülőgépszárnyak felett úgynevezett transzszonikus lökéshullámok jönnek létre, amelyek egy bizonyos sebesség felett már szabad szemmel is láthatóak. Ilyen transzszonikus lökéshullámok keletkezését láthatjuk például az 5.1. ábrán, amely az úgynevezett Schlieren fotográfiai eljárással [13] készült. A Schlieren eljárás előnye, hogy segítségével lefényképezhető változó sűrűségű folyadékok áramlási képe, éppen ezért széleskörűen használják a repülőmérnöki vizsgálatokban a repülőgépek körüli áramlások, lökéshullámok vizsgálatára is.



5.1. ábra. Transzszonikus lökeshullámok Schlieren képe a szélcsatornában, [7]

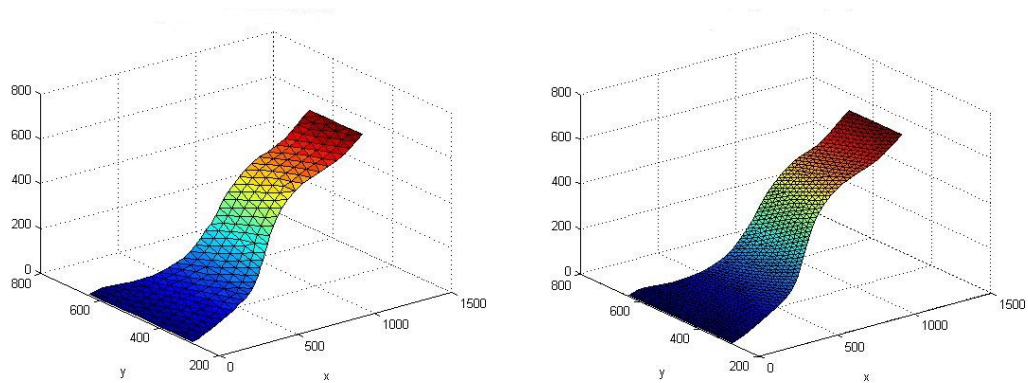
Másik célunk volt tehát ezeknek a transzszonikus lökeshullámoknak valamilyen fokú szimulálása, amely törekvésünk szintén sikeresnek mondható, a későbbiekben ábrákon szemléltetjük az eredményeket.

A program bemenő paramétereinek megválasztását az előző fejezet utolsó szakaszában tárgyaltuk, a ρ_∞ és M_∞ értékeket pontosan megadtuk, illetve kiszámítottuk. A másik két paraméter, v_∞ és \tilde{v}_∞ értékét a futtatások során változtattam, ezzel befolyásolva az egyenlet elliptikusságát. Minél nagyobbra vettem a bemenő értékeket, annál közelebb került a rendszer az $\widehat{M} = 1$ -es határhoz, amellyel egyidőben a numerikus megoldás is elkezdett elfajulni.

5.1. Futtatás szubszonikus feltételek mellett

Lássunk először egy példát, amelyet szubszonikus áramlási feltételek mellett futtattam. Az egyszerűség kedvéért homogén Dirichlet-peremfeltételt választottam, azaz a Γ_4 peremen a $v_\infty \cdot \mathbf{x}$ skalárszorzat értéket 0-nak vettem, ami a megoldások ábrázolásának szempontjából nem okoz redukción, mivel azok az eredmények mondhatók szemléletesnek, amelyek esetén a ∇u vektort vagy a $|\nabla u|^2$ -től függő értékeket ábrázoljuk, és ezek esetében a konstans értékű $v_\infty \cdot \mathbf{x}$ skalárszorzat nem jut szerephez. A Γ_2 peremrészén az inhomogén Neumann-peremfeltételt $\tilde{v}_\infty = 0.888$ -nak választottam, mivel ez egy olyan értéke a paraméternek, amely mellett az elliptikusság még nem romlik el. A maximális iterációszámot 50-nek vettem azzal az elvárással, hogy ennyi lépés alatt a csillapított Newton-módszernek várhatóan el kell érnie a lehető

legjobb megoldást. A futtatást elvégeztem 40 és 20 mm finomságú rácshálón is, azaz a hálót felépítő háromszög elemek oldala egyenként megközelítőleg 40, a másik háló esetében 20 mm nagyságú volt. Végül, a csillapított Newton-iteráció u_0 kezdő vektorának a csupa nulla vektort választottam, azaz a programot az $u_0 = \text{zeros}(m, 1)$ paranccsal inicializáltam, ahol m a rácspontok számát jelöli.



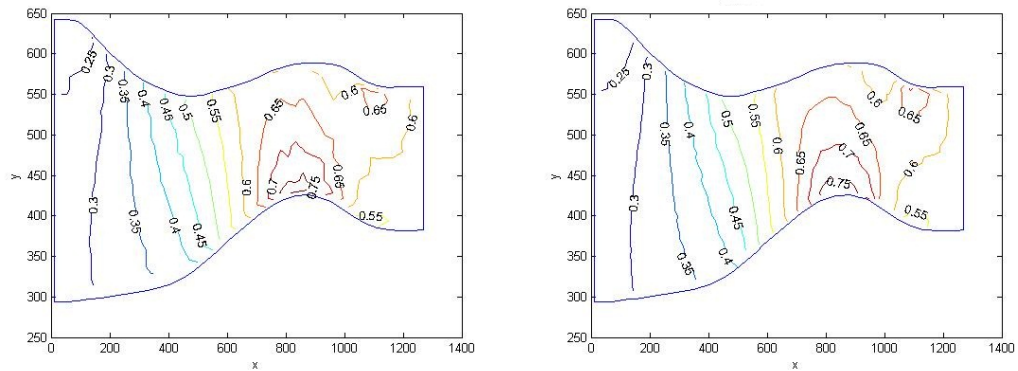
5.2. ábra. A potenciál az egyes elemeken (40 és 20 mm finomságú hálón)

Újra ki kell hangsúlyoznunk, hogy az általunk lokális Mach-számnak nevezett hányados most a (2.11) képlet alapján értelmezett

$$\widehat{M} := \frac{r}{\sqrt{\frac{(\frac{1}{5})^{\frac{5}{2}}(M_{\infty}^2 + 5)}{(\frac{1}{5})^{\frac{5}{2}} + (\frac{1}{5})^{\frac{3}{2}}}}}$$

érték, ahol $r := |\nabla u|$.

Ez a hányados egyrészt csak egy közelítő érték, mivel a nevezőt minden pontban ugyanakkorának tekintjük, ami pedig a valóságban nem igaz. Valójában az áramló közeg sebessége minden pontban különböző, mivel más és más az egyes pontokbeli tengerszint feletti magasság mértéke, és így a hőmérséklet is, ami pedig a sebességet leginkább befolyásoló tényező. Ezzel szemben az általunk definiált \widehat{M} hányados nevezője az M_{∞} paramétertől függ, ami viszont egy univerzális érték. Ez a közelítés azonban elfogadható, mivel a szélcsatorna vertikális kiterjedése nem mondható túlságosan jelentősnek.



5.3. ábra. A lokális Mach-szám szintvonalai (40 és 20 mm finomságú hálón)

Másrészt szót kell ejtenünk a lokális Mach-szám szintvonalainak ábrázolásának kérdéséről is. A MATLAB beépített `contour` parancsa ugyanis csak téglalap alakú rácson alkalmazható, ami gondot okozott egyrészt abból az okból kifolyólag, hogy az általunk használt geometria egy konkáv sokszög, másrészt azért, mert az $r^2 = |\nabla u_n|^2$ értékeket elemenként számoltuk a mátrixösszefűzések során, nem pedig pontonként. Először tehát létrehoztam egy szabályos téglalap rácsot, majd pedig ennek csomópontjain interpoláltam az elemenként ismert $|\nabla u_n|^2$ értékeket a MATLAB beépített `griddata` parancsával, amely lineáris interpolációt valósít meg. Az így kapott rácshálón, a rácspontokban kapott értékek felhasználásával ábrázoltam az \widehat{M} lokális Mach-szám szintvonalait, lásd 5.3. ábra.

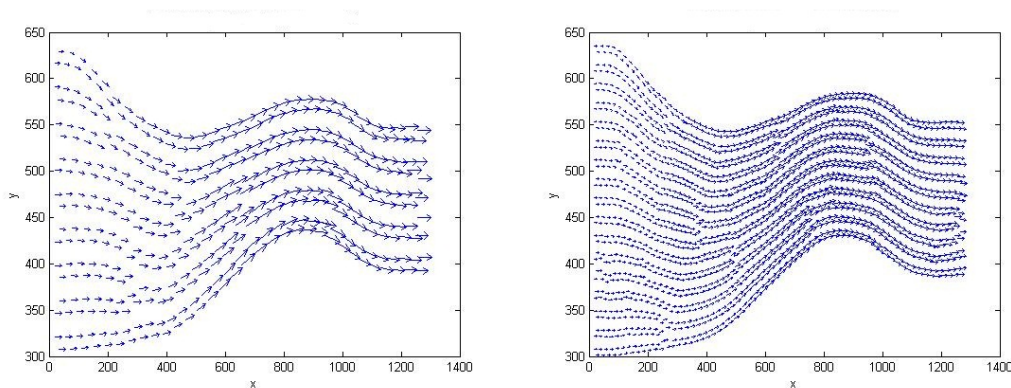
5.1. táblázat. A reziduális hiba csökkenésének mértéke

	$\ \mathbf{r}_n\ /\ \mathbf{r}_0\ $			
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n \geq 4$
40 mm	0.1006	0.0090	0.0028	~ 0
20 mm	0.1006	0.0089	0.0021	~ 0

A ∇u_n sebességvektor értékét szintén elemenként számoltuk a mátrixösszefűzések során, ezért azt elemenként, a háromszög elemek súlypontjába helyezett nyilak segítségével ábrázoltam, ahol a nyilak mérete és iránya arányos a vektorok méretével és irányával, lásd 5.4. ábra.

E kiragadott példa eredményei alapján is kijelenthető, hogy a program jól működött, általában véve szubszonikus áramlási feltételek esetén ehhez hasonló szép ered-

ményeket kaptam. Az 5.1. táblázatból leolvasható, hogy a példabeli input paraméterek mellett a csillapított Newton-módszer már 4 iterációs lépés elvégzése után jó közelítést adta a vizsgált feladatnak, az egyes iterációs lépésekben ráadásul nem volt szükség a közelítés javítására sem.



5.4. ábra. A sebességvektor az egyes elemeken (40 és 20 mm finomságú hálón)

Elmondható továbbá, hogy ezek mellett a bemenő paraméterek mellett már az 40 mm finomságú rácshálón is kellően jó közelítő megoldást kaphatunk, ezt mind a kapott ábrák, mind a 5.1. táblázat jól mutatja.

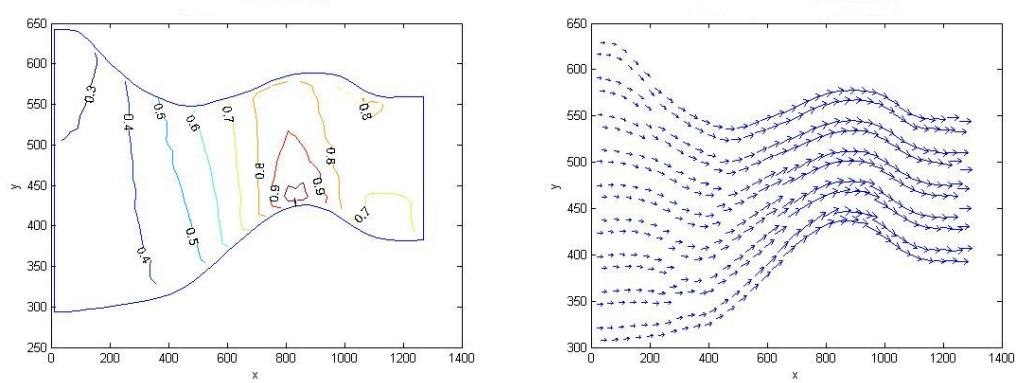
Általánosságban az mondható, hogy szubszonikus áramlási feltételek esetén, amíg az egyenlet minden pontban megőrzi a lokális elliptikusságot, a program az elvárásoknak megfelelően működött, a pontosság szempontjából jó eredményeket adott már kis iterációs szám esetén is, a futásidő szempontjából pedig a rácsháló finomsága volt a legnagyobb befolyásoló tényező.

5.2. Futtatás a \tilde{v}_∞ paraméterérték növelésével

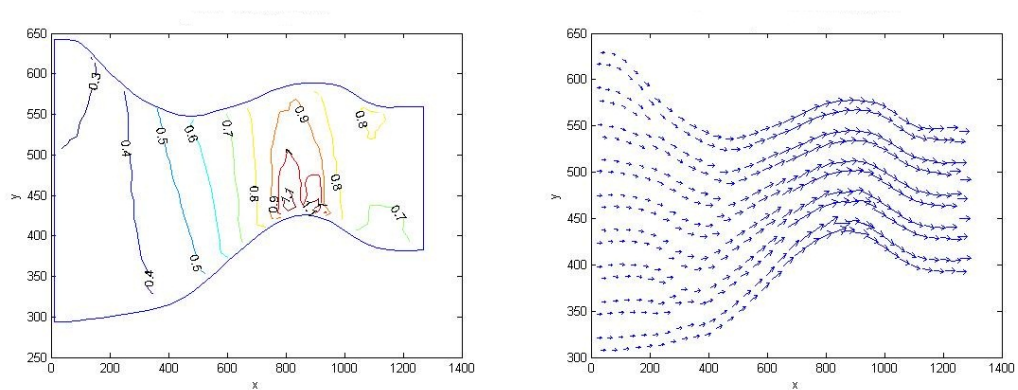
Nézzük most azokat az eredményeket, amelyek a \tilde{v}_∞ paraméter mozgásával adódtak. Célunk volt, hogy amint az áramlás szubszonikusból elkezd transzszonikusba átváltani, olyan eredményeket produkáljunk, amelyek az [1, 7, 8, 9] cikkekben leírtakhoz hasonlatosak. Ebben az esetben ugyanis az egyenlet elliptikussága elromlik és a csillapított Newton-módszer sokkal nehezebben bírkozik meg a bemenő adatokkal. Mindez a kirajzolt ábrákon jól látható, mivel a folyamat a gyakorlatban a

már említett transzszonikus lökéshullámok létrejöttét eredményezi a szélsatornának a repülőgépszárny legmeredekebb része feletti, ívelt részében.

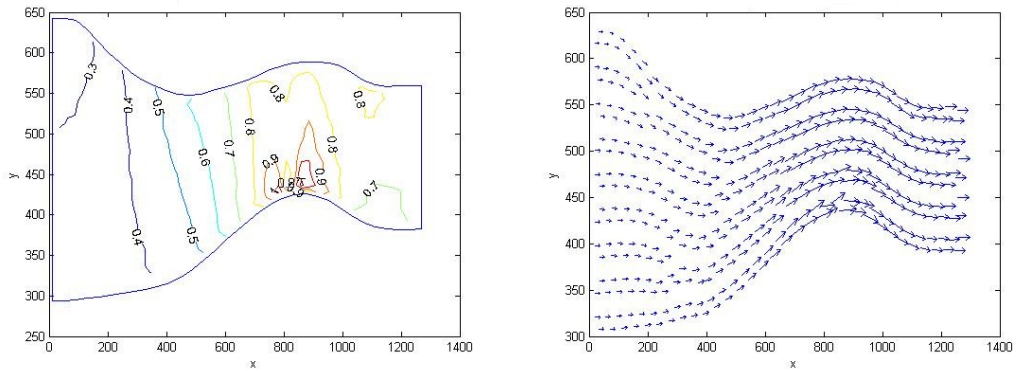
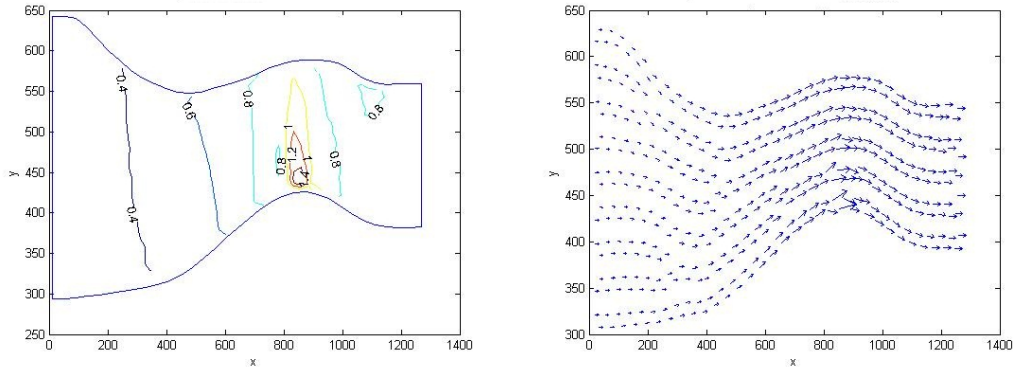
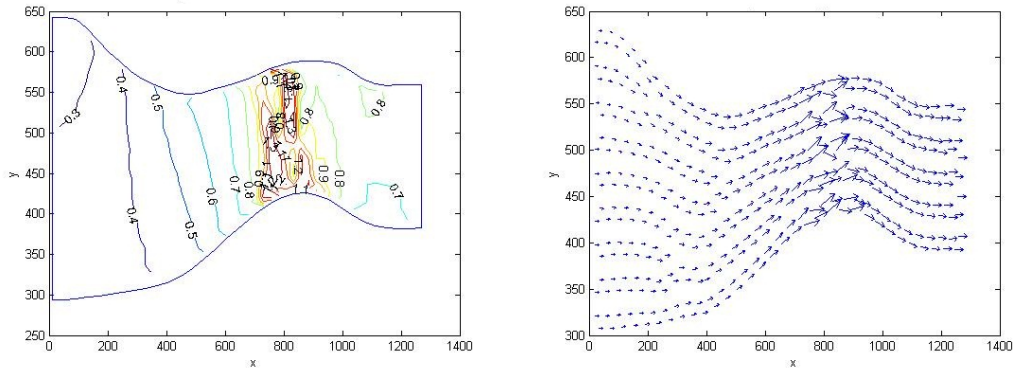
A program viselkedését ismét egy konkrét példán fogom szemléltetni. A futtatást 50 mm felbontású rácshálón végeztem a következő bemenő adatok mellett: a Dirichlet-feltételt ismét homogénnek vettem, \tilde{v}_∞ értékét pedig általam választott értékeken futtatam. A csillapított Newton-módszer iterációs számát most 40-nek választottam, az u_0 kezdő vektor pedig ismét a csupa nulla vektor volt. A következő ábrák az ezen feltételek mellett kapott lokális Mach-szám szintvonalakat és az elemenkénti sebességvektorokat mutatják, amelyeken jól nyomon követhető, hogyan fajul el a megoldás, mialatt egyes pontokban elvész a lokális elliptikusság.



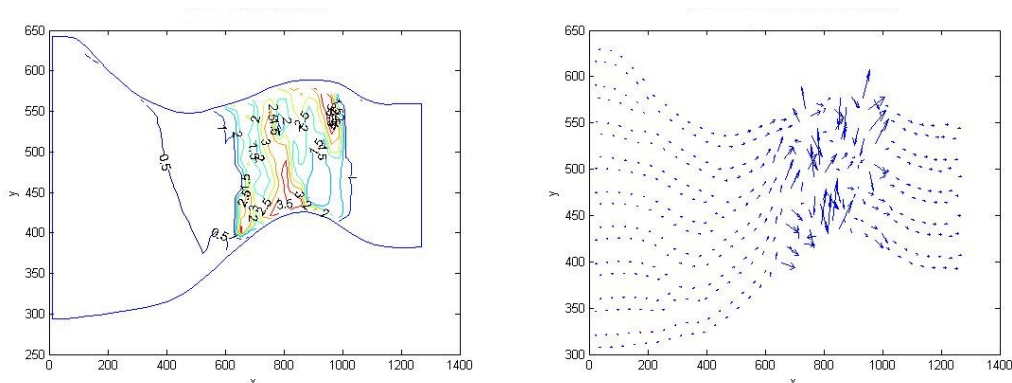
5.5. ábra. $\tilde{v}_{\infty,1} = 0.89$



5.6. ábra. $\tilde{v}_{\infty,2} = 0.895$

5.7. ábra. $\tilde{v}_{\infty,3} = 0.8955$ 5.8. ábra. $\tilde{v}_{\infty,4} = 0.895500010025$ 5.9. ábra. $\tilde{v}_{\infty,5} = 0.89550001005$

Érdekes megvizsgálni, hogy az $\widehat{M} = 1$ zónák kialakulásával mennyire nehezedik a csillapított Newton-módszer, azaz mennyivel növekedik a futásidő a \tilde{v}_∞ érték növeléséből adódóan. Erre a konkrét példára, a \tilde{v}_∞ paraméter előző öt értéke esetén az 5.2. táblázat tartalmazza a csillapított Newton-iteráció műveleti idejét.

5.10. ábra. $\tilde{v}_{\infty,6} = 0.8955000100505$

5.2. táblázat. A csillapított Newton-iteráció futásideje

	$\tilde{v}_{\infty,1}$	$\tilde{v}_{\infty,2}$	$\tilde{v}_{\infty,3}$	$\tilde{v}_{\infty,4}$	$\tilde{v}_{\infty,5}$	$\tilde{v}_{\infty,6}$
idő (sec)	4.6630	31.9780	34.1410	40.7430	46.8600	51.2010

A kapott értékek azzal magyarázhatóak, hogy amíg a \tilde{v}_∞ paraméter első három ilyenforma megválasztása esetén nincs szükség az aktuális iterációs lépésbeli közelítés javítására a (4.5) feltételnek megfelelően, addig a negyedik, ötödik és hatodik érték már kritikusnak mondható, a Newton-módszer nehezedni kezd, a közelítéseket javítani kell. Azt tapasztaltam, hogy $\tilde{v}_{\infty,6}$ értéktől felfelé már 4-8 javítás is előfordul egyes iterációs lépésekben. A reziduális hibák segítségével - amelyeket a szám adatok mennyisége miatt most nem szemléltetünk - is jól követhető a megoldás elfajulása, amit a \tilde{v}_∞ paraméter értékének növelésével idézünk elő. Míg az $\tilde{v}_{\infty,1}$ paraméterérték esetén már 5 iterációs lépés alatt elérjük a lehető legjobb közelítést, addig a többi értékre még a 40. iterációs lépésben sem megyünk 10^{-9} nagyságrendű hibaérték alá.

Ez azonban csak egy kiragadott példa, amely a szubszonikus és transzszonikus áramlás közötti vékony határréteg átlépése esetében szemlélteti a vizsgált egyenlet viselkedését. Vizsgálódásaim során végeztem többszörös futtatásokat 70, 50, és 20 mm felbontású rácshálókra is, amelyeket ciklus formájában valósítottam meg. A \tilde{v}_∞ paraméter értékét egy előre beállított 0.88 - 0.99 intervallumon növeltem 10^{-3} lépésközzel, a ciklus magjába pedig maga az alkalmazott módszereket ötvöző program került. Az 5.3. és 5.4. táblázatok tartalmazzák az így mért futásidőket a \tilde{v}_∞ paraméter különböző értékei mellett, eltérő felbontású rácshálókon.

5.3. táblázat. A program futásideje különböző finomságú rácshálókra I.

Futásidő (sec)						
\tilde{v}_∞	0.88	$+10^{-2}$	$+2 \cdot 10^{-2}$	$+3 \cdot 10^{-2}$	$+4 \cdot 10^{-2}$	$+5 \cdot 10^{-2}$
70 mm	4.3252	4.1065	11.9466	8.1517	12.5111	10.8157
50 mm	7.0372	7.1392	23.1816	19.5119	23.4790	25.0127
20 mm	42.0000	44.6000	227.000	218.3000	232.7000	328.3000

5.4. táblázat. A program futásideje különböző finomságú rácshálókra II.

Futásidő (sec)						
\tilde{v}_∞	$+6 \cdot 10^{-2}$	$+7 \cdot 10^{-2}$	$+8 \cdot 10^{-2}$	$+9 \cdot 10^{-2}$	$+10 \cdot 10^{-2}$	$+11 \cdot 10^{-2}$
70 mm	12.4902	12.2949	11.0961	12.1213	13.1575	12.4423
50 mm	25.0462	23.4703	229.2840	23.2219	30.6418	26.5400
20 mm	237.7000	251.2000	238.700	866.9000	1890.9000	1880.1000

Az eredmények alapján kijelenthető, hogy a program, és így maga a numerikus megoldás is nagy fokú érzékenységet mutat a Neumen-peremfeltételben megjelenő \tilde{v}_∞ paraméter értékére nézve, amellyel az áramlási sebesség jellegét tudjuk befolyásolni. Szubszonikus sebességek esetén az alkalmazott iterációs módszer hatékonynak mondható, míg a transzonikus sebességtartományba átlépve fokozatosan lelassul, amint az egyre erősebben örvénylő megoldást próbálja közelíteni.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani két témavezetőmnek: Karátson Jánosnak, akinek hasznos tanácsai és meglátásai végig útmutatást jelentettek számomra az elvégzett munka során, valamint Horváth Tamásnak, aki a számítógépes megvalósítást illető problémákban nyújtott nagy segítséget, továbbá mindig szakított rám időt és bármilyen kérdésben számíthattam rá.

Köszönettel tartozom a győri Széchenyi István Egyetemnek is, különösképpen Morauszki Tamásnak és Mándli Péternek, mivel a felhasznált HyperMesh szoftver a velük való együttműködésünknek köszönhetően állt rendelkezésemre.

Külön köszönet illeti Gausz Tamást, a BME Repülőgépek és Hajók Tanszékének oktatóját, aki a fizikai háttér jobb megértésében volt segítségemre.

Végül, de nem utolsó sorban hálával tartozom családomnak a sok türelemért és támogatásért.

Irodalomjegyzék

- [1] Axelsson, O., Maubach, J.: Updating and assembly of the Hessian matrix in FEM, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71**, pp. 41-67, 1988.
- [2] Faragó, I., Karátson, J.: Numerical Solution of Nonlinear Elliptic Problems Via Preconditioning Operators, *Nova Science Publishers, Inc., Advances in Computation: Theory and Practice*, Volume 11, 1986.
- [3] Horváth Tamás: Végeselem-módszerek alapjai, *ELTE, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék, Egyetemi jegyzet*, 2011.
- [4] Karátson János: Numerikus funkcionálanalízis, *ELTE, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék, Egyetemi jegyzet*, 2010.
- [5] Koren, B.: Euler flow solutions for a transonic wind tunnel section, *Center for Mathematics and Computer Sciences*, Amsterdam, CWI Report NM-R8601, 1986.
- [6] Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai, *BME, Áramlástan Tanszék, Egyetemi jegyzet*, 1992.
- [7] Nebbeling, C., Bannink, W. J.: A curved test section for research on transonic shock wave - boundary layer interaction, *Delft University of Technology, Department of Aerospace Engineering*, Delft, Report LR-414, 1984.
- [8] Nebbeling, C., Koren, B.: An experimental-computational investigation of transonic shock wave - turbulent boundary layer interaction in a curved test section, *Centre for Mathematics and Computer Sciences, Department of Numerical Mathematics*, Amsterdam, Report NM-R8716, 1987.

-
- [9] Nebbeling, C., Koren, B.: Transonic shock wave - Turbulent boundary layer interaction on a curved surface, *Delft U.P.*, Delft Progr. Rep., **12**, pp. 365-380, 1988.
- [10] Stoyan Gisbert, Takó Galina: Numerikus módszerek 3., *ELTE - TypoTex Kiadó*, 1997.
- [11] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Mach-szám>, Hangsebesség, Hőmérséklet, Adiabatus kitévő, Egyetemes gázállandó
- [12] [http://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian Quadrature](http://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_Quadrature)
- [13] [http://en.wikipedia.org/wiki/Schlieren Photography](http://en.wikipedia.org/wiki/Schlieren_Photography)