A szuperdiffúzió numerikus vizsgálata

Szakdolgozat

írta: Szekeres Béla János

Alkalmazott matematikus MSc szak

Témavezető:

Izsák Ferenc, adjunktus
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**
1.1. A vizsgált feladat, a törtrendű Laplace-operátor 2
1.1.1. Definíció Fourier-transzformációval 2
1.1.2. Definíció törtrendű deriváltakkal 3
1.1.3. Definíció spektrálfelbontással 5
1.2. A visszaverő fal esete 6

2. A szükséges előismeretek összefoglalása **9**
2.1. Törtrendű deriváltak 9
2.2. M-mátrixok 11

3. Numerikus módszerek **12**
3.1. Egy dimenzióban 12
3.1.1. A mátrix-transzformációs módszer 12
3.1.2. Egy implicit Euler séma az első kiterjesztésre 15
3.1.3. Egy Crank-Nicolson típusú séma az első kiterjesztésre 17
3.1.4. Egy implicit-Euler-séma a második kiterjesztésre 20
3.2. Két dimenzióban 22
3.2.1. Implicit-Euler sémák 22
3.3. Numerikus kísérletek 24

Köszönetnyilvánítás **28**

Irodalomjegyzék **28**

Ábrák jegyzéke

1.1. A bal oldali ábrán egy Lévy-repülést végző részecske, a jobb oldalin egy Brown-mozgást végző mozgásának szimulációja látható. 2

1.2. Illusztráció a Fick-törvény elméleti levezetéséhez, [3]. 4

1.3. A szuperdiffúziónál az is megengedett, hogy egy részecske pici Δt idő alatt ne csak 1 doboznyit repülhessen, hanem akár többet is, igaz jóval kisebb valószínűséggel, [3]. 5

1.4. Egy logaritmikusan skálázott grafikon mutatja az R együtthatók nagyságrendjét [3]. q a deriválás rendjét jelöli. 5

1.5. Az x bal oldalán lévő dobozban a részecskék kétféleképpen haladhatnak át x-en: vagy egyből átmennek rajta jobbra, vagy balra indulnak, majd a falról visszapattanva jutnak át. 7

3.1. Numerikus kísérlet az 1. típusú modellfeladatra a fenti példával ($t = 0.5$), . Az adott sémához tartozó hibavektorok normáit látjuk a megfelelő oszlopokban. 24

3.2. Numerikus kísérlet a 2. a mátrix transzformációs módszerre az előbbi példával ($t = 0.5$). Az adott sémához tartozó hibavektorok normáit látjuk a megfelelő oszlopokban. 24

3.3. A bal oldali ábrán az implicit Euler, a jobb oldalin a Crank-Nicolson séma által szolgáltatott numerikus megoldások láthatóak az 1. típusú modellfeladatra (1.9). A szaggatott vonal az analitikus, a folytonos pedig a numerikus megoldás mindkét ábrán. 25

3.4. A bal oldali ábrán egy implicit Euler, a jobb oldalin egy Crank-Nicolson séma által szolgáltatott numerikus megoldások láthatóak, melyeket a mátrix transzformációs módszerrel kaptunk a homogén Neumann-peremfeltételű (3.1)-es feladatra. A szaggatott vonal az analitikus, a folytonos pedig a numerikus megoldás mindkét ábrán. 25

1. fejezet

Bevezetés

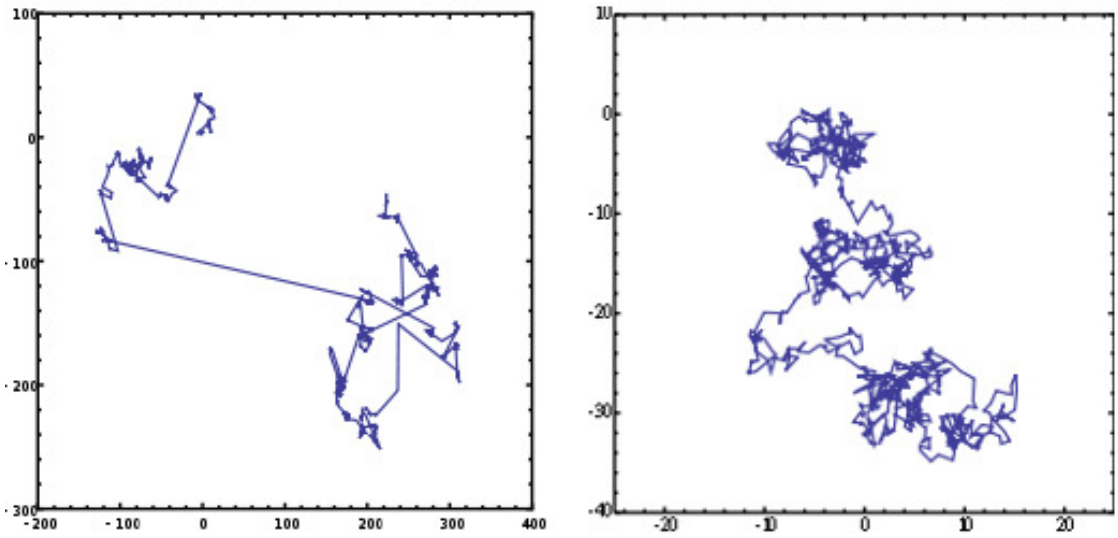
A diffúzió egy anyagáramlási jelenség, ahol az áramló anyag sebessége a sűrűség gradiensével arányos. A diffundáló anyag viselkedését leíró egyenlet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u, \tag{1.1}$$

ahol Δ a Laplace-operátor és D a diffundáló anyagra és a közegre jellemző konstans. 1905-ben Einstein megmutatta, hogyha egy Brown-mozgást végző részecske $p(x,t)$ valószínűséggel található az x helyen a t időpontban, akkor $p(x,t)$-nek ki kell elégítenie a (1.1)-es egyenletet.
A Lévy-repülés a Brown-mozgás általánosítása. Vázlatosan arról van szó, hogy a Brown-mozgás felfogható egy véletlen bolyongásként. Egy részecske mozgását vizsgáljuk két dimenzióban, amely időlépésenként egy egységnyit ugrik a négy irány valamelyikébe egyenlő valószínűségekkel. A Lévy-bolyongás ennek általánosítása abban az értelemben, hogy megengedjük, hogy a részecske több egységnyit is ugorhasson, persze kisebb valószínűséggel. Megfigyelték, hogy bizonyos állatfajok a táplálkozási stratégiájukban a Lévy-repülést követik, sőt az is kiderült, hogy ez bizonyos körülmények között optimális [13].
Megmutatták, hogyha egy ilyen Lévy-repülést végző részecske $p(x,t)$ valószínűséggel található az x helyen a t időpontban, akkor $p(x,t)$-nek ki kell elégítenie a következő egyenletet:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(-\Delta)^{\alpha/2} p, \quad \alpha < 0 \leq 2, \tag{1.2}$$

ahol $(-\Delta)^{\alpha/2}$ a törtrendű Laplace-operátor jelölése. Fontos kérdés az (1.2)-es egyenlet közelítő megoldása, ez a jelen szakdolgozat célja is. A törtrendű Laplace-operátor értelmezésére több lehetőségünk is van, ezeket az 1. fejezetben tekintjük át. Az eddigi munkák a homogén Dirichlet-peremfeltétel esetével foglalkoztak, mi Neumann-peremfeltétel mellett szeretnénk megtenni ugyanezt. A [5] cikk ötletét használjuk ehhez módosításokkal, illetve mutatunk egy ehhez hasonló másik megközelítést is a 1.2. fejezetben. A 2. fejezetben a továbbiakhoz szükséges ismereteket tekintjük át. A 3. fejezetben megmutatjuk néhány klasszikus differencia séma (1.2)-es egyenletre vonatkozó általánosításáról, hogy konvergens, az utolsó részben pedig numerikus kísérletekkel támasztjuk alá a kapott eredményeket.



1.1. ábra. A bal oldali ábrán egy Lévy-repülést végző részecske, a jobb oldalin egy Brown-mozgást végző mozgásának szimulációja látható.

1.1. A vizsgált feladat, a törtrendű Laplace-operátor

A vizsgálandó egyenletünk

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(-\Delta)^{\alpha/2} u, \text{ ahol } 0 < \alpha \leq 2$$

és a törtrendű Laplace-operátort ($(-\Delta)^{\alpha/2}$)-val jelöljük. Ennek értelmezésére több lehetőségünk is van, ezeket tekintjük most át.

1.1.1. Definíció Fourier-transzformációval

Ezt a megközelítést az [1] munka alapján írjuk le.

Az egyszerűség kedvéért tekintsük a legegyszerűbb Wiener-folyamatot. Egy darab részecske Brown-mozgását vizsgáljuk 1 dimenzióban, amikoris a részecske az origóból indul. Jelölje $p(x,t) := p(x,t|x_0 = 0, t_0 = 0)$-t, ez annak a valószínűsége, hogy a részecske az x helyen van a t időpontban. A bevezetőben említettük, hogy $p(x,t)$-nek ki kell elégítenie a diffúziós egyenlet. Tekintsük ennek az x-koordináta szerinti Fourier-transzformáltját, azaz $\frac{\partial \tilde{p}(k,t)}{\partial t} = -k^2 \tilde{p}(k,t)$-t. Ennek a megoldása pedig $\tilde{p}(k,t) = e^{-k^2 t}$. A szuperdiffúzió egyenletét ebből úgy származtatjuk, hogy k kitevőjét megváltoztatjuk, legyen $\mu \in (0,2]$ és $\tilde{p}(k,t) = e^{-|k|^\mu t}$, a differenciálegyenletünk a Fourier-térben pedig úgy módosul, hogy

$$\frac{\partial \tilde{p}(k,t)}{\partial t} = -k^\mu \tilde{p}(k,t).$$

Inverz Fourier-transzformációt alkalmazva arra jutunk, hogy

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -(-\Delta_x)^{\mu/2} p(x,t).$$

Ez $\mu \in (0,1)$ esetén azt jelenti, hogy:

$$(-\Delta_x)^{\mu/2} p(x,t) = C_\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x,t) - p(y,t)}{|x-y|^{1+\mu}} dy, \tag{1.3}$$

ahol

$$C_\mu = \left(\frac{2^{-\mu}\pi^{3/2}}{\Gamma(1+\mu/2)\Gamma(\frac{1+\mu}{2})\sin\frac{\mu\pi}{2}} \right)^{-1},$$

és $\mu \in [1,2]$ esetén:

$$(-\Delta_x)^{\mu/2}p(x,t) = C_\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{x-y}[p(x,t)-p(y,t)]}{|x-y|^{1+\mu}}dy, \tag{1.4}$$

ahol

$$C_\mu = \left(\frac{-2^{1-\mu}\pi^{3/2}}{\Gamma(1+\mu/2)\Gamma(\frac{1+\mu}{2})\sin\frac{\mu\pi}{2}} \right)^{-1}.$$

1.1.1. Definíció. *Legyen $\mu \in (1,2]$; ekkor a $(-\Delta)^{\mu/2}$ operátort az iménti (1.3) és (1.4) formulákkal értelmezzük.*

1.1.2. Definíció törtrendű deriváltakkal

Jelentse az $u(t,x)$ függvény az áramló anyag koncentrációját a t időben és x helyen, $\mathbf{j}$ az anyagáramot, azaz a fluxust. A klasszikus diffúziós egyenlet fizikai elveken alapuló levezetése abból áll, hogy a tömegmegmaradási egyenletbe ($\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$) Fick I. törvényét helyettesítjük ($\mathbf{j} = D grad\, u$), itt D az anyagra jellemző konstans [2]. A szuperdiffúziót leíró egyenletekhez most Fick I. törvényének általánosításán keresztül jutunk el, mégpedig a törtrendű deriváltak segítségével [3], azaz amit kapni fogunk, az a

$$\mathbf{j} = D grad_\alpha u$$

egyenlőség. Egy dimenzióban fogunk vizsgálódni, így a diffúziós egyenlet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -D\frac{\partial^{1+\alpha}u}{\partial|x|^{1+\alpha}}$$

alakot ölti, ahol $0 < \alpha < 1$.
A törtrendű deriváltat itt a következőképpen értelmezzük:

1.1.2. Definíció. *Egy f függvény α-rendű Riesz-deriváltját a következőképpen értelmezzük, ha $\alpha \neq 1$, és $m = \lceil \alpha \rceil$:*

$$\frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial|x|^\alpha} := -\frac{1}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \left({}_{-\infty}^{RL}D_x^\alpha f(x) + {}_x^{RL}D_\infty^\alpha f(x) \right)$$

ahol

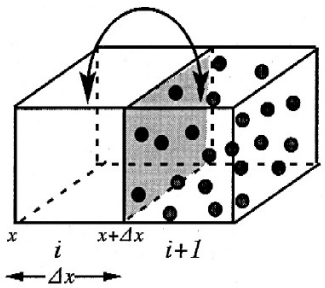
$${}_{-\infty}^{RL}D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int_{-\infty}^{x} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-m+1}}d\xi$$

és

$${}_x^{RL}D_\infty^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\int_{x}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi-x)^{\alpha-m+1}}d\xi.$$

Yang megmutatta [12], hogy az előző részbeli 1.1.1 definíció megegyezik ezzel a definícióval, vagyis $-(-\Delta)^{\alpha/2}u(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial|x|^\alpha}u(x)$, amennyiben u a teljes $\mathbf{R}$-en értelmezett.

A következő gondolatmenet megtalálható a [3] és [4] munkákban, amely a Fick-törvény fizikai elveken alapuló levezetése.



1.2. ábra. Illusztráció a Fick-törvény elméleti levezetéséhez, [3].

A Fick-törvény módosítása. Részecskék áramlását vizsgáljuk egy dimenzióban. Tekintsünk egy végtelen hosszú csövet. Osszuk fel Δx hosszú részekre. A cső keresztmetszete legyen A területű. Az i. dobozban lévő részecskék száma M_i, azaz a koncentráció az i. dobozban $C_i = M_i/\Delta v$, ahol $\Delta v = \Delta x A$, egy doboz térfogata. Tegyük fel, hogy minden részecske egy doboznyit ugorhat előre vagy hátra, mindezt egyenlő valószínűséggel és időegység alatt egységnyi keresztmetszetre vonatkoztatva R várható értékkel, ld. 1.2 ábra. Ekkor az i. és $i+1$. doboz határán átáramló részecskék száma, azaz a fluxus:

$$F_i = \frac{\left(\frac{1}{2}M_i - \frac{1}{2}M_{i+1}\right)R}{A} = \frac{\frac{1}{2}\left(C_i - C_{i+1}\right)\Delta v R}{A} = \frac{1}{2}\left(C_i - C_{i+1}\right)R\Delta x. \tag{1.5}$$

Az F_i, C_i értékeket egy folytonos függvény diszkretizációjának tekintve és C Taylor-sorfejtése után (1.5)-ből kapjuk, hogy

$$F = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\Delta x + o(\Delta x)\right)R\Delta x.$$

Vagyis Fick I. törvénye igaz, ha $1/2\Delta x^2 \to D$ és $1/2o(\Delta x^2)R \to 0$.

Tekintsük az általánosított Fick-törvényt. Ez alapján a bal oldali fluxust (vagyis a balról áthaladó részecskék számát) értelmezzük úgy, hogy

$$D_l^q f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Gamma(-q)}\Delta x^{-q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)}f(x-k\Delta x) = \tag{1.6}$$

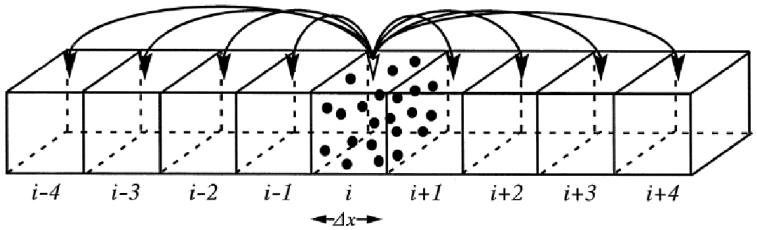
$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty} w_k f(x-k\Delta x)}{\Delta x^q}, \quad \text{ahol } q \le 1.$$

Hasonlóan értelmezhetjük a jobb oldali fluxust is, azaz

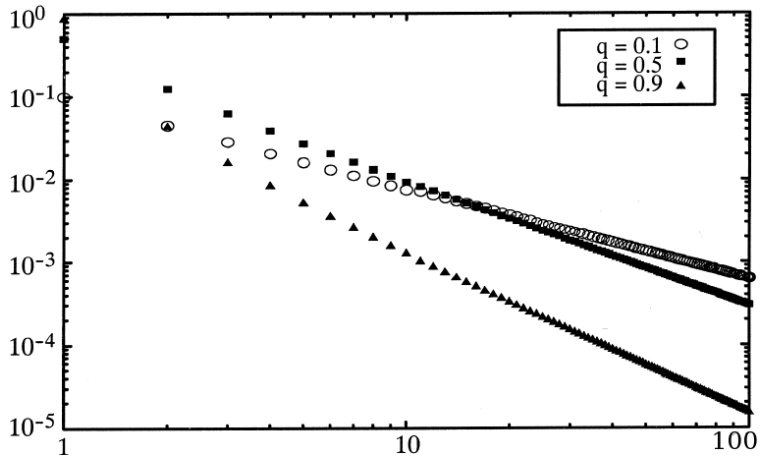
$$D_r^q f(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty} w_k f(x+k\Delta x)}{\Delta x^q}, \quad \text{ahol } q \le 1.$$

Ez a képlet úgy interpretálható, hogy a részecskéink nemcsak 1 dobozt ugorhatnak előre-hátra, hanem többet is, a hosszabb ugrásoknak viszont jóval kisebb a valószínűsége, ld. 1.3 ábra.

Hogy mennyivel, azt az 1.4 ábra is mutatja: egy száz cellányi távolságra lévő részecske már csak 10^{-3} súllyal befolyásolja az x-beli fluxust egy $0,1$-rendű deriváltnál. Belátható, hogy (1.6) az ún. Riemann-Liouville-deriválthoz konvergál, amivel a 2. fejezetben foglalkozunk majd részletesebben.



1.3. ábra. A szuperdiffúziónál az is megengedett, hogy egy részecske pici Δt idő alatt ne csak 1 doboznyit repülhessen, hanem akár többet is, igaz jóval kisebb valószínűséggel, [3].



1.4. ábra. Egy logaritmikusan skálázott grafikon mutatja az R együtthatók nagyságrendjét [3]. q a deriválás rendjét jelöli.

1.1.3. Definíció spektrálfelbontással

Vázlatosan arról van szó, hogyha ismerjük a $(-\Delta)$ sajátfüggvényeit $((\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}})$ egy korlátos Ω tartományon, melyek teljes ortonormált rendszert alkotnak az $L_2(\Omega)$ skalárszorzatra nézve, akkor legyen

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f := \sum_j \lambda_j^{\alpha/2} c_j \varphi_j.$$

Itt λ_j^2 a φ_j sajátfüggvényhez tartozó sajátérték és $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ alakban felírható. Ezt később precízen is megfogalmazzuk.

1.2. A visszaverő fal esete

A mi feladatunk az, hogy a szuperdiffúziót olyan esetben modellezzük, amikor tökéletesen visszaverő falunk van, azaz homogén Neumann-peremfeltétel párosul a differenciálegyenletünkhöz. A spektrálfelbontás módszeréhez ezt itt külön nem vizsgáljuk meg, látni fogjuk, hogy ott jóval egyszerűbb a helyzet, mint mikor törtrendű deriváltakkal dolgozunk. A vizsgálandó differenciálegyenletünk tehát

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}, \text{ ha } 0 < x < 1 \text{ és } 1 < \alpha \leq 2 \\ \frac{\partial f(t,0)}{\partial n} = \frac{\partial f(t,1)}{\partial n} = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

ahol $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$-t a 2. fejezetben 2.1.4-ben definiáljuk pontosan.

1. modell. Az [5] munkában megmutatták, hogy ekkor módosításokat kell végrehajtanunk a törtrendű deriváltnál. Modellükben először is feltették, hogy lehetnek ugyan nagyon hosszú repülések, de maximálisan csak egy tartománynyi hosszúságúak, ezt a fizikai levezetésnél látottak indokolják. Ha adott egy $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény és $x \in (0,1)$, akkor terjesszük ki az egész $\mathbb{R}$-re úgy, hogy

$$f^l(\xi) = \begin{cases} f(\xi), & \text{ha } \xi \in [0,x] \\ f(-\xi), & \text{ha } \xi \in [x-1,0) \\ 0, & \text{ha } \xi < x-1 \end{cases}$$

és

$$f^r(\xi) = \begin{cases} f(\xi), & \text{ha } \xi \in [x,1] \\ f(2-\xi), & \text{ha } \xi \in (1,1+x] \\ 0, & \text{ha } \xi > x+1. \end{cases}$$

A perempontokban hasonlóan, azzal a különbséggel, hogy amennyiben $x = 0$, akkor $f^l(\xi) = 0$, illetve $x = 1$ esetén $f^r(\xi) = 0$ $\forall\xi$-re.

Legyen továbbá

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial |x|^\alpha} := -\frac{1}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \left({}_{x-1}^{RL}D_x^\alpha f^l(x) + {}_x^{RL}D_{x+1}^\alpha f^r(x) \right), \tag{1.8}$$

ahol a ${}_{x-1}^{RL}D_x^\alpha$ és a ${}_x^{RL}D_{x+1}^\alpha$ operátorokat a 2. fejezetben definiáljuk pontosan.

Az eredeti definícióval is felírhatjuk ezt, mégpedig legyen

$$f_{\text{mod}}(\xi) = f(2-\xi)\Pi(\xi - 3/2) + f(\xi)\Pi(\xi - 1/2) + f(-\xi)\Pi(\xi + 1/2),$$

ahol $\Pi(x) = 1$, amennyiben $|x| \leq 1$, egyébként pedig 0. Ekkor (1.9) megegyezik a következővel

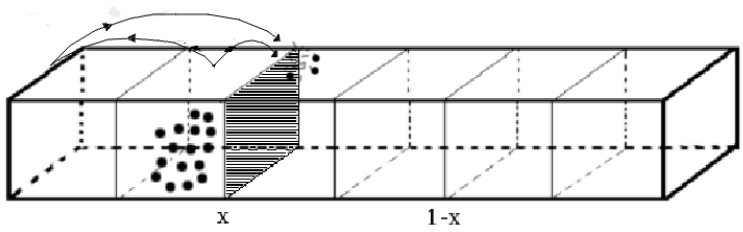
$$\frac{1}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \left({}_{-\infty}^{RL}D_x^\alpha f_{\text{mod}}(x) + {}_x^{RL}D_\infty^\alpha f_{\text{mod}}(x) \right).$$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} := -\frac{1}{2\cos\frac{(\alpha+1)\pi}{2}} \left({}_{-x}D_x^{1+\alpha} f^{l,x}(t,x) + {}_x D_{2-x}^{1+\alpha} f^{r,x}(t,x) \right), \quad \text{ahol } 0 < \alpha < 1. \tag{1.9}$$

Javaslunk egy másik kiterjesztést is, ugyanis látni fogjuk mindjárt, hogy a fizikai interpretációval gondok vannak.

Itt ugyan nem magát Fick I. törvényét általánosítottuk, de így is eljuthatunk ezekhez a képletekhez. Legyen az általánosított Fick-törvényünk a következő formula (ezt írjuk a tömegmegmaradási egyenletbe):

$$\frac{\partial^\alpha j}{\partial |x|^\alpha} := -\frac{1}{2\cos\frac{(\alpha+1)\pi}{2}} \left({}_{x-1}^{RL}D_x^\alpha f^l(x) + {}_x^{RL}D_{x+1}^\alpha f^r(x) \right), \quad \text{ahol } 0 < \alpha < 1.$$



1.5. ábra. Az x bal oldalán lévő dobozban a részecskék kétféleképpen haladhatnak át x-en: vagy egyből átmennek rajta jobbra, vagy balra indulnak, majd a falról visszapattanva jutnak át.

1.2.1. Megjegyzés. *A tömegmegmaradási egyenletbe helyettesítve ezt, valóban az (1.7) összefüggést kapjuk.*

A hagyományosnál gyorsabb áramlás esetünkben azt jelenti, hogy a deriválás rendje kisebb 1-nél a Fick-törvényben, mint azt láttuk korábban. Mit is jelent a fenti kiterjesztés? Szemléletesen arról van szó, hogy amennyiben x-ben vizsgáljuk a fluxust, most speciálisan a bal oldali fluxust, azaz a balról áthaladó részecskék számát, akkor az x bal oldalán található részecskék kétféleképpen okozhatnak balfluxust x-ben, mégpedig vagy úgy, hogy eleve x felé, tehát jobbra repülnek, vagy egyszer visszapattannak a falról és eljutnak x-ig. Mivel a fenti kiterjesztésben legfeljebb 1 hosszú repüléseket engedélyeztünk (ez valamennyire jogos, hiszen láttuk hogy egy nagyon távoli cellában lévő részecske kicsi súllyal okoz fluxust x-ben), ezért ha $x < 1/2$, akkor az x és $1 - x$ közti részecskék is hozzájárulnak az x-beli bal fluxushoz. De ezek a részecskék x jobb oldalán vannak, vagyis először jobbról kell áthaladniuk x-en (ha figyelmen kívül hagyjuk az alagúteffektust, márpedig itt egy klasszikus gondolatmenetről van szó), összességében tehát nem járul hozzá az x-beli fluxushoz. Másrészt pedig mivel jobb oldali fluxust is okoz ebben az esetben, ezért a jobb fluxushoz ezt hozzá kéne vennünk ugyanezzel a súllyal, viszont a jobb oldali fluxus számításánál ezt jóval nagyobb súllyal vesszük figyelembe. (1.5 ábra) Ennek kiküszöbölésére javasoljuk a következő modellt, amelynek a lényege, hogy megengedünk legfeljebb 2 hosszú repüléseket és egy visszapattanást a falról, viszont az előző problémát kiküszöböljük.

1.2.2. Megjegyzés. *Miért a különleges bánásmód a perempontokkal, azaz miért pont így terjesztjük ki a függvényünket ott? Tekintsük például a bal oldali perempontot,* 0*-t. Visszaverő falunk van, balról nem jöhet be részecske, vagyis a bal fluxus mindenképpen* 0*, a jobb oldali fluxusra viszont gondolhatunk úgy, mint hogy hány részecske fog visszapattanni a falról. Ezért legyen* $f^l := 0$*,* f^r *pedig a fentebb definiált kiterjesztés.*

Egy másik tipusú kiterjesztés. Ismét adott egy $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény és $x \in (0, 1)$, akkor terjesszük ki az egész $\mathbb{R}$-re úgy, hogy

$$f^l(\xi) = \begin{cases} f(\xi), & \text{ha } \xi \in [0, x] \\ f(-\xi), & \text{ha } \xi \in [-x, 0) \\ 0, & \text{ha } \xi < -x \end{cases}$$

és

$$f^r(\xi) = \begin{cases} f(\xi), & \text{ha } \xi \in [x,1] \\ f(2-\xi), & \text{ha } \xi \in (1, 2-x] \\ 0, & \text{ha } \xi > 2-x. \end{cases}$$

A perempontokban hasonlóan, azzal a különbséggel, hogy amennyiben $x = 0$, akkor $f^l(\xi) = 0$, illetve $x = 1$ esetén $f^r(\xi) = 0$ $\forall\xi$-re.
A módosított I. Fick-törvényünk tehát:

$$j = -\frac{1}{2\cos\frac{(\alpha+1)\pi}{2}} \left({}_{-x}D_x^{\alpha} f^l(x) +_x D_{2-x}^{\alpha} f^r(x) \right), \quad \text{ahol } 0 < \alpha < 1.$$

Ekkor a vizsgálandó differenciálegyenletünk:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} := -\frac{1}{2\cos\frac{(\alpha+1)\pi}{2}} \left({}_{-x}D_x^{1+\alpha} f^{l,x}(t,x) +_x D_{2-x}^{1+\alpha} f^{r,x}(t,x) \right), \quad \text{ahol } 0 < \alpha < 1. \tag{1.10}$$

2. fejezet

A szükséges előismeretek összefoglalása

Ebben a részben a szükséges definíciókat, felhasznált elméletet tekintjük át. Tekintsük egy korlátos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány ekvidisztáns Ω_h felosztását, ahol $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Jelölje f megszorítását Ω_h-ra f_h!

2.0.3. Definíció. *Legyen* $p \in \mathbb{R}^+$

$$l_{h,p} := \left\{ f_h : \Omega_h \to \mathbb{R} : \sum_{x \in \Omega_h} |f(x)|^p \text{ véges} \right\}.$$

Legyen ekkor

$$\|f_h\|_{h,p} := |h_1 h_2 \ldots h_n| \left(\sum_{x \in \Omega_h} |f(x)|^p \right)^{1/p}.$$

Ha $p = \infty$*, akkor legyen*

$$l_{h,\infty} := \left\{ f_h : \Omega_h \to \mathbb{R} : \sup_{x \in \Omega_h} |f(x)| \text{ véges} \right\},$$

továbbá

$$\|f_h\|_{h,\infty} := |h_1 h_2 \ldots h_n| \left(\sup_{x \in \Omega_h} |f(x)| \right)^{1/p}.$$

2.1. Törtrendű deriváltak

A törtrendű deriváltak története egyidős a klasszikus kalkulussal, 1695-ben L'Hospital tette fel a kérdést Leibniznek, hogy hogyan is kellene értelmezni $d^{1/2}y/dx^{1/2}$-et.
Többféle értelmezés is létezik, mi a Riemann-Liouville, a Riesz és a Grünwald-Letnikov féle definíciókat tekintjük át röviden [6] alapján.

A Riemann-Liouville-derivált. Az ismételt integrálást vesszük alapul, megmutatható hogy:

$${}_aI_x^n f(x) := \int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 \ldots \int_a^{u_{n-1}} f(u_n)\, du_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-u)^{n-1} f(u)\, du.$$

2.1.1. Definíció.

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} f(u)\, du, $$

valamint

$$ {}_xI_b^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (u-x)^{\alpha-1} f(u)\, du $$

A Riemann-féle definíció ezekután a törtrendű deriváltra:

2.1.2. Definíció. *Legyen $\alpha > 0$, n pedig olyan egész, hogy $n-1 \le \alpha < n$, valamint $f \in L^1_{loc}(a,\infty)$ és $g \in L^1_{loc}(-\infty, b)$ olyanok, hogy az alábbi kifejezések jobb oldala értelmes, ekkor legyen:*

$$ {}_a^{RL}D_x^\alpha f(x) := \frac{d^n}{dx^n}\, {}_aI_x^{n-\alpha} f(x), \text{ és} $$

$$ {}_x^{RL}D_b^\alpha g(x) := (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\, {}_xI_b^{n-\alpha} g(x). $$

2.1.3. Megjegyzés. *Ugyanígy definiáljuk a Liouville-deriváltat is azzal a különbséggel, hogy $a = -\infty$, illetve $b = \infty$.*

A Riesz-féle derivált. Az előbbiekben felírt összefüggések segítségével közvetlenül tudjuk definiálni a Riesz-féle deriváltat:

2.1.4. Definíció. *A Riesz-féle α-rendű deriváltat értelmezzük a következőképpen, $\alpha > 0$:*

$$ \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial |x|^\alpha} := -\frac{1}{2\cos \pi\alpha/2} \left({}_{-\infty}^{RL}D_x^\alpha f(x) + {}_x^{RL} D_\infty^\alpha f(x) \right). $$

A Grünwald-Letnikov-derivált. Tudjuk, hogy a hagyományos derivált definíciója

$$ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. $$

A második deriváltra igaz, hogy

$$ f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}. $$

Általában is elmondható, hogy

$$ f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{0\le m\le n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x+(n-m)h)}{h^n}. $$

Ahhoz, hogy ezt általánosítsuk, jelölje

$$ g_k := \binom{\alpha}{k} = \frac{(-1)^k \Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}. \tag{2.1} $$

Megmutatható, hogy teljesül a következő:

2.1.5. Lemma. $1 < \alpha \le 2$ *esetén*

$$ \sum_{k=0}^{\infty} g_k = 0. $$

továbbá $g_1 = -\alpha$ kivételével minden j-re $g_j \ge 0$.

2.1.6. Definíció. *A bal oldali α-rendű Grünwald-Letnikov-derivált*

$$\frac{\partial^{\alpha}_{l,GL} f(x)}{\partial x^{\alpha}} := \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{M\to\infty} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{M} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(x-kh).$$

hasonlóan a jobb oldali

$$\frac{\partial^{\alpha}_{r,GL} f(x)}{\partial x^{\alpha}} := \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{M\to\infty} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{M} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(x+kh).$$

A Grünwald-Letnikov operátor a Riemann-Liouville-deriváltat approximálja, méghozzá első rendben, kimondunk egy ugyanilyen állítást az eltolt-Grünwald-Letnikov-formulára is, mely megtalálható [11]-ben.

2.1.7. Állítás. *(Az eltolt Grünwald-Letnikov-formula konvergenciája) Tegyük fel, hogy $f \in L_1(\mathbb{R})$, továbbá ${}^{RL}_{-\infty}D^{\alpha}_{x} f$ és a Fourier-transzformáltja is $L_1(\mathbb{R})$-beli. Legyen*

$${}^{GL}_{-\infty}D^{\alpha,p}_{x,h} f(x) := \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(x-(k-p)h),$$

ahol p nemnegatív egész. Ekkor

$${}^{GL}_{-\infty}D^{\alpha,p}_{x,h} f(x) = {}^{RL}_{-\infty} D^{\alpha}_{x} f(x) + O(h),$$

ahol a konvergencia egyenletes, amidőn $h \to 0$.

A továbbiakban a Grünwald-Letnikov-formula alatt az eltolt Grünwald-Letnikov formulát fogjuk érteni, mégpedig $p = 1$ esetén.

2.1.8. Megjegyzés. *A jobb oldali Grünwald-Letnikov-deriváltra és a jobb oldali Riemann-Liouville-deriváltra ennek mintájára hasonló állítás fogalmazható meg.*

2.2. M-mátrixok

2.2.1. Definíció. *Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot M-mátrixnak hívjuk akkor, ha igaz rá*

(a) $a_{ij} \le 0$, ha $i \ne j$

(b) $\exists g > 0$, hogy $Ag > 0$, azaz komponensenként pozitív.

2.2.2. Állítás. *(M-mátrix inverzének becslése) Legyen A M-mátrix, g olyan, mint a 2.2.1 definíció (b) feltételében. Ekkor*

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \le \frac{\|g\|_{\infty}}{\min_i (Ag)_i}.$$

3. fejezet

Numerikus módszerek

3.1. Egy dimenzióban

A következő problémára adunk többféle numerikus közelítő módszert:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mu \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2} \varphi, \text{ ha } 0 < x < 1 \\ \varphi(x,0) = F(x), \text{ ha } 0 < x < 1 \\ \varphi'(0,t) = f(t) \text{ és } \varphi'(1,t) = g(t), \text{ ahol } 0 < t, \end{cases} \tag{3.1}$$

ahol $f, g \in L_2(0,1)$ adottak.

3.1.1. A mátrix-transzformációs módszer

$(-\Delta)^{\alpha/2}$-t értelmezhetjük a spektráldekompozíció módszerével is ([9] alapján). A definíciók és segédállítások kimondása után levezetjük az inhomogén Neumann-peremfeltételű (3.1)-es feladat analitikus megoldását.

3.1.1. Definíció. *Legyen $\{\varphi_n\} \subset L_2(D)$ egy teljes ortonormált sajátfüggvényekből álló rendszere a Laplace-operátornak $(-\Delta)$ egy korlátos D tartományon λ_n^2 sajátértékekkel. Jelölje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az $L_2(D)$-beli skalárszorzatot. Ekkor a törtrendű Laplace-operátor legyen:*

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = \begin{cases} (-\Delta)^m f, & \text{ha } \alpha = 2m,\ m = 0,1,2... \\ (-\Delta)^{\alpha/2-m}(-\Delta)^m f, & \text{ha } m-1 < \alpha/2 < m,\ m = 0,1,2... \\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, & \text{ha } \alpha < 0 \end{cases}$$

3.1.2. Megjegyzés. *A $T = (-\Delta)^{\alpha/2}$ operátor lineáris és önadjungált. Igaz továbbá az is, hogy ha $f \in \mathcal{F}_\gamma$, ahol $\gamma = max(0, \alpha, \alpha+\beta)$, akkor $(-\Delta)^{\alpha/2}(-\Delta)^{\beta/2} f = (-\Delta)^{\beta/2}(-\Delta)^{\alpha/2} f$.*

Ez még mindig csak a homogén eset volt, mi a helyzet inhomogén peremfeltételek esetén? Erre a problémára a következő Green-formula ad megoldást egy dimenzióban (magasabb dimenzióra is kiterjeszthető), melyet a [9]-es munkában találhatunk.

3.1.3. Állítás. *Ha $\varphi_n(x)$ a $(-\Delta) = \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)$ operátor egy sajátfüggvénye λ_n^2 sajátértékkel, ahol $a \le x \le b$, akkor*

$$\langle \varphi_n, (-\Delta)^{\alpha/2} f \rangle - \langle (-\Delta)^{\alpha/2} \varphi_n, f \rangle = \lambda_n^{\alpha-2} [f(b)\varphi_n'(b) - f(a)\varphi_n'(a) - f'(b)\varphi_n(b) + f'(a)\varphi_n(a)].$$

Analitikus megoldás.

3.1.4. Állítás. *A (3.1) feladat analitikus megoldása:*

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sqrt{2} e^{-k\lambda_n^\alpha t} \cos(n\pi x) - \frac{x^2}{2} g(t) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) f(t)$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{\lambda_n^2} \int_0^t e^{-\mu\lambda_n^\alpha (t-\tau)} \left[G(\tau)(-1)^n - h(\tau)\right] d\tau,$$

amennyiben $G(t) = \mathcal{L}^{-1}(s\overline{g}(s))(t)$, *és* $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(s\overline{f}(s))(t)$.

Bizonyítás: Laplace-transzformációt alkalmazva (3.1)-re a következő egyenletre jutunk ([9] alapján):

$$s\overline{\varphi}(x,s) - F(x) = -\mu \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2} \overline{\varphi}(x,s) \tag{3.2}$$

A peremfeltételek pedig:

$$\overline{\varphi}'(0,s) = \overline{f(s)} \text{ és } \overline{\varphi}'(1,s) = \overline{g(s)}$$

Szorozzuk skalárisan (az L_2-beli skalárszorzatot értjük ezalatt) φ_n-nel a (3.2)-es egyenletet és használjuk fel a 3.1.3 állítást. Ekkor minden $s > 0$ esetén:

$$s\langle \varphi_n, \overline{\varphi}(x,s)\rangle - \langle \varphi_n, F\rangle = -\mu\langle \varphi_n, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2} \overline{\varphi}\rangle =$$

$$= -\mu\langle \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2} \varphi_n, \overline{\varphi}\rangle - \mu\lambda_n^{\alpha-2}[\overline{\varphi}(1,s)\varphi_n'(1) - \overline{\varphi}(0,s)\varphi_n'(0) - \overline{\varphi}'(1,s)\varphi_n(1) + \overline{\varphi}'(0,s)\varphi_n(0)] =$$

$$-\mu\langle \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2} \varphi_n, \overline{\varphi}\rangle - \mu\lambda_n^{\alpha-2}[\overline{f}(s)\varphi_n(0) - \overline{g}(s)\varphi_n(0)].$$

A $C_n(s) := \langle \varphi_n, \overline{\varphi}(x,s)\rangle$ és $F_n := \langle \varphi_n, F\rangle$ jelöléseket bevezetve és az előbbi egyenlőségből $C_n(s)$-et kifejezve:

$$C_n(s) = \frac{F_n}{\mu\lambda_n^\alpha + s} - \frac{\mu\lambda_n^{\alpha-2}}{\mu\lambda_n^\alpha + s}\left[\overline{f}(s)\varphi_n(0) - \overline{g}(s)\varphi_n(1)\right]. \tag{3.3}$$

A $(0,1)$ intervallumon a $-\Delta$ operátor sajátfüggvényei homogén Neumann-peremfeltétel esetén a $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\cos(k\pi x)$ függvények ($k \in \mathbb{Z}^+$), a hozzájuk tartozó sajátértékek pedig $\lambda_n^2 = k^2\pi^2$. (3.3)-et kicsit alakítva ennek szellemében

$$C_n(s) = \frac{F_n}{\mu\lambda_n^\alpha + s} + \frac{\sqrt{2}\overline{g}(s)(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} + \frac{\sqrt{2}\overline{f}(s)}{\lambda_n^2} + \frac{s\sqrt{2}}{\lambda_n^2(\mu\lambda_n^\alpha + s)}\left[\overline{g}(s)(-1)^n - \overline{f}(s)\right],$$

majd a $\overline{\varphi}(x,s)$ függvényt a cos-rendszerünk szerint sorba fejtve

$$\overline{\varphi}(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(s)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n\sqrt{2}}{\mu\lambda_n^\alpha + s}\cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\overline{g}(s)(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2}\cos(n\pi x) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\overline{f}(s)}{\lambda_n^2}\cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2s}{\lambda_n^2(\mu\lambda_n^\alpha + s)}\left[\overline{g}(s)(-1)^n - \overline{f}(s)\right]\cos(n\pi x),$$

végül a Laplace-transzformáció inverzét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sqrt{2} e^{-k\lambda_n^\alpha t} \cos(n\pi x) - \frac{x^2}{2} g(t) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) f(t) +$$
$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{\lambda_n^2} \int_0^t e^{-\mu\lambda_n^\alpha (t-\tau)} \left[G(\tau)(-1)^n - h(\tau)\right] d\tau,$$

ahol használtuk a $G(t) := \mathcal{L}^{-1}(s\overline{g}(s))(t)$ és $h(t) := \mathcal{L}^{-1}(s\overline{f}(s))(t)$ jelöléseket. □

A numerikus módszer. Ismét a [9] dolgozat gondolatmenetét használjuk. A (3.1)-es problémát vizsgáljuk, azaz a

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2} \varphi, \text{ ha } 0 < x < 1 \\ \varphi(x,0) = F(x), \text{ ha } 0 < x < 1 \\ \varphi'(0,t) = f(t) \text{ és } \varphi'(1,t) = g(t), \text{ ahol } 0 < t \end{cases} \tag{3.4}$$

vegyes feladatot.

Először a standard diffúzió esetét vizsgáljuk, azaz ha $\alpha = 2$. Legyen $h = 1/N$, $x_i = ih$, $\varphi(x_i)$ közelítése pedig legyen φ_i, a numerikus megoldás vektora pedig φ. Ezekkel a jelölésekkel szemidiszkretizálva a feladatot a következő lineáris egyenletrendszer adódik egyszerű differenciasémákat használva.

Ha $1 \le i \le N-1$, akkor

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\mu}{h^2}(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}). \tag{3.5}$$

De mi a helyzet a peremnél? Ekkor elsőrendű közelítést adunk a peremfeltételekre, mégpedig ha $i = 0$, akkor $\frac{\varphi_0 - \varphi_{-1}}{h} = f(t)$ és ha $i = N$, akkor $\frac{\varphi_{N+1} - \varphi_N}{h} = g(t)$ lenne.

Azaz $\varphi_{N+1} = hg(t) + \varphi_N$ és $\varphi_{-1} = \varphi_0 - hf(t)$. Belyettesítve ezt (3.5)-be kapjuk, hogy

$$\frac{d\varphi_N}{dt} = \frac{\mu}{h^2}(\varphi_{N-1} - \varphi_N) + \frac{\mu}{h} g(t) \tag{3.6}$$

és

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{\mu}{h^2}(\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{\mu}{h} f(t). \tag{3.7}$$

Mátrixos alakba írva az így kapott rendszert (3.5)-(3.7)-ból

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\mu A\varphi - \frac{\mu}{h} f(t) e_0 + \frac{\mu}{h} g(t) e_N,$$

ahol az A $(N+1) \times (N+1)$-es mátrix

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \dots & \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Ez volt a standard diffúzióra vonatkozó szemidiszkretizáció. Az $\alpha \neq 2$ esethez pedig az A mátrix spektrálfelbontását használva $A = P\Lambda P^T$ a $\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2}$ operátor közelítésére adódik a következő egyenletrendszer:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\mu P\Lambda^{\alpha/2} P^T \varphi - \frac{\mu}{h} f(t) P\Lambda^{\alpha/2-1} P^T e_0 + \frac{\mu}{h} g(t) P\Lambda^{\alpha/2-1} P^T e_{N+1}.$$

3.1.2. Egy implicit Euler séma az első kiterjesztésre

Az alábbiakban az első típusú kiterjesztésre (1.2) adunk egy véges differencia módszert. Az eltolt Grünwald-Letnikov formulán alapuló implicit Euler típusú sémáról látjuk be, hogy konvergens bizonyos feltételek esetén az $l_{\infty,h}$-normában.
Osszuk N részre a $[0,1]$ intervallumot, $h = 1/N$, $x_i = ih$, a $[0,T]$ intervallumot pedig M részre, $\tau = T/M$, $t_j = \tau j$, használjuk továbbá a (2.1)-ben bevezetett g_k állandókat!
A véges differencia sémánk a következő alakú, $1 < \alpha \leq 2$:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = (\delta_{\alpha,h} u^{n+1})_i, \tag{3.9}$$

ahol $i = 1 \dots N-1$ esetén

$$(\delta_{\alpha,h} c)_i = \frac{K}{h^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{i} g_k c_{i-k+1} + \sum_{k=i+1}^{N} g_k c_{k-i-1} + \sum_{k=0}^{N-i} g_k c_{i+k-1} + \sum_{k=N-i+1}^{N} g_k c_{2N-i-k+1} \right), \tag{3.10}$$

$i = 0$ esetén

$$(\delta_{\alpha,h} c)_0 = \frac{K}{h^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{i} g_k c_{i-k+1} + \sum_{k=i+1}^{N} g_k c_{k-i-1} \right), \tag{3.11}$$

$i = N$ esetén pedig:

$$(\delta_{\alpha,h} c)_N = \frac{K}{h^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{N-i} c_{i+k-1} g_k + \sum_{k=N-i+1}^{N} g_k c_{2N-i-k+1} \right). \tag{3.12}$$

A (3.10)-(3.12) formulák alapján (3.9) lineáris rendszerként felírva

$$\left(I - \frac{K\tau}{h^\alpha} A \right) u^{n+1} = u^n, \tag{3.13}$$

ahol $K = -\frac{1}{2\cos \alpha\pi/2}$.
Itt tehát az A mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} g_1 & g_0 + g_2 & g_3 & \dots & g_N & 0 \\ g_0 + g_2 & 2g_1 + g_3 & g_2 + g_0 + g_4 & \dots & g_{N-1} & g_N \\ g_3 & g_0 + g_2 + g_4 & 2g_1 + g_5 & \dots & g_{N-2} + g_N & g_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ g_N & g_{N-1} & g_{N-2} + g_N & \dots & 2g_1 + g_3 & g_2 + g_0 \\ 0 & g_N & g_{N-1} & \dots & g_0 + g_2 & g_1 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

3.1.5. Megjegyzés. *Az $\alpha = 2$ esetben a standard diffúzióra vonatkozó implicit-Euler sémát kapjuk ($g_0 = 1, g_1 = -2, g_2 = 1$ a többi g_k együttható pedig 0), ugyanis az A mátrix megegyezik a 14. oldalon szereplő (3.8)-beli mátrixszal. Ez pedig a perempontokban lévő, a belső pontoktól eltérő függvénykiterjesztések jogosságát támasztja alá.*

Stabilitás és konvergencia.

3.1.6. Állítás. *A (3.13)-beli séma konzisztens és stabil az $l_{\infty,h}$-normában.*

Bizonyítás:
Azt fogjuk belátni, hogy $I - A$ M-mátrix, és alkalmazzuk rá a 2.2.2 állítást. A konvergencia ebből úgy következik, hogy a Grünwald-Letnikov-formulára vonatkozó 2.1.7 állítás biztosítja a konzisztenciát, így a Lax-féle ekvivalenciatétel szerint a módszer konvergens.
A 2.1.5 lemma alapján világos, hogy $I - A$ előjel eloszlása megfelelő, a főátlóban pozitív elemek vannak, míg a többi elem negatív. Kell még egy $w > 0$ vektor, hogy $(I - A)w > 0$ teljesüljön. Legyen $w = \mathbf{1}$ a csupa egyesekből álló vektor, és azt az esetet vizsgáljuk, amikor belső pontról van szó, azaz $1 \leq i \leq N - 1$ (a peremnél ugyanígy járhatunk el). Ekkor

$$((I - A)\mathbf{1})_i =$$

$$1 + R\left(\alpha - \sum_{k=0,k\neq 1}^{i} g_k - \sum_{k=i+1}^{N} g_k + \alpha - \sum_{k=0,k\neq 1}^{N-i} g_k + \sum_{k=N-i+1}^{N} g_k\right),$$

ahol $R \geq 0$. Tudjuk, hogy $\sum_{k=0,k\neq 1}^{j} g_k < -g_1 = \alpha$ (a 2.1.5 lemma miatt), így

$$(I - A)w \geq \mathbf{1}.$$

A 2.2.2 állításból következik, hogy $\|(I - A)^{-1}\|_\infty \leq 1$. Tehát a séma feltétel nélkül stabil. □

3.1.3. Egy Crank-Nicolson típusú séma az első kiterjesztésre

Az alábbiakban az első típusú kiterjesztésre (1.2) adunk egy véges differencia módszert. Az eltolt Grünwald-Letnikov formulán alapuló Crank-Nicolson típusú sémáról látjuk be, hogy konvergens bizonyos feltételek esetén az l_2-normában. Az előbbi jelöléseket megtartva, $1 < \alpha < 2$ esetén sémánk a következő alakú:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{2}\left((\delta_{\alpha,h}u^{n+1})_i + (\delta_{\alpha,h}u^n)_i\right), \tag{3.15}$$

ahol $i = 1 \dots N-1$ esetén

$$(\delta_{\alpha,h}c)_i = \frac{K}{h^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{i} g_k c_{i-k+1} + \sum_{k=i+1}^{N} g_k c_{k-i-1} + \sum_{k=0}^{N-i} g_k c_{i+k-1} + \sum_{k=N-i+1}^{N} g_k c_{2N-i-k+1}\right), \tag{3.16}$$

$i = 0$ esetén

$$(\delta_{\alpha,h}c)_0 = \frac{K}{h^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{i} g_k c_{i-k+1} + \sum_{k=i+1}^{N} g_k c_{k-i-1}\right), \tag{3.17}$$

$i = N$ esetén pedig

$$(\delta_{\alpha,h}c)_N = \frac{K}{h^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{N-i} g_k c_{i+k-1} + \sum_{k=N-i+1}^{N} g_k c_{2N-i-k+1}\right), \tag{3.18}$$

ahol $K = -\frac{1}{2\cos\alpha\pi/2}$.
A (3.16)-(3.18) formulák alapján a (3.15) lineáris rendszerként felírva

$$\left(I - \frac{K\tau}{2h^\alpha}A\right)u^{n+1} = \left(I + \frac{K\tau}{2h^\alpha}A\right)u^n, \tag{3.19}$$

ahol A ugyanaz, mint (3.14)-ben az előző szakaszban.

Stabilitás.

3.1.7. Állítás. *A (3.19)-beli séma feltétel nélkül stabil az $l_{2,h}$-normában.*

Bizonyítás:
Megmutatjuk, hogy az A mátrix minden sajátértéke negatív, ebből következik, hogy (mivel A szimmetrikus, így $I - A$ is az) $I - A$ spektrálsugara legalább 1, vagyis $\|(I-A)^{-1}\|_2 \leq 1$, mert $(I-A)^{-1}$ is szimmetrikus. Megmutatjuk azt is, hogy az $\|(I-A)^{-1}(I+A)\|_2 \leq 1$ teljesül a lépésmátrixunkra, azaz a séma stabil az $l_{2,h}$-normában.
Legyen λ A egy sajátértéke, $\mathbf{c}$ pedig a hozzá tartozó sajátvektor, azaz $\lambda\mathbf{c} = A\mathbf{c}$. Legyen i olyan, hogy $|\mathbf{c}_i| = max_j\{|\mathbf{c}_j|\}$. Tegyük fel, hogy $1 \leq i \leq N-1$ ($i = 0$, illetve $i = N$ esetén, vagyis a perempontoknál ugyanígy járhatunk el, mint itt fogunk).
Ekkor a $\lambda\mathbf{c} = A\mathbf{c}$ egyenlőség i-edik komponensét kifejtve kapjuk, hogy

$$\lambda = g_1 + \sum_{k=0,k\neq 1}^{i} g_k \frac{c_{i-k+1}}{c_i} + \sum_{k=i+1}^{N} g_k \frac{c_{k-i-1}}{c_i} + \tag{3.20}$$

$$g_1 + \sum_{k=0,k\neq 1}^{N-i} \frac{c_{i+k-1}}{g}{}_k c_i + \sum_{k=N-i+1}^{N} g_k \frac{c_{2N-i-k+1}}{c_i} < 0.$$

Utóbbi egyenlőtlenség abból következik, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} g_k = 0$, ebből adódik, hogy $\sum_{k=0,k\neq 1}^{j} g_k < -g_1 = \alpha$, tetszőleges pozitív j-re. Azt is tudjuk, hogy $g_k > 0$, amennyiben $k \neq 1$ a 2.1.5 állítás szerint.

Most megmutatjuk, hogy $\|(I-A)^{-1}(I+A)\|_2 \leq 1$, azaz a séma stabil. Mivel A szimmetrikus, így azt is tudjuk az előbbiek alapján, hogy negatív szemidefinit, azaz tetszőleges $v \in \mathbb{R}^{N+1}$ vektorra teljesül, hogy

$$v^T A v \leq 0 \tag{3.21}$$

Ebből az is következik, hogy

$$v^T(I+A)(I+A)v \leq v^T(I-A)(I-A)v \tag{3.22}$$

Legyen itt $v := (I-A)^{-1}u$ (az inverz létezik, mivel $I-A$ minden sajátértéke nagyobb 1-nél), ekkor

$$u^T(I-A)^{-1}(I+A)(I+A)(I-A)^{-1}u \leq u^T u \tag{3.23}$$

$$\|(I-A)^{-1}(I+A)\|_2 = \|(I-A)^{-1}(I+A)(I-A)^{-1}(I-A)\|_2 \leq$$
$$\|(I+A)(I-A)^{-1}\|_2\|(I-A)^{-1}\|_2\|(I-A)\|_2 = \|(I+A)(I-A)^{-1}\|_2.$$

Mivel A szimmetrikus, így $I-A$ is, vagyis $\|I-A\|_2 = \rho$, ahol ρ a sajátértékek abszolútértékének maximuma, valamint azt is tudjuk, hogy ekkor $\|(I-A)^{-1}\|_2 = 1/\rho$.
Elég tehát belátnunk, hogy $\|(I+A)(I-A)^{-1}\|_2 \leq 1$,
amely az előbbi (3.23) becslés következménye:

$$\|(I+A)(I-A)^{-1}\|_2 = \sup_v \frac{v^T(I-A)^{-1}(I+A)(I+A)(I-A)^{-1}v}{v^T v} \leq 1. \square$$

Konvergencia. A konvergencia bizonyításához a [11] cikkben lévő gondolatmenetet alkalmazzuk, ahol homogén Dirichlet-peremfeltétel esetén látták be a konvergenciát. Ehhez szükségünk lesz az alábbi lemmára:

3.1.8. Lemma. *(Diszkrét Gronwall-egyenlőtlenség) Legyen $\{k_n\}$ és $\{p_n\}$ nemnegatív sorozatok, a $\{\Phi_n\}$ sorozatra teljesüljön, hogy*

$$\Phi_0 \leq g_0 \quad \Phi_n \leq g_0 + \sum_{l=0}^{n-1} p_l + \sum_{l=0}^{n-1} k_l \Phi_l, \quad n \geq 1,$$

ahol $g_0 \geq 0$. Ekkor a $\{\Phi_n\}$ sorozatra teljesül, hogy

$$\Phi_n \leq (g_0 + \sum_{l=0}^{n-1} p_l) \exp \sum_{l=0}^{n-1} k_l, \quad n \geq 1.$$

3.1.9. Állítás. *A (3.19)-beli séma konvergens az $l_{2,h}$-normában, azaz*

$$\|u^n - U^n\|_{2,h} \leq O(\tau^2 + h)$$

Bizonyítás:
A pontos megoldásra a [11] munka alapján teljesül, hogy

$$\left(I - \frac{K\tau}{2}A\right)U^{n+1} = \left(I + \frac{K\tau}{2}A\right)U^n + O(\tau^3 + \tau h) \tag{3.24}$$

Vonjuk ki ebből (3.19)-t, bevezetve az $e_i = U_i - u_i$ jelölést. Rendezés után kapjuk hogy

$$(e^{n+1} - e^n) - K\frac{\tau}{2h^\alpha}A(e^{n+1} + e^n) = \tau\epsilon^n, \quad \text{ahol } \epsilon_i^n = O(\tau^2 + h)$$

Szorozzuk meg balról az egyenletet $h^2(e^{n+1} + e^n)^T$-tal. Ekkor

$$h^2(e^{n+1} + e^n)^T I(e^{n+1} - e^n) - K\frac{\tau}{2h^{\alpha-2}}h^2(e^{n+1} + e^n)^T A(e^{n+1} + e^n) = \tau h^2(e^{n+1} + e^n)\epsilon^n.$$

Mivel A negatív definit, így $(e^{n+1} + e^n)A(e^{n+1} + e^n) < 0$, ezért

$$h^2(e^{n+1} + e^n)^T I(e^{n+1} - e^n) \leq \tau h^2(e^{n+1} + e^n)\epsilon^n.$$

Azaz

$$h^2\sum_{i=0}^{N}((e_i^{n+1})^2 - (e_i^n)^2) \leq \tau h^2\sum_{i=0}^{N}(e_i^{n+1} + e_i^n)\epsilon_i^n.$$

Összegezzük $0 \leq k \leq n-1$-re:

$$\|e^n\|_{2,h}^2 = h^2\sum_{i=0}^{N}(e_i^n)^2 \leq \tau h^2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{N}(e_i^{k+1} + e_i^k)\epsilon_i^k = \tau h^2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{N}e_i^k(\epsilon_i^{k-1} + \epsilon_i^k) + \tau h^2\sum_{i=0}^{N}e_i^n\epsilon_i^{n-1} \leq$$

$$\frac{\tau h^2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{N}(e_i^k)^2 + \frac{\tau h^2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{N}(\epsilon_i^{k-1} + \epsilon_i^k)^2 + \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{N}(e_i^n)^2 + \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{N}(\tau\epsilon_i^{n-1})^2,$$

ahol az utolsó sorban a geometriai és négyzetes középre vonatkozó becslést használtuk. Rendezve

$$\frac{1}{2}\|e^n\|_{2,h}^2 \leq \frac{\tau h^2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{N}(e_i^k)^2 + \frac{\tau h^2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{N}(\epsilon_i^{k-1} + \epsilon_i^k)^2 + \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{N}(\tau\epsilon_i^{n-1})^2, \text{ azaz:}$$

$$\|e^n\|_{2,h}^2 \leq \tau\sum_{k=0}^{n-1}\|e^k\|_{2,h}^2 + (\tilde{c}(\tau^2 + h)^2) \leq \exp(T)(\tilde{c}(\tau^2 + h)^2),$$

utóbbi becslésnél felhasználtuk a diszkrét Gronwall-lemmát

$$g_0 = h^2\sum_{i=0}^{N}(\tau\epsilon_i^{n-1})^2, \quad p_l = \tau h^2\sum_{i=0}^{N}(\epsilon_i^{l-1} + \epsilon_i^l)^2, \quad \Phi_l = \|e^l\|_{2,h}^2, \text{ továbbá } k_l = \tau$$

szereposztással, illetve hogy $\epsilon_i^k \leq c(\tau^2 + h)$ minden i-re és k-ra az egyenletes konvergencia miatt (vagyis feltettük azt is, hogy az időbeli derivált korlátos legyen). □

3.1.4. Egy implicit-Euler-séma a második kiterjesztésre

Mutatunk egy implicit-Euler sémát a 2. típusú, azaz (1.10) kiterjesztésre, amely szintén a Grünwald-Letnikov-formulán alapul.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = (\delta_{\alpha,h} u^{n+1})_i, \tag{3.25}$$

ahol $i = 1 \dots N-1$ esetén

$$(\delta_{\alpha,h} c)_i = \frac{K}{h^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{i} g_k c_{i-k+1} + \sum_{k=i+1}^{2i} g_k c_{k-i-1} + \sum_{k=0}^{N-i} c_{i+k-1} g_k + \sum_{k=N-i+1}^{2N-2i} g_k c_{2N-i-k+1} \right), \tag{3.26}$$

$i = 0$ esetén

$$(\delta_{\alpha,h} c)_N = \frac{K}{h^\alpha} \left(g_0 c_1 + \sum_{k=1}^{N-i} c_{i+k-1} g_k + \sum_{k=N-i+1}^{2N-2i} g_k c_{2N-i-k+1} \right), \tag{3.27}$$

$i = N$ esetén pedig

$$(\delta_{\alpha,h} c)_0 = \frac{K}{h^\alpha} \left(g_0 c_{N-1} + \sum_{k=1}^{i} g_k c_{i-k+1} + \sum_{k=i+1}^{2i} g_k c_{k-i-1} \right). \tag{3.28}$$

A (3.26)-(3.28) formulák alapján (3.25) lineáris rendszerként felírva:

$$\left(I - \frac{K\tau}{h^\alpha} A \right) u^{n+1} = u^n, \tag{3.29}$$

$$A = \begin{pmatrix} g_1 & g_0 + g_2 + g_{2N} & g_3 + g_{2N-1} & \dots & g_N + g_{N+2} & g_{N+1} \\ g_0 + g_2 & 2g_1 & g_2 + g_0 + g_{2N-2} & \dots & g_{N-1} + g_{N+1} & g_N \\ g_3 & g_0 + g_2 + g_4 & 2g_1 & \dots & g_{N-2} + g_N & g_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ g_N & g_{N-1} + g_{N+1} & g_{N-2} + g_{N+2} & \dots & 2g_1 & g_0 + g_2 \\ g_{N+1} & g_N + g_{N+2} & g_{N-1} + g_{N+3} & \dots & g_0 + g_2 + g_{2N} & g_1 \end{pmatrix}$$

Ez a mátrix most nem szimmetrikus (centroszimmetrikus), így l_2-normában az előző módszerekkel nem tudunk stabilitást bizonyítani, viszont l_∞-ben igen.

3.1.10. Megjegyzés. *Az $\alpha = 2$ esetben a standard diffúzióra vonatkozó implicit-Euler sémát kapjuk ismét, az előző szakaszbeli Crank-Nicolson sémára ezzel analóg állítás teljesül.*

Stabilitás és konvergencia.

3.1.11. Állítás. *A fenti (3.29)-beli séma feltétel nélkül stabil az $l_{\infty,h}$-normában.*

Azt fogjuk belátni, hogy $I - A$ M-mátrix, és alkalmazzuk rá a 2.2.2 állítást. A konvergencia ebből úgy következik, hogy a Grünwald-Letnikov-formula biztosítja a konzisztenciát, így a Lax-féle ekvivalenciatétel szerint a módszer konvergens.

Világos, hogy $I - A$ előjel eloszlása megfelelő, a főátlóban pozitív elemek vannak, míg a többi elem negatív. Kell még egy $w > 0$ vektor, hogy $(I - A)w > 0$ teljesüljön. Legyen $w = \mathbf{1}$ a csupa egyesekből álló vektor, és azt az esetet vizsgáljuk, amikor belső pontról van szó, azaz $1 \le i \le N-1$ (a peremnél ugyanígy járhatunk el). Ekkor

$$((I - A)\mathbf{1})_i =$$

$$1 + R\left(\alpha - \sum_{k=0,k\neq 1}^{i} g_k c_{i-k+1} - \sum_{k=i+1}^{2i} g_k c_{k-i-1} + \alpha - \sum_{k=0,k\neq 1}^{N-i} c_{i+k-1} g_k + \sum_{k=N-i+1}^{2N-2i} g_k c_{2N-i-k+1}\right).$$

Tudjuk, hogy $\sum_{k=0,k\neq 1}^{j} g_k < -g_1 = \alpha$, így

$$(I - A)w \geq 1.$$

A 2.2.2 állításból pedig az következik, hogy $\|(I - A)^{-1}\|_\infty \leq 1$. Tehát a séma feltétel nélkül stabil. Ez azt jelenti, hogy a módszer konvergens az $l_{\infty,h}$-normában, ugyanis konzisztens a 2.1.7 állítás miatt, így alkalmazhatjuk a Lax-féle ekvivalencia tételt. □

3.2. Két dimenzióban

3.2.1. Implicit-Euler sémák

Ebben a részben a (1.9) és a (1.10) típusú modellek két dimenziós megfelelőire írjuk fel az implicit-Euler sémákat.
A konvergencia bizonyítása mindkét esetben ugyanúgy megy, ahogy a 15. és a 20. oldalakon láttuk, ezért csak (1.2)-re írjuk fel.
Legyenek $1 < \alpha, \beta < 2$. Jelölje $f_{l,x}$, $f_{r,x}$ az x koordináta szerinti f_l, illetve f_r (1.2)-beli kiterjesztéseket, $f_{l,y}$-ra $f_{r,y}$-ra ugyanígy. A vizsgálandó egyenlet az **1. típusú kiterjesztésnél**:

$$\frac{\partial f(t,x,y)}{\partial t} := -\frac{1}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\left({}_{x-1}^{RL}D_x^{\alpha} f_{l,x}(t,x,y) + {}_{x}^{RL}D_{x+1}^{\alpha} f_{r,x}(t,x,y)\right) - \frac{1}{2\cos\frac{\beta\pi}{2}}\left({}_{y-1}^{RL}D_y^{\beta} f_{l,y}(t,x,y) + {}_{y}^{RL}D_{y+1}^{\beta} f_{l,y}(t,x,y)\right) \tag{3.30}$$

Most pedig jelölje $f_{l,x}$, $f_{r,x}$ az x koordináta szerinti f_l, illetve f_r (1.10)-beli kiterjesztéseket, $f_{l,y}$-ra $f_{r,y}$-ra ugyanígy. A vizsgálandó egyenlet tehát a **2. típusú kiterjesztésnél**:

$$\frac{\partial f(t,x,y)}{\partial t} := -\frac{1}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\left({}_{-x}^{RL}D_x^{\alpha} f_{l,x}(t,x,y) + {}_{x}^{RL}D_{2-x}^{\alpha} f_{r,x}(t,x,y)\right) - \frac{1}{2\cos\frac{\beta\pi}{2}}\left({}_{-y}^{RL}D_y^{\beta} f_{l,y}(t,x,y) + {}_{y}^{RL}D_{2-y}^{\beta} f_{r,x}(t,x,y)\right). \tag{3.31}$$

Osszuk N_x részre a $[0,1]$ intervallumot, $h_x = 1/N_x$, $x_i = ih_x$, a $[0,T]$ intervallumot pedig M részre, $\tau = T/M$, $t_j = \tau j$ és N_y részre a $[0,1]$ intervallumot, $h_y = 1/N_y$, $y_j = jh_y$. Ezekután $u_{j,k}^n$ jelöli a numerikus megoldás vektorát, amely $u(n\tau, jh_x, kh_y)$ közelítése.
A sémánk mindkét esetben:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = (\delta_{\alpha,h,x} u^{n+1})_{i,j} + (\delta_{\beta,h,y} u^{n+1})_{i.j} \tag{3.32}$$

A különbség annyi, hogy az **1. típusú kiterjesztésnél** a (3.10)-(3.12) formulákkal, míg a **2. típusú kiterjesztésnél** (3.26)-(3.27) segítségével értelmezzük a $\delta_{\alpha,h_x,x}$-t és a $\delta_{\beta,h_y,y}$ véges differenciákat.

3.2.1. Állítás. *A (3.30) feladatra felírt (3.32) séma stabil az $l_{\infty,h}$-normában.*

Bizonyítás: A sémánk tehát:

$$(I - A - B)c^{n+1} = c^n,$$

ahol A az x szerinti, és B az y szerinti derivált közelítésének mátrixa.
Azaz ha (i,j) $[0,1]$ belső pontja, akkor (a peremnél hasonlóan)

$$c_{i,j}^n = 1 +$$

$$R_1\left(\alpha - \sum_{k=0,k\neq 1}^{i} g_k c_{i-k+1,j} - \sum_{k=i+1}^{N} g_k c_{k-i-1,j} + \alpha - \sum_{k=0,k\neq 1}^{N-i} c_{i+k-1,j} g_k + \sum_{k=N-i+1}^{N} g_k c_{2N-i-k+1,j}\right) +$$

$$R_2\left(\beta - \sum_{k=0,k\neq 1}^{j} g_k c_{i,j-k+1} - \sum_{k=j+1}^{N} g_k c_{i,k-j-1} + \beta - \sum_{k=0,k\neq 1}^{N-j} c_{i,j+k-1} g_k + \sum_{k=N-j+1}^{N} g_k c_{i,2N-j-k+1}\right),$$

ahol $R_1 = -\frac{\tau}{2\cos\alpha\pi/2} h_x^{\alpha}$ és $R_2 = -\frac{\tau}{2\cos\beta\pi/2} h_y^{\beta}$, a közelítésekhez pedig a Grünwald-Letnikov-formulát használtuk.

A stabilitáshoz azt fogjuk belátni, hogy az $I-A-B$ mátrix M-mátrix. Ehhez szorozzuk $(I-A-B)$-t a csupa egyesekből álló $w = \mathbf{1}$ vektorral, ekkor ha (i,j) $[0,1]$ belső pontja, akkor (peremnél hasonlóan):

$$((I-A-B)w)_{i,j} =$$

$$1 + R_1 \left(\alpha - \sum_{k=0,k\neq 1}^{i} g_k - \sum_{k=i+1}^{N} g_k + \alpha - \sum_{k=0,k\neq 1}^{N-i} g_k + \sum_{k=N-i+1}^{N} g_k \right) +$$

$$R_2 \left(\beta - \sum_{k=0,k\neq 1}^{j} g_k - \sum_{k=j+1}^{N} g_k + \beta - \sum_{k=0,k\neq 1}^{N-j} g_k + \sum_{k=N-j+1}^{N} g_k \right).$$

Vagyis (2.1.5) alapján

$$(I-A-B)w \geq 1.$$

Így 2.2.2 állítás alapján

$$\|(I-A-B)^{-1}\|_{\infty,h} \leq 1,$$

vagyis valóban stabil a séma. □

3.2.2. Megjegyzés. *(3.31) feladatra a (3.32) séma stabilitása ugyanígy látható be.*

A konzisztenciát ismét 2.1.7 állítás szolgáltatja, így a kovergencia $O(\tau) + O(h_x) + O(h_y)$ rendű a Lax-ekvivalencia tétel alapján.

3.3. Numerikus kísérletek

Példa az 1. típusú modellfeladatra. Az [5]-ös munka alapján legyen a törtrendű deriválás rendje legyen $1,5$, a kezdeti feltételünk pedig $f(0,x) = 10\cos(\pi x)$. Az egyenletünk most:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2\cos\frac{1,5\pi}{2}}\left({}_{x-1}^{RL}D_x^{1,5}f^l(x) + {}_x^{RL}D_{x+1}^{1,5}f^r(x)\right).$$

A pontos megoldásunk ekkor

$$f(t,x) = 10e^{-t2\pi^{1,5}F_C(1/2)}\cos(\pi x),$$

ahol $F_C(x) = \int_0^x \cos(u^2\pi/2)\,du$. Az implicit Euler sémát a 3.1.2, a Crank-Nicolsont a 3.1.3 részek alapján készítettük el.

h	τ	IE $\|\cdot\|_{\infty,h}$	CN $\|\cdot\|_{2,h}$	CN $\|\cdot\|_{\infty,h}$
0.2	0.2	0.078214	0.14299	0.076432
0.1	0.1	0.010429	0.062913	0.025684
0.05	0.05	0.0056137	0.015994	0.0048225
0.025	0.025	0.0028726	0.0045991	0.0007182
0.0125	0.0125	0.0014466	0.00029944	0.0000653

3.1. ábra. Numerikus kísérlet az 1. típusú modellfeladatra a fenti példával ($t = 0.5$), . Az adott sémához tartozó hibavektorok normáit látjuk a megfelelő oszlopokban.

Példa a mátrix transzformációs módszerre. A törtrendű Laplace-operátor rendje legyen ismét $1,5$, a kezdeti feltételünk pedig $\varphi(0,x) = \sqrt{2}\cos(\pi x)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{1,5/2}\varphi, \text{ ha } 0 < x < 1 \\ \varphi'(0,t) = 0 \text{ és } \varphi'(1,t) = 0, \text{ ahol } 0 < t. \end{cases}$$

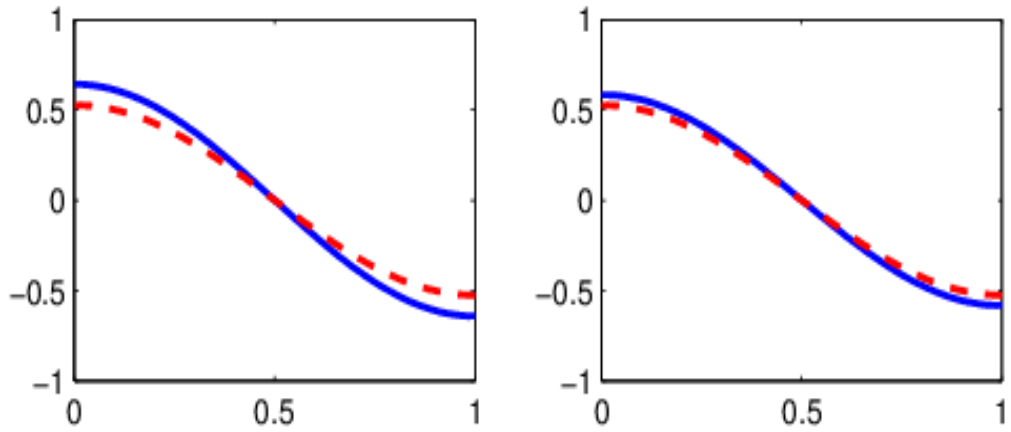
Az analitikus megoldás a 3.1.4 állítás alapján

$$\varphi(t,x) = \sqrt{(}2)e^{-t\pi^{1,5}}\cos(\pi x).$$

A sémákat a 3.1.1 rész alapján készítettük el.

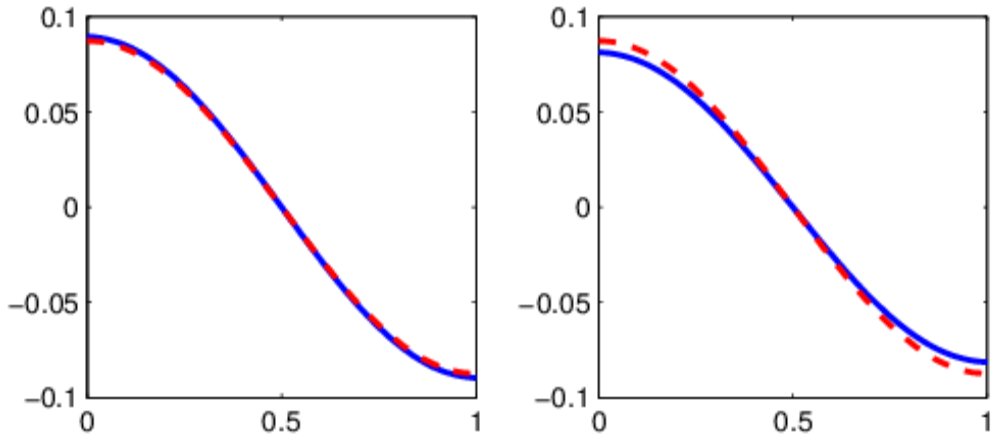
h	τ	IE $\|\cdot\|_{\infty,h}$	CN $\|\cdot\|_{2,h}$	CN $\|\cdot\|_{\infty,h}$
0.2	0.2	0.069456	0.014143	0.047925
0.1	0.1	0.013235	0.0085598	0.042268
0.05	0.05	0.0078230	0.0035509	0.023159
0.025	0.025	0.0043296	0.0013494	0.012063
0.0125	0.0125	0.0022958	0.00049405	0.0061649

3.2. ábra. Numerikus kísérlet a 2. a mátrix transzformációs módszerre az előbbi példával ($t = 0.5$). Az adott sémához tartozó hibavektorok normáit látjuk a megfelelő oszlopokban.



3.3. ábra. A bal oldali ábrán az implicit Euler, a jobb oldalin a Crank-Nicolson séma által szolgáltatott numerikus megoldások láthatóak az 1. típusú modellfeladatra (1.9). A szaggatott vonal az analitikus, a folytonos pedig a numerikus megoldás mindkét ábrán.

.



3.4. ábra. A bal oldali ábrán egy implicit Euler, a jobb oldalin egy Crank-Nicolson séma által szolgáltatott numerikus megoldások láthatóak, melyeket a mátrix transzformációs módszerrel kaptunk a homogén Neumann-peremfeltételű (3.1)-es feladatra. A szaggatott vonal az analitikus, a folytonos pedig a numerikus megoldás mindkét ábrán.

A numerikus kísérletek a Matlab program segítségével készültek. Az 1. típusú modellhez tartozó kódot leírjuk ide, mert a másik két modellfeladathoz tartozó programok apró módosításai ennek. A g függvény rekurzívan számolja a g_k együtthatókat, az ehhez felhasznált összefüggések $g_0 = 1$ és $g_k = g_{k-1}(\alpha - k + 1)/k$, ha $k \geq 1$.

```
function foprogram(N,TT,M,a)
% foprogram
%
% N : [0,1] felosztasa N reszre
% TT : [0,TT] az idointervallum
% M : [0,TT] felosztasa M reszre
% a : a tortrendu derivalas rendje

h=1/N;
tau=TT/M;
[u0,p]=init(N,TT);
u1=u0;
u2=u0;
[AA1]=A1(N,a);
K=-1/(2*cos(a*pi/2));
J=speye(N+1);
for tt=1:(M+1)
    u0=(J-(K*tau/(h^a)).*AA1)\u0;
    u1=(J-(K*tau/(2*(h^a))).*AA1)\(J+(K*tau/(2*(h^a))).*AA1)*u1;
end;

x=linspace(0,1,N+1);
y0=full(u0);
y1=full(u1);
p=full(p);
clf;
subplot(2,2,1);plot(x',y0);hold on
plot(x,p',r--');hold off
subplot(2,2,2);plot(x',y1);hold on
plot(x,p',r--');hold off
maxhiba1=norma_szamit(u0-p,h,-1)
maxhiba2=norma_szamit(u1-p,h,2)
maxhiba2=norma_szamit(u1-p,h,-1)
```

```
function [A]=A1(N,a)
% 1. kiterjesztesre a lepesmatrix.
%
% h=1/N, a=alpha

A=sparse(zeros(N+1,N+1));
for j=0:N % vegigmegyunk a pontokon
    switch j
        case 0
            A(1,2)=A(1,2)+g(0,a);
            for k=1:N
                A(1,k)=A(1,k)+g(k,a);
            end;
        case N
            A(N+1,N)=A(N+1,N)+g(0,a);
            for k=1:N
                A(N+1,N+1-k+1)=A(N+1,N+1-k+1)+g(k,a);
            end;
        otherwise
            for k=0:j
                A(j+1,j-k+1+1)=A(j+1,j-k+1+1)+g(k,a);
            end;
            for k=j+1:N
                A(j+1,k-j-1+1)=A(j+1,k-j-1+1)+g(k,a);
            end;
            for k=0:(N-j)
                A(j+1,j+k-1+1)=A(j+1,j+k-1+1)+g(k,a);
            end;
            for k=(N-j+1):N
                A(j+1,2*N-j-k+1+1)=A(j+1,2*N-j-k+1+1)+g(k,a);
            end;
    end;
end;
```

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Izsák Ferencnek a segítségét és a türelmét, hogy mindig tudott rám és a hibáimra időt szakítani, valamint Édesanyámnak, aki nélkül valószínűleg sehol sem lennék.

Irodalomjegyzék

[1] J.P. Boto and N. Stollenwerk: Fractional calculus and Levy flights: modelling spatial epidemic spreading, `http://www.epiwork.eu/publications/papers/`.

[2] Simon L.,E. Baderko: *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[3] R. Schumer, A. Benson, M. Meerschaert, S.W. Wheatcraft: Eulerian derivation of the fractional advection–dispersion equation, *Journal of Contaminant Hydrology*, **48, 1-2**, 69-88, 2001.

[4] Feynman, Leighton, Sands: *Mai fizika IV. - Statisztikus mechanika, Termodinamika, Hullámtan, Szimmetriák a fizika törvényeiben* Műszaki Könyvkiadó, 1969.

[5] P.P. Valkó, X. H. Zhang : Finite Domain Anomalous Spreading Consistent with First and Second Law, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**, 3455-3470, 2010.

[6] K. S. Miller, B. Ross: *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, New York, 1993.

[7] M. M. Meerschaert, C. Tadjeran: Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **172,1**, 65-77, 2004.

[8] Stoyan G., Takó G. : *Numerikus módszerek I.*, Typotex, Budapest, 2002.

[9] M. Ilic, F. Liu, I. Turner, V. Anh: Numerical approximation of a fractional-in-space diffusion equation (II) - with nonhomegeneous boundary conditions, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **9,4**, 2006.

[10] C. Tadjeran, M. M. Meerschaert, H-P. Scheffler: A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, **220,2**, 813-823, 2007.

[11] WenYi Tian, Han Zhou, Weihua Deng: A Class of Second Order Difference Approximations for Solving, 2012, Space Fractional Diffusion Equations, `http://arxiv.org/abs/1201.5949`.

[12] Qianqian Yang: *Novel analytical and numerical methods for solving fractional dynamical systems*, PhD Thesis, 2010, `http://eprints.qut.edu.au/35750/`.

[13] G.M. Viswanathan, E.P. Raposo, M.G.E. da Luz: Lévy flights and superdiffusion in the context of biological encounters and random searches, *Physics of Life Reviews*, **5**, 133-150, 2008.