Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Az analízis alkalmazásai az érrendszer vizsgálatában

Szakdolgozat

Készítette:

Valkó Éva

alkalmazott matematikus

MSc hallgató

Témavezető:

Pfeil Tamás

adjunktus

Budapest

2012

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom témája az emberi szervezetbeli véráramlás és az érhálózat vizsgálata, modellezése. Először a legszükségesebb fizikai alapfogalmakat mutatom be, majd a Navier–Stokes-egyenlet hengerkoordináta-rendszerbeli alakját vezetem le. A következő fejezetben a nullindexű és az 1-indexű Bessel-féle differenciálegyenletekkel, a különböző Bessel-függvényekkel, illetve ezek kapcsolatával ismertetem meg az Olvasót. A harmadik fejezetben Bessel-függvények segítségével vizsgálom a szilárd falú csőbeli pulzáló áramlás sebességét és hozamát. A negyedik fejezetben a szimmetrikus és az aszimmetrikus érhálózattal foglalkozom.

1. fejezet

Hidrodinamika

Ebben a fejezetben szeretném röviden bemutatni a szakdolgozatom témájához kapcsolódó hidrodinamikai alapfogalmakat és törvényeket, melyek az összenyomhatatlan, viszkózus folyadékok mozgását írják le, különös figyelmet fordítva a henger alakú csőbeli áramlásra.

1.1. Viszkózus folyadékok és az áramlásukat leíró egyenletek

A folyadék vizsgálatakor eltekintünk annak molekuláris szerkezetétől, folytonos közegnek tekintjük. A mozgó folyadék állapotát leírja a sebessége (v), nyomása (p) és sűrűsége (ϱ). Tehát ha az $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartomány a folyadék által kitöltött térrész, és a jelenséget az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt időintervallum lezártján tekintjük, akkor

$$p\colon \overline{I} \times \Omega \to \mathbb{R}, \quad \varrho\colon \overline{I} \times \Omega \to \mathbb{R}, \quad v\colon \overline{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

függvények.

Ha a folyadék sűrűsége nem állandó, az a folyadék összenyomhatóságát eredményezi. Az olyan folyadékokat, melyek sűrűsége állandó, összenyomhatatlan folyadékoknak nevezzük.

A folyadék áramlása során a molekulák között súrlódási kölcsönhatás lép fel, ezt a belső súrlódást nevezzük viszkozitásnak. Newtoninak mondjuk a folyadékot, ha a belső súrlódással egyenesen arányos az általa létrehozott deformáció. Ezt az arányosságot jellemzi a newtoni folyadék viszkozitási együtthatója.

A viszkózus folyadékok mozgását leíró vektoregyenletet *Navier–Stokes-egyenlet*nek nevezzük:

$$\varrho\partial_t v + \varrho\,(v\nabla)\,v = -\mathrm{grad}p + \mu\Delta v + f \qquad I\times\Omega\text{-n},$$

ahol $f\colon I\times\Omega\to\mathbb{R}$ a folyadékra ható külső erők eredője.

A tömegmegmaradás törvényét az ún. *kontinuitási egyenlet* írja le:

$$\partial_t\varrho + \mathrm{div}(\varrho v) = 0 \qquad I\times\Omega\text{-n}.$$

Végezetül a folyadéknak teljesítenie kell az energiamegmaradás törvényét.

1.2. Folyadék áramlása szilárd falú csőben, Poiseuille törvénye

Ebben a pontban az összenyomhatatlan, állandó viszkozitású folyadék henger alakú, szilárd falú csőben történő hengerszimmetrikus áramlását vizsgálom. Először a Navier–Stokes-egyenletet írom fel hengerkoordináta-rendszerben, majd az áramlás hozamát megadó Poiseuille törvényt idézem fel.

Tegyük fel, hogy állandó μ viszkozitású és ϱ sűrűségű folyadék áramlik egy egyenes körhenger alakú csőben, melynek sugara a, hossza L. Válasszuk a derékszögű koordinátarendszer harmadik tengelyének a henger tengelyét, a másik két tengely által kifeszített sík pedig a henger alaplapjára illeszkedjen. A nyílt hengert H-val jelöljük. Adott időpontban az áramlás sebességfüggvényét egy ilyen koordinátarendszerben a

$$v\colon H\to\mathbb{R}, \qquad (x,y,z)\mapsto v(x,y,z), \qquad v=(v_x,v_y,v_z)$$

függvény, hengerkoordináta-rendszerben a

$$V\colon (0;a)\times[0;2\pi)\times(0;L)\to\mathbb{R}^3, \qquad (r,\varphi,z)\mapsto V(r,\varphi,z), \qquad V=(V_r,V_\varphi,V_z)$$

függvény írja le, ahol

$$V(r,\varphi,z) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), \qquad (r,\varphi,z)\in(0;a)\times[0;2\pi)\times(0;L).$$

A nyomásfüggvényt az adott időpontban a derékszögű koordinátarendszerben p-vel jelöljük, $p:H\to\mathbb{R}$, a hengerkoordináta-rendszerben pedig P-vel, ahol

$$P:(0;a)\times[0;2\pi)\times(0;L)\to\mathbb{R}, \qquad P(r,\varphi,z) = p(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

1.1. Definíció. A derékszögű koordinátarendszerből a hengerkoordináta-rendszerbe való áttérést leíró

$$h : \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad h(r, \varphi, z) := (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z)$$

transzformációt *hengertranszformáció*nak nevezzük.

A hengertranszformáció felhasználásával $V = h^{-1} \circ v \circ h$ és $P = p \circ h$ $D(h)$-n.

1.2. Definíció. A fenti H egyenes körhengeren értelmezett $p\colon H \to \mathbb{R}$ függvényt *hengerszimmetrikus*nak nevezzük, ha a hengerkoordináta-rendszerben felírva a $P := p \circ h$ függvényre

$$P(r, \varphi, z) = P(r, \psi, z), \qquad (r, \varphi, z), (r, \psi, z) \in H.$$

Azt mondjuk, hogy a $v\colon H \to \mathbb{R}^3$ függvény *hengerszimmetrikus*, ha azt hengerkoordináta-rendszerben felírt $V := v \circ h$ függvényre

$$V(r, \varphi, z) = V(r, \psi, z), \quad (r, \varphi, z), (r, \psi, z) \in H \qquad \text{és} \qquad V_\varphi = 0.$$

Az állandó sűrűségű és viszkozitású folyadék áramlását hengerszimmetrikusnak nevezzük, ha a nyomás- és a sebességfüggvénye hengerszimmetrikus.

Ha a p, illetve a V hengerszimmetrikus függvény folytonosan differenciálható, akkor $\partial_\varphi P = 0$ és $\partial_\varphi V_r = \partial_\varphi V_z = 0$.

Ezután kiszámolom az állandó sűrűségű és viszkozitású folyadék hengerszimmetrikus áramlását leíró Navier–Stokes-vektoregyenletnek a henger-koordinátarendszerbeli alakját. Ennek igazolásához több állításra van szükségem. Amikor a bizonyítás a hengerszimmetria feltételezése nélkül lényegesen hosszabb lenne, akkor csak a speciális esetben adom meg az állítást.

1.3. Állítás. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő nyílt halmaz és $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $v \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ tetszőleges függvény, akkor

$$(v \cdot \nabla)v = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad} v^2 - v \times \mathrm{rot} v.$$

Bizonyítás. Ha derékszögű koordinátarendszerben $v = (v_x, v_y, v_z)$, akkor $(v \cdot \nabla) = v_x\partial_x + v_y\partial_y + v_z\partial_z$, így

$$(v \cdot \nabla)v = \begin{pmatrix} v_x\partial_x v_x + v_y\partial_y v_x + v_z\partial_z v_x \\ v_x\partial_x v_y + v_y\partial_y v_y + v_z\partial_z v_y \\ v_x\partial_x v_z + v_y\partial_y v_z + v_z\partial_z v_z \end{pmatrix}.$$

A v függvény négyzetének gradiensét $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ alapján kaphatom meg:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}v^2 = \begin{pmatrix} v_x\partial_x v_x + v_y\partial_x v_y + v_z\partial_x v_z \\ v_x\partial_y v_x + v_y\partial_y v_y + v_z\partial_y v_z \\ v_x\partial_z v_x + v_y\partial_z v_y + v_z\partial_z v_z \end{pmatrix}.$$

A v függény rotációja

$$\mathrm{rot}v = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}, \quad \text{ezért} \quad v \times \mathrm{rot}v = \begin{pmatrix} v_y\left(\partial_x v_y - \partial_y v_x\right) - v_z\left(\partial_z v_x - \partial_x v_z\right) \\ v_z\left(\partial_y v_z - \partial_z v_y\right) - v_x\left(\partial_x v_y - \partial_y v_x\right) \\ v_x\left(\partial_z v_x - \partial_x v_z\right) - v_y\left(\partial_y v_z - \partial_z v_y\right) \end{pmatrix}.$$

Kivonva egymásból a fenti két tagot valóban $(v \cdot \nabla)v$ értékét kapjuk. □

Később összetett függvények parciális deriválása során szükségem lesz a hengertranszformáció deriváltjának inverzére.

1.4. Állítás. A h hengertranszformációra

$$\left[\left(h^{-1}\right)' \circ h\right](r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. A h függvény differenciálható, és a deriváltfüggvény determinánsa pozitív, ezért mindenütt létezik h' inverze. Ennek kiszámításához induljunk ki abból, hogy h injektív és $h^{-1} \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^+ \times [0;2\pi) \times \mathbb{R}}$. Deriválva mind a két oldalt, majd a $(h')^{-1}$ mátrixszal jobbról szorozva a $(h^{-1})' \circ h = (h')^{-1}$ összefüggéshez jutunk. A h transzformáció deriváltja

$$h'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi) \times \mathbb{R}$$

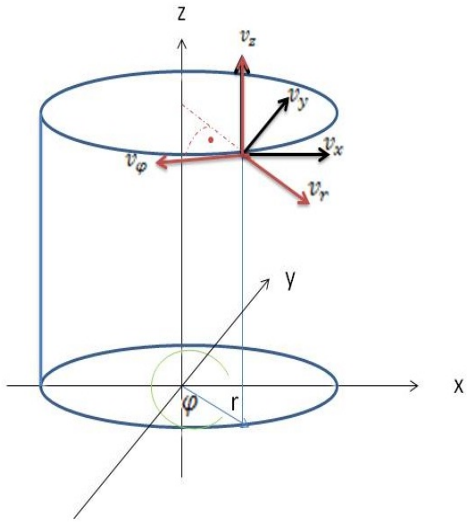
($\varphi = 0$ esetén folytonos kiterjesztés), melynek inverze

$$\big(h'(r,\varphi,z)\big)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

1.5. Állítás. Ha egy $A \in \mathbb{R}^3$ pontban a $v \in \mathbb{R}^3$ vektor derékszögű koordinátarendszerbeli koordinátavektora (v_x, v_y, v_z), akkor hengerkoordináta-rendszerben a koordinátavektorát $(v_r, v_\varphi, \hat{v}_z)$-pal jelölve

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_r\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi \\ v_y &= v_r\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi \\ v_z &= \hat{v}_z \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} v_r &= v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi \\ v_\varphi &= -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi \\ \hat{v}_z &= v_z \end{aligned}\right\}.$$



Kapcsolat a derékszögű és a hengerkoordináta-rendszerbeli koordináták között

1.6. Állítás. Legyen $p \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^3)$ és $P := p \circ h$, akkor hengerkoordináta-rendszerben felírva

$$\mathrm{grad}p(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = \big(\partial_r P(r,\varphi,z), \tfrac{1}{r}\partial_\varphi P(r,\varphi,z), \partial_z P(r,\varphi,z)\big)$$

bármely $(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0;2\pi) \times \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Írjuk fel

$$p(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = P(r,\varphi,z), \qquad (r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0;2\pi) \times \mathbb{R}$$

parciális deriválásával p gradiensének derékszögű koordinátáit az $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ pontban:

$$\partial_x p = \partial_r P \cdot \partial_x r + \partial_\varphi P \cdot \partial_x \varphi + \partial_z P \cdot \partial_x z = \partial_r P \cos\varphi - \tfrac{1}{r}\partial_\varphi P \sin\varphi,$$

$$\partial_y p = \partial_r P \cdot \partial_y r + \partial_\varphi P \cdot \partial_y \varphi + \partial_z P \cdot \partial_y z = \partial_r P \sin\varphi + \tfrac{1}{r}\partial_\varphi P \cos\varphi,$$

$$\partial_z p = \partial_r P \cdot \partial_z r + \partial_\varphi P \cdot \partial_z \varphi + \partial_z P \cdot \partial_z z = \partial_z P.$$

Térjünk át derékszögű koordinátákról hengerkoordinátákra az előző állításban szereplő összefüggés alapján:

$$(\mathrm{grad}p)_r = \left(\partial_r P \cos\varphi - \tfrac{1}{r}\partial_\varphi P \sin\varphi\right)\cos\varphi + \left(\partial_r P \sin\varphi + \tfrac{1}{r}\partial_\varphi P \cos\varphi\right)\sin\varphi = \partial_r P,$$

$$(\mathrm{grad}p)_\varphi = -\left(\partial_r P \cos\varphi - \tfrac{1}{r}\partial_\varphi P \sin\varphi\right)\sin\varphi + \left(\partial_r P \sin\varphi + \tfrac{1}{r}\partial_\varphi P \cos\varphi\right)\cos\varphi = \tfrac{1}{r}\partial_\varphi P,$$

$$(\mathrm{grad}p)_z = \partial_z P.$$

Ezzel igazoltuk, hogy hengerkoordinátákkal megadva $\mathrm{grad}p = \left(\partial_r P, \tfrac{1}{r}\partial_\varphi P, \partial_z P\right)$. □

1.7. Állítás. Legyen $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ és $G := g \circ h$, akkor hengerkoordináta-rendszerben felírva a

$$\Delta g(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = \partial_r^2 G(r,\varphi,z) + \frac{1}{r}\partial_r G(r,\varphi,z) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 G(r,\varphi,z) + \partial_z^2 G(r,\varphi,z)$$

összefüggés bármely $(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0;2\pi) \times \mathbb{R}$ pontban fennáll.

Bizonyítás. Induljunk ki a

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = G(r,\varphi,z), \qquad (r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0;2\pi) \times \mathbb{R}$$

összefüggésből, majd írjuk fel g parciális deriváltjait az $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ helyen:

$$\begin{aligned}
\partial_x g &= \partial_r G \cdot \partial_x r + \partial_\varphi G \cdot \partial_x \varphi + \partial_z G \cdot \partial_x z = \partial_r G \cos\varphi - \tfrac{1}{r}\partial_\varphi G \sin\varphi,\\
\partial_y g &= \partial_r G \cdot \partial_y r + \partial_\varphi G \cdot \partial_y \varphi + \partial_z G \cdot \partial_y z = \partial_r G \sin\varphi + \tfrac{1}{r}\partial_\varphi G \cos\varphi, \qquad (*)\\
\partial_z g &= \partial_r G \cdot \partial_z r + \partial_\varphi G \cdot \partial_z \varphi + \partial_z G \cdot \partial_z z = \partial_z G.
\end{aligned}$$

Ezek alapján a másodrendű parciális deriváltak:

$$\partial_x^2 g = \partial_r(\partial_x g) \cdot \partial_x r + \partial_\varphi(\partial_x g) \cdot \partial_x \varphi + \partial_z(\partial_x g) \cdot \partial_x z = \partial_r(\partial_x g)\,\cos\varphi - \tfrac{1}{r}\,\partial_\varphi(\partial_x g)\,\sin\varphi,$$

$$\partial_y^2 g = \partial_r(\partial_y g) \cdot \partial_y r + \partial_\varphi(\partial_y g) \cdot \partial_y \varphi + \partial_z(\partial_y g) \cdot \partial_y z = \partial_r(\partial_y g)\,\sin\varphi + \tfrac{1}{r}\,\partial_\varphi(\partial_y g)\,\cos\varphi,$$

$$\partial_z^2 g = \partial_r(\partial_z g) \cdot \partial_z r + \partial_\varphi(\partial_z g) \cdot \partial_z \varphi + \partial_z(\partial_z g) \cdot \partial_z z = \partial_z^2 g.$$

Tehát

$$\Delta g = \partial_r \left(\partial_x g \cos\varphi + \partial_y g \sin\varphi\right) - \frac{1}{r}\big[\partial_\varphi(\partial_x g)\,\sin\varphi - \partial_\varphi(\partial_y g)\,\cos\varphi\big] + \partial_z^2 g.$$

Vegyük észre, hogy $(*)$ első két egyenletéből következik

$$\partial_x g \cos\varphi + \partial_y g \sin\varphi = \partial_r G,$$

valamint

$$\begin{aligned}\partial_\varphi(\partial_x g)\,\sin\varphi - \partial_\varphi(\partial_y g)\,\cos\varphi &= \partial_\varphi\left(\partial_x g \sin\varphi - \partial_y g \cos\varphi\right) - \left(\partial_x g \cos\varphi + \partial_y g \sin\varphi\right)\\ &= \partial_\varphi\left(-\frac{1}{r}\partial_\varphi G\right) - \partial_r G = -\frac{1}{r}\partial_\varphi^2 G - \partial_r G.\end{aligned}$$

Behelyettesítve a fenti kifejezéseket azt kapjuk, hogy

$$\Delta g = \partial_r\left(\partial_r G\right) - \frac{1}{r}\left[-\frac{1}{r}\partial_\varphi^2 G - \partial_r G\right] + \partial_z^2 g = \partial_r^2 G + \frac{1}{r}\partial_r G + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 G + \partial_z^2 G.$$

□

1.8. Állítás. Legyen $v \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ hengerszimmetrikus függvény, a derékszögű koordinátarendszerben a koordinátafüggvényeit jelölje v_x, v_y, v_z; legyen $V := v \circ h$ és V hengerkoordináta-rendszerbeli koordinátafüggvényeit pedig jelölje V_r, V_φ, V_z.

A Laplace-operátort a hengerszimmetrikus v függvényre alkalmazva hengerkoordinátarendszerben minden $(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi) \times \mathbb{R}$ esetén

$$\Delta v(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = \begin{pmatrix} \partial_r^2 V_r(r,\varphi,z) + \frac{1}{r}\partial_r V_r(r,\varphi,z) + \partial_z^2 V_r(r,\varphi,z) - \frac{1}{r^2}V_r(r,\varphi,z)\\ 0\\ \partial_r^2 V_z(r,\varphi,z) + \frac{1}{r}\partial_r V_z(r,\varphi,z) + \partial_z^2 V_z(r,\varphi,z)\end{pmatrix},$$

Bizonyítás. A $\Delta v := (\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z)$ vektorértékű függvénynek először a változójában térünk át hengerkoordinátákra az előző állítást felhasználva:

$$\left.\begin{aligned}\Delta v_x &= \partial_r^2 V_x + \tfrac{1}{r}\partial_r V_x + \tfrac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 V_x + \partial_z^2 V_x\\ \Delta v_y &= \partial_r^2 V_y + \tfrac{1}{r}\partial_r V_y + \tfrac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 V_y + \partial_z^2 V_y\\ \Delta v_z &= \partial_r^2 V_z + \tfrac{1}{r}\partial_r V_z + \tfrac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 V_z + \partial_z^2 V_z\end{aligned}\right\},$$

ahol $V_i := v_i \circ h, \quad i = x, y, z$. Második lépésként a koordinátafüggvényeket írjuk át a hengerkoordináta-rendszerbeliekre az 1.5. Állítás és a v függvény hengerszimmetriája alapján:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta v_x &= \partial_r^2 V_r \cos\varphi + \tfrac{1}{r}\partial_r V_r \cos\varphi - \tfrac{1}{r^2} V_r \cos\varphi + \partial_z^2 V_r \cos\varphi \\
\Delta v_y &= \partial_r^2 V_r \sin\varphi + \tfrac{1}{r}\partial_r V_r \sin\varphi - \tfrac{1}{r^2} V_r \sin\varphi + \partial_z^2 V_r \sin\varphi \\
\Delta v_z &= \partial_r^2 V_z + \tfrac{1}{r}\partial_r V_z + \partial_z^2 V_z
\end{aligned}\right\}.$$

Végül Δv derékszögű koordinátarendszerben ismert koordinátafüggvényeiből megkapjuk a hengerkoordináta-rendszerbelieket, ha ismét alkalmazzuk az 1.5. Állítást. □

1.9. Állítás. Legyen $v \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ hengerszimmetrikus függvény, a derékszögű koordinátarendszerben a koordinátafüggvényeit jelölje v_x, v_y, v_z; legyen $V := v \circ h$ és V hengerkoordináta-rendszerbeli koordinátafüggvényeit pedig jelölje V_r, V_φ, V_z.

Ekkor minden $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ esetén

$$\big[(v \cdot \nabla)v\big](r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = \begin{pmatrix} V_r(r,\varphi,z)\partial_r V_r(r,\varphi,z) + V_z(r,\varphi,z)\partial_z V_r(r,\varphi,z) \\ 0 \\ V_r(r,\varphi,z)\partial_r V_z(r,\varphi,z) + V_z(r,\varphi,z)\partial_z V_z(r,\varphi,z) \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Induljunk ki a $(v \cdot \nabla)v$ függvényre az 1.3. Állítás bizonyításának elején kapott összefüggésből. Az 1.7. Állításbeli $(*)$ összefüggéseknek a $V_i := v_i \circ h, \quad i = x, y, z$ függvényekre vonatkozó megfelelőit behelyettesítem, majd áttérek V hengerkoordináta-rendszerbeli koordinátafüggvényeire:

$$\big[(v \cdot \nabla)v\big]_x = v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x + v_z \partial_z v_x$$

$$= V_x(\partial_r V_x \cos\varphi - \tfrac{1}{r}\partial_\varphi V_x \sin\varphi) + V_y(\partial_r V_x \sin\varphi + \tfrac{1}{r}\partial_\varphi V_x \cos\varphi) + V_z \partial_z V_x$$

$$= V_r \cos\varphi(\partial_r V_r \cos^2\varphi + \tfrac{1}{r} V_r \sin^2\varphi) + V_r \sin\varphi(\partial_r V_r \cos\varphi \sin\varphi - \tfrac{1}{r} V_r \sin\varphi \cos\varphi)$$

$$+ V_z \partial_z V_r \cos\varphi = V_r \partial_r V_r \cos\varphi + V_z \partial_z V_r \cos\varphi,$$

ahol az első sor függvényeinek változója $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, a többié (r, φ, z). A másik két

koordinátafüggvényt hasonlóan számolhatjuk ki:

$$\big[(v\cdot\nabla)v\big]_y = v_x\partial_x v_y + v_y\partial_y v_y + v_z\partial_z v_y$$

$$= V_x(\partial_r V_y\cos\varphi - \tfrac{1}{r}\partial_\varphi V_y\sin\varphi) + V_y(\partial_r V_y\sin\varphi + \tfrac{1}{r}\partial_\varphi V_y\cos\varphi) + V_z\partial_z V_y$$

$$= V_r\cos\varphi(\partial_r V_r\sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{r}V_r\sin\varphi\cos\varphi) + V_r\sin\varphi(\partial_r V_r\sin^2\varphi + \tfrac{1}{r}V_r\cos^2\varphi)$$

$$+V_z\partial_z V_r\sin\varphi = V_r\partial_r V_r\sin\varphi + V_z\partial_z V_r\sin\varphi,$$

$$\big[(v\cdot\nabla)v\big]_z = v_x\partial_x v_z + v_y\partial_y v_z + v_z\partial_z v_z$$

$$= V_x(\partial_r V_z\cos\varphi - \tfrac{1}{r}\partial_\varphi V_z\sin\varphi) + V_y(\partial_r V_z\sin\varphi + \tfrac{1}{r}\partial_\varphi V_z\cos\varphi) + V_z\partial_z V_z$$

$$= V_r\cos\varphi(\partial_r V_z\cos\varphi - \tfrac{1}{r}\partial_\varphi V_z\sin\varphi) + V_r\sin\varphi(\partial_r V_z\sin\varphi + \tfrac{1}{r}\partial_\varphi V_z\cos\varphi) + V_z\partial_z V_z$$

$$= V_r\partial_r V_z + V_z\partial_z V_z.$$

Végül a $(v\cdot\nabla)v$ vektorértékű függvény hengerkoordináta-rendszerbeli koordinátafüggvényeit az 1.5. Állítás segítségével kapjuk meg. □

Ezzel a Navier–Stokes-vektoregyenlet összes tagját áttranszformáltuk hengerkoordináta-rendszerbe.

1.10. Tétel. *Állandó ϱ sűrűségű és μ viszkozitású folyadék hengerszimmetrikus áramlására*

$$\left.\begin{aligned}
\partial_t V_r + V_r\partial_r V_r + V_z\partial_z V_r &= F_r - \frac{1}{\varrho}\partial_r P + \frac{\mu}{\varrho}\left(\partial_r^2 V_r + \frac{1}{r}\partial_r V_r - \frac{V_r}{r^2} + \partial_z^2 V_r\right)\\
V_\varphi &= 0\\
\partial_t V_z + V_r\partial_r V_z + V_z\partial_z V_z &= F_z - \frac{1}{\varrho}\partial_z P + \frac{\mu}{\varrho}\left(\partial_r^2 V_z + \frac{1}{r}\partial_r V_z + \partial_z^2 V_z\right)
\end{aligned}\right\},$$

ahol P a hengerkoordináta-rendszerben adott nyomásfüggvény, V az ottani sebességfüggvény, F_r, F_z pedig a folyadékra ható külső erők eredőjének sugár, illetve z-tengely irányú koordinátafüggvénye ($f\circ h = (F_r, 0, F_z)$ a hengerkoordináta-rendszerben).

Bizonyítás. Összeadva a kiszámolt tagokat

$$\begin{pmatrix}\partial_t V_r\\ 0\\ \partial_t V_z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}V_r\partial_r V_r + V_z\partial_z V_r\\ 0\\ V_r\partial_r V_z + V_z\partial_z V_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_r\\ 0\\ F_z\end{pmatrix} - \frac{1}{\varrho}\begin{pmatrix}\partial_r P\\ 0\\ \partial_z P\end{pmatrix} + \frac{\mu}{\varrho}\begin{pmatrix}\partial_r^2 V_r + \frac{1}{r}\partial_r V_r + \partial_z^2 V_r - \frac{V_r}{r^2}\\ 0\\ \partial_r^2 V_z + \frac{1}{r}\partial_r V_z + \partial_z^2 V_z\end{pmatrix},$$

ami valóban a bizonyítandó tétel. □

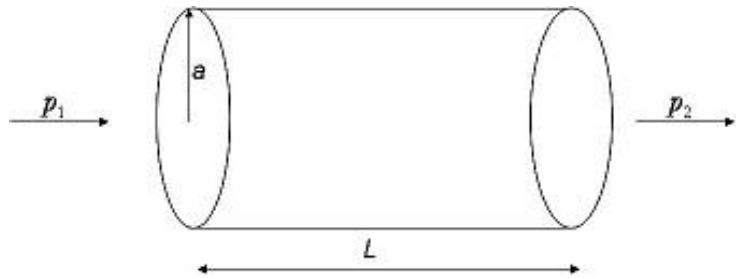
A $(v \cdot \nabla)v$ tagot hengerkoordináta-rendszerbe transzformálhattuk volna az 1.3. Állítás segítségével is.

Most folyadék csőbeli áramlásának hozamát vizsgálom. Felteszem, hogy a cső henger alakú, az áramlás stacionárius, hengerszimmetrikus, a csővel párhuzamos irányú, és ebben az irányban állandó sebességű. Ekkor a nyomás a csőre merőleges keresztmetszeteken állandó. Ha a folyadék nyomása a cső egyik végében nagyobb, akkor a nyomáskülönbség hatására a folyadék a magasabb nyomású végpont felől az alacsonyabb nyomású végpont felé áramlik.

1.11. Definíció. Ha B olyan halmazt jelöl, melyet a henger alakú H csőre merőleges síkmetszetként kapunk, a derékszögű koordinátarendszer harmadik tengelyét a cső tengelyének választjuk, és $u \in C(\overline{H})$ az áramlás sebességének harmadik koordinátafüggvénye, akkor a

$$Q(B) := \int_B u|_B$$

érték a folyadék összenyomhatatlansága miatt független B-től, ezt az áramlás adott időpontbeli *hozam*ának nevezzük.



1.12. Tétel (Poiseuille törvénye)**.** *Az L hosszúságú, a sugarú egyenes körhenger alakú csövet μ viszkozitású folyadék tölti ki. Ha a cső két végpontjában, az alaplapján és a fedőlapján a folyadék nyomása állandó, p_1, illetve p_2 ($p_1 > p_2$), akkor a nyomáskülönbség hatására kialakuló stacionárius, hengerszimmetrikus, a csővel párhuzamos irányú és ebben az irányban állandó sebességű áramlás nyomása a cső tengelyére merőleges síkmetszeteken állandó, a csővel párhuzamos irányban lineáris.*

Az áramlás sebessége a cső tengelyétől mért sugárirányú r távolság függvényében

$$v(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{p_1 - p_2}{L}(a^2 - r^2) = -\frac{1}{4\mu}\,\partial_z p\,(a^2 - r^2), \quad r \in [0, a],$$

ha a cső tengelye a derékszögű koordinátarendszer harmadik tengelyével párhuzamos.

Ekkor az áramlás hozama

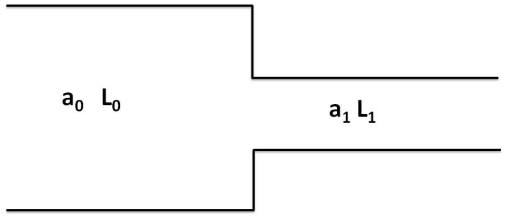
$$Q = \frac{\pi}{8}\,\frac{p_1 - p_2}{L\mu}\,a^4 = -\frac{\pi}{8\mu}\,\partial_z p\,a^4.$$

1.3. Folyadék áramlása csatlakozó szilárd falú csődarabokon keresztül

Ebben a pontban a csatlakozó csődarabokon átáramló folyadék nyomását vizsgálom. A nyomáskülönbség hatására létrejövő áramlásról felteszem, hogy mindkét csődarabon stacionárius, hengerszimmetrikus, a csővel párhuzamos irányú és ebben az irányban állandó. Felteszem továbbá, hogy a két csődarabon a folyadék viszkozitása megegyezik (μ), valamint a Poiseuille-törvény érvényes mindkét csődarabon eltekintve a cső elejétől, végétől, illetve attól a helytől, ahol a csődarabok illeszkednek. A nyomásról felteszem, hogy folytonos a két csődarab unióján.

Tehát adott két szilárd falú, közös tengelyű, egyenes körhenger alakú egymáshoz csatlakozó csődarab, ezek hosszát jelölje rendre L_0 és L_1, a sugarukat pedig a_0 és a_1. Mindkét csődarabhoz olyan derékszögű koordinátarendszert választok, amelyiknek a harmadik tengelye a cső tengelye és az alaplapján a harmadik koordináta nulla. Az áramlás hozamát, mely azonos a két csőszakaszon, jelölje Q.

Poiseuille törvénye szerint az áramlás sebessége a két csődarabon eltérő, így a sebesség nem folytonos függvénye a helynek. A modell eme hibáját elfogadjuk, ha a csődarabok kellően hosszúak.



Egymáshoz csatlakozó csődarabok

A Poiseuille-törvény szerint a nyomás a cső bármely pontjában csak a harmadik (z) koordináta függvénye. Jelölje a nyomást, mint a harmadik koordináta függvényét az első csődarabon p_0, a másodikon p_1. Ennek alapján a p_0 és p_1 függvények a következők:

$$p_0 : [0; L_0] \to \mathbb{R}, \qquad p_0(z_0) = p_0(0) - \frac{8\mu}{\pi a_0^4} Q z_0,$$

illetve

$$p_1 : [0; L_1] \to \mathbb{R}, \qquad p_1(z_1) = p_1(0) - \frac{8\mu}{\pi a_1^4} Q z_1.$$

Mivel a nyomás folytonos, ezért $p_0(L_0) = p_1(0)$, vagyis a kapcsolat a p_0 és p_1 függvények között

$$p_1(z_1) = p_0(L_0) - \frac{8\mu}{\pi a_1^4} Q z_1, \quad z_1 \in [0; L_1].$$

A következő lépésekben lenormáljuk a csövek hosszát, vagyis bevezetünk egy-egy új, dimenzió nélküli változót. Ennek célja, hogy az első cső tulajdonságait referenciának tekintve vizsgáljuk a nyomás változását a második csövön. Jelölje a lenormált hosszokat

$$Z_0 := \frac{z_0}{L_0}, \quad z_0 \in [0; L_0], \qquad Z_1 := \frac{z_1}{L_1}, \quad z_1 \in [0; L_1],$$

ezért $Z_0, Z_1 \in [0; 1]$. Az első csődarabon a nyomásváltozást jelölje Δp_0, ennek nagysága

$$|\Delta p_0| = |p_0(L_0) - p_0(0)| = \frac{8\mu}{\pi a_0^4} Q L_0.$$

A fenti új változók segítségével a következőképp definiálom a dimenzió nélküli nyomásfüggvényt a két csőszakaszon:

$$P_0 : [0; 1] \to [-1; 0], \qquad P_0(Z_0) := \frac{p_0(z_0) - p_0(0)}{|\Delta p_0|} = -Z_0,$$

$$P_1 : [0; 1] \to (-\infty; -1], \qquad P_1(Z_1) := \frac{p_1(z_1) - p_0(0)}{|\Delta p_0|}.$$

P_0 definíciójából adódik, hogy $P_0(0) = 0$ és $P_0(1) = -1$.

Behelyettesítve a fenti képletbe a $p_1(z_1)$-re és $|\Delta p_0|$-ra ismert összefüggéseket

$$P_1(Z_1) = \frac{p_0(L_0) - p_0(0)}{|\Delta p_0|} - \frac{p_0(L_0) - p_1(z_1)}{|\Delta p_0|}$$

$$= \frac{p_0(L_0) - p_0(0)}{|\Delta p_0|} - \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 \frac{z_1}{L_0} = -1 - \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 \frac{L_1}{L_0} Z_1, \qquad Z_1 \in [0; 1].$$

A definíció alapján P_1 értékei a második cső két végpontjában

$$P_1(0) = -1, \qquad P_1(1) = -1 - \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 \frac{L_1}{L_0}.$$

Teljesül továbbá, ahogy az eredeti nyomásfüggvényekre is, hogy a csatlakozási helyen P_0 és P_1 értéke egyenlő.

Most az áramlást három szilárd falú, közös tengelyű, egyenes körhenger alakú egymáshoz csatlakozó csődarabon vizsgáljuk, melyek hosszát jelölje rendre L_0, L_1 és L_2, a sugarukat pedig a_0, a_1 és a_2. Továbbra is feltesszük, hogy a folyadék összenyomhatatlan, a vizsgált csőrendszeren a viszkozitási együtthatója μ, az áramlásról azt, hogy mindhárom csődarabon teljesíti a Poiseuille-törvény feltételeit, a nyomásról pedig azt, hogy folytonos a három csődarab unióján. Mindhárom csődarabhoz olyan derékszögű koordinátarendszert választok, amelyiknek a harmadik tengelye a cső tengelye és az alaplapján a harmadik koordináta nulla. Az áramlás mindegyik csőszakaszon azonos hozamát jelölje Q.

Az előbbiekhez hasonlóan az utolsó szakasz

$$p_2(z_2) = p_2(0) - \frac{8\mu}{\pi a_2^4} Q z_2, \quad z_2 \in [0; L_2]$$

nyomásfüggvényét is lenormáljuk, így a

$$P_2(Z_2) := \frac{p_2(z_2) - p_0(0)}{|\Delta p_0|} = -1 - \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 \frac{L_1}{L_0} - \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^4 \frac{L_2}{L_0} Z_2, \qquad Z_2 \in [0; 1]$$

függvényt kapjuk. A végpontban

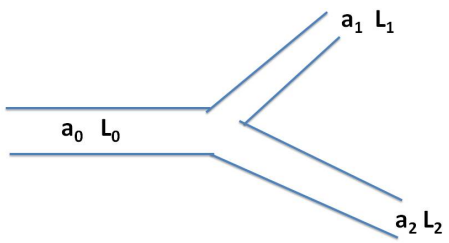
$$P_2(1) = -1 - \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 \frac{L_1}{L_0} - \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^4 \frac{L_2}{L_0},$$

tehát

$$p_2(L_2) - p_0(0) = \left[-1 - \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^4 \frac{L_1}{L_0} - \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^4 \frac{L_2}{L_0}\right] \frac{8\mu}{\pi a_0^4} Q L_0. \qquad (**)$$

1.4. Áramlás elágazáson keresztül

Tekintsük a cső egy elágazását, ahol L_0 jelöli az elágazó cső hosszát, a_0 a sugarát. A mellékágak közül az egyik ág hossza legyen L_1, sugara a_1, a másiké L_2 és a_2.



Az elágazó csődarab

Ebben az esetben is feltesszük, hogy a folyadék összenyomhatatlan, a vizsgált csőrendszeren a viszkozitási együtthatója a μ állandó, az áramlásról azt, hogy mindhárom csődarabon teljesíti a Poiseuille-törvény feltételeit, valamint azt, hogy a nyomás folytonos a három csődarab unióján. Mindegyik csődarabon a derékszögű koordinátarendszer harmadik tengelyét a csődarab tengelyének választva és a henger alaplapján a harmadik koordinátát nullának véve az egyes csődarabokon a nyomás csak a harmadik koordináta függvénye. Ha az egyváltozós nyomásfüggvényt a főágon p_0, a két mellékágon p_1 és p_2 jelöli, a hozamokat pedig rendre Q_0, Q_1 és Q_2, akkor $Q_0 = Q_1 + Q_2$ és

$$p_i : [0; L_i] \to \mathbb{R}, \qquad p_i(z_i) = p_i(0) - \frac{8\mu}{\pi a_i^4}\, Q_i z_i, \qquad i = 0, 1, 2.$$

Normáljuk le a változókat:

$$Z_i := \frac{z_i}{L_i}, \quad z_i \in [0; L_i], \quad i = 0, 1, 2.$$

Az előző ponthoz hasonlóan bevezetve a három ág dimenzió nélküli P_0, P_1 és P_2 nyomásfüggvényét, majd behelyettesítve a $p_i(z_i)$-re $(i = 1, 2)$ és $|\Delta p_0|$-ra ismert összefüggéseket

$$\begin{aligned} P_i(Z_i) \;&:=\; \frac{p_i(z_i) - p_0(0)}{|\Delta p_0|} = \frac{p_0(L_0) - p_0(0)}{|\Delta p_0|} - \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 \frac{Q_i}{Q_0}\,\frac{z_i}{L_0} \\ &=\; -1 - \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 \frac{Q_i}{Q_0}\,\frac{L_i}{L_0}\, Z_i, \qquad\qquad Z_i \in [0; 1], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

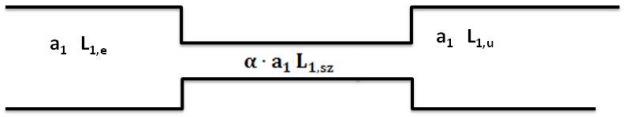
P_i értékei a mellékág két végpontjában

$$P_i(0) = -1, \qquad P_i(1) = -1 - \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 \frac{Q_i}{Q_0}\,\frac{L_i}{L_0}, \qquad i = 1, 2.$$

1.5. Érszűkület vizsgálata

Az ember artériás rendszerének kisebb sugarú ereiben, az arteriolákban a véráramlás pulzáló jellege már nem jelentős. Egy arteriolában kialakuló érszűkület hatását vizsgáljuk az áramlás nyomásfüggvényére, majd kicsivel nagyobb érhálózaton az áramlás hozamára. Tekintsük az egészséges arteriolát szilárd falú, egyenes körhenger alakú csőnek, az érszűkületes, beteg arteriolát pedig szilárd falú, közös tengelyű, egymáshoz csatlakozó egyenes körhenger alakú csődarabok együttesének, ahol az érszűkületes rész olyan rövid csődarab, melynek kisebb a sugara. Mindkét esetben a vér áramlásáról tegyük fel, hogy minden csődarabon kielégíti a Poiseuille-törvény feltételeit, a nyomásáról pedig azt, hogy a vizsgált csőhálózaton folytonos.

E törvény alapján a rövid beszűkült érszakaszon az áramlás sebessége nagyobb, mint a két szomszédos érszakaszon. Megjegyezzük, hogy ha a szűkület nagymértékű, akkor a modell nem jól írja le az áramlás sebességét.



Az érszűkület modellje

Először azt nézzük meg, hogy az 1.3. alfejezetben ismertetett modell szerint a kialakuló érszűkület milyen változást eredményezne az áramlás nyomásfüggvényében, ha a hozam változatlan maradna. A vizsgált arteriola hossza legyen L_1 és sugara a_1, melyet a beszűkült $L_{1,\mathrm{sz}}$ érszakasz a szűkület előtti $L_{1,\mathrm{e}}$ és a szűkület utáni $L_{1,\mathrm{u}}$ hosszú érszakaszra bont ($L_1 = L_{1,\mathrm{e}} + L_{1,\mathrm{sz}} + L_{1,\mathrm{u}}$). A beszűkült érszakasz belső sugarát jelölje αa_1, ahol $\alpha \in (0, 1)$ szűkület mértéke.

Az egészséges arteriolán Q hozam mellett a nyomásváltozás

$$\Delta p_{\mathrm{eg}} = -\frac{8\mu}{\pi a_1^4} Q L_1.$$

Az érszűkületes arteriola esetén bevezetjük a lenormált nyomásfüggvényeket, ahogy az 1.3. alfejezetben tettük. Ezek segítségével a (∗∗) képlet alapján a nyomásváltozás

$$\begin{aligned}\Delta p_{\mathrm{sz}} &= \left[-1 - \left(\frac{a_1}{\alpha a_1}\right)^4 \frac{L_{1,\mathrm{sz}}}{L_{1,\mathrm{e}}} - \left(\frac{a_1}{a_1}\right)^4 \frac{L_{1,\mathrm{u}}}{L_{1,\mathrm{e}}}\right] \frac{8\mu}{\pi a_0^4} Q L_{1,\mathrm{e}} \\ &= \left[-L_{1,\mathrm{e}} - \frac{1}{\alpha^4} L_{1,\mathrm{sz}} - L_{1,\mathrm{u}}\right] \frac{8\mu}{\pi a_0^4} Q \;=\; \left[-1 - \left(\frac{1}{\alpha^4} - 1\right) \frac{L_{1,\mathrm{sz}}}{L_1}\right] \frac{8\mu}{\pi a_0^4} Q L_1.\end{aligned}$$

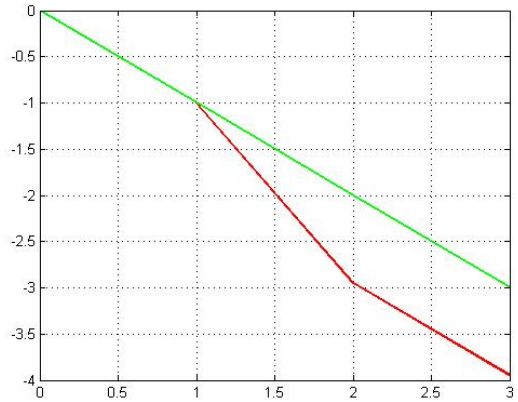
A két nyomásváltozás aránya

$$\frac{\Delta p_{\mathrm{sz}}}{\Delta p_{\mathrm{eg}}} = 1 + \left(\frac{1}{\alpha^4} - 1\right) \frac{L_{1,\mathrm{sz}}}{L_1} > 1,$$

tehát változatlan hozam mellett az érszűkület következtében nagyobbá válik a nyomásesés az arteriolán.

A beszűkült érszakasz hossza általában az ér sugarával azonos nagyságrendű, ezért nagyságrenddel vagy nagyságrendekkel kisebb az arteriola hosszánál. Ennek eredménye az, hogy csak nagymértékű érszűkület esetén lesz lényegesen nagyobb a nyomáscsökkenés a szűkületes arteriolán.

A következő képen a zöld grafikon az érszűkületmentes arteriolán mutatja a lenormált nyomásfüggvény egyenletes változását, míg a piros görbe az általunk vizsgált érszűkület esetén a lenormált nyomásfüggvény változását azonos hozam mellett.



Az két lenormált nyomásfüggvény összehasonlítása

Az tapasztalatok szerint a jelentősen beszűkült ér által ellátott szövetek nem kapnak elegendő vért, bár a keringés csökkent mértékben fennmarad. Ezért másodikként egy kicsivel nagyobb, elágazást is tartalmazó érhálózatot vizsgálunk, és ott megfigyeljük, hogyan osztoznak a mellékágak a főág hozamán érszűkület kialakulásakor.

Az alfejezet elején tett feltevések mellett vizsgáljunk egy szimmetrikus érelágazást, ahol az egyik mellékágon szűkület alakul ki. Kezdetben mindhárom érszakasz egyenes körhenger alakú, a főér sugarát a_0, hosszát L_0, ott az áramlás hozamát Q_0 jelöli. Mindkét mellékér sugara pedig legyen a_1 és hossza L_1. Ekkor rajtuk az áramlás hozama megegyezik, értéke $\frac{Q_0}{2}$, valamint mindkét mellékér végpontjában azonos a nyomás.

Tekintsük most azt az esetet, amikor az egyik mellékéren szűkület alakul ki. Mint az alfejezet előző részében, most is jelölje e mellékág αa_1 sugarú beszűkült szakaszának hosszát $L_{1,\mathrm{sz}}$. Az egészséges, illetve a szűkületes mellékéren a nyomásváltozás

$$\Delta p_{\mathrm{eg}} = -\frac{8\mu}{\pi a_1^4} Q_{\mathrm{eg}} L_1, \qquad \Delta p_{\mathrm{sz}} = \left[-1 - \left(\frac{1}{\alpha^4} - 1\right)\frac{L_{1,\mathrm{sz}}}{L_1}\right]\frac{8\mu}{\pi a_0^4} Q_{\mathrm{sz}} L_1,$$

ahol Q_{eg} jelöli az egészséges, Q_{sz} pedig a szűkületes mellékér áramlásának hozamát. Ebből kifejezve

$$\frac{Q_{\mathrm{eg}}}{Q_{\mathrm{sz}}} = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha^4} - 1\right)\frac{L_{1,\mathrm{sz}}}{L_1}\right]\frac{\Delta p_{\mathrm{eg}}}{\Delta p_{\mathrm{sz}}}.$$

A két mellékér hozamarányát, valamint a beteg mellékér szűkület előtti és utáni hozama arányát mutatják a következő táblázatok abban az esetben, amikor a két mellékéren a nyomásváltozás megegyezik. $Q_{\mathrm{n}} := \frac{Q_0}{2}$ a mellékér normális, az érszűkület kialakulása előtti hozamát jelöli.

$\frac{L_{1,\mathrm{sz}}}{L_1} = \frac{1}{10}$

α	$\frac{Q_{\mathrm{eg}}}{Q_{\mathrm{sz}}}$	$\frac{Q_{\mathrm{n}}}{Q_{\mathrm{sz}}}$
$\frac{2}{3}$	1,41	1,20
$\frac{1}{2}$	2,5	1,75
$\frac{1}{3}$	9	5
$\frac{1}{4}$	26,5	13,75

$\frac{L_{1,\mathrm{sz}}}{L_1} = \frac{1}{20}$

α	$\frac{Q_{\mathrm{eg}}}{Q_{\mathrm{sz}}}$	$\frac{Q_{\mathrm{n}}}{Q_{\mathrm{sz}}}$
$\frac{2}{3}$	1,2	1,1
$\frac{1}{2}$	1,75	1,38
$\frac{1}{3}$	5	3
$\frac{1}{4}$	13,75	7,38

$\frac{L_{1,\mathrm{sz}}}{L_1} = \frac{1}{30}$

α	$\frac{Q_{\mathrm{eg}}}{Q_{\mathrm{sz}}}$	$\frac{Q_{\mathrm{n}}}{Q_{\mathrm{sz}}}$
$\frac{2}{3}$	1,14	1,07
$\frac{1}{2}$	1,5	1,25
$\frac{1}{3}$	3,67	2,33
$\frac{1}{4}$	9,5	4,75

A táblázatokból is kiolvasható, hogy e modell szerint az érszűkület mértéke erősen, a beszűkült érszakasz hossza kevésbé csökkenti a beteg ág hozamát, egyúttal a mögöttes szövetek vérellátását, ami összhangban van a klinikai tapasztalatokkal.

2. fejezet

Bessel-függvények

Ebben a fejezetben szeretném bemutatni a nullindexű, illetve 1-indexű Bessel-differenciálegyenleteket, majd az elsőfajú, ilyen indexű Bessel-függvényeket, utána néhány kapcsolatot a két függvény között. Vizsgálom az elsőfajú nullindexű Bessel-függvény zérushelyeit, végül becslést adok egy elsőfajú nullindexű Bessel-függvényt tartalmazó összetett függvényre.

2.1. Nullindexű Bessel-függvények

2.1. Definíció. A

$$t\,Y''(t) + Y'(t) + t\,Y(t) = 0$$

egyenletet *nullindexű Bessel-féle differenciálegyenlet*nek nevezzük.

Keresünk olyan $Y\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reguláris függvényt, mely kielégíti a fenti differenciálegyenletet. Tegyük fel, hogy Y az origó egy környezetében előáll 0 középpontú hatványsor összegfüggvényeként, azaz

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Ekkor a Cauchy–Hadamard-tétel szerint a jobb oldalon szereplő hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens egy origó középpontú nyílt körlapon. Helyettesítsük be Y hatványsor-alakját a differenciálegyenletbe. A hatványsor lokális egyenletes konvergenciája miatt a fenti nyílt körlapon az összegfüggvény deriváltját tagonkénti deriválással számol-

hatjuk ki. Az origónak ebben a környezetében

$$t \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n t^{n-1} + t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\, c_{n+1} t^n + c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)c_{n+1} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} t^n =$$

$$c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{n+1}(n+1)n + c_{n+1}(n+1) + c_{n-1}\right] t^n = 0.$$

A hatványsorba fejtés egyértelműsége miatt minden együttható nulla, ezért a

$$c_1 = 0, \qquad c_{n+1} = -\frac{c_{n-1}}{(n+1)^2} \qquad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

összefüggések adódnak. Tehát az összes páratlan indexű együttható nullával egyenlő, míg a páros indexűek c_0 segítségével kifejezhetők:

$$c_{2n-1} = 0, \quad c_{2n} = \frac{(-1)^n \cdot c_0}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \quad (n \in \mathbb{Z}^+).$$

A nullindexű Bessel-féle differenciálegyenlet 0 középpontú hatványsor összegfüggvényeként előállítható megoldása ezek szerint csak az alábbi alakú lehet:

$$Y(t) = c_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n} \cdot (n!)^2}\, t^{2n}.$$

Az Y-ra nyert hatványsor minden pontban konvergens, ugyanis a hatványsor konvergenciasugara a Cauchy–Hadamard-tétel szerint

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{4^n (n!)^2}}} = \infty.$$

A $c_0 := 1$ választás melletti, 0 középpontú hatványsor összefüggvényeként előállított megoldás kitüntetett szerepű.

2.2. Definíció. *Elsőfajú nullindexű Bessel-függvény*nek nevezzük a

$$J_0(t) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n} \cdot (n!)^2}\, t^{2n}, \quad t \in \mathbb{C}$$

függényt.

A nullindexű Bessel-féle differenciálegyenlet másodrendű lineáris differenciálegyenlet, mely a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmaz bármely egyszeresen összefüggő nyílt részhalmazán elsőrendű explicit differenciálegyenlet-rendszerré írható át. Ennek megoldásai kétdimenziós vektorteret

alkotnak, ezért ott a nullindexű Bessel-féle differenciálegyenlet megoldásai is kétdimenziós vektorteret alkotnak.

Belátható, hogy a $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ bemetszett komplex síkon az egyik J_0-tól lineárisan független megoldás

$$Y_0(t) := \frac{2}{\pi}\Big(\big(\ln t + \gamma - \ln 2\big)J_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{H_n}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\,t^{2n}\Big),$$

ahol $H_n := \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ a harmonikus számok és $\gamma := \lim(H_n - \ln n)$ az Euler–Mascheroni-féle állandó. Az Y_0 függvényt *másodfajú nullindexű Bessel-függvény*nek nevezzük.

Tehát a $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ halmazon a nullindexű Bessel-féle differenciálegyenlet tetszőleges Y megoldásához létezik olyan $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, hogy a megoldás előállítható $Y = c_1J_0 + c_2Y_0$ alakban.

2.2. Elsőfajú 1-indexű Bessel-függvény

2.3. Definíció. Az

$$x^2\cdot y''(x) + x\cdot y'(x) + (x^2-1)\cdot y(x) = 0, \quad x\in\mathbb{C}$$

differenciálegyenletet 1-*indexű Bessel-féle differenciálegyenlet*nek nevezzük.

Keresünk olyan $y:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ reguláris függvényt, mely kielégíti a fenti differenciálegyenletet. Legyen

$$Y:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}, \quad Y(x) := \frac{1}{x}\cdot y(x)$$

az új ismeretlen függvény. Helyettesítsük be Y-t az 1-indexű Bessel-féle differenciálegyenletbe:

$$x^2\cdot\big(2\,Y'(x) + x\,Y''(x)\big) + x\cdot\big(Y(x) + x\,Y'(x)\big) + (x^2-1)\cdot x\,Y(x) =$$

$$x^2\left(x\cdot Y''(x) + 3\cdot Y'(x) + x\cdot Y(x)\right) = 0.$$

Tegyük fel, hogy az

$$x\cdot Y''(x) + 3\cdot Y'(x) + x\cdot Y(x) = 0$$

differenciálegyenletnek van a 0 pontban analitikus megoldása, vagyis az origó egy környezetében

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

A Cauchy–Hadamard-tétel alapján a jobb oldalon szereplő hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens egy origó középpontú nyílt körlap pontjaiban. Ezt a hatványsor-alakot a differenciálegyenletbe helyettesítve, és a lokális egyenletes konvergencia végett tagonként deriválva az

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

$$3 \cdot c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{n+1} \cdot (n+1) \cdot n + 3 \cdot c_{n+1} \cdot (n+1) + c_{n-1} \right] x^n = 0$$

összefüggést kapjuk az origó egy környezetében. A hatványsor együtthatóinak egyértelműsége miatt a

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = -\frac{c_{n-1}}{(n+1) \cdot (n+3)} \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

feltételek adódnak. Ezek alapján a páratlan indexű együtthatók mind nullával egyenlők, a páros indexűeket pedig meghatározza c_0:

$$c_{2n-1} = 0, \quad c_{2n} = \frac{(-1)^n \cdot c_0}{2^{2n} \cdot n! \cdot (n+1)!} \qquad (n \in \mathbb{Z}^+).$$

A keresett megoldás csak az alábbi alakú lehet:

$$Y(x) = c_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n} \cdot n! \cdot (n+1)!}\, x^{2n}.$$

Az Y-ra nyert hatványsor mindenütt konvergens, ugyanis a Cauchy–Hadamard-tétel alapján a konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{4^n n!(n+1)!}}} = \infty.$$

Ennek megfelelően az 1-indexű Bessel-féle differenciálegyenlet megoldását az

$$y(x) = x \cdot Y(x) = c_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n! \cdot (n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{C}$$

alakban nyerjük.

A $c_0 := \frac{1}{2}$ értékre kapott függvénynek nevet adtak:

2.4. Definíció. A

$$J_1(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1} \cdot n! \cdot (n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{C}$$

függvényt *elsőfajú* 1-*indexű Bessel-függvény*nek nevezzük.

2.3. Kapcsolat a J_0 és J_1 Bessel-függvények között

2.5. Állítás. A J_0 és J_1 Bessel-függvények között fennállnak a következő összefüggések:

1. $J_1(x) = -J_0'(x), \ \ x \in \mathbb{C}$.
2. $J_0(x) = \frac{1}{x} \cdot J_1(x) + J_1'(x), \ \ x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
3. $\int x J_0(x) \, \mathrm{d}x = x \, J_1(x) + C, \ \ C \in \mathbb{C}$,
4. $\int x J_0(cx) \, \mathrm{d}x = \frac{x}{c} \, J_1(cx) + C, \quad x \in \mathbb{C}, \ \ c, C \in \mathbb{C}, \ \ c \neq 0$.

Bizonyítás. Az első egyenlőség igazolásához induljunk ki J_0 definíciójából és abból, hogy J_0 hatványsora mindenütt lokálisan egyenletesen konvergens, ezért a hatványsor összegfüggvénye tagonkénti deriválással kapható:

$$-J_0'(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot x^{2k-1} =$$
$$\sum_{k-1=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{2(k-1)+1} \cdot (k-1)! \cdot k!} x^{2(k-1)+1} = J_1(x), \quad x \in \mathbb{C}.$$

Az 1-indexű Bessel-függvényt előállító 0 középpontú hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens $\mathbb{C}$-n, ezért a deriválás itt is tagonként végezhető:

$$J_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{2^{2k+1} \cdot k! \cdot (k+1)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Ezt felhasználva $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén

$$\frac{1}{x} J_1(x) + J_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k+1} \cdot k! \cdot (k+1)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{2^{2k+1} \cdot k! \cdot (k+1)!} x^{2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k} \cdot (k!)^2} x^{2k} = J_0(x),$$

vagyis igazoltuk az állítás második egyenlőségét.

Az állítás harmadik pontjának bizonyításához felhasználjuk a második pontbeli azonosságot:

$$\int x \cdot J_0(x)\,\mathrm{d}x = \int \big(J_1(x) + x \cdot J_1'(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \big(x \cdot J_1(x)\big)'\,\mathrm{d}x = x \cdot J_1(x) + C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

A negyedik állítás a harmadik állításban az $y := cx$ helyettesítést elvégezve következik:

$$\int x \cdot J_0(cx)\,\mathrm{d}x = \int \frac{y}{c} \cdot J_0(y)\,\frac{1}{c}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{c^2}\int y \cdot J_0(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{c^2} \cdot y\,J_1(y) + C = \frac{x}{c}\,J_1(cx) + C.$$

□

2.4. A J_0 Bessel-függvény zérushelyeinek vizsgálata

2.6. Állítás. $J_0(\overline{t}) = \overline{J_0(t)}$, $t \in \mathbb{C}$.

Bizonyítás. Az

$$a_n := (-1)^n\,\frac{1}{2^{2n} \cdot (n!)^2}, \quad n \in \mathbb{Z}_0^+$$

valós együtthatókkal $J_0(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n}$, $t \in \mathbb{C}$. A konjugált és a határérték, valamint a konjugált és a szereplő algebrai műveletek felcserélhetők, ezért

$$\overline{J_0(t)} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k t^{2k}} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k t^{2k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k t^{2k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{t}^{2k} = J_0(\overline{t}), \quad t \in \mathbb{C}.$$

□

2.7. Tétel. *A J_0 függvénynek nincs valódi komplex zérushelye.*

Bizonyítás. Indirekt módon először tegyük fel, hogy a J_0 függvénynek van olyan komplex z_0 zérushelye, melyre teljesül, hogy $\operatorname{Re} z_0 \neq 0$ és $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. A 2.6. Állítás szerint ha z_0 gyöke J_0-nak, akkor $\overline{z}_0$ is az.

A J_0 Bessel-függvény kielégíti a nullindexű Bessel-féle differenciálegyenletet, így

$$t^2 J_0''(t) + t J_0'(t) + t^2 J_0(t) = 0, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Tetszőleges $\lambda, x \in \mathbb{C}$ esetén a $t := \lambda x$ helyen

$$(\lambda x)^2 J_0''(\lambda x) + \lambda x J_0'(\lambda x) + (\lambda x)^2 J_0(\lambda x) = 0.$$

Ezért az $y(x) := J_0(\lambda x)$, $x \in \mathbb{C}$ függvényre $y'(x) = \lambda\, J_0(\lambda x)$, $y''(x) = \lambda^2 J_0(\lambda x)$, $x \in \mathbb{C}$ és

$$x\big(x \cdot y'(x)\big)' + \lambda^2 x^2 y(x) = x^2 y''(x) + x y'(x) + \lambda^2 x^2 y(x) =$$

$$x^2\, \lambda^2 J_0''(\lambda x) + x\, \lambda J_0'(\lambda x) + \lambda^2 x^2 J_0(\lambda x) = 0, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Legyen $\lambda_1 := z_0$, $\lambda_2 := \overline{z}_0$, ekkor az $x \mapsto J_0(z_0 x)$ és az $x \mapsto J_0(\overline{z}_0 x)$, $x \in \mathbb{C}$ függvények a fentiek alapján kielégítik a

$$z_0\, x\big(x \cdot J_0'(z_0 x)\big)' + z_0^2 x^2 J_0(z_0 x) = 0,$$
$$\overline{z}_0\, x\big(x \cdot J_0'(\overline{z}_0 x)\big)' + \overline{z}_0^2 x^2 J_0(\overline{z}_0 x) = 0$$

differenciálegyenleteket.

Szorozzuk $x \neq 0$ esetén az első egyenletet a $\frac{J_0(\overline{z}_0 x)}{x}$ számmal, a másodikat a $\frac{J_0(z_0 x)}{x}$ számmal, majd az első egyenletből vonjuk ki a másodikat:

$$z_0\, J_0(\overline{z}_0 x)\big(x \cdot J_0'(z_0 x)\big)' - \overline{z}_0\, J_0(z_0 x)\big(x \cdot J_0'(\overline{z}_0 x)\big)' + x(z_0^2 - \overline{z}_0^2) J_0(z_0 x) J_0(\overline{z}_0 x) = 0.$$

Az így kapott egyenlet mindkét oldalát integráljuk a [0,1] intervallumon, majd átrendezzük az egyenletet:

$$(z_0^2 - \overline{z}_0^2) \int_0^1 x J_0(z_0 x) J_0(\overline{z}_0 x)\, \mathrm{d}x = \overline{z}_0 \int_0^1 J_0(z_0 x)\big(x \cdot J_0'(\overline{z}_0 x)\big)'\, \mathrm{d}x - z_0 \int_0^1 J_0(\overline{z}_0 x)\big(x \cdot J_0'(z_0 x)\big)'\, \mathrm{d}x.$$

Parciális integrálással külön-külön a jobb oldali két tag

$$\overline{z}_0 \int_0^1 J_0(z_0 x)\big(x \cdot J_0'(\overline{z}_0 x)\big)' \mathrm{d}x = \overline{z}_0 J_0(z_0) J_0'(\overline{z}_0) - \overline{z}_0 \int_0^1 z_0 J_0'(z_0 x)\big(x \cdot J_0'(\overline{z}_0 x)\big)\, \mathrm{d}x,$$
$$z_0 \int_0^1 J_0(\overline{z}_0 x)\big(x \cdot J_0'(z_0 x)\big)' \mathrm{d}x = z_0 J_0(\overline{z}_0) J_0'(z_0) - z_0 \int_0^1 \overline{z}_0 J_0'(\overline{z}_0 x)\big(x \cdot J_0'(z_0 x)\big)\, \mathrm{d}x.$$

Kivonva egymásból a két egyenletet, majd az előzőbe beírva

$$\big(z_0^2 - \overline{z}_0^2\big) \int_0^1 x J_0(z_0 x) J_0(\overline{z}_0 x)\, \mathrm{d}x = \overline{z}_0 J_0(z_0) J_0'(\overline{z}_0) - z_0 J_0(\overline{z}_0) J_0'(z_0).$$

A feltevésünk szerint z_0, és így $\overline{z}_0$ is gyöke J_0-nak, emiatt az egyenlet jobb oldala 0. A bal oldalon az első tényező nem nulla, ezért a második nulla. A 2.6. Állítás szerint bármely $x \in [0,1]$ számra

$$\overline{J_0(z_0 x)} = J_0(\overline{z_0 x}) = J_0(\overline{z}_0 x).$$

Ezeket felhasználva

$$\int_0^1 x\,|J_0(z_0x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xJ_0(z_0x)J_0(\overline{z}_0x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Mivel az integrandus nemnegatív és folytonos, egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $|J_0(z_0x)| = 0$ minden $x \in [0,1]$ esetén. Azonban $J_0(0) = 1$ és J_0 folytonos függvény, ezért létezik 0-nak olyan környezete, ahol $J_0 \neq 0$. Ez viszont ellentmondás.

Ha a J_0 függvénynek $z_0 = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ képzetes zérushelye, akkor a definícióból adódik

$$J_0(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\,(i\beta)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\,\beta^{2n},$$

ami pozitív valós szám. Ezzel ismét ellentmondásra jutottunk. □

2.5. Egy Bessel-függvényt tartalmazó összetett függvény becslése

Ebben a részben szeretnék egy összetett függvényre felső becslést mutatni. A függvény kiemelt szerepe a következő fejezetben a pulzáló áramlás sebességfüggvényének vizsgálatakor mutatkozik meg. Legyen tehát

$$F\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}, \quad F(\Omega) := \left|1 - \frac{1}{J_0\big(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\big)}\right|,$$

ahol J_0 az elsőfajú nullindexű Bessel-függvény.

A J_0 Bessel-függvénynek a 2.7. Tétel szerint nem zérushelye $\Omega\, i^{\frac{3}{2}}$, $\Omega \in \mathbb{R}^+$, ezért az F függvény definíciója értelmes.

2.8. Állítás. Az előbb definiált F függvényre fennáll a következő becslés:

$$F(\Omega) < \frac{\Omega^2}{4}, \quad \Omega \in \big(0; 2\sqrt{2}\,\big].$$

Bizonyítás. $J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)$ algebrai alakját jelölje $J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right) = \alpha + \beta i$, ahol $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség ekivalens alakja:

$$\left|1 - \frac{1}{\alpha + \beta i}\right| \leq \frac{\Omega^2}{4}.$$

Az abszolút értéket kiszámolva, majd az egyenlőtlenséget átrendezve

$$1-\left(\frac{\Omega^4}{16}-1\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)\leq 2\alpha. \qquad (*)$$

Írjuk fel az egyenlőtlenségben szereplő Bessel-függvény értékét a megadott helyen a definíció alapján:

$$J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}\cdot(k!)^2}\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}\cdot(k!)^2}\, i^k\,\Omega^{2k},\quad \Omega\in\mathbb{R}.$$

Az abszolút konvergens sort a páros, illetve páratlan indexű tagok összegére bontva megkapjuk a függvény értékének valós, illetve képzetes részét:

$$\mathrm{Re}\left(J_0\big(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\big)\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4l}\cdot((2l)!)^2}\cdot(-1)^l\cdot\Omega^{4l},$$

$$\mathrm{Im}\left(J_0\big(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\big)\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4l+2}\cdot((2l+1)!)^2}\cdot(-1)^l\cdot\Omega^{4l+2}.$$

Mind a valós, mind a képzetes részt megadó sor egy indextől kezdve Leibniz-típusú. Vizsgáljuk meg Ω függvényében, mikor áll ez fenn a kezdőindextől.

1. $\mathrm{Re}\left(J_0\big(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\big)\right)$ vizsgálata:

   $$a_l:=(-1)^l\frac{1}{2^{4l}\cdot((2l)!)^2}\,\Omega^{4l},\quad l\in\mathbb{Z}_0^+\quad \text{esetén}\quad \left|\frac{a_{l+1}}{a_l}\right|=\frac{\Omega^4}{2^4(2l+1)^2(2l+2)^2},$$

   ebből $\frac{\Omega^4}{2^6}<1$, vagyis $|\Omega|<2\sqrt{2}$ a feltétel.

2. $\mathrm{Im}\left(J_0\big(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\big)\right)$ vizsgálata:

   $$b_l:=(-1)^l\frac{1}{2^{4l+2}\cdot((2l+1)!)^2}\,\Omega^{4l+2},\quad l\in\mathbb{Z}_0^+\quad \text{esetén}\quad \left|\frac{b_{l+1}}{b_l}\right|=\frac{\Omega^4}{2^4(2l+2)^2(2l+3)^2},$$

   amiből $\frac{\Omega^4}{2^4\cdot(3!)^2}<1$, vagyis $|\Omega|<2\sqrt{6}$ a feltétel.

Ha $\Omega\in\left(0;2\sqrt{2}\,\right]$, akkor $J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)$-nak mind a valós, mind a képzetes részét megadó sor Leibniz-típusú, amit felváltva felülről, illetve alulról becsülnek a részletösszegei.

Először $\Omega\in(0;2]$ esetén igazolom a becslést. A Leibniz-típusú sor összegeként kapott α-t alulról becsülöm, ha a sornak csak véges sok tagját tekintem úgy, hogy az utolsó tag előjele negatív. Jelölje α^* a sor második részletösszegét, így nemnegatív alsó becslést kapok:

$$0\leq\alpha^*:=1-\frac{\Omega^4}{2^4\cdot(2!)^2}\leq\alpha.$$

Felülről becsülhetem a nemnegatív α-t a sor harmadik részletösszegével, a szintén nemnegatív β-t a sora első tagjával, ezért

$$0 \leq \alpha^2 \leq \left(1 - \frac{\Omega^4}{2^4 \cdot (2!)^2} + \frac{\Omega^8}{2^8 \cdot (4!)^2}\right)^2, \quad 0 \leq \beta^2 \leq \left(\frac{\Omega^2}{2^2 \cdot (1!)^2}\right)^2.$$

Tehát a bizonyítandó $(*)$ egyenlőtlenség bal oldalát felülről becsülöm a $[0,2]$ intervallumon:

$$1+\left(1 - \frac{\Omega^4}{16}\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \leq 1+\left(1 - \frac{\Omega^4}{16}\right)\left[\left(1 - \frac{\Omega^4}{2^4 \cdot (2!)^2} + \frac{\Omega^8}{2^8 \cdot (4!)^2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2}{2^2 \cdot (1!)^2}\right)^2\right].$$

Elegendő lenne megmutatnom, hogy

$$1 + \left(1 - \frac{\Omega^4}{16}\right)\left[\left(1 - \frac{\Omega^4}{2^4 \cdot (2!)^2} + \frac{\Omega^8}{2^8 \cdot (4!)^2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2}{2^2 \cdot (1!)^2}\right)^2\right] < 2 - \frac{2 \cdot \Omega^4}{2^4 \cdot (2!)^2}.$$

Elvégezve a négyzetreemelést, majd összevonva a tagokat

$$2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^4 + \frac{125}{288} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^8 - \frac{77}{1152} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^{12} + \frac{578}{(24)^4} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^{16} - \frac{1}{(24)^4} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^{20} <$$

$$2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^4.$$

A két oldal különbsége az

$$f\colon (0,2] \to \mathbb{R}, \quad f(\Omega) := \left(\frac{\Omega}{2}\right)^8 \left[\frac{125}{288} - \frac{77}{1152} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^4 + \frac{578}{(24)^4} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^8 - \frac{1}{(24)^4} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^{12}\right]$$

függvény, amiről függvényvizsgálat segítségével belátható, hogy negatív, ezzel igazoltam a $(*)$ egyenlőtlenséget $\Omega \in (0,2]$ esetén.

Az $\Omega \in \left(2, 2\sqrt{2}\,\right]$ esetet az előbbihez hasonlóan vizsgálom. A bizonyítandó $(*)$ egyenlőtlenség jobb oldalának alsó becslésére a már definiált α^* második részletösszeget fogom használni. A bal oldalon szereplő kifejezést akkor becsülöm felülről, ha az $\alpha^2+\beta^2$ összeget alulról becsülöm. Mivel α^* nemnegatív alsó becslése α-nak, ezért

$$(\alpha^*)^2 = \left(1 - \frac{\Omega^4}{2^4 \cdot (2!)^2}\right)^2 \leq \alpha^2.$$

Jelölje β^* a β-t előállító sor második részletösszegét, vagyis

$$\beta^* := \frac{\Omega^2}{2^2 \cdot (1!)^2} - \frac{\Omega^6}{2^6 \cdot (3!)^2}.$$

Mivel $\Omega \in \left(2, 2\sqrt{2}\right]$ esetén β^* nemnegatív, így

$$(\beta^*)^2 = \left(\frac{\Omega^2}{2^2 \cdot (1!)^2} - \frac{\Omega^6}{2^6 \cdot (3!)^2}\right)^2 \leq \beta^2.$$

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalának felső becslése:

$$1 - \left(\frac{\Omega^4}{16} - 1\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \leq 1 - \left(\frac{\Omega^4}{2^4} - 1\right)\left[\left(1 - \frac{\Omega^4}{2^4 \cdot (2!)^2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2}{2^2} - \frac{\Omega^6}{2^6 \cdot (3!)^2}\right)^2\right].$$

Elegendő lenne igazolnom, hogy

$$1 - \left(\frac{\Omega^4}{2^4} - 1\right)\left[\left(1 - \frac{\Omega^4}{2^4 \cdot (2!)^2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega^2}{2^2} - \frac{\Omega^6}{2^6 \cdot (3!)^2}\right)^2\right] \leq 2 - \frac{2}{2^4 \cdot (2!)^2}\,\Omega^4.$$

A négyzetreemeléseket elvégezve és a tagokat összevonva

$$2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^4 - \frac{71}{144} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^8 - \frac{1}{162} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^{12} - \frac{1}{1296} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^{16} < 2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Omega}{2}\right)^4.$$

A két oldal különbségeként a

$$g\colon \left(2, 2\sqrt{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad g(\Omega) := -\left(\frac{\Omega}{2}\right)^8 \left[\frac{71}{144} + \frac{1}{162}\left(\frac{\Omega}{2}\right)^4 + \frac{1}{1296}\left(\frac{\Omega}{2}\right)^8\right]$$

mindenütt negatív függvényt kapom. Ezzel igazoltam az állítást. $\square$

3. fejezet

Pulzáló áramlás szilárd falú csőben

Ebben a fejezetben szeretném vizsgálni a pulzáló folyadékáramlást szilárd falú csőben, amihez az áramlást leíró Navier–Stokes-egyenlet hengerkoordinátarendszerbeli alakját használom. Bessel-függvények segítségével vizsgálom az áramlás sebességfüggvényét, majd a hozamfüggvényét. Végül összehasonlítom a stacionárius és pulzáló áramlás sebességét, illetve hozamát.

3.1. Pulzáló áramlás sebességfüggvénye

Tekintsünk egy egyenes körhenger alakú szilárd falú csőszakaszt. Felteszem, hogy a folyadék viszkózus és összenyomhatatlan, melynek μ viszkozitási együtthatója és ϱ sűrűsége állandó. A viszkozitás miatt felteszem, hogy a cső falánál az áramlás sebessége nulla. Felteszem még, hogy az áramló folyadékra nem hat külső erő, továbbá a henger alaplapján és fedőlapján is állandó a nyomás.

Jelölje L a cső hosszát, a a sugarát. A koordinátarendszer harmadik tengelyének a cső tengelyét választom. A csőszakasz elején a nyomást jelölje p_1, a végén p_2. A nyomáskülönbség hatására létrejövő stacionárius, hengerszimmetrikus, tengelyirányú és ebben az irányban állandó sebességű áramlás sebességét Poiseuille törvénye szerint a következő függvény írja le:

$$u_s : [0, a] \to \mathbb{R}_0^+ \qquad u_s(r) = \frac{p_2 - p_1}{4\mu L} \left(r^2 - a^2\right),$$

ahol r a cső tengelyétől mért sugárirányú távolság.

Legyen $k_s := \frac{p_2 - p_1}{L} < 0$ a nyomásgradiens, ekkor a sebességfüggvény rövidebb alakja

$$u_s(r) = \frac{k_s}{4\mu}\left(r^2 - a^2\right), \quad r \in [0, a].$$

Jelölje $\widehat{u}_s$ a stacionárius áramlás sebességfüggvényének maximális értékét, azaz a függvény helyettesítési értékét az $r = 0$ pontban:

$$\widehat{u}_s := -\frac{k_s a^2}{4\mu}.$$

E stacionárius áramláshoz viszonyítva vizsgálom a továbbiakban a pulzáló áramlást, annak sebességét. Tekintsük ugyanezen a csőszakaszon azt az esetet, mikor az áramlás nem stacionárius, hanem az időváltozóban periodikus és a térváltozóktól független nyomásgradiens hajtja.

Jelölje V a pulzáló áramlás sebességfüggvényét, P pedig a nyomásfüggvényét hengerkoordináta-rendszerben megadva. Mindkettőről felteszem, hogy kellően sima és hengerszimmetrikus. Tehát a $T := (0; a) \times (0; 2\pi) \times (0; L)$ téglatestre, az I nyílt intervallumra és a

$$V \colon \overline{I} \times \overline{T} \to \mathbb{R}^3, \qquad P \colon \overline{I} \times \overline{T} \to \mathbb{R}$$

függvényekre teljesüljön

$$V \in C^{1,2}(I \times T; \mathbb{R}^3) \cap C(\overline{I} \times \overline{T}; \mathbb{R}^3), \qquad P \in C^1(I \times T) \cap C(\overline{I} \times \overline{T}),$$

a hengerszimmetria, valamint a

$$V(t, a, \varphi, z) = 0, \quad t \in I,\ \varphi \in [0; 2\pi),\ z \in (0; L)$$

peremfeltétel.

Mivel a cső fala szilárd és a nyomás a térváltozóktól független, most is hengerszimmetrikus, tengelyirányú és abban az irányban állandó V megoldást keresünk, így a sebesség csak a sugárirányú hengerkoordinátától függ. Az ilyen sebességfüggvényre adódik, hogy a Navier–Stokes-egyenlet hengerkoordinátarendszerbeli alakjában

$$V_r \cdot \partial_r V_z = 0, \qquad V_z \cdot \partial_z V_z = 0, \qquad \partial_z^2 V_z = 0 \quad I \times T\text{-n}.$$

Tehát a harmadik koordinátaegyenlet a következő alakra egyszerűsödik:

$$\partial_t V_z = -\frac{1}{\varrho}\partial_z P + \frac{\mu}{\varrho}\left(\partial_r^2 V_z + \frac{1}{r}\partial_r V_z\right) \quad I \times T\text{-n}.$$

Átrendezve az egyenletet és a $\nu := \frac{\mu}{\varrho}$ ún. *kinematikai viszkozitás*t bevezetve

$$\partial_r^2 V_z + \frac{1}{r}\partial_r V_z - \frac{1}{\nu}\partial_t V_z = \frac{1}{\mu}\partial_z P \quad I \times T\text{-n.}$$

A V-re vonatkozó homogén Dirichlet-peremfeltétel szerint a sebességfüggvénynek a tengelyirányú koordinátafüggvényére a peremfeltétel

$$V_z(t, a, \varphi, z) = 0, \quad t \in I,\ \varphi \in [0; 2\pi),\ z \in (0; L).$$

Az egyszerűség kedvéért azt az esetet vizsgálom, amikor az időváltozóban periodikus nyomásgradiens-függvény

$$\partial_z P := -K \cdot \cos(\omega t), \quad t \in I$$

alakú, ahol $K, \omega \in \mathbb{R}^+$ állandók. (Itt $\frac{\omega}{2\pi}$ az oszcilláció frekvenciája.) Ekkor a

$$\partial_r^2 V_z(t, r, \varphi, z) + \frac{1}{r}\partial_r V_z(t, r, \varphi, z) - \frac{1}{\nu}\partial_t V_z(t, r, \varphi, z) = -\frac{K}{\mu}\cos(\omega t) \quad (t, r, \varphi, z) \in I \times T$$

differenciálegyenletet kapjuk, ahol V_z a második és a harmadik térváltozójától független.

Keressük e differenciálegyenlet helyett

$$\partial_r^2 V_z^*(t, r) + \frac{1}{r}\partial_r V_z^*(t, r) - \frac{1}{\nu}\partial_t V_z^*(t, r) = -\frac{K}{\mu}e^{i\omega t}, \quad (t, r) \in I \times \left(B_{\mathbb{C}}(0; a) \setminus \mathbb{R}_0^-\right) \qquad (*)$$

olyan $V_z^* \colon \overline{I} \times \overline{B}_{\mathbb{C}}(0; a) \to \mathbb{C}$ folytonos megoldását, amelyik t szerint a valós, r szerint a komplex értelemben differenciálható $\mathbb{R} \times B_{\mathbb{C}}(0; a)$-n. A $(*)$ differenciálegyenlet valós része éppen az előző valós differenciálegyenlet a második és a harmadik térváltozótól eltekintve, ezért ha V_z^* megoldása $(*)$-nak, akkor $\operatorname{Re} V_z^*$ megoldása a valós differenciálegyenletnek.

Keressük a megoldást

$$V_z^*(t, r) := W(r) \cdot e^{i\omega t}, \quad (t, r) \in \overline{I} \times \left(\overline{B}_{\mathbb{C}}(0; a) \setminus \mathbb{R}_0^-\right)$$

alakban, ahol $W : \overline{B}_{\mathbb{C}}(0; a) \setminus \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}$ folytonos függvény és reguláris a $B_{\mathbb{C}}(0; a) \setminus \mathbb{R}_0^-$ bemetszett nyílt körlemezen. V_z^* fenti alakját behelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$W''(r)e^{i\omega t} + \frac{1}{r}W'(r)e^{i\omega t} - \frac{1}{\nu}W(r)e^{i\omega t} \cdot i\omega = -\frac{K}{\mu}e^{i\omega t}.$$

Egyszerűsítve $e^{i\omega t}$-vel a kapott

$$W''(r) + \frac{1}{r}W'(r) + \frac{i^3\omega}{\nu}W(r) = -\frac{K}{\mu}, \quad r \in B_{\mathbb{C}}(0; a) \setminus \mathbb{R}_0^-$$

inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$W_p(r) := -\frac{K}{\varrho\omega}\, i, \quad r \in \overline{B}_{\mathbb{C}}(0;a) \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

A homogén differenciálegyenlet megoldása céljából legyen $c := \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot i^{\frac{3}{2}}$, és vezessük be a következő függvényt:

$$\widetilde{W}(r) := W_h\left(\frac{r}{c}\right), \quad r \in \overline{B}_{\mathbb{C}}\left(0; \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, a\right) \setminus \mathbb{R}_0^-,$$

ahol W_h a homogén egyenlet megoldása. Ezek alapján

$$W_h(r) = \widetilde{W}(c \cdot r), \qquad r \in \overline{B}_{\mathbb{C}}(0;a) \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

Ezt helyettesítsük be a homogén differenciálegyenletbe:

$$c^2\, \widetilde{W}''(c \cdot r) + \frac{c}{r}\, \widetilde{W}'(c \cdot r) + \frac{i^3\omega}{\nu}\, \widetilde{W}(c \cdot r) = 0.$$

Osztva mindkét oldalt c^2-tel és az $y := c \cdot r$ jelölést használva a

$$\widetilde{W}''(y) + \frac{1}{y}\, \widetilde{W}'(y) + \widetilde{W}(y) = 0, \quad y \in B_{\mathbb{C}}\left(0; \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, a\right) \setminus \mathbb{R}_0^-$$

0-indexű Bessel-féle differenciálegyenlethez jutunk. Ennek megoldásai az első- és a másodfajú 0-indexű Bessel-függvények lineáris kombinációi, vagyis $\widetilde{W} = c_1 \cdot J_0 + c_2 \cdot Y_0$ az origó középpontú bemetszett $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, a$ sugarú zárt körlapon. Itt

$$W_h(r) = \widetilde{W}(c \cdot r) = c_1 \cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, i^{\frac{3}{2}}\right) + c_2 \cdot Y_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, i^{\frac{3}{2}}\right).$$

Mivel Y_0 az origó egyetlen pontozott környezetében sem korlátos, a kapott W_p és a keresett W függvény azonban igen, így $c_2 = 0$. A homogén és partikuláris megoldások összegeként tehát

$$W(r) = W_p(r) + W_h(r) = -\frac{K}{\varrho\omega}\, i + c_1 \cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, i^{\frac{3}{2}}\right), \quad r \in \overline{B}_{\mathbb{C}}\left(0; \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, a\right) \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

A peremfeltétel a

$$W(a) = -\frac{K}{\varrho\omega}\, i + c_1 \cdot J_0\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, i^{\frac{3}{2}}\right) = 0$$

összefüggést jelenti, amiből a c_1 konstans értékét meghatározva, majd behelyettesítve

$$W(r) = -\frac{K}{\varrho\omega}\, i \left[1 - \frac{J_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, i^{\frac{3}{2}}\right)}{J_0\left(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, i^{\frac{3}{2}}\right)}\right], \qquad r \in \overline{B}\left(0; \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, a\right) \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

Vezessük be az $\Omega := \sqrt{\frac{\varrho\omega}{\mu}}\, a \in \mathbb{R}^+$ állandót, ami az áramlás *Womersley-szám*a. (Ez az oszcilláció mértékét mutató fizikai dimenzió nélküli mennyiség.) Tehát a $(*)$ differenciálegyenlet egy megoldása

$$V_z^*(t,r) = -\frac{K}{\varrho\omega}\, i \left[1 - \frac{J_0\left(\Omega\, \frac{r}{a}\, i^{\frac{3}{2}}\right)}{J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)}\right] e^{i\omega t}, \qquad t \in \overline{I}, \quad r \in \overline{B}\left(0; \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, a\right) \setminus \mathbb{R}_0^-.$$

A V_z^* függvény ezzel a képlettel kiterjeszthető tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ értékre is.

3.1. Definíció. A fenti V_z^* függvényt a vizsgált egyszerű pulzáló áramlás *komplex sebességfüggvény*ének nevezzük.

3.2. Pulzáló áramlás sebességfüggvényének vizsgálata

Ebben a részben az előző pontban tekintett szilárd falú csőbeli pulzáló áramlás sebességfüggvényének maximumát vizsgálom. Igazolom, hogy bizonyos feltételek mellett a viszonyítási alapként tekintett stacionárius áramlás sebessége nagyobb, mint a pulzáló áramláshoz tartozó komplex sebességfüggvény abszolút értékének maximuma. A viszonyítási alap legyen az a stacionárius áramlás, ahol $k_s := -K$.

Normáljuk le a V_z^* függvény értékeit a stacionárius áramlás sebességének maximális értékével, az $\widehat{u}_s \in \mathbb{R}^+$ állandóval. Ekkor

$$\frac{V_z^*(t,r)}{\widehat{u}_s} = -\frac{4i}{\Omega^2}\left[1 - \frac{J_0\left(\Omega\, \frac{r}{a}\, i^{\frac{3}{2}}\right)}{J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)}\right] e^{i\omega t}, \quad (t,r) \in \overline{I} \times [0;a].$$

Legyen az $\Omega \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén

$$G\colon [0;a] \to \mathbb{C}, \quad G(r) := -\frac{4i}{\Omega^2}\left[1 - \frac{J_0\left(\Omega\, \frac{r}{a}\, i^{\frac{3}{2}}\right)}{J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)}\right].$$

Vizsgáljuk a lenormált valós sebességfüggvény abszolút értékét tetszőleges $\varphi \in [0;2\pi)$, $z \in [0;L]$ esetén:

$$\left|\frac{V_z(t,r,\varphi,z)}{\widehat{u}_s}\right| = \frac{|\operatorname{Re} V_z^*(t,r)|}{\widehat{u}_s} \le \frac{|V_z^*(t,r)|}{\widehat{u}_s} = |G(r)|, \quad t \in \overline{I},\ r \in [0,a]. \qquad (**)$$

Mivel $t_r := -\frac{1}{\omega}\arg G(r)$ esetén a kiterjesztett V_z^* függvényre $V_z^*(t_r, r) \in \mathbb{R}$, ebből következik, hogy ha $|I| \geq \frac{2\pi}{\omega}$, akkor

$$\max_{t\in\mathbb{R}} V_z(r,t,\varphi,z) = V_z^*(t_r, r) = \widehat{u}_s \cdot |G(r)|\,, \qquad r \in [0,a],\ \varphi \in [0;2\pi),\ z \in [0;L].$$

Az Ω paraméter függvényében vizsgáltam a

$$|G(0)| = \frac{4}{\Omega^2}\left[1 - \frac{1}{J_0\big(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\big)}\right]$$

értéket a 2.5. alfejezetben.

3.2. Állítás. Tegyük fel, hogy állandó viszkozitású és sűrűségű összenyomhatatlan folyadék áramlik egy szilárd falú, egyenes körhenger alakú csőszakaszon keresztül, az áramlás pulzáló, hengerszimmetrikus, a csővel párhuzamos irányú, a sebességfüggvényének ilyen irányú koordinátafüggvénye a korábban kapott $\operatorname{Re} V_z^*$.

Ha $\Omega \leq 2\sqrt{2}$, akkor a vizsgált oszcilláló áramlás sebességfüggvényének abszolút értéke a cső tengelyén kisebb, mint a viszonyítási alapként tekintett stacionárius áramlás $\widehat{u}_s$ sebességfüggvényének a cső tengelyén felvett értéke, azaz $|\operatorname{Re} V_z^*(t,0)| < \widehat{u}_s,\ \ t \in \overline{I}$.

Bizonyítás. Az előbb kapott $(**)$ egyenlőtlenség és a 2.8. Állítás alapján

$$\frac{|\operatorname{Re} V_z^*(t,0)|}{\widehat{u}_s} \leq |G(0)| < 1, \quad t \in \overline{I}.$$

□

3.3. Pulzáló áramlás hozamfüggvényének vizsgálata

Tekintsük továbbra is az eddig vizsgált tengelyirányú egyszerű pulzáló áramlást a szilárd falú csőben. Definiáljuk a komplex hozamfüggvényt, majd Bessel-függvények segítségével formulát mutatunk rá.

3.3. Definíció. E pulzáló áramlás *komplex hozamfüggvénye*

$$Q^*\colon \overline{I} \to \mathbb{C}, \qquad Q^*(t) := \int_0^a 2\pi r\, V_z^*(t,r)\ \mathrm{d}r,$$

ahol a V_z^* függvény a 3.1. Definícióbeli komplex sebességfüggvény.

A pulzáló áramlás hozamát a $t \in \overline{I}$ időpontban az 1.11. Definícióban szereplő integrál polártranszformációjával számolhatjuk ki:

$$Q(t) = \int_0^a 2\pi r \operatorname{Re} V_z^*(t,r)\,\mathrm{d}r = \operatorname{Re} Q^*(t).$$

Itt felhasználtuk azt is, hogy a komplex értékű $r \mapsto V_z^*(t,r)$, $r \in [0,a]$ folytonos függvény integráljának valós része egyenlő a függvény valós részének integráljával.

3.4. Állítás. A komplex hozamfüggvény értéke

$$Q^*(t) = -\frac{\pi K a^4}{\mu\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)^2}\left[1 - \frac{2}{\Omega\, i^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{J_1\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)}{J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)}\right] e^{i\omega t}. \qquad t \in \overline{I}.$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be a V_z^* komplex sebességfüggvény értékét a definícióba:

$$Q^*(t) = \int_0^a 2\pi r\, V_z^*(t,r)\ \mathrm{d}r = \int_0^a 2\pi r \left(-\frac{K}{\varrho\omega}\, i \left[1 - \frac{J_0\left(\Omega\, \frac{r}{a}\, i^{\frac{3}{2}}\right)}{J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)}\right] e^{i\omega t}\right) \mathrm{d}r =$$

$$-\frac{2\pi K}{\varrho\omega}\, i \cdot e^{i\omega t} \int_0^a r \left[1 - \frac{J_0\left(\Omega\, \frac{r}{a}\, i^{\frac{3}{2}}\right)}{J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)}\right] \mathrm{d}r =$$

$$-\frac{2\pi K}{\varrho\omega}\, i \cdot e^{i\omega t} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)} \int_0^a r J_0\left(\Omega\, \frac{r}{a}\, i^{\frac{3}{2}}\right)\ \mathrm{d}r\right).$$

Az utolsó tényezőben az integrál értékét a J_0 és J_1 Bessel-függvények között fennálló $\int x J_0(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c} x J_1(cx) + C, \quad c, C \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0$ összefüggést (2.5. Állítás 4. pontja) felhasználva a következőt kapjuk:

$$Q^*(t) = -\frac{2\pi K}{\varrho\omega}\, i \cdot e^{i\omega t} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)} \left[\frac{a}{\Omega\, i^{\frac{3}{2}}}\, r J_1\left(\Omega\, \frac{r}{a}\, i^{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^a\right) =$$

$$-\frac{2\pi K}{\varrho\omega}\, i \cdot e^{i\omega t} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)} \cdot \frac{a^2}{\Omega\, i^{\frac{3}{2}}} \cdot J_1\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

Végül kiemelve $\frac{a^2}{2}$-t és Ω definícióját felhasználva a bizonyítandó összefüggéshez jutunk.

□

Ahogy azt a sebességfüggvény vizsgálatánál is tettük, hasonlítsuk össze a pulzáló áramlás hozamát annak a stacionárius áramlásnak a hozamával, amelyiknek a nyomásgradiense

a pulzáló áramlás nyomásgradiensében szereplő K állandó ellentettje. Ekkor a viszonyítási alapnak vett stacionárius áramlás hozama $Q_s = -\frac{\pi k_s}{8\mu} a^4 = \frac{\pi K}{8\mu} a^4$.

Tehát normáljuk le a Q^* függvény értékeit a stacionárius áramlás hozamának Q_s értékével:

$$\frac{Q^*(t)}{Q_s} = \frac{8}{\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)^2} \left[1 - \frac{2}{\Omega\, i^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{J_1\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)}{J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)}\right] e^{i\omega t}, \qquad t \in \overline{I}.$$

A vizsgált egyszerű pulzáló áramlás Q hozamának becslése:

$$\frac{Q(t)}{Q_s} = \frac{\operatorname{Re} Q^*(t)}{Q_s} \leq \left|\frac{Q^*(t)}{Q_s}\right| = \frac{8}{\Omega^2} \left|1 - \frac{2}{\Omega\, i^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{J_1\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)}{J_0\left(\Omega\, i^{\frac{3}{2}}\right)}\right|, \qquad t \in \overline{I}.$$

3.4. Alkalmazás az érhálózatra

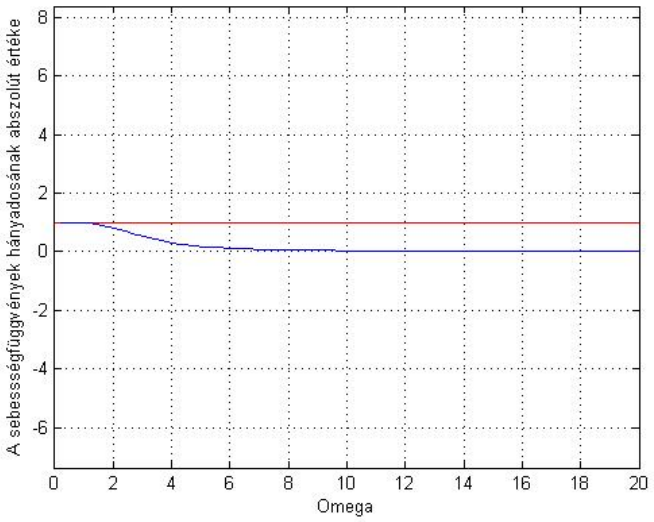
Az emberi artériákban vér áramlik, ezt a pulzáló áramlást a szív periodikus pumpálása hajtja. Ennek egy modellje az a szilárd falú csőbeli egyszerű pulzáló áramlás, amit ebben a fejezetben vizsgáltam. A következő táblázat a véráramlás Womersley-számát mutatja három különböző pulzusszám mellett az artériás hálózat négy szintjén az egészséges felnőttek átlagos vérsűrűsége és az adott érszakaszhoz tartozó átlagos vérviszkozitása esetén. (Zárójelben az adott érkategória jellemző sugarát adtam meg.)

Pulzusszám	72	120	180
Aorta (1,3 cm)	18	24	29
Nagy artériák (0,2 cm)	3,0	3,9	4,8
Arteriolák (10 μm)	0,022	0,029	0,035
Kapillárisok (3 μm)	0,0077	0,0099	0,012

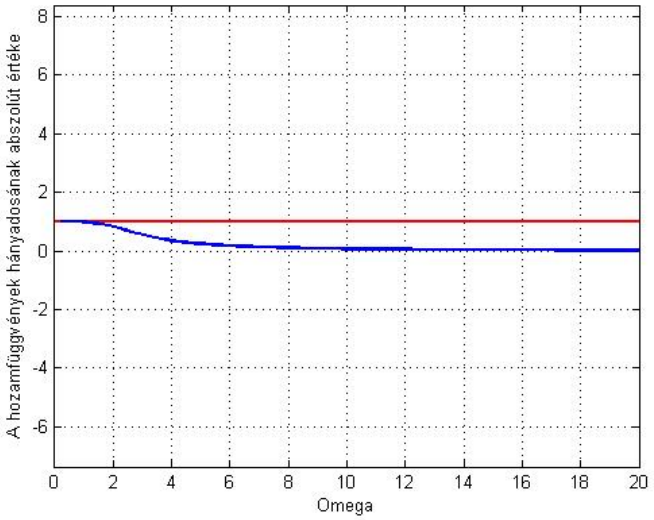
A 3.2. alfejezetben igazoltam, hogy ha a Womersley-szám $2\sqrt{2}$-nél kisebb, akkor a szilárd falú csőbeli pulzáló és a viszonyítási alapnak tekintett stacionárius áramlás sebességfüggvényeinek hányadosa a cső közepén abszolút értékben kisebb, mint 1. Ez azt jelenti, hogy ebben a modellben az elég kis sugarú artériákban a pulzáló véráramlás sebessége az ér közepén abszolút értékben kisebb, mint a stacionárius áramlásé. A szervezet nyugalmi állapotában a nagy artériák után már érvényes a megállapítás.

Hangsúlyozzuk, hogy ebben a modellben eltekintettünk attól, hogy az erek fala rugalmas, a vért oldatként kezeltük, nem pedig szuszpenzióként, a nyomást az ér tengelyére merőleges keresztmetszeteken állandónak vettük.

A Womersley-szám az ér sugarától, a vér sűrűségétől, illetve a vér viszkozitásától függ. A vér viszkozitása pedig függ az ér sugarától, ahol a vér áramlik, sőt az áramló vér hőmérsékletétől is. A táblázat adatainak kiszámolásakor figyelembe vettük, hogy a vér viszkozitása függ az ér sugarától, és mindenütt az egészséges felnőtt testhőmérsékletével azonosnak tekintettük az áramló vér hőmérsékletét.



A piros görbe a konstans 1 függvényt, míg a kék görbe a pulzáló- és a stacionárius áramlás sebességfüggvényének abszolút értékben vett hányadosát mutatja az ér közepén



A piros görbe a konstans 1 függvényt, míg a kék görbe a pulzáló- és a stacionárius áramlás hozamfüggvényének abszolút értékben vett hányadosát mutatja az ér közepén

4. fejezet

Érhálózati modellek

Ebben a fejezetben szeretnék modelleket mutatni egyes emberi szervek érhálózatára. Először ismertetem a csőbeli áramlás ellenállását, a véráramlás energiaveszteségét, majd az érelágazásokra vonatkozó köbszabályt. Utána szimmetrikusan elágazó érhálózatokat vizsgálok, később összehasonlítom a szimmetrikus és az aszimmetrikus érhálózatot.

4.1. Csőbeli áramlás ellenállása, véráramlás energiaveszteségе

Röviden ismertetem az áramlás ellenállásának és teljes energiaveszteségének fogalmát, valamint az ezekre vonatkozó állításokat, melyeket a Bsc. szakdolgozatomban részletesen leírtam.

4.1. Definíció. Egy szilárd falú egyenes körhenger alakú csőben folyadék áramlik Q hozammal, az áramlásra teljesül Poiseuille törvénye. Jelölje a cső egyik végében a nyomást p_1, a másikban p_2 ($p_1 > p_2$). Az áramlás *ellenállás*ának nevezzük az adott csődarabon a következő mennyiséget:

$$R := \frac{p_1 - p_2}{Q}.$$

Az egymáshoz csatlakozó csődarabokból álló csőhálózaton az áramlás ellenállása az egyes csődarabok ellenállásának összege.

4.2. Állítás. Szilárd falú a sugarú, L hosszúságú egyenes körhenger alakú csőben a μ viszkozitású folyadék Poiseuille törvényében leírt áramlásának ellenállása csak a cső

alakjától és a viszkozitás μ mértékétől függ, mégpedig

$$R = \frac{8\mu}{\pi}\frac{L}{a^4}.$$

Az 1.5. alfejezetben a vizsgált nyomásváltozás-, illetve hozamarányt az érszakaszok ellenállása segítségével is felírhattam volna.

4.3. Definíció. Ha egy szilárd falú egyenes körhenger alakú csőben Q hozammal áramlik a folyadék, az áramlásra érvényes a Poiseuille-törvény, és a cső egyik végében a nyomást p_1, a másikban p_2 ($p_1 > p_2$) jelöli, akkor az áramlás *egységnyi idő alatti belsőenergia-veszteségének* hívjuk az $E_b := Q(p_1 - p_2)$ értéket.

4.4. Állítás. Ha az L hosszúságú, a sugarú egyenes körhenger alakú csőben Q hozammal áramló folyadékra teljesül Poiseuille törvénye, akkor az egységnyi idő alatti belsőenergia-vesztesége $E_b = Q^2R$.

4.5. Definíció. Az L hosszúságú, a sugarú egyenes körhenger alakú *ér fenntartásához egységnyi idő alatt szükséges energia* arányos az ér térfogatával, vagyis $E_f := K\pi La^2$ alakú, ahol K rögzített pozitív arányossági tényező.

Ha ezen az érszakaszon az áramlásra fennáll a Poiseuille-törvény, akkor *az áramlás egységnyi idő alatti teljes energiaveszteségének* nevezzük az alábbi értéket:

$$E := E_b + E_f = Q^2\frac{8\mu}{\pi}\frac{L}{a^4} + K\pi a^2 L.$$

Egymáshoz csatlakozó érszakaszokból álló érhálózaton az áramlás egységnyi idő alatti teljes energiavesztesége legyen az egyes érszakaszokon kapott egységnyi idő alatti teljes energiaveszteségek összege.

4.6. Állítás. Adott hosszúságú egyenes körhenger alakú érszakaszon Q hozammal áramlik a vér. Az áramlás egységnyi idő alatti teljes energiavesztesége akkor minimális, amikor

$$a = \sqrt[6]{\frac{16\,Q^2\mu}{K\pi^2}}, \qquad \textit{azaz} \qquad Q = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{K}{\mu}}\,a^3.$$

Biofizikusok vizsgálták a véráramlás hozamának az ér sugarától való függését. Azt keresték, hogy a sugár melyik hatványával arányos a hozam. Különböző ereket és áramlásokat tekintve a keresett kitevő 2 és 4 közöttinek bizonyult, az adatok alapján a köbös arányosságot széles körben elfogadták.

4.7. Definíció. Egy egyenes körhenger alakú eret a Q *hozamhoz optimális*nak nevezünk, ha az ér a sugara és a Q hozam kötött fennáll a 4.6. Állításbeli összefüggés.

Egy érhálózaton egy áramlást *optimális*nak mondunk, ha minden érszakasz a rajta átfolyó áramlás hozamához optimális.

4.8. Következmény (köbszabály)**.** Ha egy érelágazás főere és mindkét mellékere egyenes körhenger alakú, és ezen az érhálózaton a véráramlás optimális, akkor a főér a_0 és a mellékerek a_1, illetve a_2 sugarára fennáll az $a_0^3 = a_1^3 + a_2^3$ egyenlőség.

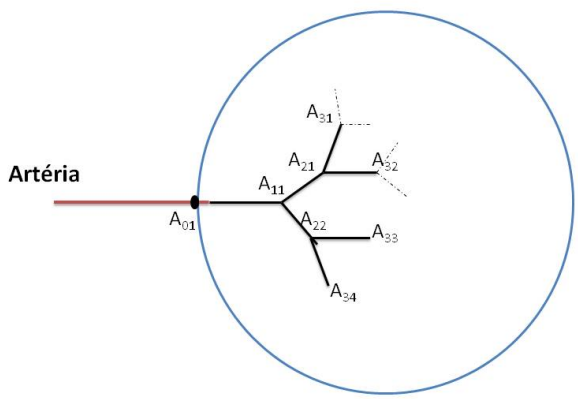
4.2. Szimmetrikusan elágazó érhálózat

Ebben az alfejezetben egy szerv szimmetrikusan elágazó érhálózatát vizsgálom. Felteszem, hogy egyetlen artéria feladata a teljes szerv vérellátásának biztosítása. Felteszem még, hogy a vizsgált erek szilárd falúak és egyenes körhenger alakúak, a szervben minden mellékér egyforma sugarú erekké történő kettéágazásból ered, ezért a belépési ponttól minden kapillárisig azonos számú érelágazáson keresztül jut el a vér. Azt is felteszem, hogy az erekben áramló vér összenyomhatatlan, viszkozitása és sűrűsége a vizsgált érhálózaton állandó, és minden vizsgált érszakaszon érvényes a Poiseuille-törvény (így nem vesszük figyelembe az áramlás pulzáló jellegét, ami az arteriolákban már nem számottevő). Felteszem, hogy az érhálózaton minden érszakasz a rajta átfolyó áramláshoz optimális, ennek alapján minden elágazásnál a főér sugarának köbe egyenlő a két mellékér sugara köbének összegével. Továbbá felteszem, hogy az érhálózat minden elágazása optimális olyan értelemben, hogy az elágazási pontban csatlakozó három érszakaszon az áramlás egységnyi idő alatti teljes energiavesztesége abban az elágazási pontban minimális, ha a három érszakasz másik végpontját adottnak tekintjük. Még felteszem azt is, hogy a szervben a vizsgált erek sugara mindenütt egyenesen arányos azok hosszával. Ez az érhálózat alsóbb szintjein bizonyos közelítéssel teljesül. Végül egy elágazás síkjának nevezzük a főér és a két mellékér által kifeszített síkot, és feltesszük, hogy bármely két egymás utáni elágazás síkja egymásra merőleges; ezzel biztosítva minél nagyobb térfogatú szövet vérellátását.

Jelölje A_{01} azt a pontot, ahol a szervet tápláló artéria belép a szervbe (a szervbeli érfa gyökerének mondjuk), A_{11} pedig a szerven belül azt a pontot, ahol az artéria először kettéágazik. Jelölje A_{21} és A_{22} azokat a pontokat a gömbben, melyek a A_{11} pontból eredő

egyforma sugarú és hosszúságú erek végpontjai. Egy ér elágazásainak számát $(n-1)$-gyel jelölve az indexelést így folytatva az $(n-1)$-edik elágazásig, az utolsó pontokat jelölje rendre $A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{n2^{n-1}}$.

A szervbeli érhálózat fa, melynek csúcsai A_{01} és az $A_{ij},\ i = 1, \ldots, n-1,\ j = 1, \ldots, 2^{i-1}$ kettéágazási helyek.



A szervet átszövő érhálózat felépítése

Jelölje a_0 a szervet tápláló artéria sugarát, az $A_{11}A_{21}$ és $A_{11}A_{22}$ érszakaszok sugarát a_1. A szimmetrikusan kettéágazó a_0 sugarú ér és az a_1 sugarú mellékerek sugarára az $a_0^3 = a_1^3 + a_1^3$ összefüggés érvényes, vagyis $a_1 = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Innen indukcióval az i-edik szint $A_{ij}A_{i+1,2j-1}$ és $A_{ij}A_{i+1,2j}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, 2^{i-1}$ érszakaszainak sugara $a_i = a_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^i$.

Jelölje L_0 az $A_{01}A_{11}$ érszakasz hosszát, az $A_{11}A_{21}$ és $A_{11}A_{22}$ érszakaszok hosszát L_1, és általában az $A_{ij}A_{i+1,2j-1}$ és $A_{ij}A_{i+1,2j}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, 2^{i-1}$ érszakaszok hosszát L_i. Feltevésünk szerint az érszakaszok hossza egyenesen arányos a sugarukkal, ezért az $A_{11}A_{21}$, illetve az $A_{11}A_{22}$ érszakaszok hossza $L_1 = L_0 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, sőt indukcióval i db elágazás után minden érszakasz hossza $L_i = L_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^i$.

Jelölje továbbá $S_0 := \{A_{01}\}$ a nulladik szintet, $S_1 := \{A_{11}\}$ az első szintet, $S_2 := \{A_{21},\ A_{22}\}$ a második szintet, és általában $S_i := \{A_{i1}, \ldots, A_{i2^{i-1}}\}$ az i-edik szintet, $i = 1, \ldots, n-1$.

Tegyük fel, hogy az A_{01} pont derékszögű koordinátái $(0,0,0)$, az A_{11} pont koordinátái pedig $(a_0, 0, 0)$. Az A_{21} és A_{22} pontok egy síkban helyezkednek el az A_{01} és A_{11} pon-

tokkal, koordinátáik meghatározásához ismernünk kell, mekkora szögben ágaznak szét a mellékerek.

4.9. Állítás. Az $A_{01}A_{11}$, $A_{11}A_{21}$ egyenesek által bezárt szöget θ-val, az $A_{01}A_{11}$, $A_{11}A_{22}$ egyenesek által bezárt szöget pedig ϕ-vel jelölve fennáll a következő összefüggés:

$$\cos\theta = \cos\phi = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Az állítás a Bsc. szakdolgozatom egyik témája volt, bizonyítása abban is olvasható.

Ezek alapján

$$\theta = \phi = \arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 37,47^\circ.$$

Ismervén az elágazás szögét, a második szint elágazási pontjai

$$A_{21} = \left(a_0 + \cos\theta \cdot \frac{a_0}{\sqrt[3]{2}}\,,\, \sin\theta \cdot \frac{a_0}{\sqrt[3]{2}}\,,\, 0\right),$$
$$A_{22} = \left(a_0 + \cos\theta \cdot \frac{a_0}{\sqrt[3]{2}}\,,\, -\sin\theta \cdot \frac{a_0}{\sqrt[3]{2}}\,,\, 0\right).$$

Az érfa első négy csúcsának ismeretében készítettem egy MATLAB-programot, mely tetszőleges szintszám, illetve elágazásszám mellett meghatározza az elágazási pontok koordinátáit. Alapgondolata a következő: Minden egyes csúcs esetében a kezdő 4 alappontot építem ki újra és újra, arra figyelve, hogy az erek hossza minden egyes elágazás után $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$-szörösére csökken. Az A_{21} pontra épülő újabb két csúcs koordinátáinak meghatározásán keresztül mutatom be, hogyan működik egy iteráció a programban, ezt ismételve épül fel a teljes érfa.

Az A_{21} pontra illesztünk egy új koordinátarendszert, ahol A_{21} felel meg az origónak, az új koordináta-egységvektorokat pedig a következőképp definálom:

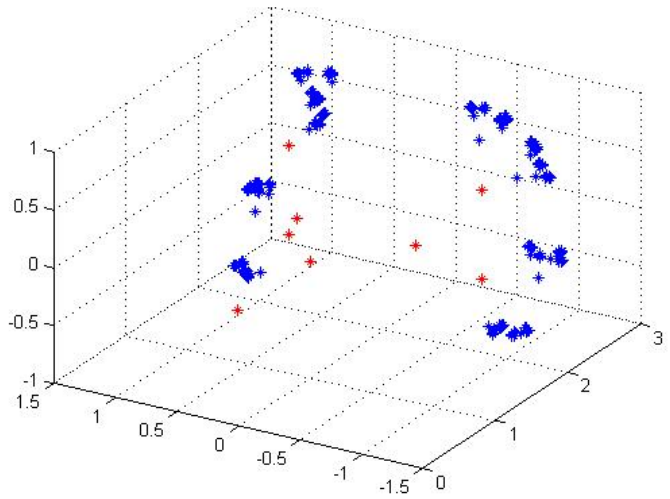
$$\left.\begin{aligned} i &:= \frac{A_{21} - A_{11}}{|A_{21} - A_{11}|} \\ j &:= \frac{(A_{11} - A_{01}) \times (A_{21} - A_{11})}{|(A_{11} - A_{01}) \times (A_{21} - A_{11})|} \\ k &:= i \times j \end{aligned}\right\}.$$

Rendezzük az új koordinátarendszer tengelyeit meghatározó fenti vektorokat egymás alá egy $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixba, ez a mátrix az áttérés mátrixa a régi koordinátarendszerről az újra. Jelölje A_{31} és A_{32} az A_{21} pontból induló két mellékér végpontját. Tekintsük az eredeti koordinátarendszerben az $A_{21} - A_{11}$, illetve $A_{22} - A_{11}$ vektorokat. A következő

szinten a vektorok hossza ezekének az $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$-szörösére csökken, az így kapott koordináták pedig az új koordinátarendszerben lesznek adottak. Ezeket a vektorokat az M mátrix inverzének transzponáltjával jobbról megszorozva megkapom a vektorok koordinátáit az eredeti koordinátarendszerben. Ezeket az A_{21} pontba eltolva kaphatók a keresett csúcsok koordinátavektorai:

$$A_{31} = \frac{A_{21} - A_{11}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \left(M^{-1}\right)^T + A_{21},$$
$$A_{32} = \frac{A_{22} - A_{11}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \left(M^{-1}\right)^T + A_{21}.$$

A program végig ezt az alapiterációt használja, de az elágazások számától $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ kitevője függ.



A program által felépített érfa csúcsai

Megvizsgáltam minden egyes szinten, milyen messze van A_{01}-től a legtávolabb eső pont (az egységnek L_0 hosszát tekintettem). Legyen $f := (f_1, f_2, ..., f_k) \in \mathbb{R}^k$ az a vektor, melynek koordinátái megadják az első k szinten végighaladva az adott szinten A_{01}-től legmesszebb elhelyezkedő pont távolságát. $k = 12$ elágazást kiépítve az egyes szintek legtávolabbi pontjainak A_{01}-től vett távolságát a következő táblázat tartalmazza:

Szint	1	2	3	4	5	6
Távolság	1	1,69996	2,20774	2,58377	2,76710	2,83509

Szint	7	8	9	10	11	12
Távolság	2,85593	2,86130	2,86245	2,86263	2,86265	2,86265

A 11-12. szinttől hiába építem tovább az érfát, a gyökérponttól számottevően távolabb már nem kerülnek az új csúcsok.

Hasonlóan megvizsgáltam egy-egy adott szinten a gyökérponthoz legközelebbi csúcspontok távolságát, ezt a $g := (g_1, g_2, ..., g_k) \in \mathbb{R}^k$ vektorral írom le. A következő táblázat szemlélteti az egyes szinteken a gyökérponthoz legközelebbi csúcs távolságát:

Szint	1	2	3	4	5	6
Távolság	1	1,69996	2,12975	2,12975	2,12975	2,18075

Szint	7	8	9	10	11	12
Távolság	2,18075	2,18075	2,18129	2,18138	2,18139	2,18139

Azt a vektort, mely az egyes szinteken az egymáshoz legközelebb eső pontok távolságát adja meg, jelölje $h := (h_1, h_2, ..., h_k) \in \mathbb{R}^k$. A szinteken belül a csúcsok közötti minimális távolság értékét a következő táblázat írja le. Összehasonlításul feltüntettük az eggyel alacsonyabb szint egy csúcsából elágazó két mellékér végpontjának (az adott szint ún. *szomszédos csúcs*ai) távolságát, ami

$$l_n := 2L_{n-1} \sin\theta = \frac{2\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}}{(\sqrt[3]{2})^n} L_0, \quad n \in \mathbb{Z}^+,\ n \leq k.$$

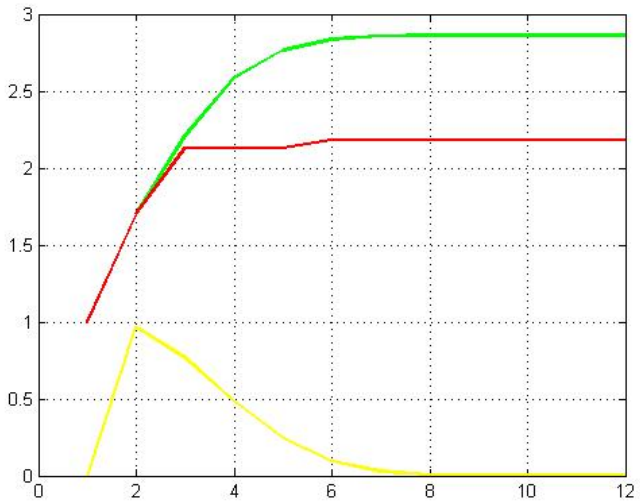
Szint	1	2	3	4	5	6
Távolság	0	0,96563	0,76642	0,48281	0,24140	0,09580
Szomszédos csúcsok távolsága	0	0,96563	0,76642	0,60831	0,48281	0,38321

Szint	7	8	9	10	11	12
Távolság	0,03017	0,00754	0,00149	0,00023	0,00002	$2 \cdot 10^{-6}$
Szomszédos csúcsok távolsága	0,30415	0,24141	0,19161	0,15208	0,12070	0,09580

Észrevehetjük, hogy a 4. szinttől az azonos szinten található legközelebbi csúcsok nem szomszédosak, és a 10. szintet elérve az azonos szinten elhelyezkedő csúcsok minimális távolsága szinte nullára csökken, vagyis az újonnan kiépült csúcspontok közül néhányan

majdnem egybecsúsztak.

A három általam vizsgált távolságot (f, g, h) a következő ábra szemlélteti, ahol a könnyebb áttekinthetőség érdekében a szomszédos pontokat egyenes szakaszokkal összekötöttem.



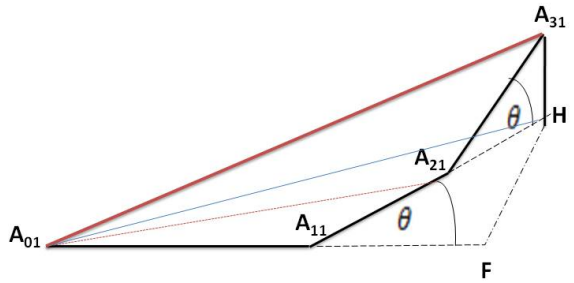
A zöld grafikon a gyökértől vett maximális (f_n), a piros a minimális távolságot (g_n), míg a sárga az egyes szinteken a csúcspontok minimális távolságát mutatja (h_n) az n-edik szinten. Az első koordinátatengelyen a szintek számát mérjük.

Most szeretnék felső becslést mutatni az érfa bármely csúcsának a gyökértől (A_{01}) mért távolságára. A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy egy töröttvonal hossza legalább akkora, mint a végpontjainak távolsága. Ezért az n-edik szint bármely csúcsának a gyökértől vett távolsága legfeljebb

$$L_0 + L_0 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + L_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 + \ldots + L_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{n-1} < L_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \approx 4{,}85 \cdot L_0.$$

Kicsivel jobb becslést kapunk, ha A_{01} és A_{31} távolságát meghatározzuk, majd három szintenként alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget. (Az A_{01} gyökértől a harmadik szint mind a négy csúcsa ugyanolyan messze fekszik.)

Az $A_{01}A_{11}$ érszakasz hossza L_0, és minden elágazás után az erek hossza $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$-szörösére csökken, tehát az $A_{11}A_{21}$ érszakasz hossza $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot L_0$, $A_{21}A_{31}$-é pedig $\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} \cdot L_0$. Tudjuk továbbá, hogy az $A_{01}A_{11}$ és $A_{11}A_{21}$ érszakaszok által bezárt θ szög koszinusza $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.



Az érfa első 3 szintje

Jelölje H az A_{31} pont merőleges vetületét az A_{01}, A_{11}, A_{21} pontok által meghatározott síkra. Ekkor

$$|A_{31}H| = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} \cdot L_0 \cdot \sin\theta, \quad |A_{21}H| = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} \cdot L_0 \cdot \cos\theta.$$

Először az $|A_{01}H|$ távolságot határozom meg. Ennek érdekében jelölje F a H pont merőleges vetületét az $A_{01}A_{11}$ egyenesre. Ekkor

$$|A_{01}F| = L_0 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot L_0 + \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} \cdot L_0 \cdot \cos\theta\right) \cdot \cos\theta,$$
$$|FH| = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot L_0 + \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} \cdot L_0 \cdot \cos\theta\right) \cdot \sin\theta.$$

Az $A_{01}FH$ háromszögben Pitagorasz tételét felírva

$$|A_{01}H| = L_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} + \left(1 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right) \cdot \cos\theta + \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) \cdot \cos^2\theta}.$$

Végül ismét Pitagorasz-tételt alkalmazva az $A_{01}HA_{31}$ háromszögben

$$|A_{01}A_{31}| = L_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \left(1 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right) \cdot \cos\theta + \sqrt[3]{2} \cdot \cos^2\theta},$$

majd behelyettesítve a $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ értéket

$$d := |A_{01}A_{31}| = \sqrt{1 + \frac{5}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}} \cdot L_0 \approx 2{,}2077 \cdot L_0.$$

Mivel az érfa 3-6. szintjének minden összefüggő komponense hasonló a 0-3. szinthez, és a hasonlóság aránya $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = \frac{1}{2}$, így ha a harmadik szint egy csúcsa a hatodik szint egy csúcsával össze van kötve, akkor azok távolsága $\frac{1}{2}d$. Ezért a $3n$-edik szint bármely csúcsának távolsága a gyökértől legfeljebb

$$d + \frac{1}{2}d + \left(\frac{1}{2}\right)^2 d + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d < 2d \approx 4{,}4154 \cdot L_0.$$

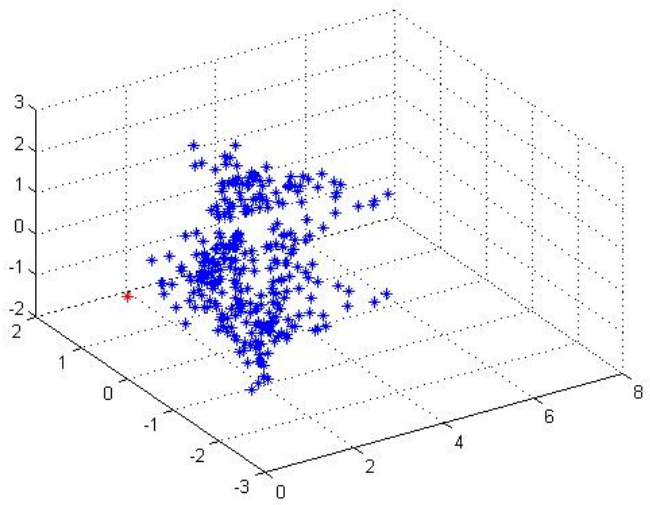
Ez a felső becslés érvényes minden szint csúcsaira, mert a háromszintes fa legfelső szintjének csúcsai helyezkednek el legmesszebb annak gyökerétől.

4.3. Szimmetrikus és aszimmetrikus érhálózatok összehasonlítása

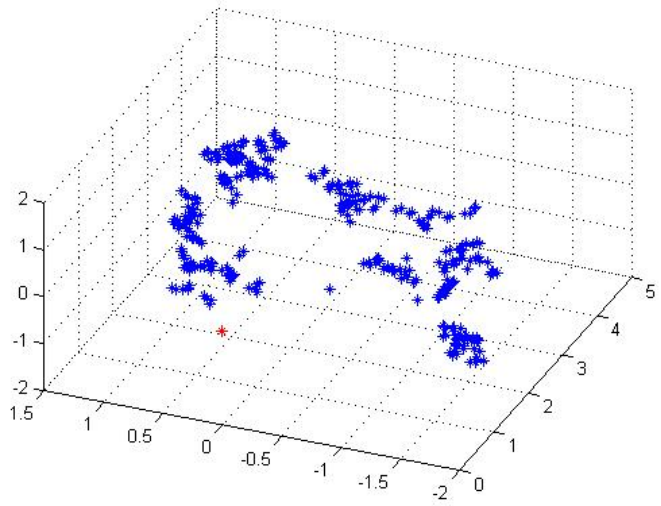
Ebben az alfejezetben megvizsgáljuk az érfa alakját abban az esetben, amikor az elágazások aszimmetrikusak, de a két mellékér sugarának aránya minden elágazásnál azonos. A kapott adatokat összehasonlítjuk a szimmetrikus érfa megfelelő adataival.

Tekintsük a kisebb és nagyobb sugarú mellékér sugarának hányadosát, jelölje ezt α. Felteszem, hogy a vizsgált érhálózat minden elágazása esetében a mellékerek sugarának aránya α. A következő táblázat különböző α értékek mellett tartalmazza az adott szinten a gyökértől mért maximális, illetve minimális távolságot, és az adott szinten az egymáshoz legközelebb eső csúcsok távolságát.

	$\alpha = 1$	$\alpha = 0,7$	$\alpha = 0,5$
A 3. szinten a legtávolabbi pont távolsága a gyökértől	2,20774	2,63243	2,85292
A 6. szinten a legtávolabbi pont távolsága a gyökértől	2,83509	4,11092	5,09930
A 9. szinten a legtávolabbi pont távolsága a gyökértől	2,86245	4,47798	6,37129
A 12. szinten a legtávolabbi pont távolsága a gyökértől	2,86265	4,51767	6,87832
A 3. szinten a legközelebbi pont távolsága a gyökértől	2,12975	1,83404	1,26401
A 6. szinten a legközelebbi pont távolsága a gyökértől	2,18075	1,87412	1,26532
A 9. szinten a legközelebbi pont távolsága a gyökértől	2,18129	1,85063	1,25305
A 12. szinten a legközelebbi pont távolsága a gyökértől	2,18139	1,84968	1,19554
A 3. szinten az egymáshoz legközelebbi pontok távolsága	0,76642	0,82088	0,90341
A 6. szinten az egymáshoz legközelebbi pontok távolsága	0,09580	0,19186	0,11814
A 9. szinten az egymáshoz legközelebbi pontok távolsága	0,00149	0,02642	0,04854
A 12. szinten az egymáshoz legközelebbi pontok távolsága	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00394	0,00894



A szervet átszövő érhálózat csúcsai $\alpha = 0,5$ mellett



A szervet átszövő érhálózat csúcsai $\alpha = 0,7$ mellett

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Pfeil Tamás témavezetőmnek a sok türelmet, segítséget, időt, s hogy bármikor fordulhattam hozzá. Hálás vagyok szeretteimnek a támogatásukért.

Irodalomjegyzék

[1] Frank Bowman, *Introduction to Bessel functions*, Dover Publications Inc., New York (1958)

[2] David Elad and Shmuel Einav, *Physical and flow properties of blood*, Digital Engineering Library (2004)

[3] Dr. Farkas Miklós, *Speciális függvények műszaki-fizikai alkalmazásokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1964)

[4] Ph. Frank, R. v. Mises, *A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1966)

[5] L. D. Landau, E. M. Lifsic, Elméleti fizika VI. *Hidrodinamika*, Tankönyvkiadó, Budapest (1980)

[6] Monos Emil, *A vénás rendszer élettana*, Semmelweis Egyetem, Budapest (2004)

[7] Monos Emil, *Hemodinamika*, Semmelweis Kiadó, Budapest (2004)

[8] C. D. Murray, *The physiological principle of minimum work applied to the angle of branching of arteries*, J. gen. Physiol. **9** (1926), 835–841

[9] Frank H. Netter, *Humán anatómiai atlasz*, Medicina Könyvkiadó Rt., Budapest (2004)

[10] Tamás Pfeil, Éva Valkó, *On a vascular bifurcation problem of Murray*, Annales Univ. Sci. Budapest., **53** (2010), 83-89

[11] S. I. Rubinow, *Introduction to Mathematical Biology*, Wiley, New York (1975)

[12] Simon László, E. A. Baderko, *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest (1983)

[13] Simon L. Péter, Tóth János, *Differenciálegyenletek*, Typotex Kft., Budapest (2005)

[14] Dr. Tarsoly Emil, *Funkcionális Anatómia*, Medicina Könyvkiadó Zrt., Budapest (2007)

[15] Valkó Éva, *Az analízis alkalmazásai az érrendszer vizsgálatában*, szakdolgozat, ELTE TTK, Budapest (2010)

[16] Werner Kahle, *Anatómia III.*, Springer Hungarica, Budapest (1996)

[17] M. Zamir, *The Physics of Coronary Blood Flow*, Springer, New York (2005)

[18] Internetes forrás, Informa Healthcare, *Calculation of the diameter of the central retinal artery from noninvasive measurements in humans*
`http://informahealthcare.com/doi/abs/10.1076/ceyr.25.6.341.14231`

[19] Internetes forrás, Fejes Optika, *Az emberi szem*
`http://fejesoptika.uw.hu/szem.htm`

[20] Internetes forrás, Debreceni Egyetem Orvos és Egészségtudományi Centrum (DEOEC), Szemklinika, *A látóhártya (retina) felépítése*
`http://www.cornea.hu/vitreoretinalis-sebeszet`