Öntaszító sztochasztikus folyamatok

Diplomamunka

Írta: Józsa Mónika

Alkalmazott matematikus szak, MSc

Témavezető: Backhausz Ágnes
tanársegéd
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2013

Tartalomjegyzék

Bevezető **3**

1. A TSRW konstrukciója **5**

1.1. Konstrukció a lokális idővel 5

1.2. Konstrukció labirintussal 7

2. A TSRM konstrukciója **11**

2.1. Előzetes definíciók és állítások 11

2.2. Az idő invertálhatósága 15

2.3. A TSRM és lokális idejének definíciója 17

3. Utolsó érték a lokális idő függvényében **20**

3.1. Egyenletes eloszlás a diszkrét határértékre 20

3.2. Egyenletes eloszlás folytonos esetre 23

4. A Brown-mozgás és a TSRM **26**

Állítások elemi tulajdonságokról 26

Markovitás és következményei 28

A növekedési pontokról 30

5. A lokális idő szélső intervalluma **31**

5.1. Egy intervallum esete 31

5.2. Intervallum arány 32

A sűrűségfüggvény alsó becslése 33

A sűrűségfüggvény fölső becslése 35

6. Szimulációs eredmények **38**

Összefoglalás **43**

Irodalomjegyzék **44**

Bevezető

A dolgozatban diszkrét és folytonos idejű öntaszító folyamatok határeloszlástételeit és lokális időit tárgyaljuk. Öntaszító sztochasztikus folyamatnak nevezzük azokat a véletlen folyamatokat, melyek kisebb valószínűséggel mennek a korábban gyakrabban felvett értékekbe. A kapcsolódó szakirodalom és a jelen munka is azon speciális esettel foglalkozik, amikor a dinamikát tetszőleges időpontban csak a közvetlen környezetben lévő állapotok gyakorisága határozza meg. Ezt a folyamatosztályt a true, vagy myopic, azaz valódi, vagy rövidlátó öntaszító folyamatok osztályának nevezzük.

Egy folyamat lokális idején az idő azon (függvény értékű) függvényét értjük, amely a folyamat értékeinek előfordulási gyakoriságát írja le. A dolgozatban tehát azon eseteket vizsgáljuk, amikor $t \in \mathbb{R}$-ben egy továbblépési valószínűséget a t-hez tartozó lokális időnek csupán a folyamat t-beli értéke körüli értékei befolyásolják.

Diszkrét esetben a lokális idők számlálhatják a felvett értékek gyakoriságait is, de a szomszédos értékek közti átlépések számát is. Nevezzük az előbbit csúcs szerint, az utóbbit pedig él szerint öntaszító folyamatnak.[1] A témával foglalkozó egyik legkorábbi cikk, [1] a csúcs szerint lokális időket tekinti és több dimenzióra kiterjesztve sejtéseket fogalmaz meg a határeloszlásokra vonatkozóan, miszerint

(1) 1 dimenzióban $X(t)t^{-2/3}$-nak van határeloszlása, ami Gausstól eltérő;
(2) 2 dimenzióban $X(t)t^{-1/2}(\log t)^{\zeta}$-nak van határeloszlása, ami Gauss[2];
(3) 2-nél magasabb dimenzióban $X(t)t^{-1/2}$-nak van határeloszlása, ami Gauss, tehát teljesül a centrális határeloszlástétel.

A sejtés (1) része az él szerint öntaszító folyamatra [11]-ben bizonyítva van, de az eredeti csúcs szerinti esetben csak a lokális idő határértékéről olvashatunk [10]-ben. A (2) részről fizikus vonatkozásban van eredmény ζ értékére, a (3) sejtés bizonyítása pedig [7]-ben található.

A határeloszlás mellett felmerül a kérdés, hogy hogyan határozható meg a diszkrét idejű és értékű folyamatok folytonos változata. A szimmetrikus bolyongás és a Wiener-folyamat kapcsolatának mintájára az öntaszító séták is skálázhatók úgy,

[1] Szakirodalomban site-, illetve bond-repulsion.
[2] ζ konstans értéke nem ismert.

hogy határértékként egy, a sétához hasonló tulajdonságokkal rendelkező folytonos folyamatot kapjunk. Az egy dimenziós él szerint öntaszító véletlen sétának folytonos változatáról és egyben a határeloszlásról is [9]-ben olvashatunk. A dolgozat jelentős részében ezt a folyamatot vizsgáljuk, illetve ennek lokális idejét.

Kiindulásként definiálunk egy $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ él szerint öntaszító sétát, és mutatunk egy konstrukciót, melyben egy véletlenszerűen alakult labirintus bejárásának x-koordinátája felel meg a sétának. A labirintushoz hasonló konstrukcióból kiindulva meghatározunk egy folytonos idejű öntaszító folyamatot, ami alkalmas skálázással a séta határértékével azonos. A folytonos öntaszító folyamatot összevetjük konstrukciójának egyik alapelemével, a Brown-mozgással.

A folyamatról [5]-ben bemutatott tételt a 3. fejezetben ismertetjük. Az eredmény egy adott t időponthoz tartozó lokális idő ismeretében a folyamat t-beli értékének előfordulási tartományát és az azon vett eloszlását adja meg.

A tétel erőssége mérhető a tartomány és a folyamat t-ig vett értékkészletének arányával. Az arány eloszlására bizonyos feltételek mellett alsó és fölső közelítést adunk. A kapcsolódó számolásokat az 5. fejezetben mutatjuk be, majd a 6. fejezetben szimulációs eredményekkel szemléltetjük az öntaszító folyamat néhány tulajdonságát.

1. fejezet

A TSRW konstrukciója

Kétféle konstrukciót adunk a true self-repelling random walkra (TSRW), azaz a valódi öntaszító véletlen bolyongásra, aminek átskálázott határértékeként kapjuk a folytonos idejű true self-repelling motion (TSRM) valódi öntaszító folyamatot. Az első definíció a továbblépés szabályát határozza meg a lokális idő segítségével. A második egy labirintust definiál a síkon, aminek bejárása x-koordinátájában az öntaszító bolyongást adja, y-koordinátájában pedig a lokális időt. A fejezet alapvetően [5] alapján íródott.

1.1. Konstrukció a lokális idővel

Legyen $E := \mathbb{Z} + 1/2$ és

$$a(e) := \begin{cases} 0, \text{ ha} & \mid e \mid -1/2 \equiv 0 \mod (2); \\ -1, \text{ ha} & \mid e \mid -1/2 \equiv 1 \mod (2). \end{cases}$$

1. Definíció. *Az n-ik lépésben az $e \in E$ ponthoz tartozó lokális időt az alábbi módon definiáljuk.*

$$l(n,e) := \sharp \left\{ k \in \{0, ..., n-1\}, \left\{ \widetilde{X}_k, \widetilde{X}_{k+1} \right\} = \{e - 1/2, e + 1/2\} \right\}$$

Valójában a kényelmesebb jelölés érdekében a következő módosított lokális időt fogjuk használni:

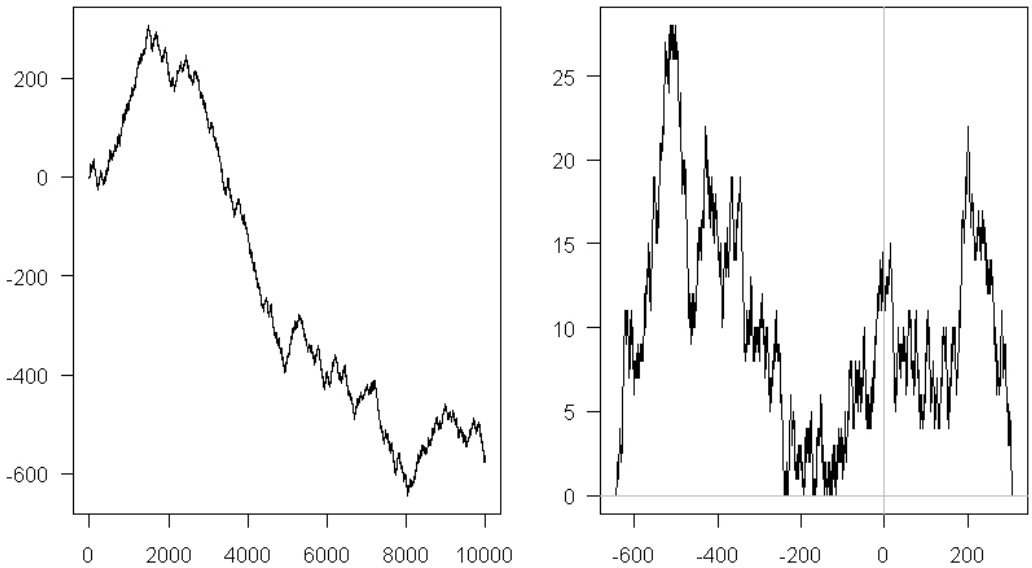
$$l_n(e) := l(n,e) + a(e). \tag{1.1}$$

Az n-ik lépésben most speciálisan két pontban érdekel minket a módosított lokális idő, így ezekre külön jelölést vezetünk be. Legyen az $(\widetilde{X}_n)_{n \geq 0}$ folyamathoz és $k \geq 0$ lépéshez

$$l_k^- := l_k(\widetilde{X}_k - 1/2) \quad \text{és} \quad l_k^+ := l_k(\widetilde{X}_k + 1/2).$$

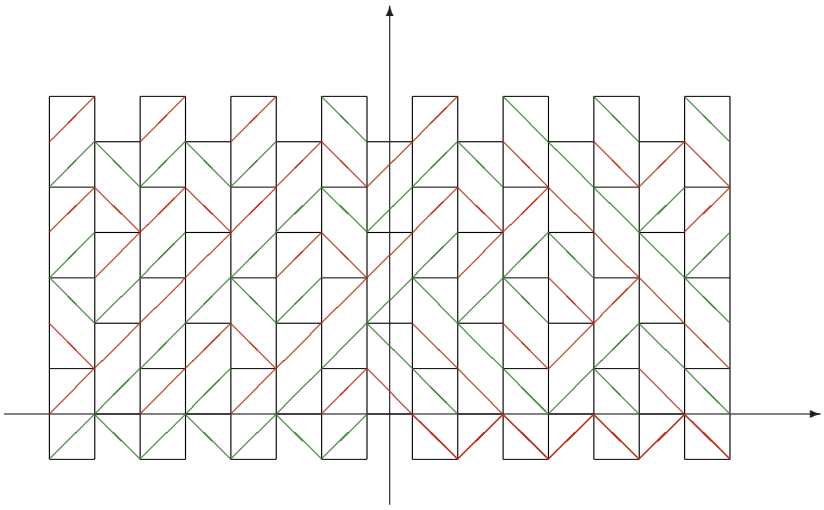
Az öntaszító bolyongás ennek segítségével meghatározható az átmenetvalószínűségekkel.

$$\mathbb{P}(\widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n + 1) = 1 - \mathbb{P}(\widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n - 1) = \begin{cases} 1, & \text{ha } l_n^- > l_n^+; \\ 1/2, & \text{ha } l_n^- = l_n^+; \\ 0, & \text{ha } l_n^- < l_n^+. \end{cases} \tag{1.2}$$



1.1. ábra. Öntaszító bolyongás és lokális ideje.

Jegyezzük meg, hogy kezdetben minden $e \in E \setminus \{-1/2\}$-re $|a(e) - a(e+1)| = 1$ és $a(-1/2) = a(1/2)$. Ez részben öröklődik a lokális időre, ugyanis $|l(n,e) - l(n,e+1)| = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és minden $e \in E \setminus \{\widetilde{X}_n - 1/2\}$-re, $e = \widetilde{X}_n - 1/2$-re pedig $l(n,e) - l(n,e+1) \in \{-2,0,2\}$. Ez az észrevétel indukcióval igazolható a lépési szabály segítségével. Az első lépésre nyilvánvalóan teljesül, mert $a(-1/2)$ vagy $a(1/2)$ eggyel való módosítása nem rontja el a feltételeket. Általánosan az n-ik lépésben $\widetilde{X}_n - 1/2$-ben a $\{2,0,-2\}$-es eltérés a lépési szabály miatt $\{1,-1\}$-re változik, $e = \widetilde{X}_{n+1} - 1/2$-ben pedig $l(n+1,e) - l(n+1,e+1) \in \{-2,0,2\}$, mivel módosul eggyel. Ezen tulajdonság alapján a lokális időből leolvasható az öntaszító folyamat utolsó értéke. Az észrevétel folytonos esetben nem igaz, ezért a határátmenethez egy kicsit módosítjuk a lokális idő függvényt.



1.2. ábra. Labirintus a fölső félsíkon.

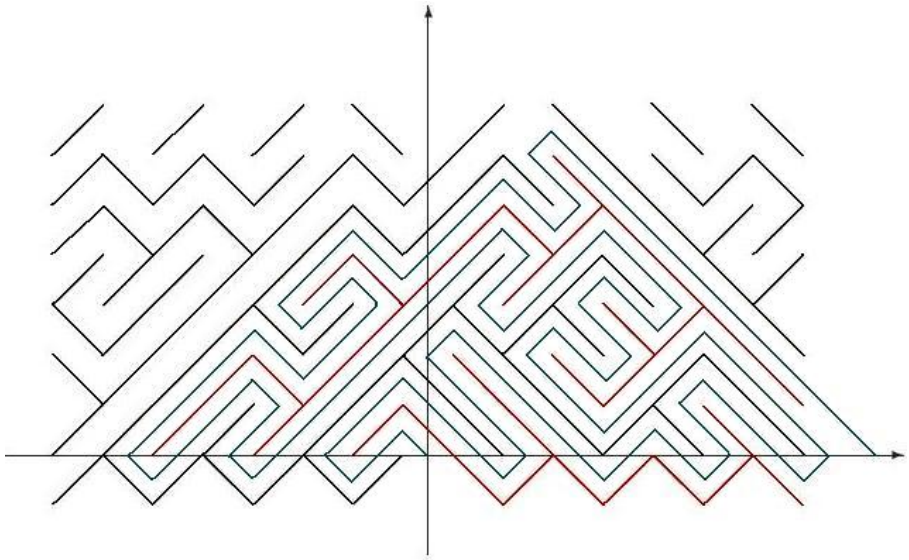
1.2. Konstrukció labirintussal

Az előző részben bevezetett TSRW egy ekvivalens definíciójához szükségünk lesz egy labirintusra a fölső félsíkon. Legyen $\mathbb{N}^\sharp := \mathbb{N} \cup \{-1\}$ és a korábban már bevezetett $E := \mathbb{Z} + 1/2$. Ezek segítségével tekintsük a következő halmazokat:

$$F := \{(x - 1/2, h) \in E \times \mathbb{N}^\sharp : x + h \text{ páratlan}\};$$

$$B := (E \times \mathbb{N}^\sharp) \setminus F.$$

A fölső félsíkot $(x - 1/2, x + 1/2) \times (h - 1, h + 1)$ csúcspontú 1×2-es téglalapokra osztjuk. $h \notin \{-1, 0\}$ esetén a téglalapok $(x - 1/2, h)$ pontjaihoz $1/2 - 1/2$ valószínűséggel felfelé, illetve lefelé álló párhuzamos szakaszokat rendelünk. A felfelé álló szakaszok az $(x - 1/2, h)$, $(x + 1/2, h + 1) \in F$ és az $(x - 1/2, h - 1), (x + 1/2, h) \in B$ pontok között mennek, a lefelé állók pedig az $(x - 1/2, h), (x + 1/2, h - 1) \in F$ és az $(x - 1/2, h + 1), (x + 1/2, h) \in B$ pontok között. A $h \in \{-1, 0\}$ esetben determinisztikusan határozzuk meg a párhuzamos szakaszokat a korábban bevezetett $a : E \mapsto \{-1, 0\}$ függvény segítségével. Minden $e \in E \setminus \{-1/2\}$ ponthoz rendeljük hozzá az $(e, a(e))$ és az $(e + 1, a(e + 1))$ közötti szakaszt és az adott téglalapon belüli párhuzamosát. Az így kapott alakzatot a fölső félsíkon labirintusnak nevezzük, amely elnevezést a továbbiakban indokoljuk. Egy adott F-beli pontból tekintsük azt a diszkrét folyamatot, ami a ponthoz rendelt szakasszal indul és a szakasz másik végpontjához rendelt szakasszal tér át a következő pontjára és így folytatva növekszik a folyamat. Ha az F pontjaiból jobbra indított ilyen folyamatokat összességében nézzük, akkor olyan egyszerű véletlen bolyongásokat kapunk, amelyek találkozás esetén



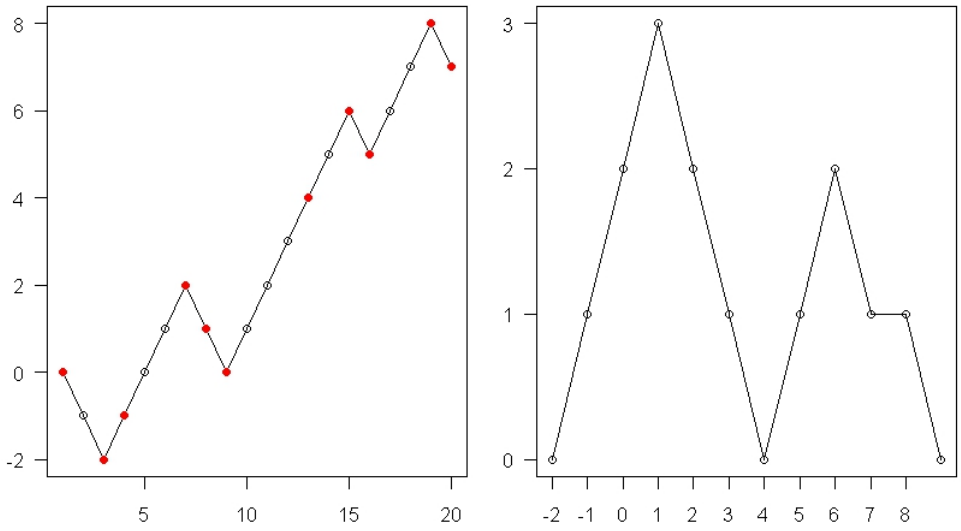
1.3. ábra. Közös pontban elnyelődő előre folyamatok bejárása.

egybeolvadnak, a 0-ban pedig elnyelődnek. Véletlen bolyongások ilyenfajta rendszere coalescing simple random walks néven olvasható a szakirodalomban, a dolgozat pedig előrehaladó rendszerként hivatkozunk rá.

Hasonlóan tekinthetjük a B pontjaiból balra indított bolyongásokat is, amik szintén összeolvadó, 0-ban elnyelődő rendszert alkotnak. Ezt itt hátrafelé haladó rendszernek nevezzük. Az előre és a hátra haladó rendszerek ütközésmentességét a szakaszok párhuzamos szerkesztése biztosítja, tehát két szakasz találkozása csak azonos irányú rendszerben lehetséges. Így tehát ha a $(0,0)$ pontból indulunk és jobb oldalról az előre, balról a hátra haladó bolyongásokat követjük, egy labirintusszerű útvonalon haladunk. Vegyük észre, hogy az előrehaladó rendszer folyamatait osztályozhatjuk a nullába érkezés szerint. Ha egy rögzített $(x+1/2,0) \in \mathbb{F}, x > 0$ pontba futó folyamatosztályt tekintünk, akkor a hozzá tartozó bejárás csak egy zárt területet végigjárva történhet, ahogy azt az (1.2) ábra is szemlélteti. Ebből látszik, hogy a labirintus mindent bejár, mert minden előre folyamat tartozik egy osztályhoz és egy osztályt bejárva az útvonal az eggyel jobbra lévő ponthoz tartozó osztálynál folytatódik. Az is látszódik az előzőekből, hogy a bejárás szintenként halad, vagyis egy (x,h) pontba csak úgy juthatunk el, ha előtte jártunk $(x,h-1)$-ben is. Ez utóbbi tulajdonság segít abban, hogy a bejárás y-koordinátáját lokális időként értelmezzük.

A labirintus $(0,0)$-ból indított bejárása úgy is tekinthető, mint egy kétdimenziós diszkrét idejű és értékű $(\widetilde{X}_n, \widetilde{H}_n)_{n\geq 0}$ folyamat. Az így kapott folyamat második koordinátájára igaz, hogy $\widetilde{H}_n = (l_n^+ + l_n^-)/2$ a korábbi módosított lokális idő jelölésével.

Az n-edik lépéshez tartozó teljes lokális időt is láthatjuk az alábbiakban. Vezes-



1.4. ábra. Az 1.2. ábrabeli labirintus bejárásának megfelelő folyamat és lokális ideje a 20. lépésig.

sünk be jelöléseket az előre és a hátra haladó folyamatokra! Minden $(e_0, h) \in F$-re, ahol $h \geq 1$ és minden $e \in E$-re, ahol $e \geq e_0$, jelöljük $\widetilde{\lambda}_{e_0,h}(e)$-vel az (e_0, h)-ból induló előre haladó folyamat e-beli értékét. Egy $(e_0, h) \in B$-ből induló hátra folyamatot egy $e \geq e_0$ pontjában jelöljünk ugyanúgy $\widetilde{\lambda}_{e_0,h}(e)$-vel. Ekkor az n-edik lépésben ha $X_n = x$, akkor a lokális idő (korábbi jelöléssel $e \mapsto l_n(e)$) minden $e > x$ és $e < x$ esetén rendre $\widetilde{\lambda}_{x+1/2,l_n^+}(e)$ és $\widetilde{\lambda}_{x-1/2,l_n^-}(e)$.

Ezt az összefüggést pontosan a szintenkénti bejárásból és a determinisztikus szakaszok, illetve a lokális idő kezdeti értékének megfeleltetéséből kapjuk. Felhasználva, hogy egy adott időponthoz tartozó lokális idő az előbbi módon leolvasható a labirintusból, látható, hogy a folyamat első koordinátája azonos eloszlású a TSRW első definíciójával. Indukcióval ellenőrizzük a lépési szabályt! Az első lépés döntési pont, ami megfelel az origót alsó oldalában tartalmazó téglalap szakaszainak irányával. Második lépésként irányt tartva megy tovább a folyamatunk, amit a determinisztikus szakaszok állása biztosít. Tegyük fel, hogy az n-ik lépésig az első koordinátában az (1.2) lépési szabálynak megfelelően mentünk. Ekkor a TSRW lokális ideje n-ig megfelel az előbbieknek. Az $(n+1)$-ik lépésben ha egy téglalap aljából indulunk, akkor $\widetilde{\lambda}_{\widetilde{X}_n+1/2,l_n^+}(\widetilde{X}_n + 1/2) = \widetilde{\lambda}_{\widetilde{X}_n-1/2,l_n^-}(\widetilde{X}_n - 1/2)$, tehát döntési pontban vagyunk és az $(n+1)$-ik lépést a téglalapban lévő szakaszok iránya adja. Ha egy téglalap közepéről indulunk az $(n+1)$-ik lépésben, akkor ha $\widetilde{\lambda}_{\widetilde{X}_n+1/2,l_n^+}(\widetilde{X}_n + 1/2) = \widetilde{\lambda}_{\widetilde{X}_n-1/2,l_n^-}(\widetilde{X}_n - 1/2) + 2$, akkor a téglalap szakaszai csak $(1,1)$ meredekségűek lehetnek, hiszen $\widetilde{\lambda}_{\widetilde{X}_n+1/2,l_n^+}(\widetilde{X}_n + 1/2)$ egy előre folyamat pontja, tehát jó irányba, lefelé

lépünk. Hasonlóan, ha $\widetilde{\lambda}_{\widetilde{X}_n+1/2,l_n^+}(\widetilde{X}_n+1/2)+2=\widetilde{\lambda}_{\widetilde{X}_n-1/2,l_n^-}(\widetilde{X}_n-1/2)$, akkor felfelé lépünk.

A TSRW éa a szimmetrikus bolyongás közötti lényeges eltérés határeloszlásban ütközik ki. A TSRW határeloszlását, illetve a Wiener-folyamattal való összevetését a további fejezetekben részletezzük.

2. fejezet

A TSRM konstrukciója

A diszkrét esethez képest a folytonos öntaszító folyamat konstrukciója absztrakt, nehezen érthető. Annak érdekében, hogy átlátható legyen a folyamat definiálásához vezető út, a bizonyításokat nem részletezem. A diszkrét labirintushoz hasonló gondolatmenet okán a TSRM-t és lokális idejét egyidejűleg definiáljuk. A konstrukció [9] alapján történik, ahol a bizonyítások is megtalálhatók.

2.1. Előzetes definíciók és állítások

2. Definíció. *Legyen* $x^+ := \max\{(x,0)\}$, $h \in \mathbb{R}_+$ *és* $\Phi_{(x,h)} : [x,\infty) \to \mathbb{R}_+$. $\Phi_{(x,h)}$ *x-ben h-ból induló Reflected/Absorbed Brownian motion (RAB), azaz visszaverő/elnyelő Brown-mozgás, ha* $\Phi_{(x,h)}(x) = h$ *és* $[x, x^+]$*-on* 0*-ban visszaverő Brown-mozgású,* (x^+, ∞)*-en pedig* 0*-ban elnyelő Brown-mozgású.*

3. Definíció. *Legyen* $\mathbb{E} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ *és* (x_j, h_j) $j = 1, 2, .., p$ *véges sok pontja* $\mathbb{E}$*-nek, továbbá legyenek* R^j*-k* x_j*-ben* h_j*-ből induló független RAB folyamatok és* $C^j := R^0$*. Rekurzívan definiáljuk* C^j *folyamatokat a következőképpen:*

$$\omega_j := \inf\{x \geq x_j : R^j(x) \in \{C^0(x), ..., C^{j-1}(x)\}\};$$

$$\nu_j := \min\{k \in \{0, ..., j-1\} : R^j(\omega_j) = C^k(\omega_j)\};$$

$$C^j(x) := \begin{cases} R^j(x), & \text{ha } x_j \leq x \leq \omega_j; \\ C^{\nu_j}(x), & \text{ha } \omega_j \leq x \leq \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ekkor $(C^0, ..., C^p)$*-t Finite family of Independent Coalescing RAB (FICRAB), vagyis független, összeolvadó RAB-ok véges családjának nevezzük.*

Az így kapott folyamatok tehát ha találkoznak, egyesülnek, egyébként pedig független visszaverő/elnyelő Brown-mozgások. Megjegyezzük, hogy $(C^0, ..., C^p)$ eloszlása

független a sorrendtől, azaz, ha σ egy permutációja $(0, 1, ..., p)$-nek, akkor $(C^0, ..., C^p)$ és $(C^{\sigma(0)}, ..., C^{\sigma(p)})$ eloszlása megegyezik.

A FICRAB kapcsán megemlíthetjük a szakirodalomban Brownian webnek nevezett rendszert, mely alkalmazható a voter model-ként ismert problémakörben is. ([2])

4. Definíció. *Legyen $A \subset \mathbb{E}$ nem üres és tekintsük a $(x_a, h_a)_{a\in A}$ pontokat. Ekkor $(C^a)_{a\in A}$ $(x_a, h_a)_{a\in A}$-ból induló FICRAB, ha A minden véges $(a_1, ..., a_n)$ részhalmazára $(C^{a_1}, ...C^{a_n})$ $(x_{a_i}, h_{a_i})_{i\in\{1,...,p\}}$-ből induló FICRAB az előző definíció szerint.*

Ha létezik bijekció A és $\mathbb{N}$ között, akkor $(C^a)_{a\in A}$ is permutációinvariáns. Legyenek

$$\mathbb{D} := \left\{ \tfrac{p}{2^q} : q \in \mathbb{N}, p \in \{2^{q-1}, 2^{q-1}+1, ..., 2^q\} \right\};$$
$$\mathbb{F}^+ := \{(x, h, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R} : y \leq x\};$$
$$\mathbb{F}^- := \{(x, h, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R} : y \geq x\};$$
$$\widetilde{\mathbb{E}} := \{\mathbb{D} \times \mathbb{D}^*_+\};$$

ahol $\mathbb{D}^*_+$ jelöli a pozitív diadikus törtek halmazát.

2.1. Tétel.

(i): Létezik olyan $\mathbb{F}^+ \ni (x, h, y) \mapsto \lambda_{(x,h)}(y) \in \mathbb{R}_+$ véletlen folyamat, amire:

(i1): $(\lambda_{(x,h)})_{(x,h)\in\mathbb{E}}$ $(x, h)_{(x,h)\in\mathbb{E}}$-ból induló FICRAB.

(i2): Majdnem biztosan minden $(x, h) \in \mathbb{E}$-re $\lambda_{(x,h)}(x) = h$.

(i3): Majdnem biztosan minden $\mathbb{E}$-beli (x_1, h_1), (x_2, h_2)-re és $z \geq y \geq \max\{x_1, x_2\}$-re:

$$[\lambda_{(x_1,h_1)}(y) < \lambda_{(x_2,h_2)}(y)] \Longrightarrow [\lambda_{(x_1,h_1)}(z) \leq \lambda_{(x_2,h_2)}(z)]. \tag{2.2}$$

(i4): Majdnem minden $x \leq y$-ra $h \mapsto \lambda_{(x,h)}(y)$, $h \in (0, \infty)$ balról folytonos.

(ii): Ha $\lambda' := (\lambda'_{(x,h)})_{(x,h)\in\mathbb{E}}$ rendelkezik az előző tulajdonságokkal, akkor λ és λ' azonos eloszlású.

Jegyezzük meg, hogy $(i2)$ és $(i3)$ következményeként $h \mapsto \lambda_{(x,h)}(y)$, $h \in (0, \infty)$ nem negatív. A 2.1. tétel bizonyítása [9] 8. fejezetében található.

Vegyünk egy bijekciót $\mathbb{N}$ és $\widetilde{\mathbb{E}}$ között és vegyük a 2.1. tétel szerinti $(F_n)_{n\geq 0}$ $(\tilde{x}_n, \tilde{h}_n)_{n\geq 0}$-ból induló FICRAB-ot.

5. Definíció. *Az előrehaladó folyamatokat minden $(x, h, y) \in \mathbb{F}^+$-ra a következőképpen definiáljuk :*

$$\lambda_{(x,h)}(y) := \sup\{F_n(y) : n \geq 0,\ \tilde{x}_n < x \text{ és } F_n(x) < h\}. \tag{2.3}$$

[9] 8. fejezetében láthatjuk annak igazolását, hogy λ jól definiált, valamint $h \mapsto \lambda_{(x,h)}(y)$ tetszőleges $x \leq y$-ra $(0, \infty)$-en monoton növő és balról folytonos. λ vizsgálatához minden $x \leq y$-ra legyen:

$$\begin{aligned} M(x,y) &:= \{\lambda_{(z,h)}(y) : (z,h) \in \mathbb{E} \text{ és } z < x\}; \\ M(y) &:= M(y,y). \end{aligned}$$

$M(x,y)$ arra szolgál, hogy ki tudjuk fejezni, hogy az x előttről indult előrehaladó folyamatok az x és y között mennyire olvaldnak össze.

2.1. Állítás.

(i): Minden $x \in \mathbb{R}$-re $M(x)$ sűrű $\mathbb{R}_+$-ban.

(ii): Minden valós $x < y$-ra $M(x,y)$ korlátlan és lokálisan véges.

(iii): Tetszőleges $x_1 < x_2$ valósokra

$$M(x_1, x_2) = \{\lambda_{(x_1,h)}(x_2) : h \in \mathbb{D}_+^*\}.$$

(iv): Minden $(x,h) \in \mathbb{E}$ és minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $n \geq 0$, hogy $\tilde{x}_n < x$ és $F_n(x) \in (h - \varepsilon, h)$, valamint minden $y \geq x + \varepsilon$-re

$$\lambda_{(x,h)}(y) = F_n(y).$$

(v): Minden $(x,h) \in \mathbb{E}$-ra $y \mapsto \lambda_{(x,h)}(y)$ folytonos $[0, \infty)$-en.

Szemléletesen az állítás (ii) része szerint az előre folyamatok rögtön végessé egyesülnek, (iv) alapján pedig minden előre folyamat rögtön találkozik egy, a diadikus törtekből indított folyamattal.

6. Definíció. *Hátrafelé haladó folyamatnak nevezzük a következőt. Legyen $(x,h,y) \in \mathbb{F}^-$. Ekkor:*

$$\lambda^*_{(x,h)}(y) := \sup\{h' > 0 : \lambda_{(x,h')}(y) < h\}. \tag{2.4}$$

Felhasználva az (5) definíciót és a 2.1. állítás (i) részét, minden $(x,h,y) \in \mathbb{F}^-$-ra

$$\lambda^*_{(x,h)}(y) = \sup\{F_n(y) : n \geq 0,\ \tilde{x}_n < y \text{ és } F_n(x) < h\}. \tag{2.5}$$

[9] 9. fejezetében megtalálhatóak azon bizonyítások, miszerint a $(-\infty, x] \ni y \mapsto \lambda^*_{(x,h)}(y)$ folyamatok folytonosak, az előre és a hátrafelé folyamatok egy valószínűséggel nem keresztezik egymást, illetve hogy a $[-x_i, \infty) \ni y \mapsto \lambda^*_{(-x_i,h_i)}(-y)$, folyamatok független RAB-ok mindaddig, amíg nem egyesülnek. Ugyanitt olvashatjuk a következő tétel bizonyítását is:

2.2. Tétel. $\mathbb{F}^+ \ni (x,y,h) \mapsto \lambda_{(x,h)}(y)$ *és* $\mathbb{F}^+ \ni (x,y,h) \mapsto \lambda^*_{(-x,h)}(-y)$ *azonos eloszlásúak.*

λ és λ^* ugyan nem függetlenek, de a következő speciális esetben fennáll a függetlenség. Legyen rögzített $z \in \mathbb{R}$ mellett a

$$\{\lambda_{(x,h)}(y) : x \geq y \geq z, h > 0\}$$

által generált σ-algebra F_z , aminek a korábbiak alapján $\{F_n(y) : n \leq 0,\ \tilde{x}_n < y \leq z\}$ is generátorhalmaza. Az $(F_n(\cdot))_{n\geq 0}$ család Markov-tulajdonságú, mert független RAB-ok egyesülései, így

$$\{\lambda^*_{(x,h)}(y) : z \leq y \leq x, h > 0\} \tag{2.6}$$

független F_z-től. a (2.6) által generált σ-algebrát jelöljük F^*_z-vel. Pontatlanul fogalmazva F_z jelöli a z koordináta előtt, F^*_z pedig a z után keletkező információt.
Tetszőleges $n \geq 0$-ra és $y \geq \tilde{x}_n$-re definiáljuk a következőt:

$$F^*_n(y) := \lambda^*_{(\tilde{x}_n,\tilde{h}_n)}(y).$$

A 2.2. tétel alapján $y \mapsto F^*_n(-y)_{n\geq 0}$ $(-\tilde{x}_n, \tilde{h}_n)$-ből induló FICRAB. F_n és λ mintájára λ^* előállítható $(F^*_n)_{n\geq 0}$-ból és ezzel F^*_z generátora $\{F^*_n(y) : n \geq 0, z \geq y < \tilde{x}_n\}$ is. Mivel tetszőleges n_1, n_2-re, amire $x_{n_1} < z < x_{n_2}$, $F_{n_1}(z)$ és $F_{n_2}(z)$ függetlenek, így F_z és F^*_z is függetlenek. Mivel $F_n(z)$ és $F^*_n(z)$ eloszlásai nem atomosak, ezért majdnem biztosan

$$F_n(z) \neq F^*_n(z). \tag{2.7}$$

7. Definíció.

$$\begin{aligned} I(x,h) := \limsup_{y\uparrow x} \sharp\{p \in \mathbb{N} : \exists (x_1,h_1),...,(x_p,h_p) \in \mathbb{E}, \text{ hogy} \\ \forall i = 1,...,p : x_i \leq y, \lambda_{(x_i,h_i)}(x) = h \text{ és } \forall z \in [y,x), \lambda_{(x_1,h_1)}(z) < ... < \lambda_{(x_p,h_p)}(z)\} \\ = \limsup_{y\uparrow x} \sharp\{p \in \mathbb{N} : \exists n_1,...,n_p \in \mathbb{N}, \text{ hogy} \\ \forall i = 1,...,p : \tilde{x}_i \leq y, F_{n_i}(x) = h \text{ és } \forall z \in [y,x), F_{n_1}(z) < ... < F_{n_p}(z)\}. \end{aligned}$$

$I(x,h)$ szemléletesen az (x,h)-ban először találkozó előre haladó folyamatok száma. Ennek megfelelően definiálhatjuk $I^*(x,h)$-t a hátrafelé haladó folyamatokra. A (2.7) alapján így majdnem biztosan minden rögzített x-re és minden $h > 0$-ra $I(x,h) = 0$ és $I^*(x,h) = 0$ közül az egyik teljesül. Minden $(x,h) \in \overline{\mathbb{E}}$-re $[I(x,h), I^*(x,h)]$-t mondjuk a pont típusának, $(I^*(x,h) + I^*(x,h) + 1)$-et pedig a multiplicitásának. A következő állításban összefoglaljuk, hogy milyen típusú pontok fordulhatnak elő.

2.2. Állítás.

(i): Egy rögzített $(x,h) \in \mathbb{E}$ majdnem biztosan 1 multiplicitású, azaz $[0,0]$ típusú.

(ii): Legyen $x \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor majdnem biztosan minden $h \geq 0$-hoz tartozó (x,h) pont legfeljebb 2 multiplicitású, azaz $[0,0]$, $[0,1]$, vagy $[1,0]$ típusú.

(iii): Egy valószínűséggel minden $(x,h) \in \mathbb{E}$ legfeljebb 3 multiplicitású, azaz a következő típusok valamelyike: $[0,0]$,$[0,1]$,$[1,0]$,$[2,0]$,$[0,2]$,$[1,1]$.

Az állítás bizonyítása [9] 9.fejezetében olvasható.

8. Definíció.

$$\overline{\lambda}_{(x,h)}(y) := \begin{cases} \lambda_{(x,h)}(y) \text{ ,ha } (x,h,y) \in \mathbb{F}^+; \\ \lambda^*_{(x,h)}(y) \text{ ,ha } (x,h,y) \in \mathbb{F}^-. \end{cases} \tag{2.8}$$

A 2.2. tétel alapján $\mathbb{E}\times\mathbb{R} \ni (x,h,y) \mapsto \overline{\lambda}_{(x,h)}(y)$ és $\mathbb{E}\times\mathbb{R} \ni (x,h,y) \mapsto \overline{\lambda}_{(-x,h)}(-y)$ folyamatok azonos eloszlásúak.

Két $\mathbb{E}$-beli (x_1,h_1), (x_2,h_2) ponthoz tartozó $\overline{\lambda}_{(x_1,h_1)}(y)$ és $\overline{\lambda}_{(x_2,h_2)}(y)$ sosem keresztezi egymást. Ennek oka a korábban már szerepelt három észrevétel:

1. Bármely két előre haladó λ folyamat találkozásnál egyesül.
2. Bármely két hátrafelé haladó λ^* folyamat találkozásnál egyesül.
3. Az előre haladó folyamatok nem keresztezik a hátrafelé haladó folyamatokat.

2.2. Az idő invertálhatósága

9. Definíció. *Tetszőleges $(x,h) \in \mathbb{E}$-hez definiáljuk a következő halmazt:*

$$D(x,h) := \{(x^{'},h^{'}) \in \mathbb{E} : h^{'} \geq \overline{\lambda}_{(x,h)}(x^{'})\}. \tag{2.9}$$

2.3. Állítás. *Majdnem minden $(x_1,h_1) \neq (x_2,h_2)$ $\mathbb{E}$-belire pontosan egy teljesül a következők közül:*

(i): $(x_1,h_1) \in D(x_1,h_1) \subset D(x_2,h_2)$, $(x_2,h_2) \notin D(x_1,h_1)$ és $D(x_2,h_2) \setminus D(x_1,h_1)$ tartalmaz nem üres nyílt halmazt.

(ii): $(x_2,h_2) \in D(x_2,h_2) \subset D(x_1,h_1)$, $(x_1,h_1) \notin D(x_2,h_2)$ és $D(x_1,h_1) \setminus D(x_2,h_2)$ tartalmaz nem üres nyílt halmazt.

Vegyünk egy $\prec$ relációt $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$-n az alábbi módon.

$$[(x_1,h_1) \prec (x_2,h_2)] \Longleftrightarrow [(x_1,h_1) \in D(x_2,h_2)].$$

Ez a 2.3. állítás alapján egy teljes rendezést ad $\mathbb{E}$-n.

10. Definíció. *Tetszőleges $(x,h) \in \mathbb{E}$-re legyen*

$$T(x,h) := |D(x,h)| = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\lambda}_{(x,h)}(y)dy. \tag{2.10}$$

A 2.3. állításból következik, hogy $T : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}_+$ egy valószínűséggel injektív.

2.3. Lemma. *Egy valószínűséggel $\{T(x,h) : x \in \mathbb{E}\}$ sűrű $\mathbb{R}_+$-ban.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha < \alpha^{'}$ $\mathbb{R}_+$-beli, hogy $T(\mathbb{E} \cup (\alpha, \alpha^{'})) = \emptyset$. Legyen továbbá $\beta := \sup\{T(\mathbb{E} \cup [\alpha, \alpha^{'}])\}$ és $\beta^{'} := \inf\{T(\mathbb{E} \cup [\alpha, \alpha^{'}])\}$. β és $\beta^{'}$ létezik, mert egy valószínűséggel $\lim_{h\downarrow 0} T(0,h) = 0$ és $\lim_{h\uparrow\infty} T(0,h) = \infty$. Vegyünk egy (x_n, h_n) és egy $(x_n^{'}, h_n^{'})$ sorozatot, hogy

$$\lim_{n\uparrow\infty} T(x_n, h_n) = \beta \quad \text{és} \quad \lim_{n\uparrow\infty} T(x_n^{'}, h_n^{'}) = \beta^{'}. \tag{2.11}$$

$D(x,h)$ minden (x,h)-ra korlátos, így a monoton konvergencia tétel segítségével $\beta =| \{D := \bigcup_{n\geq 0} D(x_n, h_n)\} |$ és $\beta^{'} =| \{D^{'} := \bigcap_{n\geq 0} D(x_n^{'}, h_n^{'})\} |$, ahol $| \, . \, |$ a Lebesgue-mértéket jelöli. A (2.3) következményeként $D \subset D^{'}$ és $D^{'} \setminus D$ nem Lebesgue 0-mértékű, ezért tartalmaz 3 $\mathbb{E}$-beli pontot, amikre $T(x,h) \in [\beta, \beta^{'}]$. T injektivitását felhasználva kapunk egy $(x,h) \in D^{'} \setminus D$ pontot, amire $T(x,h) \in (\beta, \beta^{'})$, tehát $\{T(\mathbb{E})\}$ sűrű $\mathbb{R}_+$-ban. $\square$

2.4. Lemma. *Vegyünk két különböző $\overline{\mathbb{E}}$-beli (x,h), $(x^{'}, h^{'})$ pontot és hozzájuk (x_n, h_n), $(x_n^{'}, h_n^{'})$ sorozatot és t, $t^{'}$ valós számot, hogy*

$$\lim_{n\uparrow\infty}(x_n, h_n) = (x,h), \quad \lim_{n\uparrow\infty}(x_n^{'}, h_n^{'}) = (x^{'}, h^{'}) \tag{2.12}$$

és

$$\lim_{n\uparrow\infty} T(x_n, h_n) = t, \quad \lim_{n\uparrow\infty} T(x_n^{'}, h_n^{'}) = t^{'}. \tag{2.13}$$

Ekkor $t \neq t^{'}$.

Bizonyítás. Ha $x = x^{'}$ és $h + \varepsilon < h^{'} - \varepsilon$, akkor $\exists n_0$, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $(x_n, h_n) \in D(x, h+\varepsilon)$ és $(x_n^{'}, h_n^{'}) \notin D(x, h^{'} - \varepsilon)$, így a 2.3. állítás alapján $(x, h-\varepsilon) \in D(x_n^{'}, h_n^{'})$. Tehát $n \geq n_0$-ra $T(x_n, h_n) < T(x, h+\varepsilon) < T(x, h^{'} - \varepsilon) < T(x_n^{'}, h_n^{'})$, amiből persze $t \neq t^{'}$ adódik.
Ha $x \neq x^{'}$, azaz $\exists\ r, q, r^{'}, q^{'} \in \mathbb{D}_+^*$, hogy $x < r < q < q^{'} < r^{'} < x^{'}$. Feltehető, hogy $T(x_n, h_n)$ és $T(x_n^{'}, h_n^{'})$ monoton sorozatok és hogy $x_n < r$ és $x_n^{'} > r^{'}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re (van olyan részsorozat, amire teljesül). $T(x_n, h_n)$ és $T(x_n^{'}, h_n^{'})$ monotonitásából a 2.3. állítás következményeként $\overline{\lambda}_{(x_n,h_n)}(y)$ és $\overline{\lambda}_{(x_n^{'},h_n^{'})}(y)$ is monoton. $M(r,q)$ és

$M^*(r^{'}, q^{'})$ majdnem biztosan lokálisan végesek és a 2.1. állításaiból következik, hogy $\exists\ n_0 \geq 0, k \geq 0, k^{'} \geq 0$, hogy $\tilde{x_k} \geq r$ és $\tilde{x_k^{'}} \geq r^{'}$ és minden $n \geq n_0$-ra

$$\begin{aligned} \lambda_{(x_n,h_n)}(y) &= F_k(y), \text{ ha } y \in [q, \infty), \\ \lambda_{(x_n',h_n')}(y) &= F_{k'}^*(y), \text{ ha } y \in (-\infty, q^{'}). \end{aligned}$$

A (2.7)-ből adódik, hogy $F_k(q) \neq F_{k'} * (q)$, mivel $\tilde{x_k} < q < \tilde{x_k^{'}}$. Tegyük fel, hogy $F_k(q) > F_{k'}^*(q)$. (Ellenkező eset hasonlóan tárgyalható.) A 2.3. állításból kapjuk, hogy $n \geq n_0$-ra $D(x_n^{'}, x_h^{'}) \subset D(x_n, h_n)$, továbbá

$$T(x_n, h_n) - T(x_n^{'}, h_n^{'}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{\lambda}_{(x_n,y_n)} - \overline{\lambda}_{(x_n',y_n')})dy \geq \int_q^{q^{'}} (F_k(y) - F_{k'}^*(y))dy > 0. \tag{2.14}$$

Mivel $t - t^{'}$ a (2.14) limesze, ezért megkaptuk, hogy $t \neq t^{'}$. □

Tekintsünk minden $t \in [0, \infty)$-hez egy $D_t := T^{-1}([0, t]) = \{(x, h) \in \mathbb{E} : T(x, h) \in [0, t]\}$ függvényt, ami szemléletesen a t időhöz tartozó lokális idő alatti terület pontjait jelenti. Mivel $(x^{'}, h^{'}) \in D_{T_{(x,h)}} \Leftrightarrow T(x, h) \leq T(x^{'}, h^{'}) \Leftrightarrow (x^{'}, h^{'}) \in D_{(x,h)}$, ezért

$$D_{T(x,h)} = D(x, h). \tag{2.15}$$

A következő tétel összefoglalja $T : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}_+$ főbb tulajdonságait.

2.5. Tétel. *$T : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}_+$ majdnem biztosan:*

(i): T injektív és minden $x \in \mathbb{R}$-re a $h \mapsto T(x, h)$ függvény szigorúan monoton növő és folytonos;

(ii): T alulról félig folytonos, következésképpen Borel;

(iii): T előállítja a Lebesgue-mértéket olyanformán, hogy minden $t \in \mathbb{R}_+$-re $\mid D_t \mid = t$.

2.3. A TSRM és lokális idejének definíciója

Most már minden ismert a TSRM definiálásához. Szemléletesen a fölső félsík azon pontját választjuk ki, amelyből indított RAB alatti terület megegyezik a folyamat idejével. A definícióban az időhöz rendelt síkbeli pont egyik koordinátáját adjuk meg. A másik koordináta a folyamat lokális ideje lesz az aktuális végpontban.

11. Definíció. *TSRM-nek nevezzük a következőt, ahol $t \geq 0$ az időt jelenti:*

$$P_t := \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\{(x, h) \in \mathbb{E} : T(x, h) \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)\}}. \tag{2.16}$$

A fenti definíció minden $t \geq 0$-ra egyetlen pontot ad. Mivel kompakt halmazok metszete nem üres, ezért csak azt kell belátni, hogy $|P_t| \geq 2$ nem lehetséges. Ha ugyanis veszünk két pontot, azokhoz létezik egy (x_n, h_n) és egy $(x_n^{'}, h_n^{'})$ $\mathbb{E}$-beli sorozat, amik különböző $\overline{\mathbb{E}}$-beli ponthoz tartanak és $\lim_{n\uparrow\infty} T(x_n, h_n) = \lim_{n\uparrow\infty} T(x_n^{'}, h_n^{'})$, ami ellentmond a 2.4. lemmának.

12. Definíció. *Minden $t \geq 0$-ra legyen $P_t := \{X_t, H_t\}$. Ekkor a $t \mapsto X_t \in \mathbb{R}$ véletlen függvényt TSRM-nek nevezzük.*

13. Definíció. *Legyen minden $(x, h) \in \overline{\mathbb{E}}$-hez*

$$T^+(x, h) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} T(x, h + \varepsilon),$$

illetve minden $t \geq 0$-hoz és $y \in \mathbb{R}$-hez

$$L_t(y) := \sup\{h > 0 : T(y, h) < t\}.$$

A fenti L_t megegyezik H_t-vel és az X_t folyamat lokális idejét adják. A következő két tételben összefoglaljuk a lokális idő létezését, folytonosságát és kapcsolatát az előre és hátrahaladó folyamatok rendszerével.

14. Definíció. *Minden $t \geq 0$-ra és $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazra az X előfordulási mértéke*[1]

$$\mu_t(A) := \int_0^t 1_{\{X_s \in A\}} ds.$$

A lokális idő a μ_t előfordulási mérték és a Lebesgue-mérték Radon–Nikodym-deriváltja.

2.6. Tétel.

(i): Majdnem biztosan minden $t \geq 0$-ra μ_t abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre és a sűrűségfüggvénye $L_t()$.

(ii): $t \mapsto L_t(\cdot)$ monoton növő függvény, mely a $[0, \infty)$-ből a valós értékű, folytonos, kompakt tartójú függvények osztályába képez.

2.7. Tétel. *(Ray–Knight tétel) Egy valószínűséggel minden $(x, h) \in \mathbb{E}$ és $y \in \mathbb{R}$-re*

$$L_{T(x,h)}(y) = \overline{\lambda}_{(x,h)}(y). \tag{2.17}$$

Továbbá egy valószínűséggel minden $(x, h) \in \overline{\mathbb{E}}$ és $y \in \mathbb{R}$-re

$$L_{T^+(x,h)}(y) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \overline{\lambda}_{(x,h+\varepsilon)}(y). \tag{2.18}$$

[1] szakirodalomban occupation time density

A 2.7. tétel bizonyítása és egyéb részletek [9]-ben olvashatók. Diszkrét esetben láttuk, hogy a lokális időnek egy adott pillanatban a folyamat értékéhez eső legközelebbi indulópontú előre és hátrahaladó bolyongások felelnek meg. A 2.7. tételben láthatjuk ennek folytonos változatát.

A tétel elnevezése a Brown-mozgás lokális idejére vonatkozó Ray–Knight tételből ered, ahol a Brown-mozgás lokális ideje a két dimenziós Bessel-folyamattal írható le.

A diszkrét és folytonos öntaszító folyamatok kapcsolata nem csak a labirintus és a FICRAB közötti hasonlóságban látható. A következő tételben az (1.2) lépési szabállyal lehet rokonságot felfedezni.

2.8. Tétel. *Tetszőleges* $(x_0, h_0) \in \mathbb{E}$*-re*

$$P - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{T(x_0,h_0)} \frac{(L_s(X_s)-\varepsilon)-(L_s(X_s)+\varepsilon)}{2\varepsilon} ds =$$
$$= -X_{T(x_0,h_0)} + \frac{1}{4}\left(\inf_{0 \le s \le T(x_0,h_0)} X_s + \sup_{0 \le s \le T(x_0,h_0)} X_s\right).$$

A TSRM lokális ideje ugyan nem differenciálható, de azért a 2.8. tételből azt kapjuk, hogy a folyamat dinamikáját egy pszeudo derivált elleniránya adja meg. Ezzel a TSRW mindkét megközelítését összekapcsoltuk a TSRM-nel.

3. fejezet

Utolsó érték a lokális idő függvényében

A fejezet lényegében [5] alapján készült és az előző két fejezet jelöléseit használja. A továbbiakban a TSRM egy adott időpontban vett lokális idejéből szeretnénk következtetni a folyamat utolsó értékére. A központi állítás szerint folytonos esetben az utolsó érték egyenletes eloszlású egy adott intervallumon. Először diszkrét esetben bizonyítjuk az állítást a határértékre, majd a diszkrét és folytonos öntaszító folyamatok határátmenetével folytonos esetre is.

3.1. Egyenletes eloszlás a diszkrét határértékre

Célszerű bevezetnünk egy módosított lokális idő függvényt, ahol az a tulajdonság, hogy a folyamat utolsó értéke leolvasható a folyamat lokális idejéből, megszűnik. Legyen $\widetilde{X}_n = x$ és $l_n(x+1/2) - l_n(x-1/2) = 0$ esetén húzzuk össze x-ben a lokális időt, vagyis minden $x \geq y \in E$ pontra legyen $l_n(y) := l_n(y-1)$. Az $|l_n(x+1/2) - l_n(x-1/2)| = 2$ esetben iktassunk be egy új pontot. Legyen most $l_n(x+1/2) - l_n(x-1/2) = 2$ és $l_n(x+1/2) := (l_n(x+1/2) + l_n(x-1/2))/2$ és minden $x \leq y \in E$ pontra legyen $l_n(y) := l_n(y-1)$. Ezekkel a módosításokkal elértük, hogy minden $e \in E$-re $|l_n(x+1/2) - l_n(x-1/2)| = 1$ és eközben a határeloszláson nem változtattunk. Mi most csak az első esettel foglalkozunk, tehát amikor $l_n^+ = l_n^-$. Legyen ekkor

$$\tilde{l}_n(x) := l_n(x-1/2)1_{x \leq \widetilde{X}_n} + l_n(x+1/2)1_{x > \widetilde{X}_n}.$$

Minden olyan pontban, amikor a labirintusban egy téglalap alsó oldalát elérjük, döntési pontban vagyunk, azaz a továbblépés iránya véletlen, tehát n végpont mellett $l_n^+ = l_n^-$. Minden olyan pontban pedig, amikor egy téglalap közepébe lépünk, követnünk kell az aktuális szakaszok irányát, azaz a lépés determinisztikus és $l_n^+ \neq l_n^-$.

Jelöljük $(N(k), k \in \mathbb{N})$-val a számozott döntési pontokat, vagyis $N(0) = 0$ és minden $k \geq 0$-ra $N(k+1) := \inf\{n > N(k) : l_n^+ = l_n^-\}$.

3.1. Lemma.

$$k = \frac{N(k) + \widetilde{H}_{N(k)}}{2}. \tag{3.1}$$

Bizonyítás. Alkalmazzunk indukciót k-ra. $k = 0$-ra $N(0) = \widetilde{H}_0 = 0$ miatt igaz a lemma. Tegyük fel, hogy k-ig igaz és tekintsük a $k+1$ esetet. Ha $N(k+1) = k+1$, akkor $\widetilde{H}_{N(k+1)} = \widetilde{H}_{N(k)} + 1$, mert figyelembe véve, hogy a középről húzott szakasz a jobb oldalunkon van, csak felfelé, illetve szinten maradva léphetünk. A szinten maradás viszont nem egy téglalap aljára juttatna a következő lépésben, tehát felfelé lépünk.

Ha $N(k+1) = N(k)+j$ valamely $j \geq 2$-re, akkor $j-1$ determinisztikus lépés volt. Ebben az esetben pontosan az $N(k)$ és az $N(k+1) - 1$ lépésben maradunk szinten, a kettő között pedig csökken az y koordináta értéke. Döntési pontból ugyanis felfelé, vagy lefelé haladva téglalap aljába, azaz döntési pontba jutnánk, emellett két szinten maradással is ismét döntési pontba jutunk, amire csak $N(k+1) - 1$ lépésnél kerül sor. Mindebből tehát $\widetilde{H}_{N(k+1)} = \widetilde{H}_{N(k)} - (j-1) + 1 = \widetilde{H}_{N(k)} - j + 2$, amiből a (3.1) már következik. □

Jelöljük Φ-vel azon $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$ függvények halmazát, melyekre $\mathbb{P}(\exists k : f = \tilde{l}_{N(k)}) > 0$. Tetszőleges $f \in \Phi$-re legyen $m_- = m_-(f) := 1 + \max\{x \in -\mathbb{N} : f(x) = -1\}$ és $m_+ = m_+(f) := \min\{x \in \mathbb{N} : f(x) = -1\} - 1$, valamint vegyünk egy $\tilde{a} := -1_{x \in 2\mathbb{Z}+1}$ függvényt. Ekkor $\mathbb{R} \setminus (m_-, m_+)$-on $f = \tilde{a}$ és $[m_-, m_+]$-on $f \geq 0$. f-nek az $[m_-, m_+]$-beli nullhelyeit jelöljük $O(f)$-fel. $O(f)$ olyan pontokat tartalmaz, amelyekben a folyamat pontosan egyszer járt (de nem feltétlenül tartalmazza az összeset).

Tekintsük most az $O(f)$ pontjai által határolt intervallumokat. Ekkor a nulla mindig szélső intervallumba esik, mert $x_n \geq 0$ esetén a folyamat a minimum értéktől eltekintve minden negatív értékben páros sokszor járt, $x_n < 0$ esetén pedig a maximum értéktől eltekintve minden pozitív értékben járt páros sokszor.

Ebből a meggondolásból kapjuk a későbbiekben folytonos időre megfogalmazott állítás azon részét, miszerint a lokális idő alapján leszűkíthető a folyamat lehetséges utolsó értékének halmaza. A leszűkített halmaz az a szélső intervallum, amely a nullát tartalmazó szélső intervallum ellenkező oldalán van. Ez a diszkrét esetben könnyen meggondolható, hiszen az intervallumok szélső értékei mintegy bejáratként és kijáratként tekintendők. Az állítás kiterjed a az utolsó érték leszűkített intervallumon belüli eloszlására is. Nézzük ezt meg diszkrét esetben.

Legyen $I(f)$ az a szélső intervallum, amely a nullát tartalmazó szélső intervallum ellenkező oldalán van. Minden $x \in I(f) \cap \mathbb{N}$-re vegyük a következő események halmazát:

$$E_{x,f} := \{\exists k \geq 0 f = \tilde{l}_{N(k)} \text{ és } X_{N(k)} = x\}.$$

Rögzített x és f esetén ez azt jelenti, hogy $e < x$-re $f(e + 1/2) = \tilde{\lambda}_{x+1/2,f(x)}(e)$ és $e > x$-re $f(e - 1/2) = \tilde{\lambda}_{x-1/2,f(x)}(e)$. $\tilde{\lambda}_{x+1/2,f(x)}$ és $\tilde{\lambda}_{x-1/2,f(x)}$ független előre és hátra haladó véletlen bolyongások, amik $(m_-(f), m_+(f))$-en 0-ban visszaverődnek, ezen kívül pedig 0-ban elnyelődnek. Ez alapján $E_{x,f}$ esemény valószínűsége

$$\mathbb{P}(E_{x,f}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(m_+ - m_-) - O(f)}. \tag{3.2}$$

Legyen $f \in \Phi$ és $X_{N(k)=n} = x$, továbbá $T(f) := \sum_{y \in \mathbb{Z}} (f(y) - \tilde{a}(y))$ az f és $\tilde{a}$ közötti terület. Ekkor

$$n = T(f) + f(x). \tag{3.3}$$

Ezt onnan láthatjuk, hogy n a nem módosított lokális idő és annak kezdeti értékének, a-nak a különbsége, a módosított lokális idő pedig a lokális időt húzza össze $f(x)$-ben, így n és $T(f)$ eltérése valóban $f(x)$.

A (3.1) és a (3.3) együtt adják, hogy

$$k = \frac{n + f(x)}{2} = \frac{T(f)}{2} + f(x). \tag{3.4}$$

Mivel $T(f) \leq \mid f(x) \mid^2$, ezért azt kapjuk, hogy

$$\frac{T(f)}{2} \leq k \leq \frac{T(f)}{2} + \sqrt{T(f)}. \tag{3.5}$$

Tetszőleges $A \in \mathbb{N}$-re legyen q_A egy $A/2$ várható értékű geometriai eloszlású valószínűségi változó és jelöljük $(x_A, \gamma_A(\cdot))$-val a q_A-ban megállított $\left(\widetilde{X}_N(q_A), \tilde{l}_N(q_A)(\cdot)\right)$ párt. Legyen továbbá u_A az $I(\gamma_A)$-n egyenletes eloszlású valószínűségi változó.

3.1. Állítás. *$f \in \Phi$ és $x \in I(f)$ esetén*

$$\mathbb{P}\left((x_A, \gamma_A(\cdot)) = (x, f)\right) \underset{A \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left((u_A, \gamma_A(\cdot)) = (x, f)\right). \tag{3.6}$$

Bizonyítás. Egy $f \in \Phi$-hez legyen $k(x, f)$ egy $x \in I(f)$ végpont eléréséhez tartozó döntési pontok száma. Felhasználva a (3.2)-t kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(E_{x,f}, q_A = k(x, f)\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(E_{x,f}\right) \mathbb{P}\left(q_A = k(x, f)\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{(m_+ - m_-) - O(f)} \left(1 - \tfrac{2}{A}\right)^{k(x,f)-1} \tfrac{2}{A}.$$

$A \to \infty$ esetén $T(\gamma_A) \to \infty$ is teljesül majdnem biztosan, ezért $\sqrt{T(\gamma_A)}$ elhanyagolható lesz $T(f)$ mellett. Tetszőleges $f \in \Phi$-re legyen

$$p(f) := \left(\frac{1}{2}\right)^{(m_+ - m_-) - O(f)} \left(1 - \frac{2}{A}\right)^{T(f)/2-1} \frac{2}{A}.$$

A (3.3)-t kihasználva kapjuk, hogy minden $f \in \Phi$-re és $x \in I(f)$-re

$$\left(1 - \frac{2}{A}\right)^{\sqrt{T(f)}} \leq \frac{\mathbb{P}\left((x_A, \gamma_A) = (x, f)\right)}{p(f)} \leq 1.$$

A fentit kiátlagolva minden $x \in I(f)$-re az adódik, hogy

$$\left(1 - \frac{2}{A}\right)^{\sqrt{T(f)}} \leq \frac{\mathbb{P}\left((u_A, \gamma_A) = (x, f)\right)}{p(f)} = \frac{\mathbb{P}(\gamma_A = f)}{p(f) \mid I(f) \mid} \leq 1.$$

A fenti egyenlőtlenségek hányadosa

$$\left(1 - \frac{2}{A}\right)^{\sqrt{T(f)}} \leq \frac{\mathbb{P}((x_A, \gamma_A) = (x, f))}{\mathbb{P}((u_A, \gamma_A) = (x, f))} \leq \left(1 - \frac{2}{A}\right)^{-\sqrt{T(f)}},$$

elég tehát azt belátni, hogy

$$E\left(\left(1 - \frac{2}{A}\right)^{\sqrt{T(f)}}\right) \to 1 \quad \text{és} \quad \mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{2}{A}\right)^{-\sqrt{T(f)}}\right) \to 1 \tag{3.7}$$

$A \to \infty$ esetén. Alkalmazzuk a (3.3)-t a véletlenített döntésszámra,

$$\frac{T(\gamma_A)}{2} \leq q_A \leq \frac{T(\gamma_A)}{2} + \sqrt{T(\gamma_A)}.$$

Ekkor figyelembe véve, hogy q_A geometriai eloszlású $A/2$ várható értékkel a 3.1. állítás már adódik. □

3.2. Egyenletes eloszlás folytonos esetre

Az előző részben beláttuk, hogy diszkrét időben az utolsó érték eloszlása a lokális idő függvényében egyenletes a lokális idő azon szélső intervallumában, mely a 0-t tartalmazó ellenkező oldalán van.[1] Ez az eredmény kulcsfontosságú a most következő tétel bizonyításához. Legyen $(X_t)_{t \geq 0}$ TSRM, $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ a lokális idő, I_t pedig λ_t azon szélső intervalluma, amely a nullát tartalmazó intervallum ellenkező oldalán van. Mint majd az 5. fejezetben látni fogjuk, az intervallum 0.225 valószínűséggel a lokális idő teljes tartója, egyéb esetben viszont egy valószínűséggel nem elfajuló.

[1] Az intervallumokat a nullhelyek választották el és folytonos esetben is így értjük a lokális idő intervallumait.

3.2. Tétel. *X_t feltételes eloszlása adott $\lambda_t(\cdot)$ mellett egyenletes az I_t intervallumon.*

Egy Brown-mozgás t-beli feltételes eloszlását a lokális ideje mellett a szakirodalomban Brownian burglar distribution-nak, azaz a Brown-rabló eloszlásának nevezik. Elképzelve, hogy egy rabló Brown-mozgás szerint menekül, és számunkra csak a már látogatott helyek és a látogatások gyakorisága ismert, a Brown-rabló eloszlása adja a jelenlegi hollétének eloszlását. Ha így gondolunk az előző tételre, akkor azt mondhatjuk, hogy a TSRM szerint menekülő rabló I-ben optimálisan bujkál. A 3.2 tétel diszkrét esetben csak hibával áll fenn, ami határértékben elenyészik. A TSRW és TSRM határátmenete nem triviális. A TSRW és a TSRM véges dimenziós eloszlásainak konvergenciája [9]-ben olvasható, míg a diszkrét és folytonos előre, illetve hátrahaladó rendszerek eloszlásbeli konvergenciája [8]-ban található. Dolgozatomban [5] szerint haladok tovább a 3.2. tétel alábbi formáját bizonyítva.

3.3. Tétel. *Legyen τ egy X-től független 1 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor X_τ feltételes eloszlása $\lambda_\tau(\cdot)$ mellett egyenletes az I_τ intervallumon.*

Bizonyítás. A bizonyítás az alábbi lemmán múlik.

3.4. Lemma. *Legyen $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ TSRW és q_A egy $\widetilde{X}$-től független $A/2$ várható értékű geometriai eloszlású valószínűségi változó. Ekkor az eloszlásbeli konvergenciát $\xrightarrow{d}$-vel jelölve,*

$$(A^{-2/3}\widetilde{X}_{N(q_A)}, A^{-1/3}\tilde{l}_{N(q_A)}(A^{2/3}\cdot), A^{-2/3}I(l_{N(q_A)})) \xrightarrow{d} (X_\tau, \lambda_\tau(\cdot), I_\tau). \tag{3.8}$$

Bizonyítás. Legyen $C := \{$folytonos, kompakt tartójú, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$függvények$\}$, továbbá definiáljunk minden $\Phi : \mathbb{R}\times C\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ korlátos folytonos lineáris funkcionálra egy skálázó funkcionált a következőképpen:

$$\Phi^A(x, l(\cdot), I) := \Phi(A^{-2/3}x_{N(q_A)}, A^{-1/3}l_{N(q_A)}(A^{2/3}\cdot), A^{-2/3}I).$$

Fejezzük ki a tételbeli hármasok Φ^A funkcionáljának várható értékét. Legyen F az olyan $(x,h) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ pontok halmaza, melyre $x+h$ páros. Legyen továbbá minden $(x,h) \in F$-re $f_{x,h} \in \phi$ az $(x+1/2)$ pontból induló előrehaladó és az $(x-1/2)$-ből induló hátrahaladó folyamatok konkatenációja. Ezen jelölésekkel a (3.4) egyenlőséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\ \ (\Phi^A(\widetilde{X}_{N(q_A)}, \tilde{l}_{N(q_A)}(\cdot), I(l_{N(q_A)}))) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{(x,h)\in F} \mathbb{E}\left(\Phi^A(x, f_{x,h}(\cdot), I(f_{x,h}))1_{A(f_{x,h})+2h=2k}\right)\mathbb{P}(q_A = k) = \\
&= \frac{2}{A}\sum_{(x,h)\in F} \mathbb{E}\left(\Phi^A(x, f_{x,h}(\cdot), I(f_{x,h}))\cdot(1-2/A)^{(T(f_{x,h})+2h)/2-1}\right). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Minden $(x,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$-ra vezessük be azon $(x^A, h^A) \in F$, melyekre $A^{2/3}x \in [x^A, x^A+1)$ és $A^{1/3}h \in [h^A, h^A+1)$, ha x^A páros, illetve $A^{1/3}h \in [h^A-1, h^A)$, ha x^A páratlan, továbbá jelöljük f^A-val az f_{x^A,h^A} skálázottját, azaz

$$f^A(\cdot) := A^{-1/3} f_{x^A,h^A}(A^{2/3}\cdot).$$

Jelölje T^A az f^A és az átskálázott kezdeti lokális idő közötti területet. Ekkor a (3.9) átírható a következő integrál alakba:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \mathbb{E}\left(\Phi(A^{-2/3}x^A, f^A(\cdot), I(f^A)) \cdot (1-2/A)^{(A\cdot T^A+2h^A)/2-1}\right) dx\, dh. \tag{3.10}$$

A folytonos esethez felhasználjuk a 10 definíciót. A Fubini tétel, és a $t = T(x,h)$ átírás segítségével a folytonos esetre vett határérték a következőképp írható:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\quad (\Phi(X_\tau, \lambda_\tau, I_\tau)) = \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^{\infty} e^{-t}\Phi(X_t, \lambda_{(X_t,\lambda_t(X_t))}, I_{(X_t,\lambda_t(X_t))})dt\right) = \\
&= \mathbb{E}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-T(x,h)}\Phi(x, \lambda_{(x,h)}, I_{x,h})dh\, dx\right) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{-T(x,h)}\Phi(x, \lambda_{(x,h)}, I_{x,h})\right) dh\, dx.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Be kell látnunk tehát, hogy a (3.10) konvergál a (3.11)-hoz, amihez először az integrandusok konvergenciáját gondoljuk meg, majd a dominált konvergenciatételt alkalmazzuk. Az előbbi a Szkorohod reprezentációs tételen múlik. Eszerint ha veszünk minden $n \geq 0$-hoz egy $(S_k^n)_{k\geq 0}$, $[n^{1/3}h]$-ból induló szimmetrikus bolyongást és vesszük ezeknek az $S^{(n)}(\cdot) := n^{-1/3}S^n_{[n^{2/3}\cdot]}$ átskálázottját, akkor $S^{(n)}$ majdnem biztosan konvergál egy h-ból induló standard Brown-mozgáshoz. Ebből következik az $A^{-2/3}x^A \to x$, mint a kiindulópont és $f^A \to \lambda_{(x,h)}$, mint a trajektória konvergenciája, mivel a tükrözött folyamatok is egy valószínűséggel konvergálnak. I konvergenciájához még szükséges egy (x,h)-ból indított B Brown-mozgás azon tulajdonsága, miszerint ha megállítjuk a 0-szint első elérésénél és újraindítjuk, akkor majdnem biztosan rögtön előjelet vált. Ennek köszönhetően a lokális idők nullhelyei határértékben megegyeznek, így I-ben is vehetünk határértéket.

A dominált konvergenciatételhez elég látnunk, hogy a (3.10) felülről korlátos, ami teljesül $||\Phi||_\infty e^{-c(x+h)}$ korláttal egy nagy A-tól kezdve valamely $c > 0$ konstanssal. Ezzel beláttuk a 3.4. lemmát. □

Mivel a 3.1. állítás szerint a diszkrét öntaszító folyamatra határértékben igaz az utolsó érték I-beli egyenletes eloszlása, ezért a 3.4. lemma alapján beláttuk a 3.3. tételt is. □

4. fejezet

A Brown-mozgás és a TSRM

Ebben a fejezetben a TSRM-t és a Brown-mozgást vetjük össze néhány főbb tulajdonságot megvizsgálva. Az összehasonlítást két érdekes különbség motiválta. Az első, hogy a Browm-mozgás martingál, aminek egyik feltétele, hogy véges kvadratikus variációval rendelkezik. Ez a feltétel igaz egy általánosabb fogalomra, a szemimartingálokra is. Szemimartingálok azok a folyamatok, melyek meghatározhatók sztochasztikus differenciálegyenlet által. A TSRM kívül esik ezen folyamatok köréből, ami megmagyarázza a 2. fejezetben végigvett körülményes konstrukciót.

A második érdekes különbség, hogy míg a Brown-mozgásnak egy valószínűséggel nincs lokális növekedési pontja, addig a TSRM-nek egy valószínűséggel van, illetve egy rögzített időpontig nézve a folyamatot pozitív valószínűséggel van globális növekedési pont is. A TSRM lokális idő függvényei visszaverődő Brown-mozgások, amiben a belső nullhelyek pontosan az adott időpontig vett globális növekedési pontok. Ebből azt is megkapjuk, hogy a globális növekedési pontok torlódva jelentkeznek.

A fejezetben nem tudunk teljes körű összehasonlítást végezni, mivel számos olyan tulajdonság, melyet a Brown-mozgásra már tudunk, a TSRM-re még ismeretlen. X és H a 12. definícióban bevezetett TSRM-t, valamint annak lokális idejét jelöli.

Állítások elemi tulajdonságokról

4.1. Állítás.

(i): Majdnem biztosan $t \mapsto (X_t, H_t)$ folytonos $[0, \infty)$-en és $(X_0, H_0) = (0, 0)$.

(ii): Egy valószínűséggel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$-re a $\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t = x\}$ halmaz nem korlátos.

(iii): A $t \mapsto (X_t, H_t)$ és a $t \mapsto (-X_t, H_t)$ folyamatok azonos eloszlásúak.

(iv): Tetszőleges $a > 0$ valós számra a $t \mapsto (X_{at}, H_{at})$ és a $t \mapsto (a^{2/3}X_t, a^{1/3}H_t)$ folyamatok azonos eloszlásúak.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy léteznek $(t_n)_{n\geq 0}$, $(t_n^{'})_{n\geq 0}$ $t \geq 0$-hoz tartó sorozatok, hogy $\lim_{n\uparrow\infty} X_{t_n} \neq \lim_{n\uparrow\infty} X_{t_n'}$. Ekkor mivel (X_t, H_t)-t szuprémumként definiáltuk, ezért léteznek $(x_{n,k}, h_{n,k})$ és $(x_{n,k}^{'}, h_{n,k}^{'})$ sorozatok, hogy

$$\lim_{k\uparrow\infty}(x_{n,k}, h_{n,k}) = (X_{t_n}, H_{t_n}) \quad , \qquad \lim_{k\uparrow\infty} T(x_{n,k}, h_{n,k}) = t_n; \tag{4.1}$$

$$\lim_{k\uparrow\infty}(x_{n,k}^{'}, h_{n,k}^{'}) = (X_{t_n'}, H_{t_n'}) \quad , \qquad \lim_{k\uparrow\infty} T(x_{n,k}^{'}, h_{n,k}^{'}) = t_n^{'}. \tag{4.2}$$

Diagonális kiválasztással tudunk adni $(k_n)_{n\geq 0}$ sorozatot, hogy a mentén

$$T(x_{n,k_n}, h_{n,k_n}) = t = T(x_{n,k_n}^{'}, h_{n,k_n}^{'}) \text{ és}$$

$$\lim_{n\uparrow\infty}(x_{n,k_n}, h_{n,k_n}) = \lim_{n\uparrow\infty}(X_{t_n}, H_{t_n}), \quad \lim_{n\uparrow\infty}(x_{n,k_n}^{'}, h_{n,k_n}^{'}) = \lim_{n\uparrow\infty}(X_{t_n'}, H_{t_n'}),$$

ami ellentmond a a 2.4. lemmának. Ha a folyamat $(x, h) \neq (0, 0)$-ból indulna, akkor az ebből indított RAB alatti terület definíció szerint minden $\varepsilon > 0$-nál kisebb lenne, azaz 0 lenne, ami lehetetlen. Ezzel az (i) részt beláttuk.

Az (ii) részhez azt kellene igazolnunk, hogy majdnem biztosan minden $x \in \mathbb{R}$-re $\lim_{h\uparrow\infty} T(x, h) = +\infty$. Vegyünk egy ekvidisztáns felosztást y-tengelyen. Durva alsó becslésként a felosztás szeleteken tekintsük azon területeket, melyek a felosztás pontjaiban 0-ba tolt trajektóriákból származnak. Ekkor végtelen sok független azonos eloszlású, egy valószínűséggel pozitív területeket adunk össze, ami egy valószínűséggel végtelen. (ii) azt mondja ki, hogy a TSRW a Brown-mozgáshoz hasonlóan minden állapotba egy valószínűséggel visszatér.

(iii) állítás közvetlen következménye a 2.2. tételnek, mert X_t és $-X_t$ lokális ideje közötti kapcsolat éppen $\lambda_{(X_t,H_t)}(y) = \lambda^*_{(-X_t,H_t)}(-y)$, illetve $\lambda^*_{(X_t,H_t)}(y) = \lambda_{(-X_t,H_t)}(-y)$ attól függően, hogy $X_t \geq y$, vagy $x_t < y$.

A tétel utolsó része a skálázási tulajdonság, ami a Brown-mozgás skálázási tulajdonságán alapszik. Vegyünk egy (X_t, H_t)-ból indított RAB folyamatot, ami alatti terület pontosan t és jelöljük magát a folyamatot W-vel. Tekintsük továbbá az $(a^{2/3}X_t, a^{1/3}H_t)$-ből indított átskálázottját, ami alatti terület $a^{2/3} - a^{1/3}t = at$. Azt kellene látnunk, hogy az átskálázott folyamat RAB folyamat maradt, vagyis, hogy $\overline{W}(s) = a^{1/3}W(a^{-2/3}s)$ is RAB. Ezt pedig pontosan a Brown-mozgás skálázási tulajdonságából kapjuk.

Jegyezzük meg, hogy (iv) szoros kapcsolatban áll azzal, hogy a TSRM 3/2 rendben véges variációjú, amit a a 4.1. tétel foglal magába. □

A következő tétel a TSRM 3/2-beli véges variációjáról szól, ami egyben igazolja a fejezet elején tett kijelentést is, miszerint az öntaszító folyamat nem szemimartingál.

Vezessünk be minden $\varepsilon > 0$-hoz egy megállási idő sorozatot és hozzá minden $t > 0$-ra egy valószínűségi változót a következőképpen:

$$\theta_0^\varepsilon := 0, \quad \theta_n^\varepsilon := \inf\{t > \theta_{n-1}^\varepsilon : |X_t - X_{\theta_{n-1}^\varepsilon}| = \varepsilon\}.$$

$$N_t^\varepsilon := \sup\{n \geq 0 : \theta_n^\varepsilon \leq t\}.$$

4.1. Tétel.

(i): Minden $(x, h) \in \mathbb{E}$-re

$$P - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{2/3} N_{T(x,h)}^\varepsilon = \frac{2T(x,h)}{\sqrt{\pi}}.$$

(ii): Minden $t \geq 0$-ra

$$P - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{n \leq N_t^\varepsilon} |X_{\theta_n^\varepsilon} - X_{\theta_{n-1}^\varepsilon}|^{3/2} = P - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{2/3} N_t^\varepsilon = \frac{2t}{\sqrt{\pi}}.$$

A bizonyítás megtalálható [9] 7. fejezetében.

A 2/3-os skálázási kitevő és egyes számolási eszközök révén kapcsolatba hozható a TSRM a KPZ (Kardar-Parisi-Zhang) folyamatosztállyal, amely a KPZ nemlineáris sztochasztikus egyenletet kielégítő folyamat vonzási köre. A mélyebb összefüggés még nyitott kérdés. ([6])

Markovitás és következményei

Észrevehetjük, hogy a 4.1. tétel általában (X_t, H_t) párról tesz állítást, nem külön az öntaszító folyamatról. A 4.1. tételben ez pusztán azért van, hogy minél többet megtudjunk a lokális időről is, de a tételt magára X_t-re is lehetne vonatkoztatni. Ez a rész többek között a markovitásról szól, ami azonban már nem áll fent $t \mapsto X_t$-re, csak a $t \mapsto (X_t, H_t)$ párra[1]. Az, hogy X_t nem Markov tulajdonságú, nyílvánvaló, hiszen tetszőleges időpontban a továbblépés az egész múlttól függ. A $t \mapsto (X_t, H_t)$ pár markovitásának igazolása [9] 5. fejezetében olvasható, de megemlítjük, hogy a megfelelő diszkrét folyamatpár markovitása mind az (1.2) továbblépési szabály alapján, mind pedig a labirintusos konstrukció alapján triviális.

A Brown-mozgás számos tulajdonsága az erős markovitásból adódik. Ide sorolandó, hogy bármely megállási időből újraindítva is Brown-mozgást kapunk, valamint az ebből következő tükrözési elv, illetve az idő inverzió is. [9] 7. fejezetében olvashatunk azon megfigyelésről, miszerint $t \mapsto (X_t, H_t)$ Markov tulajdonságán keresztül megmutatható, hogy az $\mathbb{E}$-beli pontok típusa[2] hogyan áll összefüggésben a

[1] illetve $t \mapsto H_t$-re is, hiszen a a 2.7. tétel alapján $t \mapsto H_t$ RAB folyamat.

[2] Lásd a 7. definíció utáni megjegyzést.

folyamat kivételes pontjaival, nevezetesen a lokális szélsőértékekkel és a lokális növekedési pontokkal. Ez alapján a lokális növekedési helyek pontosan az $[1,1]$ típusú pontok x-koordinátái, míg a lokális minimum és maximum helyek rendre a $[0,2]$, $[2,0]$ típusúak x-koordinátái. A lokális minimumok és maximumok ilyen meghatározását szemléletesen a diszkrét labirintus alapján lehet látni, hiszen két előre, illetve két hátra folyamat találkozásakor a bejárás során az x-tengelyen irányváltás történik. A továbbiakhoz idézzük fel a típus fogalmát.

$$I(x,h) = \lim_{y\uparrow x} \sup \sharp\{p \in \mathbb{N} : \exists n_1, ..., n_p \in \mathbb{N}, \text{ hogy}$$
$$\forall i = 1, ..., p : \tilde{x}_i \leq y, F_{n_i}(x) = h \text{ és } \forall z \in [y,x), F_{n_1}(z) < ... < F_{n_p}(z)\}.$$

$$I^*(x,h) = \lim_{y\downarrow x} \sup \sharp\{p \in \mathbb{N} : \exists n_1, ..., n_p \in \mathbb{N}, \text{ hogy}$$
$$\forall i = 1, ..., p : \tilde{x}_i \geq y, F_{n_i}(x) = h \text{ és } \forall z \in (x,y], F_{n_1}(z) < ... < F_{n_p}(z)\}.$$

Egy $(x,h) \in \overline{\mathbb{E}}$ pont típusán az $[I(x,h), I^*(x,h)]$ számpárt értjük. Az $[1,1]$ típusú pontok rögzített első koordinátára sűrűn fordulnak elő. Először lássuk be, hogy azon pontok, melyekre $I(x,h) = 1$ sűrűn fordulnak elő. Legyen ugyanis $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ az $\widetilde{\mathbb{E}} \setminus \{0\}$-ből indított FICRAB[3]. Indirekt tegyük fel, hogy valamely $0 < h_1 < h_2$-re $((x,h_1),(x,h_2))$ intervallumon minden $(x,h)_{h\in(h_1,h_2)}$ ponthoz létezik $\varepsilon_{x,h} > 0$, hogy $((x-\varepsilon,h)) : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{x,h}, h \in (0,\infty)$ tartományon csak véges sok (x,h)-ba érkező F_i olvadjon össze. Vegyünk két azonos első koordinátájú pontból induló F_{i_1}, F_{i_2} folyamatot, ami $((x,h_1),(x,h_2))$ intervallum különböző pontjába érkezik. A beérkező pontokra használjuk a (x,h_i^1), illetve a (x,h_i^2) jelölést, a kiindulási pontokra pedig a (x_i,h_{i_1}), illetve a (x_i,h_{i_2}) jelölést. A 2.1. állítás (ii) és (iv) része alapján tudunk úgy választani, hogy F_{i_1}, F_{i_2} végtelen sok F_k-val olvad össze. Vegyünk $(x+x_i)/2$ első koordinátájú pontokból induló F_k-k közül két olyat, amibe végtelen sok $y \in ((x+x_i)/2, x)$ első koordinátájú pontból induló F_k megy úgy, hogy különböző $(x,h) : h \in (h_{i_1}, h_{i_2})$ pontba érkeznek. Ily módon közelítve x-hez F_k-k második koordinátabeli monotonitása miatt kapunk egy F_k-kból álló sorozatpárt, hogy a beérkezésük $((x,h_1),(x,h_2))$-ben egymásba ágyazott intervallumokat határoznak meg, valamint az n-edik elem végtelen sok $((x+x_i)/2^n, x) \times (h_{i_1}, h_{i_2})$ tartományból induló F_k-val egyesül. A beérkezési pontok határértékére igaz lesz, hogy minden n-re végtelen sok $(x+x_i)/2^n, x)$ első koordinátájú pontból induló F_k-nak pontja. Jegyezzük meg, hogy két különböző pontot nem kaphatunk határértéknek, mert ekkor a köztes részen minden pontba az elég közeli pontokból való indulású F_k-k csak véges sokan lennének, ami ellentmond az indirekt feltevésnek. Ahhoz, hogy a pont $[1,1]$ típusú legyen, ki kell egészítenünk

[3]Két oldali visszaverődő-elnyelő Brown-mozgások, melyek találkozás esetén elnyelődnek.

az előbbi sorozatot. Mivel az $\widetilde{\mathbb{E}} \setminus \{0\}$ pontjaiból visszafelé nézve F_k-kat csak a 0 szinten vett viselkedésükben különböztethetjük meg, ezért az érvelés az x-től jobbra eső pontokat és a belőlük balra induló F_k-kat tekintve is elmondható. Kezdő lépésnek legyen $\varepsilon > 0$, hogy $\lambda_{(x,h_i^1)}(x+\varepsilon) \neq \lambda_{(x,h_i^2)}(x+\varepsilon)$. Ha az előzőek szerint veszünk sorozatot, de felváltva tekintve jobbról, illetve balról a FICRAB-beli párt, akkor a beérkezési pontok határértéke már $[1,1]$ típusú lesz.

A $[0,0]$, $[1,0]$ és $[0,1]$ típusú pontok x-koordinátái pontosan azok a helyek, ahol a folyamat legalább egy irányból torlódó. A 2.2. tétel (i) része alapján ezek egy valószínűségű halmazt alkotnak a fölső félsíkon. Elmondható tehát, hogy a Brown-mozgáshoz hasonlóan egy adott pontban egy valószínűséggel torlódás figyelhető meg. A (2.7) kifejezésből és az előbbiből azt is megkapjuk, hogy $\mathbb{E} \setminus \widetilde{\mathbb{E}}$ pontjai egy valószínűséggel legalább egy irányból torlódási ponjai a folyamatnak. Ebből következtethetünk arra, hogy egy valószínűséggel a TSRM semely intervallumon nem monoton, ahogy a Brown-mozgás sem.

A növekedési pontokról

A Brown-mozgásnak egy valószínűséggel nincs lokális növekedési pontja. Ezzel szemben a TSRM-nek sűrűn vannak lokális növekedési pontjai, mi több tetszőleges időpontig nézve közel 0.775 valószínűséggel létezik globális növekedési pontja is. Vizsgáljuk először a globális növekedési pontokat. Vegyük észre, hogy a 3.2. tétel alapján a lokális idő belső nullhelyei megegyeznek a TSRM globális növekedési pontjaival. Tegyük fel ugyanis, hogy a lokális idő valamely belső 0-helye többször látogatott. Ekkor lenne olyan racionális időpont, hogy a nullhelyen másodszor mentünk át, tehát egy belső intervallumban vagyunk. Ez ellentmondana a 3.2. tételnek. A következő fejezetben tárgyaljuk, hogy a pontosan kettő nullhelyű lokális idő közel 0.225 valószínűséggel fordul elő. Tudjuk azt is, hogy a lokális idő trajektóriája a tartón 0-ban visszaverődő Brown-mozgás. Elmondható tehát a TSRM-ről, hogy megközelítőleg 0.775 valószínűséggel végtelen sok globális növekedési pontja van, melyek torlódva jelentkeznek. Az előző részben megjegyeztük, hogy $\widetilde{\mathbb{E}} \setminus \{0\}$ halmaz tetszőleges rögzített első koordinátája mellett egy sűrű részhalmaz egy valószínűséggel $[1,1]$ típusú. Kihasználva a 2.5. tétel (i) részét, kapjuk, hogy a lokális növekedési pontok sűrűn helyezkednek el.

5. fejezet

A lokális idő szélső intervalluma

5.1. Egy intervallum esete

Az alfejezet [5] alapján halad és a következő alfejezet felvezetéseként szolgál.

5.1. Állítás.

$$\mathbb{P}(\mathrm{supp}(\lambda_t) = I_t) = 1 - \frac{9\sqrt{3}\Gamma(2/3)^6}{4\pi^3} \approx 0,225. \tag{5.1}$$

Annak érdekében, hogy lássuk, az eredmény milyen eszközöket kíván, a bizonyítás vázlatát ismertetjük. A kiindulási pont az idő szerinti integrálásról $t = T(x, h)$ helyettesítéssel az x és h szerinti integrálásra való áttérés. [5]-ben szereplő kisebb meggondolásokkal és az előző helyettesítéssel eljutunk a keresett valószínűség következő formájához:

$$\mathbb{P}(\mathrm{supp}(\lambda_t) = I_t) = 2\int_0^\infty \mathbb{E}_h\left(\xi \exp\left(-\int_{\xi'}^{\xi} B_t dt\right)\right) dh, \tag{5.2}$$

ahol ξ és ξ' független h-szintelérési idők, B_t pedig 0-ban h-ból induló kétoldali Wiener-folyamat. Az (5.2) kifejezésben az integrált felbonthatjuk összeg alakra és a Wiener-folyamat független növekményűsége miatt szorzat alakra bonthatjuk az integrandust az (5.2)-ben az alábbi módon.

$$\mathbb{E}_h\left(\xi \exp\left(-\int_0^{\xi} B_t dt\right)\right) \cdot \mathbb{E}_h\left(\exp\left(-\int_{\xi'}^{0} B_t dt\right)\right) = u(h)v(h). \tag{5.3}$$

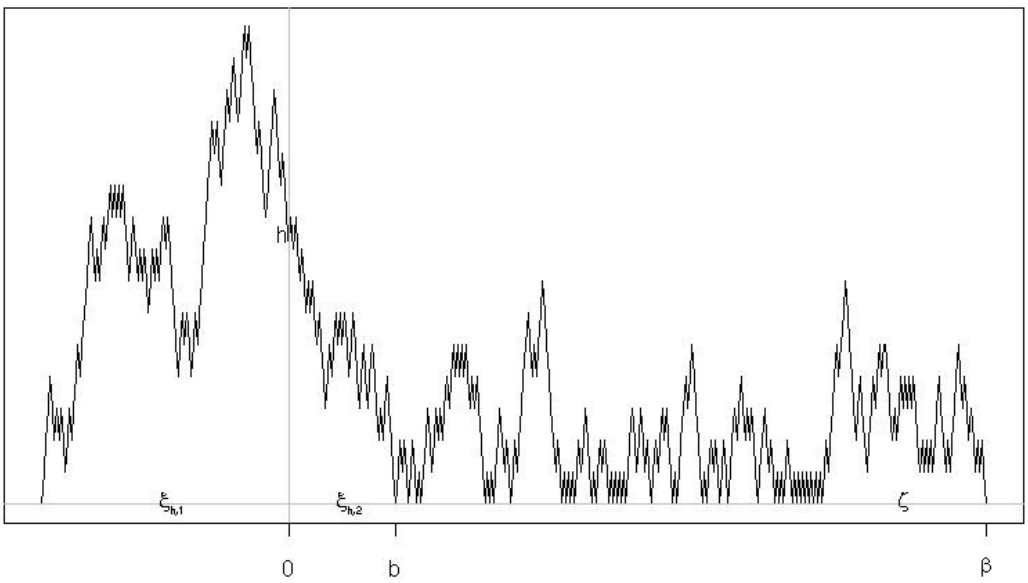
Ekkor $v(h)$ kielégíti a

$$v''(x) = 2xv(x)$$

differenciálegyenletet, aminek a megoldása az Airy-függvény segítségével fejezhető ki. Erről bővebben olvashatunk [3]-ban. A Wiener-folyamat erős Markov-tulajdonságával és egy parciális integrálás segítségével $u(\cdot)$ kifejezhető $v(\cdot)$ függvényében. A számolás utolsó lépései az Airy-függvény 0 és ∞-beli ismeretén alapulnak.

5.2. Intervallum arány

A 3.2. tétel szempontjából az előző részben taglalt eset pont azt foglalja magába, amikor a lokális idő ismerete nem ad új információt az utolsó értékre nézve. Felmerül a kérdés, hogy a 3.2. tétel mégis mennyire erős. Ezt olyan értelemben vizsgáljuk, hogy milyen eloszlású a megfelelő szélső intervallum hossza a lokális idő tartójához képest. Legyen I most a korábbi jelölést felülírva a lokális idő tartójának hossza. Mivel a folyamatunk 0-ra szimmetrikus és az egypúpú esetet már az előző részben elemeztük, így most csak a jobbra eltolódott lokális idejű folyamatokat tekintjük, ahol legalább két pozitív nullhely van. Jobbra tolódott lokális időn azt értem, ahol a lokális időben a 0 bal szélső intervallumba esik. Vegyünk egy tetszőleges ilyen lokális időt és legyen a 0 utáni első nullhely b, az öntaszító folyamat maximuma, azaz a lokális idő jobb szélső nullhelye pedig β. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra a $\beta - \varepsilon$ időpontból nézve a lokális időt RAB folyamatot kapunk. Igaz tehát az, hogy 0 és β között egy olyan Wiener-folyamat abszolút értékének trajektóriája húzódik, amelynek β-ban egy valószínűséggel nem torlódnak a nullhelyei. Legyen a b-ből újraindított abszolútértékes Wiener-folyamat W, valamint legyen az utolsó intervallum hosszát mérő valószínűségi változó ζ.



5.1. ábra. Jelölések a számoláshoz.

Ekkor felbontva az eseményteret a β előtti utolsó nullhely szerint

$$P(\zeta < x) = \int_0^x P\left(W_{\beta-b-s} = 0 \text{ és } W_{\beta-b-u} > 0\, \forall u \in (0,s) \mid W_{\beta-b} = 0\right) ds =$$

$$= \int_0^x \int_0^s \frac{f_{W_{\beta-b-s},W_{\beta-b}}(0,0) - f_{W_{\beta-b-s},W_{\beta-b-u},W_{\beta-b}|W_{\beta-b-v:v\in(0,u)}>0}(0,0,0)}{f_{W_{\beta-b}(0)}} du\, ds, \quad (5.4)$$

ahol $f_{W_{i_1},\dots,W_{i_k}}(\cdot)$ a W folyamat $(i_j)_{j=1,\dots,k}$ helyeinek ismert együttes sűrűségfüggvénye. A nehézséget a számláló második tagja, a feltételes sűrűségfüggvény okozza. Egy lehetőség lenne valamely $\varepsilon > 0$-ra $(\beta - b - \varepsilon)$-ból visszafelé nézni a folyamatot és tekinteni a $-W_{\beta-b-\varepsilon}$ szintelérési időt feltéve, hogy $W_b = -W_{\beta-b-\varepsilon}$. Azonban ε-nal 0-hoz tartani nem tűnik könnyű feladatnak.

A sűrűségfüggvény alsó becslése

A dolgozatban a következő összefüggés felhasználásával alsó és fölső becslésekre törekszünk.

$$f_{W_{i_1},\dots,W_{i_k}}(x_1,\dots,x_k) = \prod_{j=1}^{k} 2 f_{N(0,i_j-i_{j-1})}(x_j - x_{j-1}),$$

ahol $i_0 = 0$. Legyenek $A_s := \{W_s = 0\}, s \in (b,\beta)$ események. Az események uniójára vonatkozó Boole-egyenlőtlenség és $\{(b,\beta)\text{-n } W > 0\} = \{\cup_{s\in(b,\beta)} A_s\}$ összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$f_\zeta(x,\beta,b) \geq$$

$$\int_0^x \frac{4/(2\pi\sqrt{x(\beta-b-x)}) - 8/(2\pi\sqrt{2\pi(\beta-b-x)(x-u)u})}{2/\sqrt{2\pi(\beta-b)}} 1_{\{0\leq x\leq\beta-b\}} du =$$

$$= \int_0^x \left\{ \left(\frac{2(\beta-b)}{\pi x(\beta-b-x)}\right)^{1/2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\beta-b}{(\beta-b-x)(x-u)u}\right)^{1/2} \right\} 1_{\{0\leq x\leq\beta-b\}} du =$$

$$= \left\{ \left(\frac{2(\beta-b)x}{\pi(\beta-b-x)}\right)^{1/2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\beta-b}{(\beta-b-x)}\right)^{1/2} \right\} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-u)u}} 1_{\{0\leq x\leq\beta-b\}}\, du.$$

Az integrál továbbírható $t := u - \frac{x}{2}$, majd $v := \frac{2t}{x}$ helyettesítéssel a következőképpen:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-u)u}}\, du = \int_{-x/2}^{x/2} \frac{1}{\sqrt{(x/2)^2 - t^2}}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\, dv = \pi.$$

Rögzített β és b mellett tehát ζ sűrűségfüggvényére

$$f_\zeta(x,\beta,b) \geq \left\{ \left(\frac{2(\beta-b)x}{\pi(\beta-b-x)}\right)^{1/2} - 2\left(\frac{(\beta-b)}{(\beta-b-x)}\right)^{1/2} \right\} 1_{\{0\leq x\leq\beta-b\}}. \quad (5.5)$$

alsó becslés adható. Vegyük észre, hogy $x < 2\pi$ esetén ez semmit nem mond, hiszen ekkor az (5.5) negatív. Mivel a célunk ζ és I arányának a becslése, ezért ha I-t növeljük, $x \geq 2\pi$ leszűkítéssel a 0 körüli arány becslését veszítjük el.

Tegyük fel, hogy a lokális idő 0-ban h és legyen a pozitív és negatív 0 szintelérési idő rendre $\xi_{h,1}$ és $\xi_{h,2}$. Szeretnénk β és b helyett behozni I-t, $\xi_{h,1} + \xi_{h,2}$ összegen keresztül. Tudjuk, hogy $b = \xi_{h,2}$ és $\beta = I - \xi_{h,1}$. Legyen $\xi_h := \xi_{h,1} + \xi_{h,2}$, ekkor az (5.5) átírható

$$f_\zeta(x,h,I) \geq \int_0^I \left\{ \sqrt{\frac{2(I-\xi_h)x}{\pi(I-\xi_h-x)}} - \sqrt{\frac{4(I-\xi_h)}{(I-\xi_h-x)}} \right\} 1_{\{0\leq x\leq I-\xi_h\}}\, d(\xi_h \mid I) =$$

$$\overset{Y=I-\xi_h}{=} \int_x^I \sqrt{\frac{2Y}{Y-x}} \left(\sqrt{\frac{x}{\pi}} - \sqrt{2} \right) 1_{\{0\leq x\}}\, d(Y \mid I) \tag{5.6}$$

alakba. $(\xi_{h,i})_{i=1,2}$ független h-szintelérési idők, melyeknek az eloszlása ismert. ξ_h sűrűségfüggvényét konvolúcióval kapjuk a következőképpen:

$$\begin{aligned} f_{\xi_h}(z) &= \int_{\mathbb{R}} 1_{\{u\geq 0\}} \left(\frac{h e^{\frac{-h^2}{2u}}}{\sqrt{2\pi} u^{3/2}} \right) 1_{\{z-u\geq 0\}} \left(\frac{h e^{\frac{-h^2}{2(z-u)}}}{\sqrt{2\pi}(z-u)^{3/2}}\, du \right) = \\ &= \int_0^z \frac{h^2}{2\pi} \cdot \frac{e^{\frac{-h^2 z}{2u(z-u)}}}{[u(z-u)]^{3/2}}\, du = \frac{h}{\sqrt{2\pi z}} \int_0^z f_{\xi_h\sqrt{z}}(u(z-u))\, du. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Most az összeg feltételes sűrűségfüggvényre van szükségünk amellett a feltétel mellett, hogy $\xi_h \leq I$. A feltételes sűrűségfüggvény $s > I$-re 0, $s < I$ esetén pedig

$$f_{\xi_h|I}(s) = \frac{f_{\xi_h}(s)}{\int_0^I f_{\xi_h}(z)dz}.$$

Az (5.6)-ba behelyettesítve a feltételes sűrűségfüggvényt azt kapjuk, hogy

$$\int_x^I \left(\sqrt{\frac{2s}{s-x}} \left(\sqrt{\frac{x}{\pi}} - \sqrt{2} \right) \right) \frac{f_{\xi_h}(s)}{\int_0^I f_{\xi_h}(z)dz} 1_{\{0\leq x\}}\, ds$$

Kifejtve a sűrűségfüggvényeket adódik, hogy

$$\int_x^I \left(\sqrt{\frac{2s}{s-x}} \left(\sqrt{\frac{x}{\pi}} - \sqrt{2} \right) \right) \cdot \frac{\int_0^s \frac{h^2}{2\pi} \cdot e^{\frac{-h^2 s}{2u(s-u)}} [u(s-u)]^{-3/2} du}{\int_0^I \int_0^z \frac{h^2}{2\pi} \cdot e^{\frac{-h^2 z}{2u(z-u)}} [u(z-u)]^{-3/2} du dz} 1_{\{0\leq x\}}\, ds.$$

A levezetést az u-szerinti integrálokkal folytatjuk. A helyettesítéseket az egyenlőségek fölé írjuk, ezen kívül pedig csak a páros függvények integrálási szabályát alkalmazzuk.

$$\int_0^s e^{\frac{-h^2 s}{2u(s-u)}} [u(s-u)]^{-3/2} du \overset{x:=u-\frac{s}{2}}{=} \int_{-s/2}^{s/2} e^{\frac{-h^2 s}{\frac{s^2}{2}(1-(2x/s)^2)}} \left(\frac{s^2}{4} \left(1 - \left(\frac{2x}{s} \right)^2 \right) \right)^{-3/2} dx =$$

$$\overset{y:=\arcsin\frac{2x}{s}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2h^2}{s\cos^2 y}} \left(\frac{s}{2}\cos y\right)^{-2} dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2h^2}{s\cos^2 y}} \left(\frac{s}{2}\cos y\right)^{-2} dy =$$

$$\overset{z:=(\cos^2 y)^{-1}}{=} 2\int_1^{\infty} \left(\frac{2}{s}\right)^2 e^{\frac{-2h^2}{s}z} z \cdot \frac{1}{2} z^{-3/2} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right)^{-1/2} dz =$$

$$= 2\int_1^{\infty} \left(\frac{2}{s}\right)^2 e^{\frac{-2h^2}{s}z} (\sqrt{z-1})^{-1} dz \overset{v:=\frac{2h^2}{s}(z-1)}{=} \frac{2^{5/2}}{h} s^{-3/2} e^{\frac{-2h^2}{s}} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{-1/2} dv.$$

Az integrál a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Gauss integrál kétszeresével egyenlő, így

$$\int_0^s e^{\frac{-h^2 s}{2u(s-u)}} [u(s-u)]^{-3/2} du = \frac{2^{7/2}\pi^{1/2}}{hs^{3/2}} e^{\frac{-2h^2}{s}}.$$

Következésképpen

$$f_\zeta(x,h,I) \geq \frac{1}{\int_0^I z^{-3/2} e^{\frac{-2h^2}{z}} dz} \int_x^I \left(\sqrt{\frac{2}{s^2(s-x)}} \left(\sqrt{\frac{x}{\pi}} - \sqrt{2}\right)\right) e^{\frac{-2h^2}{s}} 1_{\{0\leq x\}} ds =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}} - 2\right)}{\int_0^I z^{-3/2} e^{\frac{-2h^2}{z}} dz} \cdot \int_x^I \frac{1}{s\sqrt{(s-x)}} e^{\frac{-2h^2}{s}} ds\, 1_{\{0\leq x\}}. \tag{5.8}$$

Ez a becslés $x \to I$ esetén 0-t ad, tehát az intervallum arány 0 és 1-beli viselkedésére az alsó becslésből nem tudunk következtetni. $x \in (2\pi, I)$ esetén viszont rögzített I, h mellett a becslés pozitív.

A sűrűségfüggvény fölső becslése

A Boole-egyenlőtlenség általánosításával, a szita formulával tetszőlegesen finom alsó és fölső becslés kapható $f_\zeta(x,\beta,b)$-re. A következő

$$P(\{\cup_{s\in(b,\beta)} A_s\}) \leq \int_b^\beta A_s\, ds - \int_0^s \int_0^u A_u \cap A_v\, dvdu$$

összefüggésből adódó fölső becslés $f_\zeta(x,\beta,b)$-re nemnegatív x esetén az alábbiakban látható, ahol $X := \beta - b$. [1]

$$\int_0^x \int_0^u \frac{f_{W_{X-x},W_X}(0,0) - f_{W_{X-x},W_{X-u},W_X}(0,0,0) + f_{W_{X-x},W_{X-u},W_{X-v},W_X}(0,0,0,0)}{f_{W_X}(0)} dvdu$$

[1] A primitív függvényeket program segítségével számoltam, így nem írok részletesebb levezetést.

$$= \int_0^x \int_0^u \frac{\frac{4}{(2\pi\sqrt{x(X-x)})} - \frac{8}{(2\pi\sqrt{2\pi(X-x)(x-u)u})} + \frac{16}{4\pi^2\sqrt{(X-x)(x-u)(u-v)v}}}{\frac{2}{\sqrt{2\pi X}}} dv\, du =$$

$$= \sqrt{\frac{2X}{\pi(X-x)}} \int_0^x \int_0^u \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{2}{\pi(x-u)u}} + \frac{2}{\pi\sqrt{(x-u)(u-v)v}} dv\, du =$$

$$= \sqrt{\frac{2X}{\pi(X-x)}} \int_0^x \frac{u}{\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{2u}{\pi(x-u)}} + \frac{2}{\sqrt{x-u}} du =$$

$$= \sqrt{\frac{2X}{\pi(X-x)}} \left(\frac{x^{3/2}}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} x + 4\sqrt{x} \right).$$

Az alsó becslésnél számolt f_{ξ_h} sűrűségfüggvénnyel $X = I - \xi_h$-ra áttérve azt kapjuk, hogy

$$f_\zeta(x,h,I) \leq \frac{1}{\int_0^I z^{-3/2} e^{\frac{-2h^2}{z}} dz} \int_x^I \sqrt{\frac{2s}{\pi(s-x)}} \left(\frac{x^{3/2}}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} x + 4\sqrt{x} \right) s^{-3/2} e^{\frac{-2h^2}{s}} ds. \tag{5.9}$$

Jegyezzük meg, hogy rögzített I, h mellett $s > 0$-ra ez az érték pozitív. Az exponenciális tagot fölülről, illetve alulról becsülve a következőre jutunk. Legyen

$$C_h(x,I) := \frac{\frac{x^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} - x + 4\sqrt{\frac{2x}{\pi}}}{\int_0^I z^{-3/2} e^{\frac{-2h^2}{z}} dz}, \quad g(s,x) := \sqrt{\frac{1}{s^2(s-x)}}.$$

Ekkor

$$C_h(x,I) e^{\frac{-2h^2}{x}} \int_x^I g(s,x) ds \leq C_h(x,I) \int_x^I g(s,x) e^{\frac{-2h^2}{s}} ds \leq C_h(x,I) e^{\frac{-2h^2}{I}} \int_x^I g(s,x) ds.$$

Felhasználva, hogy

$$\int_x^I \frac{1}{s\sqrt{(s-x)}} ds = \frac{2\cos^{-1}\left(\sqrt{x/I}\right)}{\sqrt{x}}, \tag{5.10}$$

az (5.9) kifejezés jobb oldala $x \to I$ esetén 0-hoz tart, ami valamelyest mutatja a 3.2. tétel jóságát. Az exponenciális tagot az (5.8)-ban alulról, az (5.9)-ben fölülről becsülve léteznek olyan $C_1(h,I)$, $C_2(h,I)$ rögzített h és I mellett valós véges konstansok, hogy

$$C_1(h,I) \int_x^I g(s,x) ds \leq f_\zeta(x,h,I) \leq C_2(h,I) \int_x^I g(s,x) ds. \tag{5.11}$$

f_ζ I-beli 0-hoz tartásának nagyságrendje az (5.10) és az (5.11) segítségével meghatározható $\cos^{-1}(\cdot)$ 1-beli viselkedése által. Mivel $\cos^{-1}$ gyökös nagyságrendben tart 0-hoz, ezért

$$\lim_{x\to I} \frac{f_\zeta(x,h,I)}{(I-x)^{1/4}} = C, \tag{5.12}$$

ahol $C < \infty$ valós konstans.

A fölső becslést $x \to 0$ esetben vizsgálva az (5.10) segítségével azt is láthatjuk, hogy $f_\zeta(0,h,I) < \infty$, hiszen

$$f_\zeta(0,h,I) \le \lim_{x\to 0} C_h(x,I) \int_x^I g(s,x) e^{\frac{-2h^2}{s}} ds \le e^{\frac{-2h^2}{I}} \lim_{x\to 0} C_h(x,I) \int_x^I g(s,x) ds =$$

$$= \frac{e^{\frac{-2h^2}{I}}}{\int_0^I z^{-3/2} e^{\frac{-2h^2}{z}} dz} \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} - x^{1/2} + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) 2\cos^{-1}\left(\sqrt{x/I}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{-2h^2}{I}} 4\sqrt{2\pi}}{\int_0^I z^{-3/2} e^{\frac{-2h^2}{z}} dz} < \infty. \tag{5.13}$$

f_ζ alsó becslését az arányra vonatkoztatva I növelésével tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra elérhető, hogy $(\varepsilon, 1)$-en pozitív legyen az arány sűrűségfüggvénye. Összevetve ezt azzal, hogy a fölső becslés $[0,1)$-en pozitív és véges, arra következtethetünk, hogy ezen a tartományon ζ eloszlása folytonos.

A szita formulából tudjuk, hogy tetszőlegesen finom alsó, illetve fölső korlát elérhető, illetve az alábbi formulával $k \to \infty$ esetén magát $f_\zeta(x,h,I)$-t is megkapjuk.

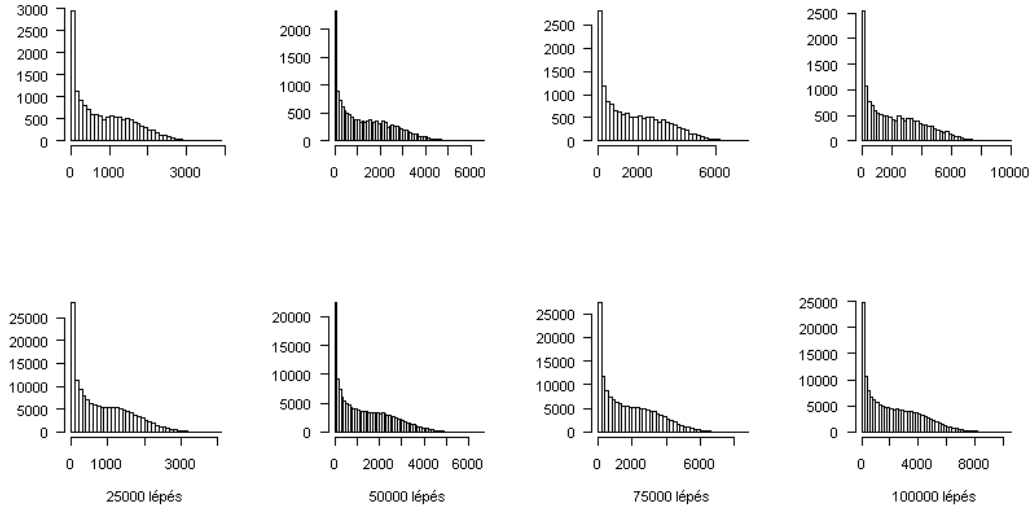
$$\int_0^x \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_{k-1}} \sum_{i=0}^{k} \frac{2(-2)^i (\pi)^{-\frac{i+1}{2}}}{\sqrt{(X-x)(x-u_i)(u_i-u_{i-1})\dots(u_{i-(k-1)}-u_{i-k})}} du_k \dots du_1,$$

ahol $u_j = j$, ha $-j \in \mathbb{N}$.

6. fejezet

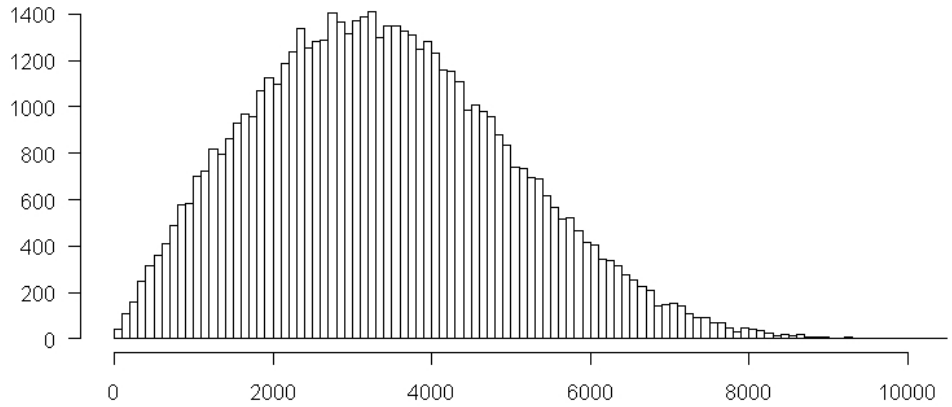
Szimulációs eredmények

A szimulációt az 1.1. rész alapján, az (1.2) lépési szabály szerint írtam. Minden szimuláció 100000 lépésszámig futott. Összesen 150143 darab 12 dimenziós adatból dolgoztam. A megfigyelések a döntési pontok számára, a 3.2. tételben szereplő I intervallum hosszára, a nullhelyek darabszámára, az 100000-ik lépés értékére, valamint a minimumokra és maximumokra vonatkoztak. A minimumokat és maximumokat a negyed, a fél, a háromnegyed és a teljes lépéshosszakra külön figyeltem, és eszerint négyrészben tekintettem a terjedelmet is. A lépést és a szimulációszámot aszerint választottam, hogy a hisztogramok mennyire simulnak. Az alábbi ábra a maximumok gyakoriságát mutatja sorok szerint 15000 és 150000 adatra, oszlop szerint pedig az ábrán látható lépéshosszra kiértékelve. Minden megfigyelt adatra hasonló mértékű finomodást lehetett észrevenni.



6.1. ábra. Maximum eloszlásának finomodása adatnöveléssel.

A 0 a lokális időben szélső intervallumban helyezkedik el, így a balra tolódott lokális idők hatásaként a 0 körül nagyobb a gyakoriság. A 6.2. ábrán látható a jobbra tolódott lokális idejű adatok maximumának eloszlása[1].



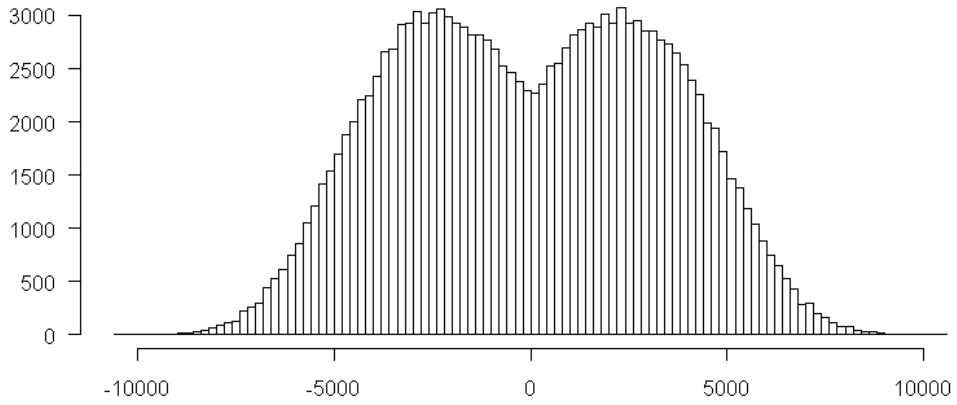
6.2. ábra. Maximum eloszlása jobbra tolódott lokális időkre.

Az $X(1)$ eloszlásáról és az ebben vett lokális érték eloszlásáról [6]-ben olvashatunk. Az eloszlásokat egy az Airy-függvény és Mittag–Leffler sűrűségfüggvény segítségével felírt differenciálegyenletek megoldásaiként kapjuk meg a Feynman–Kac formula segítségével. A két eloszlás közül a 6.3. ábrán csak az utolsó érték hisztogramját láthatjuk átskálázás nélkül.

Adott $t > 0$-ban X_t sűrűségfüggvényének általános jellegzetessége, hogy 0-ban nem deriválható és szigorú lokális minimuma van, valamint 3000 és -3000 környékén abszolút maximum helyei vannak. Ennek okán mondhatjuk, hogy a TSRW és a TSRM a 0-ból való kilökődést sosem felejti el.

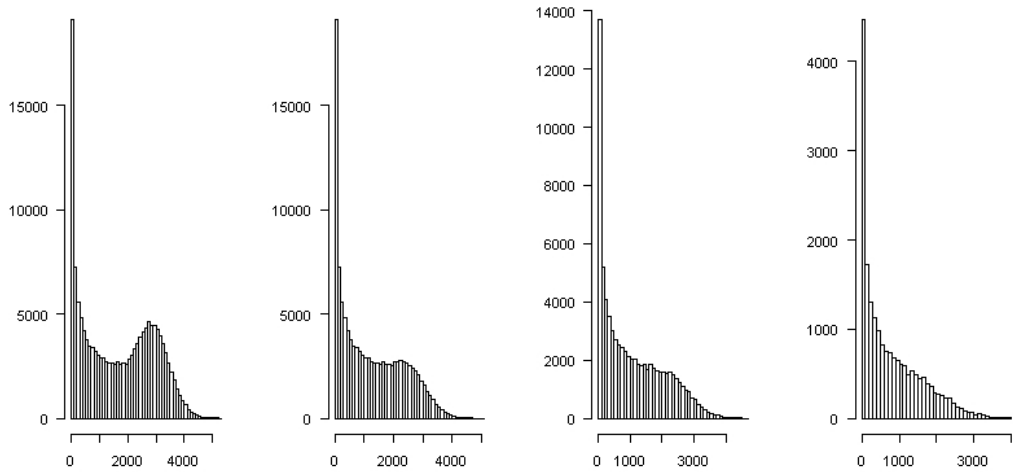
A 6.4. ábra négy esetben szemlélteti a 3.2. tételben szereplő I intervallum hosszának eloszlását. Az első ábra minden adatra vett kiértékelésből, a második csak a több intervallumú lokális idejű adatokra adódott. A harmadik a 30-nál több, a negyedik pedig a 100-nál több intervallum intervallumú lokális idők esetére adódott. A harmadik és negyedik eset rendre körülbelül 75000, illetve 20000 adatra állt fönn. A 3000 körüli púp fokozatos eltűnése azzal magyarázható, hogy az intervallumszámok növekedésével az utolsó intervallum nagyobb valószínűséggel esik egy torlódó nullhely

[1] Az előző fejezetben β eloszlásának felel meg.



6.3. ábra. Az utolsó érték hisztogramja.

halmaz közelébe, ezáltal a hosszának sűrűségfüggvénye egyre inkább a 0-ba koncentrálódik. Jegyezzük meg, hogy abban az esetben, amikor két nullhely van, két független szintelérési idő összegének a sűrűségfüggvényét kellene a szint szerint kiintegrálni, ahol a szintelérési idők eloszlása ismert.[2]

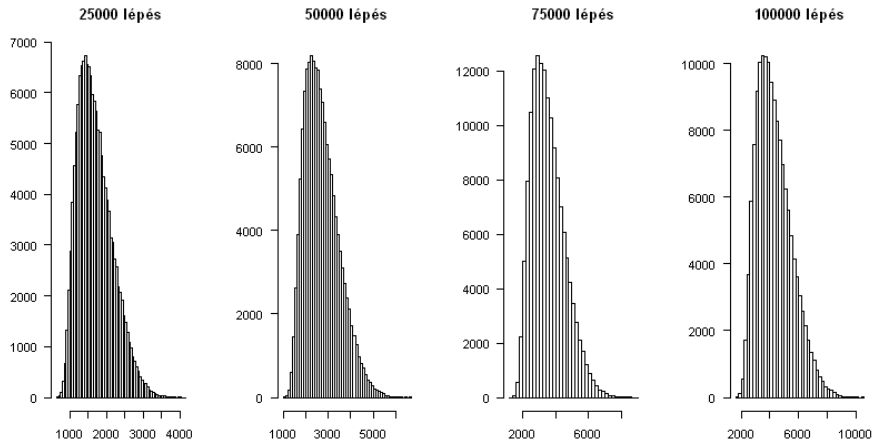


6.4. ábra. I hisztogramja a nullhelyek számától függően.

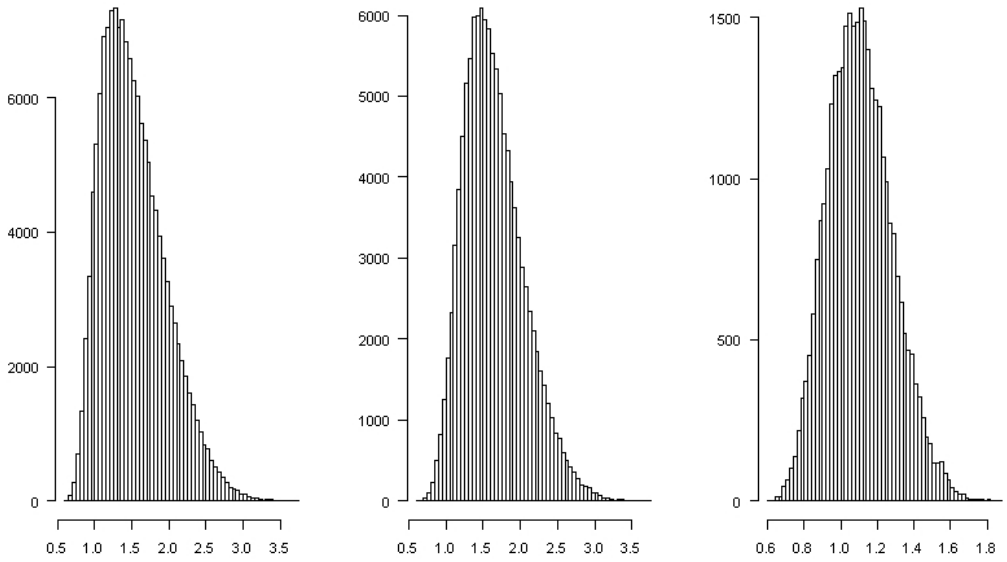
Az alábbi ábrákon az öntaszító folyamat kiterjedését ábrázoljuk. A különböző

[2]Az (5.7) kifejezésben ez a h szerint való integrálást jelenti.

lépésszámokra vett ábrából a 2/3-os skálázás után azt látjuk, hogy a lépésszámtól függetlenül kapunk egy eloszlást. A 6.6. ábrán a már átskálázott adatok kiterjedését szemléltetjük először minden adatra, majd csak a többpúpú trajektóriákra, végül pedig az egypúpúakra. Észrevehető, hogy az első két esetben az eloszlás jellege nem változik az adatok leszűkítésétől, de egyértelműen jobbra tolódik. Az egypúpú esetekben jelentősen kisebb a kiterjedés és szimmetrikusabb az eloszlás.



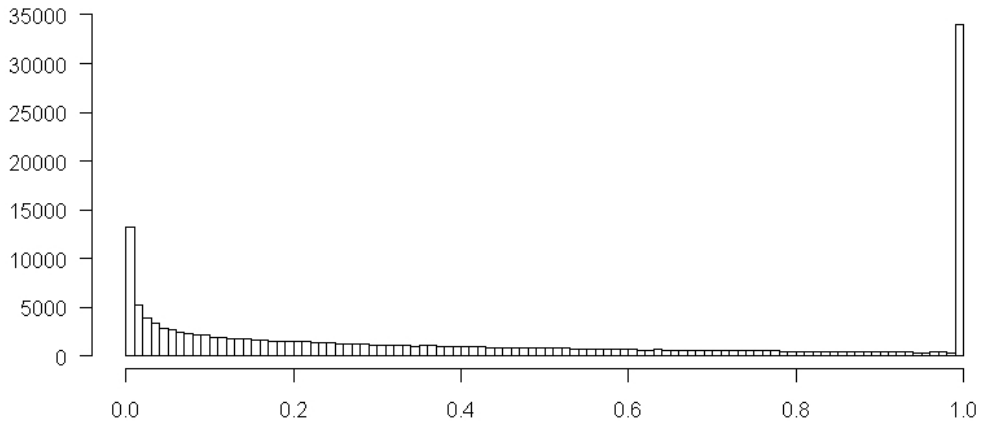
6.5. ábra. A range hisztogramja különböző lépésszámokra.



6.6. ábra. A skálázott range hisztogramja különböző lépésszámokra.

A szimuláció mozgatórugója az 5. fejezetben tárgyalt szélső intervallumhossz és a kiterjedés arányának eloszlása. Az 5. fejezetben beláttuk, hogy az arány $[0, 1)$-en

folytonos, 1-ben $(1-x)^{1/4}$ nagyságrendben 0-hoz tart, valamint 0-ban véges. Ezen tulajdonságokat a 6.7. ábrán szemléletesen is láthatjuk. Mivel az eloszlás számolása során feltételeket tettünk, valamint csak korlátokat számoltunk, ezért a szimuláció plusz információt hordoz a 3.2. tétel erősségét illetően. Tudjuk, hogy az eloszlás



6.7. ábra. Intervallum arány.

keverék eloszlás, méghozzá olyan kiosztás mellett, hogy közel 0.225 valószínűséggel az 1 pontba koncentrálódott eloszlást kapjuk, körülbelül 0.775 valószínűséggel pedig a $[0,1)$-en egy folytonos eloszlást. A 6.7. ábrán azt láthatjuk, hogy az intervallum arány gyakorisága $[0,1)$-en csökkenő és lassan lecsengő. Az esetek 60%-ában kevesebb, mint a fele, míg az esetek 43%-ában kevesebb, mint a negyede lett a szélső intervallum a kiterjedésnek.

Megemlítem végül a döntési pontok számának megfigyelésének eredményét is. A maximális érték 5050 volt, a szórás 7.9, a várható érték pedig 5011. Ebből egyrészt a (3.5) becslés durvaságát láthatjuk, valamint a (3.4) alapján az utolsó érték gyakoriságára is következtethetünk.

Összefoglalás

A dolgozat diszkrét és folytonos öntaszító folyamatok vizsgálatával foglalkozik. Kiindulásként kétféle megközelítésben definiáltunk egy él szerint öntaszító sétát, majd a folytonos változat összetettebb konstrukciójával folytattuk. Ezután [5] fő eredményét ismertettük, mely a lokális idő értelmében meghatározott utolsó érték eloszlásáról szól. Az ötödik fejezetben különböző feltételek mellett a 3.2. tétel hasznosságát mérő eloszlást kíséreltük meg minél pontosabban leírni. A szimulációs eredmények alapján azt mondhatjuk, hogy bár a tétel közel 0.225 valószínűséggel érdektelen, az esetek 60%-ában az utolsó érték előfordulásának lehetséges halmazát legalább a felére csökkenti.

A dolgozatban kitérünk a Wiener-folyamat és a TSRM részleges összehasonlítására is, melyben két különbséget hangsúlyozunk: a szemimartingálok körébe tartozást, illetve nem tartozást és a növekedési pontok előfordulását.

Kiegészítésként jegyezzük meg, hogy TSRM vonzási körébe az (1.2) alapján vett TSRW-n kívül a következő általánosított lépési szabállyal kapott folyamatosztály is beletartozik.

$$\mathbb{P}(\widetilde{X}_{n+1} = j \pm 1 \mid F_n, \widetilde{X}_n = j) = \frac{\omega(\pm\delta(n,j))}{\omega(\delta(n,j)) + \omega(-\delta(n,j))}, \tag{6.1}$$

ahol F_n az $\{\widetilde{X}_k : k = 0, 1, ..., n\}$ által generált σ-algebra, $\delta(n,j)$ az n-ben vett lokális idő $(j - 1/2)$ és $(j + 1/2)$-beli értékeinek különbsége, ω pedig monoton növő nem konstans valós függvény.

Végezetül érdemes megemlíteni az öntaszító folyamatok ellentettjét, az önvonzó folyamatokat. Az önvonzó séták határeloszlása a vonzás erősségétől függően konstans, vagy Brown-mozgásból előállítható szemimartingál.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Backhausz Ágnesnek, aki a szakmai segítség mellett elgondolásaimat mindig támogatta. Köszönöm továbbá tanáraim munkáját, kiemelve Pröhle Tamás Tanár Úr tanácsait a dolgozattal kapcsolatban. Hálás vagyok Hozzátartozóimnak is, akik a nyugodt hátteret biztosították számomra és mindazoknak, akik hozzájárultak diplomamunkám elkészítéséhez.

Irodalomjegyzék

[1] D. Amit, G. Parisi, L. Peliti: *Asymptotic behavior of the 'true' self-avoiding walk.* Phys. Rev. B 27, 1635-1645. (1983)

[2] R. Arratia: *Coalescing brownian motions and the voter model on $\mathbb{Z}$.* Unpublished partial manuscript. (1981)

[3] A. Borodin, P. Salminen: *Handbook of Brownian motion - facts and formulae.* Probability and its Applications, Birkhauser Verlag, Basel. (2002)

[4] Burgess Davis: *Reinforced random walk.* Probability Theory and Related Fields 84(2), 203-229. (1990)

[5] Laure Dumaz: *A clever (self-repelling) burglar.* Electronic Journal of Probability. (2012)

[6] Laure Dumaz and Bálint Tóth: *Maginal densities of the 'true' self-repelling motion.* Stochastic Processes and their Applications 123, 1454-1471. (2013)

[7] Illés Horváth, Bálint Tóth and Bálint Vető: *Diffusive limits for 'true' (or myopic) self-avoiding random walks and self-repellent Brownian polymers in $d \geq 3$.* Institute of Mathematics, Budapest University of Technology. (2010)

[8] C.M. Newman and K.Ravishankar: *Convergence of the Tóth lattice filling curve to the Tóth-Werner plane filling curve.* ALEA. Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 1: 333-346. (2006)

[9] Bálint Tóth and Wendelin Werner: *The true self-repelling motion.* Probability Theory Related Fields. 111: 375-452. (1998)

[10] Bálint Tóth and Bálint Vető: *Continuous time 'true' self-avoiding random walk on $\mathbb{Z}$.* ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 8, 59-75. (2011)

[11] Bálint Tóth: *The 'True' Self-Avoiding Walk with Bond Repulsion on $\mathbb{Z}$: Limit Theorems.* The Annals of Probab. Volume 23, 4, 1523-1556. (1995)