EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Frakcionál differenciált folyamatok és kointegráció

Írta:

Stark András

Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető:

Prőhle Tamás

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

2012. 12. 31.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazon embereknek akik segítették munkámat, s hozzájárultak ahhoz, hogy ez a dolgozat megszülessen. Különösképp témavezetőmnek Prőhle Tamásnak, szakdolgozatom elkészítésében nyújtott segítségéért és útmutató tanácsaiért. Továbbá szeretném megköszönni a szaktársaim támogatását, Árendás Péternek a lektorálást, Fegyverneki Tamásnak a gyöngybetűs jegyzeteket, a "Druszáimnak" az együtt töltött időt. Végül nem utolsó sorban köszönetet mondok Kiripovszky Fruzsinának s a családomnak a tanulmányaim során nyújtott szerető támogatásukért.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás **1**

Ábrák jegyzéke **4**

1. Bevezetés **5**
1.1. A dolgozat célkitűzései 5
1.2. Az idősorokról általában 6
1.3. Hosszú emlékezetű folyamatok 9

2. Frakcionál differenciált folyamatok **11**
2.1. A frakcionál differenciált fehér zaj és Brown mozgás 11
2.2. Az $ARIMA(0, d, 0)$ folyamat 13
2.3. Az $ARIMA(p, d, q)$ folyamat 18
2.4. A differenciálás rendjének becslése 20
2.5. Az $ARCH(1)$ 21
2.6. A hosszú memóriájú volatilitás folyamatok 23

3. Kointegráció **25**
3.1. Az I(d) osztály 25
3.2. Kointegráció 26
3.3. Hibakorrekciós modell 27
3.4. A kointegrált változók tulajdonságai és a reprezentáció tétel 28
3.5. Az egységgyök tesztek 31
3.5.1. Dickey-Fuller és az Agumented Dickey-Fuller tesztek 31
3.5.2. Phillips-Perron tesztek 33
3.5.3. A magasabb rendű integrált folyamatok tesztelése 34
3.5.4. A DF és PP tesztek problémája 35
3.6. Frakcionális Dickey-Fuller teszt 36
3.6.1. A teszt és annak aszimptotikus tulajdonságai 37
3.7. Kointegrált rendszerek paraméterbecslése 39
3.7.1. Az Engle-Granger kétlépéses módszer 39
3.7.2. Engle-Yoo háromlépéses módszer 41
3.7.3. A Johansen-módszer 41

4. Néhány implementáció, alkalmazás **44**

4.1. Az álregressziók 44
4.2. A Hurst paraméter becslése 48
4.3. Kointegráció becslése 53

Függelék **58**

Irodalomjegyzék **71**

Ábrák jegyzéke

1.1. Példa egy stacionárius idősorra. 8
1.2. Példa egy nem stacionárius idősorra. 8

2.1. Az általánosított binominális együtthatók c függvényében 14

4.1. i.i.d eset, a béta eloszlása T függvényében 47
4.2. i.i.d eset, a t-hányados eloszlása T függvényében 47
4.3. Módszerek a Hurst becslésére 51
4.4. Az olaj dollár árfolyama 53
4.5. A kerozinra illesztett modell hibájának statisztikai értékelései 54
4.6. A kerozinra (2007 október) illesztett modell hibájának statisztikai értékelései 55
4.7. ARIMA(0,1,0) alapján az előrejelzés 57

1. fejezet

Bevezetés

1.1. A dolgozat célkitűzései

Az idősorok empirikus vizsgálata során gyakran olyan folyamatokkal találkozunk, melyek esetén a hosszú időtávú elemek közötti kapcsolat "gyenge", azaz ezen megfigyelések kvázi függetlenek, nincs egymásra gyakorolt hatásuk. Számos közgazdasági, és hidrológiai példa létezik ugyanakkor, ahol ez a függés nem elhanyagolható, így szükség volt egy jobb modell létrehozására, melyek jobban alkalmasak ezen dinamikák leírására. Adelman és Granger már az 1970-es években foglalkozott olyan idősorokkal, melyek próbálják ezt a hosszú távú függést megtartani. Később Cox mutatott egy karakterizációt ezekre a modellekre úgy, hogy a spektrál sűrűségfüggvény szerkezetét vizsgálta. Végül a gyakorlati elemzéshez szükséges, hosszú memóriájú modellekkel szemben támasztott legfontosabb elvárások alapjait Lawrance és Kottegoda fektette le egy 1977-es cikkében. Ezek a modellek szemléletesen azt sugallják, hogy valamilyen mértékű hosszú távú szabály, pl. "ciklus" van jelen a dinamikában, mely nem feltétlenül látszódik kevés elemből álló adatsorok esetén, de ezt a szabályszerűséget is figyelembe kell vennünk a

jobb előrejelezhetőség érdekében. Az ilyen hosszú memóriájú folyamat egy lehetséges leírására alkalmas modell lehet az úgynevezett frakcionál differenciált folyamat. Szakdolgozati munkám során arra voltam kíváncsi, hogy az egyetemen megismert, a gyakorlatban is előforduló általánosabb modellek frakcionálisan differenciált változata hogyan viszonyul az alapmodellekhez. Képesek-e jobban leírni bizonyos törvényszerűségeket? Emellett további céljaim között szerepel ezen modellek összevetése, illetve a különféle numerikus vizsgálatuk és tulajdonságaik feltárása, valamint az integrált folyamatok és a stacionaritás közötti kapcsolat egy leírásának módja, a kointegrációs összefüggések megfigyelése. Hogyan változik a frakcionál differenciált folyamatok stabilitása szemben egy nem differenciált folyamat esetében? Mi történik, ha a folyamatok kointegráltak? Melyek a legjobb módszerek a hosszú memória meghatározására? Számos érdekes kérdés létezik a témával kapcsolatban, főként numerikus megközelítéssel próbálok a dolgozatomban ezekre a kérdésekre választ adni, s ezen tulajdonságokat megvizsgálni. Ismertetem továbbá a gyakorlatban leginkább használt eljárásokat, teszteket, eszközöket, melyek a témához kapcsolódnak.

1.2. Az idősorokról általában

A matematikai statisztika meghatározó részét képezi az idősorok elmélete és vizsgálata. Abban az esetben, ha olyan megfigyeléseink vannak, melyek időben (általában ekvidisztánsak) nem feltétlenül függetlenek és az elemek azonos eloszlásairól szóló feltételezésünk sincsen, érdemes lehet az elemek közötti időbeli függést vizsgálni. Az ilyen jellegű vizsgálatokhoz szükség volt egy modellre (Yule 1927), mely ezt a problémakört megfelelően kezeli. Ennek a modellnek az alapgondolata az, hogy úgy gondolunk az adatsorokra, mint egy véletlen folyamat, melynek változásaiban több különböző hatás érvényesülhet:

- trend: a változások hosszabb távú alapirányzata, tendenciája

- ismétlődő komponens: a trend körüli szabályszerű ingadozás:
  - rövid távon: szezonalitás
  - hosszabb távon: ciklikus hatás

- zaj: véletlen tényezőkkel összefüggő szabálytalan ingadozás

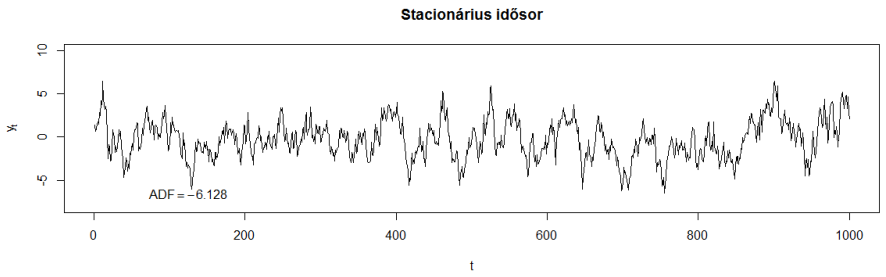
Az idősorok elméletének alapfeladata közé tartozik a véletlen hatások meghatározása, a folyamatot leíró dinamika becslése, előrejelzése, és az esetleges zavarok kiszűrése. Az idősor analízisnek ez a modern felfogású ága a XX. század első felében kezdett teret hódítani magának, habár bizonyos idősorokat már az ókori Egyiptom idején is kezdtek feljegyezni (pl. a Nílus vízhozamához adatai). Fontos megemlíteni az idősorok kapcsán felmerülő olyan alapvető fogalmakat, mint a stacionaritás. Ez lényegében egy megkötést jelent az idősor valószínűségi struktúrájára nézve. Erre azért van szükség, hogy az idősor statisztikai eszközökkel kézbentartható legyen, kevés információ esetén fennálló adathiány kiküszöbölésére. Idősorok esetében egy lehetséges cél az, hogy a minta alapján rekonstruáljuk az ismeretlen eloszlást. Ezt persze a minták együttes eloszlása kódolja, de ahhoz, hogy ezekről tudjuk valamit mondani, bizonyos megkötéseket kell tennünk. Ez fog elvezetni minket a stacionaritás fogalmához.

1.2.1. Definíció. *Ha egy X_t folyamat véges dimenziós eloszlásai időben eltolás invariánsak, akkor a folyamatot erősen stacionáriusnak nevezzük.*

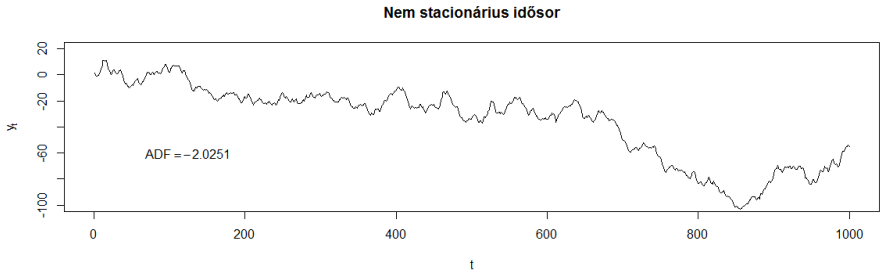
Ha legfeljebb a másodrendű vegyes momentumokra igaz ez, akkor *gyenge stacionaritásról* beszélünk. A definíció egy másik természetes értelmezése, ha az idősorra úgy gondolunk, mint egy véletlen folyamat által meghatározott dinamika, akkor ez a rendszer hosszútávon egy stabil egyensúlyi helyzetbe kerül. Ennek a stabilitásnak

köszönhetően a stacionárius idősoroknak nagy a rövidtávú előrejelezhetősége, ezért is vált ilyen fontossá a stacionaritás kérdése az idősorok esetében. A 3. fejezetben, foglalkozok, olyan folyamatokkal, melyek bár nem stacionáriusak, a lineáris kombinációjuk már az lesz.

Az 1.1 és 1.2-es ábrán látható egy példa stacionárius és nem stacionárius idősorra. A stacionárius idősor egy AR(1) folyamatot, míg a nem stacionárius idősor egy AR(2) folyamatot követ, melyeket 1000 hosszú standard normális eloszlású mintából hoztam létre. A megfelelő ADF értékek jelzik, hogy a stacionaritás sérül, amely ránézésre is látszik. A tesztről a 3. fejezetben lesz szó.



1.1. ábra. Példa egy stacionárius idősorra



1.2. ábra. Példa egy nem stacionárius idősorra

1.3. Hosszú emlékezetű folyamatok

A folyamatok tört differenciálása előtt következzen pár értelmezése a hosszú emlékezetű folyamatoknak. Ezek a folyamatok főként a pénzügyi ökonometria, a telekommunikáció, a hidrológia területen jellemzőek, valamint szinte mindenhol, ahol "számítanak a régmúlt eseményei". Ez matematikailag úgy interpretálható, hogy az idősor autokovarianca függvénye lassan cseng le, azaz az egyes időpontok elemei közötti összefüggés tartós. Ilyen tulajdonságú folyamat például a beveridgei búza árindexe (1500-1869),vagy a mount campitoi évgyűrűk száma [1].

1.3.1. Definíció. *$X_t, t \in \mathbb{N}$ sorozat egy gyengén stacionárius idősor, ha a várható értéke véges, és legfeljebb a második vegyes momentumok eltolásinvariánsak.*

Jelölje $\rho(k)$ az elemek közötti autokorrelácót, amit a következőképpen definiálunk.

1.3.2. Definíció. *Az $X_t, t \in \mathbb{N}$ gyengén stacionárius folyamat autokorrelációja (angol irodalomban a tipikus rövidítése ACF):*

$$\rho(k) = \frac{E[(X_t - \eta)(X_{t+k} - \eta)]}{\sigma^2} \tag{1.1}$$

ahol $E[X_t]$ a várhatóérték operátor, η az X_t várható értéke , σ^2 az X_t varianciája.

Több különböző definíciója létezik a hosszú emlékezetű folyamatoknak (angol irodalomban a tipikus rövidítés LRD, azaz long range dependence) az irodalomban. A legtöbbet használtak a következők:

1.3.3. Definíció. ***(Beran, 1994)*** *Az X_t véges szórású stacionárius folyamatot hosszú emlékezetűnek hívjuk, ha létezik $C_p > 0$ és $\beta \in (0, 1)$ valós konstans, hogy az autokorreláció függvény $\rho(k) \sim C_p k^\beta$ alakú, azaz ha a lecsengése $k^{-\beta}$ hiperbolikus. [10]*

1.1. Megjegyzés:. *A $\sim$ azt jelenti, hogy aszimptotikusan egyenlőek, azaz $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$*

A Beran-féle definíció mellett érdemes a McLeod féle értelmezést is megemlíteni,

1.3.4. Definíció. ***(McLeod és Hipel, 1978)*** *Azoknak a folyamatoknak van hosszú memóriájuk, amelyeknek az autókorrelációja nem szummábilis, azaz teljesül, hogy $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k)$ divergens. [10]*

1.3.5. Definíció. *Amennyiben a $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\rho(k)| < \infty$ feltétel teljesül, létezik spektrál sűrűségfüggvény és előállítható az autokovarianca függvény Fourier transzformáltjaként:*

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) e^{ik\lambda}, \tag{1.2}$$

ahol λ a frekvencia, σ^2 a variancia, és i a képzetes számot jelöli.

A spektrál sűrűségfüggvény segítségével megadható a harmadik féle megközelítése a hosszú emlékezetű folyamtoknak.

1.3.6. Definíció. ***(Mandelbrot és York, 1983)*** *Az $X(t)$ gyengén stacionárius folyamat hosszú memóriájú, ha létezik $C_f > 0$ és olyan valós $\beta \in (0,1)$, hogy $\lim_{\lambda\to 0}$ esetén a spektrál sűrűségfüggvénye $f(\lambda) \sim C_f|\lambda|^{-\beta}$ alakú. [11]*

A fenti definícióbeli β segítségével pedig megadható a következő alakban az úgynevezett Hurst együttható: $H = 1 + \frac{\beta}{2}$. Ezt a változót, szokás önhasonlósági paraméternek is hívni. Az önhasonlóság fogalma a geometriából származik, szemléletesen egy alakzat önhasonló, ha a távolságtól függetlenül megtartja a struktúráját, azaz egy kisebb rész felnagyítva ugyanolyan szerkezetet mutat, mint egy nagyobb rész. Ilyenek például a fraktálszerű alakzatok: Sierpinski-háromszög, Julia-halmaz, Koch-görbe, Mandelbrot halmaz. Emellett a természetben is találkozhatunk velük: pl. villám mintázata, levél erezete, felhők formája stb.

2. fejezet

Frakcionál differenciált folyamatok

2.1. A frakcionál differenciált fehér zaj és Brown mozgás

Az ökonometria szempontjából fontosabb folyamatosztályok frakcionál differenciált változatának bemutatása előtt, feltétlen meg kell említenünk az egyik legismertebb folyamatot a Brown mozgást. A Brown mozgás a gázokban és folyadékokban lebegő részecskék szüntelenül zajló, véletlenszerű mozgása, amelyet Robert Brown angol botanikus fedezett fel vízben elkevert virágporszemcsék vizsgálata során. Ennek a mozgásnak a precíz bevezetését Norbert Wienerre adta meg, ezért is szokás Wiener folyamatnak is hívni.

2.1.1. Definíció. *A B_t Brown mozgás olyan sztochasztikus folyamat, melyre:*

1. $B_0 = 0$,
2. $t \to B_t$ *trajektóriák m.m. folytonosak,*

3. *B_t növekményei függetlenek és normális eloszlásúak azaz $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ minden $(0 \leq s < t)$,*

A Hosking-féle gondolatmenetet követve a nevezetesebb frakcionális folyamatok interpretálását a frakcionális Brown mozgáson keresztül vezetjük be. Abban az esetben ha a Brown mozgás differenciálját vesszük akkor egy konstans spektrálsűrűségű fehér zaj folyamatot kapunk. Hasonló gondolatmenettel, definiáljuk a frakcionális zaj fogalmát is, csak egy speciális differenciál fogalmat tekintünk. A frakcionális Brown mozgást $B_H(t)$ Mandelbrot (1965) definiálta, majd John Van Ness-el (1968) együtt általánosították a folyamatosztályt. [11]

2.1.2. Definíció. *A frakcionális Brown mozgás alapvető tulajdonságai a következők:*

- *Egy folyamatot H paraméterű frakcionális Brown mozgásnak nevezzük, ha a Brown mozgás $(\frac{1}{2} - H)$-adik deriváltjaként áll elő $0 < H < 1$, és a differenciálást a Riemann-Liouville értelme vett definíció szerint nézzük 2.1.*
- *A frakcionális-Brown mozgás spektrál sűrűségfüggvénye: λ^{-2H-1}*
- *Az autokovariancia függvény $C(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$*

2.1.3. Definíció. *A Holmgren-Riemann-Liouville féle frakcionális derivált Brown mozgásra:*

$$B_H(t,\omega) = \frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} \int_{k=0}^{t} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s,\omega) \quad ahol \quad t \in (0,1), \tag{2.1}$$

ahol H tetszőleges pozitív szám a Hurst együttható, és Γ a gamma függvény és $B_H(t)$ variancája 1. A definíció úgy is érvényben marad ha $B(t,\omega)$-t a komplex érétkű Brown mozgásra cseréljük.

Így az fBm (az angol irodalomban tipikus rövidítése, fractional Brown motion) egy nulla várható értékű, nullából induló Gauss folyamat, melynek a növekményei

már nem függetlenek, de stacionáriusak. A frakcionális zaj folyamatot tehát úgy definiálhatjuk, mint a frakcionális Brown mozgás deriváltja $B'_H(t)$, vagy úgy is gondolhatunk rá, mint a fehér zaj folyamat $(\frac{1}{2} - H)$-ik frakcionális deriváltja, ahol $H = \frac{1}{2}$ esetén a folyamat egyszerű fehér zajra redukálódik, ami a mi esetünkben a Wiener folyamat.

A numerikus vizsgálatok során a folyamatok diszkrét idejű analógiájára van szükségünk. A Gauss zajra vett frakcionálitás definíciójának több fajta megközelítése létezik. Ezek közül az egyik természetes megközelítés, hogy úgy állítjuk elő a folyamatot, hogy megköveteljük tőle, hogy az autokorreláció struktúra ugyan az legyen, mint a $B_H(t)$ növekményei, $\Delta B_H(t) = B_H(t) - B_H(t-1)$ esetén.

2.2. Az $ARIMA(0, d, 0)$ folyamat

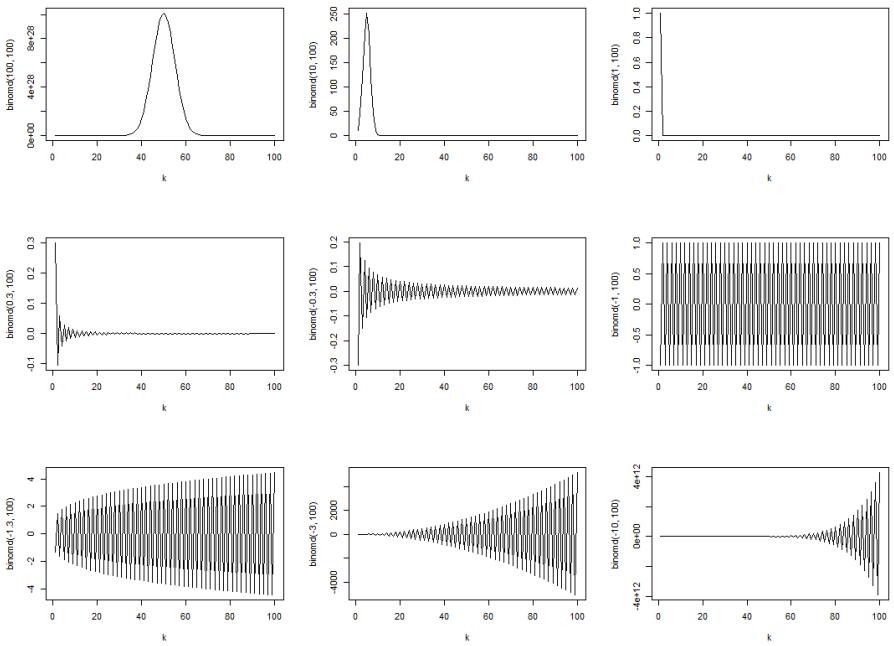
A Brown mozgás diszkrét idejű megfelelője az X_t szimmetrikus bolyongás, ami nem más, mint egy $ARIMA(0, 1, 0)$ folyamat. Jelölje $\Delta X_t = (1 - L)X_t = A_t$, ahol L a *back* operátor, amit úgy értelmezünk, mint a folyamat egy állapottal korábbi időpontra történő visszaléptetése: $LX_t = X_{t-1}$, ahol A_t-k független azonos eloszlású változók. Hasonlóan, mint amikor X_t első deriváltját véve az A_t diszkrét idejű fehér zaj folyamatot kapjuk. Végül a fenti értelmezés szerinti folytonos idejű Brown mozgás differenciálását alapul véve, a frakcionál differenciál operátor Δ^d diszkrét idejű közelítése az általánosított binominális együtthatókkal L hatványsoron alapuló sorfejtéseként a következő alakban adható meg:

$$\Delta^d = (1 - L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-L)^k = 1 - dL - \frac{1}{2}d(1-d)L^2 - \frac{1}{6}d(1-d)(2-d)L^3 \cdots \tag{2.2}$$

2.2.1. Definíció. *Ahol a együtthatók általánosítása,*

$$c \in \mathbb{R} \quad 0 < k \in \mathbb{Z} \quad \binom{c}{k} = \frac{c(c-1)(c-2)\cdots(c-k+1)}{k!} \tag{2.3}$$

2.1. Megjegyzés:. *Érdemes megfigyelni, hogy $k > c$ esetén nem feltétlen lesz 0 a binominális együttható értéke, az egész számok esetén ugyanis ilyen esetben a számláló szorzótényezői között szerepel a 0, míg itt ez nem igaz.*



2.1. ábra. Az általánosított binominális együtthatók c függvényében

A $d = (H - \frac{1}{2})$ helyettesítéssel élve, a H paraméterű folytonos frakcionális fehér zajra gondolhatunk, mint a diszkrét megfelelője, ennek megfelelően $X_t = \Delta^{-d} A_t \Longleftrightarrow \Delta^d X_t = A_t$. Innentől kezdve X_t-re, mint egy $ARIMA(0, d, 0)$ folyamatra gondolunk, ami a Box-Jenkins(1976) féle definíció természetes kiterjesztése nem egész d-re.

2.2.2. Definíció. *X_t diszkrét idejű folyamat $ARIMA(0,d,0)$ ha reprezentálható $\Delta^d X_t = A_t$ alakban, ahol Δ^d a korábban definált sorfejtés és $A(t)$ i.i.d. sorozat 0 várható értékkel és σ_A^2 szórással.*

A következő tétel, az $ARIMA(0,d,0)$ folyamat alapvető tulajdonságait adja meg. A tétel során feltesszük, hogy a $\sigma_A^2 = 1$.

2.1. Tétel. *Legyen X_t egy $ARIMA(0,d,0)$ folyamat.*

1. *Ha $d < \frac{1}{2}$ akkor , az X_t stacionárius folyamat, melynek van $MA(\infty)$ reprezentációja:*

$$X_t = \psi(L)A_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k A_{t-k}, \qquad \psi_k = \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!} \quad \lim_{k\to\infty} \psi_k \sim \frac{k^{d-1}}{(d-1)!} \tag{2.4}$$

2. *Ha $d > -\frac{1}{2}$, akkor X_t invertálható és van $AR(\infty)$ reprezentációja:*

$$\pi(L)X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k} = A_t, \quad ahol \quad \pi_k = \frac{(k-d-1)!}{k!(-d-1)!} \quad \lim_{k\to\infty} \pi_k \sim \frac{k^{-d-1}}{(-d-1)!}. \tag{2.5}$$

   A 3-6. eseteknél feltesszük, hogy $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$.

3. *X_t spektrál sűrűségfüggvénye:*

$$f(\lambda) = (2\sin\frac{1}{2}\lambda)^{-2d} \quad 0 < \lambda \leq \pi, \qquad f(\lambda) = \lambda^{-2d} \quad \lambda \to 0 \tag{2.6}$$

4. *X_t autokovariancia függvénye:*

$$\gamma_k = E(x_t x_{t-k}) = \frac{(-1)^k(-2d)!}{(k-d)!(-k-d)!} \tag{2.7}$$

Az autokorreláció függvény pedig:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{(-d)!(k+d-1)!}{(d-1)!(k-d)!}, \quad (k = 0, \pm 1, \ldots), \tag{2.8}$$

$$\rho_k = \frac{(d)(1+d)\ldots(k-1+d)}{(1-d)(2-d)\ldots(k-d)}, \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.9}$$

$$\textit{Speciálisan } \gamma_0 = \frac{-2d!}{\{(-d)!\}^2}, \quad \rho_1 = \frac{d}{(1-d)}, \quad \lim_{k\to\infty} \rho_k = \frac{(-d)!}{(d-1)!} k^{2d-1} \tag{2.10}$$

5. *Az inverz autokorreláció:*

$$\rho_{inv,k} = \frac{(d)!(k-d+1)!}{(-d-1)!(k+d)!} \sim \frac{d!}{(-d-1)!} k^{-1-2d} \quad ha \quad k \to \infty. \tag{2.11}$$

6. *A parciális autokorreláció:*

$$\rho_{p,kk} = \frac{d}{k-d} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.12}$$

Bizonyítás:

1. Ha $X_t = \psi(L)A_t$ választással élünk, akkor $\psi(z) = (1-z)^{-d}$ alakú lesz, és $d < \frac{1}{2}$ feltétel, mellett a hatványsor $|z| \leq 1$ esetén konvergens, azaz X_t stacionárius. A binominális sorfejtését véve az $(1-z)^{-d}$ adja a 2.4-es struktúrát. Végül $k \to \infty$ esetén a Stirling-formulát alkalmazva adódik $\frac{k+d-1!}{k!} \sim k^{d-1}$.

2. A bizonyítás hasonló, mint az 1. esetében, csak itt $d = -d$ választással élünk.

3. Mivel $\sigma_A^2 = 1$ az $f(\lambda) = \psi(e^{i\lambda})\psi(e^{-i\lambda})$ alakú. Ebbe behelyettesítve a $\psi(z) = (1-z)^{-d}$-t, adódik a spektrál sűrűségfüggvény alakja.

4. Mivel $\sigma_A^2 = 1$ a kovariancia:

$$\gamma_k = \pi^{-1} \int_0^\pi \cos(k\lambda) f(\lambda) d\lambda \tag{2.13}$$

alakú. A 2.7 eredmény pedig a

$$\int_0^\pi \sin(x)^{\nu-1} \cos(ax) dx \tag{2.14}$$

kifejezésből levezethető. Ezt Gradshteyn és Ryzhik mutatta meg 1965-ben. A többi tulajdonság ezek következménye.

5.

2.2. Tétel. ***(Chatfield, 1979)*** *Az $ARIMA(0, d, 0)$ folyamat: $\Delta^d X_t = A_t$ "inverz" korrelációja, megegyezik az $ARIMA(0, -d, 0)$ folyamat $X_t = \Delta^d A_t$ autokorrelációjával.*

A tétel és a 4. pont tulajdonságait felhasználva adódik az állítás.

6. A autokorreláció és a parciális autokorreláció közötti kapcsolatot a Levinson-Durbin algoritmus adja meg (Box-Jenkins 1976). Az algoritmust k-ra vonatkozó indukcióra alkalmazva adódnak a parciális autokorrelációk $\rho_{p,kk} = \frac{d}{k-d}$ és a parciális lineáris regresszió együtthatói $\rho_{p,kj} = -\binom{k}{j} \frac{(j-d-1)!(k-d-j)!}{(-d-1)!(k-d)!}$.

2.2. Megjegyzés:. *Az ψ_k és ϕ_k hiperbolikus lecsengésűek. A spektrum alacsony frekvenciájú viselkedése azt eredményezi, hogy $0 < d$ esetén, lehet csak a folyamat hosszú memóriáju, míg ha a McLeod féle értelmezést nézzük (azaz az autokorreláció nem összegezhető) akkor $d < \frac{1}{2}$ feltétel adódik. Így a tétel fontos következménye, hogy X_t folyamat csak $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ esetén stacionárius és invertálható is egyben, s így $0 < d < \frac{1}{2}$ esetén alkalmas a hosszú míg $-\frac{1}{2} < d < 0$ esetén a rövid memóriájú folyamatok modellezésére. Ha $d = 0$ akkor egy egyszerű fehér zaj folyamatot kapunk.*

2.3. Az $ARIMA(p, d, q)$ folyamat

Az $ARIMA(0, d, 0)$ folyamat a frakcionális zajok egy osztályát képviseli, hasonlóan mint a frakcionális Gauss fehér zaj. Ezeknek a frakcionált zaj folyamatoknak különösen fontos szerepük van a gyakorlati alkalmazásoknál, mint a modell illesztés, hibabecslés, előrejelzések, kointegrációs kapcsolatok stb. A gyakorlatban, viszont a frakcionális Gauss zaj folyamat esetében az a jellemző, hogy korlátozottabb a modellező képessége (Hipel és McLeod (1978) cikke) más folyamatokhoz képest. Ez azért van mert a három paraméter: várható érték, variancia, H együttható nem elég flexibilis, ahhoz, hogy modellezze a "szélesebb skálájú" alacsony lag-korreláció struktúrákat. Így ezekben az esetekben, a modellillesztés során a különféle információs kritériumok (Akaike, Bayes, Hannah-Quinn) magasabb értékeket fognak mutatni, sok modellel szemben, azaz a rövid távú előrejelzések becslésére létezik jobb folyamatosztály, amely jobban illeszthető. Erre egy példa az $ARIMA(0, d, 0)$-nak a kiterjesztése.

2.3.1. Definíció. *Y_t sztochasztikus folyamat legyen az $ARIMA(p, d, q)$ folyamat, ahol $p, q \in \mathbb{Z}^+$ és $d \in \mathbb{R}$ ha reprezentálható a következő alakban:*

$$\Phi(L)\Delta^d Y_t = \Theta(L)A_t, \tag{2.15}$$

ahol Δ^d a frakcionál differenciál operátor és $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p$, és $\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - ... - \theta_q L^q$, a back operátor polinomjai és A_t a fehér zaj.

Amiatt népszerűek ezek a folyamatok, mert a d paraméter segítségével leírhatjuk a magas-lag korrelációjú struktúrákat(hiperbolikus lecsengés), mig a Φ és Θ paraméterkkel az alacsony-lag korrelációjú struktúrákat (exponenciális lecsengés). Felmerül a kérdés mikor lesz egy ilyen folyamat stacionárius.

2.3. Tétel. *Y_t legyen egy $ARIMA(p,d,q)$ folyamat.*

1. *$Y(t)$ folyamat stacionárius ha $d < \frac{1}{2}$ és a $\Phi(z) = 0$ összes gyöke az egységkörön kívül van;*

2. *$Y(t)$ invertálható ha $d > -\frac{1}{2}$ esetén $\Theta(z) = 0$ egyenlet összes gyöke az egységkörön kívűlre esik.*

   Ha $Y(t)$ stacionárius és invertálható, $f(\lambda)$ spektrálsűrűségfüggvény és $\rho(k)$ autokorrelációval,

3. $\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{2d} f(\lambda)$ *határérték létezik és véges.*

4. $\lim_{k\to\infty} k^{1-2d}\rho_k$ *határérték létezik és véges.*

Léteznek a modellnek további általánosításai is. Ha megköveteljük, hogy nem csak a d vesz fel frakcionális értéket hanem, q és/vagy p is, valamint a Φ és Θ polinomoknak létezik többszörös gyöke. Akkor meg tudunk határozni egy speciális folyamatosztályt, melyet Spolia, Chander és O'Connor (1980) talált ki. A frakcionális egyenlő-gyök (equal-root) integrált autoregresszív folyamatok, (FERIAR), illetve a frakcionális egyenlő-gyök (equal-root) mozgóátlag folyamatok, (FERIMA). Utóbbiak kváziperiodikus, hosszú memóriájú folyamatok előrejelzéseként használhatók. Hasonlóan mint a mozgó átlag folyamatok az ES módszernél.

2.3. Megjegyzés:. *Amikor gyakorlatban valamely historikus adatsorunkra modellt illesztünk, és az $ARIMA(p,d,q)$ családot találjuk a megfelelőnek, nem jellemző az hogy p és q paraméter becsült rendje 3-nál magasabb. Általánosságban elmondható, hogy ha a p és q értéke túl magas, akkor nem feltétlen a legjobb választás ez a folyamat család. Emiatt kiemelten fontos szerepe van az $ARIMA(1,d,0)$ és az $ARIMA(0,d,1)$ folyamatokank.*

2.4. A differenciálás rendjének becslése

Korábban említettük, hogy az $ARIMA(p, d, q)$ család flexibilisebb a véletlen folyamatok rövid és hosszú távú tulajdonságainak leírására. Mivel ezek a folyamatok a Box-Jenkins féle modellek általánosításai, természetesen adódott több fajta hasonló megközelítés, a paraméterek meghatározására. A következőkben ezt a procedurát ismertetjük:
Legyen A_t i.i.d. , $u_t = \Delta^d Y_t$ azaz egy $ARIMA(p, 0, q)$, valamint legyen $x_t = \Theta(L)^{-1}\Phi(L)Y_t$ egy $ARIMA(0, d, 0)$.

2.1. Algoritmus:. *Eljárás menete:*

1. *lépés: Megbecsüljük d értékét a $\Delta^d = A_t$ egyenletben.*
2. *lépés: Definiáljuk az $u_t = \Delta^d Y_t$-t.*
3. *lépés: Használjuk a Box-Jenkins féle eljárást az $ARIMA(p, 0, q)$ modell azaz a $\Phi(B)u_t = \Theta(B)a_t$ egyenlet Φ és Θ paraméterek meghatározására.*
4. *lépés: Definiáljuk $x_t = \Theta(L)^{-1}\Phi(L)Y_t$-t.*
5. *lépés: Újabb becslést adunk d értékére a $\Delta^d x_t = a_t$ egyenletben.*
6. *lépés: Ellenőrizzük, hogy a d,Φ és Θ paraméterek konvergensek-e, ha nem vissza ugrunk a 2-es lépésre.*

Az 1-es és 5-ös lépésben a d becslésére több féle módszer használatos. Az egyik módszer az R/S exponensek segítségével méri a hosszú távú függés nagyságát (Mandelbrot és Wallis , 1969). Egy másik a Geweke és Porter-Hudak módszer mely egy regressziós egyenleten alapszik, és a spektrálsűrűség segítségével ad becslést a d értékére. A spektrálsűrűség függvényt pedig a periodogram függvényel közelíti. De ezeken kívűl számos egyéb módszer létezik még. A módszerek numerikus pontosságát össze is hasonlítjuk a 4-es fejezetben.

2.5. Az $ARCH(1)$

A következő szekcióban röviden bemutatom az ARCH(1) folyamatot. Az ELTE-n 2011 őszén tartott Idősorok kurzus anyagait vettem alapul.

"A most következő folyamatok a pénzügyekben sokkal népszerűbbek, mint az eddigiek. Az ARCH(1)-et Engle vezette be 1982-ben, és az Autoregressive Conditional Heteroscedasticity rövidítése.

2.5.1. Definíció. *Legyen $\epsilon(t)$ Gauss fehér zaj, $\epsilon(t) \sim N(0,1)$ és i.i.d. Legyen $X(t) = \sigma(t)\epsilon(t)$ azaz egy nem konstans valószínűségü változószor (időtől függő véletlen szórásszor) egy fehér zaj. Tegyük föl, hogy ez a $\sigma^2(t) = \alpha_0 + \alpha_1 X^2(t-1)$, ahol α_0, α_1 nemnegatív.*

A feltételes szórásnégyzet $D^2(X(t)|X(t-1) = x) = \alpha_0 + \alpha_1 x^2$ az előző érték kvadratikus függvénye. A két egyenletből kapjuk, hogy

$$X^2(t) = \left(\alpha_0 + \alpha_1 X^2(t-1)\right)\epsilon^2(t), \tag{2.16}$$

ez nem ekvivalens, mert így lehet, hogy nemnegatív $X(t)$ megoldást kapunk, míg az eredeti formából negatívat kaptunk volna. Tegyük fel, hogy létezik stacionárius megoldás, és iteráljuk az egyenletet:

$$X^2(t) = \alpha_0\epsilon^2(t) + \alpha_1\alpha_0\epsilon^2(t)\epsilon^2(t-1) + \alpha_1^2 X^2(t-2)\epsilon^2(t)\epsilon^2(t-1) \tag{2.17}$$

$$X^2(t) = \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \epsilon^2(t) \dots \epsilon^2(t-j) \tag{2.18}$$

Ez utóbbi akkor írható fel így, ha $\alpha_1 < 1$, mert a maradéktagokban α_1 egyre nagyobb hatványai jelennek meg, amik így nullához tartanak. Ha az összegzés és a várható érték felcserélhető, akkor

$$EX^2(t) = \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j E\epsilon^2(t) \dots E\epsilon^2(t-j) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \tag{2.19}$$

ugyanis az $\epsilon(t)$-k várható értéke 0, így második momentumuk a szórásnégyzetükkel egyenlő, ami 1, tehát egy egyszerű mértani sort kellett összegeznünk. Ebből látjuk, hogy $\alpha_0 = 0$ esetén $X(t)$ az azonosan 0 folyamat. Ha az

$$X(t) = \epsilon(t)\sqrt{\alpha_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_1^{k+1} \epsilon^2(t-1) ... \epsilon^2(t-k-1)\right)} \tag{2.20}$$

felírásban a szumma konvergál, akkor stacionárius folyamatot állít elő, hiszen az $\epsilon(t+h)$ zaj véges dimenziós eloszlásai megegyeznek, és $(X(t_1+h), ..., X(t_m+h))$-t ugyanúgy állíthatjuk elő $\epsilon(t+h)$-ból, mint $(X(t_1), ..., X(t_m))$ ϵ-ból, tehát az eloszlásaik megegyeznek.

2.4. Tétel. *Ha* $|\alpha_1| < 1$, *akkor 2.20 konvergál, és az* $ARCH(1)$ *egyenlet egyértelmű, véges szórású, stacionárius megoldását adja. Ha nem követeljük meg a véges szórást, akkor* $|\alpha_1| > 1$*-re is van stacionárius megoldás.*

2.5. Tétel. *Tehát az ARCH(1)*

- $\alpha_1 = 0$*-ra Gauss fehér zaj.*
- $0 < \alpha_1 < 1$*-re stacionárius véges szórással.*
- $1 < \alpha_1 < 2^{e^C}$*-re stacionárius végtelen szórással."*

2.4. Megjegyzés:. *A végtelen szórás esetén fennálló stacionaritási feltétel nem látszódik ilyen egyértelműen, mint a fenti esetben. A Kesten-Vervaat-Goldie tétel felhasználva adódik, melynek részletezésére a dolgozatban nem térünk ki.*

2.6. A hosszú memóriájú volatilitás folyamatok

A hosszú memóriájú feltétel megadása variancia folyamatokra hasonlóan történik, mint az ARMA folyamatok esetében. Legyen az időparaméter diszkrét értékű és egy valós értékű $X_t = \sigma(t)\epsilon(t)$ folyamat a következő képpen megadva: $X_t = A_t\sigma_t$ ahol A_t i.i.d. 0 várható értékkel, és a $Var(A_t) = 1$. A σ_t^2 időtől függő és pozitív, és mérhető függvénye a $t-1$ időpontig rendelkezésre álló információnak amit Ω_{t-1}-el jelölünk.

2.6.1. Definíció. *Az $X(t)$ folyamat ARCH(p), hogyha $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(L)X_t^2$ és $\alpha(L)$ egy p rendű polinomok a back operátorral.*

2.6.2. Definíció. *A GARCH(p,q) folyamatot Bollersev definiálta (1986)-ban, legyen $X_t = \sigma(t)\epsilon(t)$ és*

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(L)X_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2$$

ahol, $\alpha(L)$ és $\beta(L)$ p és q rendű polinom a back operátorral, α_0 nem negatív konstans.

2.5. Megjegyzés:. *A GARCH(p,q) folyamat kifejezhető, mint egy $ARMA(m,p)$ folyamat X_t^2 -re, ahol $m = max(p,q)$:*

$$(1 - \alpha(L) - \beta(L))\, X_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta(L))\, v_t, \tag{2.21}$$

ahol $v_t = X_t^2 - \sigma_t^2$ a feltételes várható érték folyamat innovációja.

Az ARCH-GARCH folyamat néhány jellemzője:

- Az adatok nem korreláltak, és a szórás változik az idővel.
- Az eloszlás vastag végü.

- Jellemző a kiugró értékek klasztereződése.

2.6. Tétel. *(**Bollersev**) A GARCH(p,q) gyengén stacionárius, hogyha a* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i < 1$, *és ekkor* $EX_t = 0$, X_t *korrelálatlan fehér zaj. Ha a szórásnégyzet véges akkor* $D^2 X_t = \frac{\alpha_0}{1-\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i\right)}$ *és a feltétel szükséges is.*

2.6.3. Definíció. *Ha az* $(1 - \alpha(L) - \beta(L))$ *polinomnak létezik egységgyöke a Bollersev féle definícióban, akkor a* $GARCH(p, q)$ *folyamatosztály, tagja az Integrált GARCH osztálynak (röviden IGARCH):*

$$\Phi(L)(1 - L)X_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta(L))v_t$$

ahol, $\Phi(L) = (1 - \alpha(L) - \beta(L))\,(1 - L)^{-1}$ *egy* $m - 1$*-ed rendű polinom.*

Később Baillie, Bollersev, és Mikkelson (1996) tovább általánosították a feltételes várható érték folyamatot a hosszú memóriájú esetre így született meg a FIGARCH folyamat. Ezekre a folyamatokra az a jellemző, hogy a késleltetett innovációk hiperbólikus lecsengési ideje lassú.

2.6.4. Definíció. *Az* X_t *folyamat egy FIGARCH(p,d,q) ha előáll a következő alakban:*

$$\Phi(L)(1 - L)^d X_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta(L))\, v_t, \tag{2.22}$$

ahol $\Phi(L)$ *és* $1 - \beta(L)$ *polinom gyökei az egységkörön kívűlre esnek.*

3. fejezet

Kointegráció

3.1. Az I(d) osztály

A historikus adatsor becslése során az első fontos kérdés amit tisztáznunk kell, hogy az adataink stacionáriusak-e, látszódik-e valami trend vagy szezonalitás az adatainkban, amely sokszor ránézésre megmondható ha az adatsorokat ábrázoljuk. Ezek vizsgálata különösen fontos a kezdeti modell illesztése s az előrejelzések szempontjából. A célunk megtalálni a legjobb elméleti modellt amely a tapasztalati idősort leírja. Például a Box-Jenkins modellek illesztése esetében, az idősornak stacionariusnak kell lenni. Ha nem stacionárius az idősorunk, mely gyakran előfordul a tapasztalatok alapján, ki kell szűrnünk a trendet, hogy stacionáris idősort kapjunk. Ennek számos módja létezik, az egyik a differenciálás. A Wold tételnek köszönhetően tudjuk, hogy egy determinisztikus komponens nélküli stacionárius idősornak van végtelen mozgó átlag reprezentációja. Ez közelíthető egy véges ARMA folyamattal. Ezek ihlették a következő definíciót.

3.1.1. Definíció. *Legyen $d \in \mathbb{N}$ és X_t egy determinisztikus komponens nélküli folyamat, melyet d-szer differenciálva létezik stacionárius, invertálható ARMA reprezentációja. Ekkor X_t egy d-ed rendbeli integrált folyamat, és $X_t \sim I(d)$ jelöljük.*

X_t	$\sim I(0)$ folyamat	$\sim I(1)$ folyamat
Variancia	véges	végtelen
Innováció hatása	átmeneti	tartós
Spektrum	$0 < f(0) < \infty$	$f(\omega) \sim A\omega^{-2d}$ azaz $f(0) = \infty$
A egyensúlyba kerülés várható ideje	véges	végtelen
Az elméleti autokorreláció	ρ_k összegezhető	$\rho_k \to 1$ $\forall k$ -ra ha $t \to \infty$

Általánosságban d értékére egész számként gondolnak, de értelmezhető ez esetben is a frakcionális integrált, melynek tulajdonságait később vizsgáljuk. Szemléletesen ha $d = 0$ akkor a folyamat stacionárius, míg ha $d = 1$ akkor a stacionaritás sérül. Ezek a leggyakoribb esetek, így érdemes külön említést tenni ezek tulajdonságairól is. Érdekes kérdés továbbá, hogy ha d egy tört szám, akkor az alapmodellek mikor stacionáriusak. ARIMA folyamatok esetében láttuk, hogy a $d < 0,5$ szükséges feltétel.

3.1.2. Definíció. *Az $I(0)$ és $I(1)$ folyamatok tulajdonságai:*

- A fenti tulajdonságoknak köszönhetően az is igaz, hogy egy $I(0)$ és egy $I(1)$ folyamat összege mindig $I(1)$ folyamat lesz.
- Sőt $a, b \neq 0$ konstansokra ha $X_t \sim I(d)$ akkor $a + bX_t$ is $I(d)$ folyamat.
- Ha X_t és Y_t $I(d)$ folyamat, akkor általánosságban igaz, hogy a lineáris kombinációjuk $Z_t = X_t - aY_t$ is $I(d)$ folyamat.

3.2. Kointegráció

A fenti gondolatmenetet folytatva, felmerül a kérdés, hogy mi történik, ha több folyamat együttes viselkedéséről szeretnénk valamit mondani? Vizsgálhatjuk a folyamatok korrelációját, például két részvény árfolyamának pozitív korrelációja azt eredményezi, hogy a részvények árfolyama azonos irányba változik az esetek többségében de ez nem mond sokat a két árfolyam hosszú távú viselkedéséről. Mivel lehet, hogy az árfolyamnövekedés iránya azonos, de az ütemük nem, így

az egyik árfolyam jobban és jobban eltávolodik hosszú távon. Ebben az esetben a hosszú távú összefüggések, leírására alkalmasabb lehet a kointegráció fogalma, melyet Engle és Granger fektetett le. [13]

3.2.1. Definíció. *Egy X_t vektor komponenseit d, b rendben kointegráltaknak mondjuk és $X_t \sim CI(d, b)$ jelöljük, ha*

(i) X_t összes komponense $I(d)$ beli.

(ii) Létezik egy olyan $\alpha \neq 0$, hogy $Z_t = \alpha' X_t \sim I(d-b), b > 0$.

Ekkor α-t a kointegrációs vektornak hívjuk.

Ha a részvény árfolyamok kointegráltak, akkor az árfolyam súlyozott átlaga akárhányad rendben integrált. Így két elsőrendben integrált folyamat kombinációjaként előállítható egy stacionárius folyamat.

Abban az esetben ha X_t sorozatnak N komponense van, lehetséges, hogy egynél több kointegrációs vektor α létezik. Ami pedig azt jelenti, hogy több egyensúlyi kapcsolat is létezhet, ugyanazon többdimenziós folyamathoz.

3.2.2. Definíció. *Tegyük fel, hogy adott r darab lineárisan független kointegrációs vektora X_t-nek, melyre $r < N - 1$. Ekkor az X_t folyamat kointegrációs rangjának nevezzük a kointegrációs vektorokból összefűzött $N \times r$ mátrix rangját, ami r.*

3.3. Hibakorrekciós modell

A kointegráció és a hiba korrekciós modellek között szoros kapcsolat áll fenn. A hiba korrekciós módszert, csak úgy, mint a kointegrációt közgazdaságtan egyensúlyelméletei ihlették. A korai verziót Sargan (1964) és Phillips (1957) dolgozta ki. Az ötlet alapja, hogy az egy periódus egyensúlytalanságának kis hányada javítja

a következő periódus egyensúlyát. Például az árszínvonal egy adott periódusbeli változása függ az előző periódusban fennálló túlkereslet nagyságától. Ennek mintájára többváltozós rendszerek esetében megadhatjuk az általánosított hiba korrekciós modellt.

3.3.1. Definíció. *Legyen X_t egy több dimenziós idősor, ekkor a hiba korrekciós reprezentációja a következő:*

$$A(L)(1-L)X_t = -\gamma Z_{t-1} + U_t \tag{3.1}$$

ahol U_t egy több dimenziós zaj, $Z_\tau = \alpha^{'} X_\tau$ a kointegrációs vektor és $\gamma \neq 0$, ahol $A(0) = I, A(1)$ összes tagja véges,

3.4. A kointegrált változók tulajdonságai és a reprezentáció tétel

Tegyük fel, hogy X_t mindegyik komponense $I(1)$ folyamat, azaz a differencia folyamat nulla várható értékű tisztán determinisztikus tag nélküli stacionárius folyamat. Mivel tetszőleges determinisztikus komponens levonható, így mindig létezik egy olyan többdimeziós Wold reprezentáció, melyre:

$$(1-L)X_t = C(L)\epsilon_t \tag{3.2}$$

Ami azt jelenti, hogy mindkét oldal esetén a spektrál mátrix megegyezik. Sőt ha feltesszük, hogy $det[C(z)], z = e^{i\omega}$, kifejezésnek gyökei az egységkörön kívűlre esnek akkor $C(B)$ egyértelműen definiált. Ekkor $C(0) = I_N$, ahol I_N az $N \times N$ egységmátrix (Hannan 1970). A fenti egyenletben ϵ_t nulla várható értékű N

dimenziós fehér zaj vektor, amelyre

$$E[\epsilon_t \epsilon_s^{'}] = 0, \qquad \text{ha } t \neq s \tag{3.3}$$

$$E[\epsilon_t \epsilon_s^{'}] = G, \qquad \text{ha } t = s \tag{3.4}$$

A mozgó átlag folyamat polinomja pedig a következő képpen fejthető ki.

$$C(L) = C(1) + (1 - L)C^*(L) \tag{3.5}$$

melyet a tagok átrendezéséből kapjuk. Ha $C(L)$ véges rendű polinom, akkor $C^*(L)$ is véges rendű lesz. Ha $C(1)$ azonosan nulla, akkor hasonló gondolatmenettel az $(1 - L)^2$ tagot tartalmazó kifejezés is meghatározható. A hiba korrekciós modell és a kointegrációs összefüggések közötti kapcsolatra először Granger mutatott rá 1981-ben. A következő tétel mutatja, hogy egy kointegrált vektor reprezentálható hiba korrekciós formában. Eredetileg Granger bizonyította, de a komplexebb eseteket Johansen és Yoo tárta fel 1985-ben. [9]

3.1. Tétel. ***(Granger féle reprezentációs tétel)*** *Legyen X_t idősorok egy $N \times 1$ dimenziós vektora megadva a 3.2 alakban, és legyen $X_t \sim CI(1,1)$ ahol a kointegráció rangja r. Ekkor:*

1. *$rang(C(1)) = N - r$.*
2. *Létezik a folyamatnak az ARMA reprezentációja:*

$$A(L)X_t = d(L)I_N\epsilon_t \tag{3.6}$$

A következő tulajdonságokkal:

- *$rang(A(1)) = r$*
- *$d(L)$ mindegyik koordinátája ugyanaz, és ϵ_t mindegyik koordinátájára ugyanazt a d(L)-t alkalmazzuk*

- *$d(1)$(a d együtthatóinak összege) véges, $A(0) = I_N$*
- *Ha $d(L) = 1$ (azaz d 0. rendű polinom) akkor ez egy vektor értékű autoregresszió.*

3. *Léteznek olyan $N \times r$ méretű r rangú α, és γ mátrixok amikre,*
   - $A(1) = \alpha\gamma'$.
   - $C(1)\gamma = 0$,
   - $\alpha' C(1) = 0$,
4. *Továbbá létezik egy hiba korrekciós reprezentáció $Z_t = \alpha' X_t$, és stacionárius véletlen változók egy $r \times 1$ dimeziós vektora, és egy $r \times 1$ dimenziós ϵ_t hibavektor hogy:*

$$A^*(L)(1-L)X_t = -\gamma Z_{t-1} + d(L)\epsilon_t \qquad A^*(0) = I_N \tag{3.7}$$

5. *A Z_t vektor a következő alakban is megadható,*

$$Z_t = K(L)\epsilon_t, \tag{3.8}$$

$$(1-L)Z_t = -\alpha'\gamma z_{t-1} + J(L)\epsilon_t, \tag{3.9}$$

   ahol $K(L) = \alpha' C^*(L)$ a lag polinomok egy $r \times N$ mátrixa. Minden egy eleme véges $K(1)$, ahol $rang(K(1)) = r$, valamint a $det(\alpha'\gamma) > 0$.

6. *Ha lehetséges a folyamat véges rendű vektor értékű autoregresszív reprezentálása, akkor a 3.6 egyenlet megegyezik a 3.7 szerintivel úgy, hogy $d(L) = 1$ és az $A(L)$ és $A^*(L)$ együtthatók véges polinomok lesznek.*

3.5. Az egységgyök tesztek

3.5.1. Dickey-Fuller és az Agumented Dickey-Fuller tesztek

Ha feltételezzük, hogy a változók egy halmaza szoros kapcsolatban áll egymással, (például közgazdasági elméletek alapján), az első lépés a kointegráció megállapítására, ha a megfigyelt idősort integráltságának rendjét vizsgáljuk. Különféle statisztikai tesztek léteznek ezek feltárására. A legfontosabbak az $I(1)$ esetekhez tartozó egységgyök teszek. Nézzük meg ezekre a legegyszerűbb eseteket, amikor a folyamat egy AR(1).

Az első módszert Dickey és Fuller nevéhez kötődik (az irodalomban a tipikus rövidítése DF teszt). A teszt tárgya a következő egyenlet:

$$y_t = \Phi y_{t-1} + u_t \tag{3.10}$$

Ahol, null- és ellenhipotézis a következő:

1. $H_0 : \Phi = 1$ azaz a folyamat tartalmaz egységgyököt.
2. $H_1 : \Phi < 1$ azaz folyamat stacionárius.

A gyakorlatban a következő regresszióként kezelt egyenlet használatos inkább, mint a 3.10 egyenlet.

$$\Delta y_t = \Psi y_{t-1} + u_t \tag{3.11}$$

S így a fentiekkel ekvivalens hipotézis vizsgálati teszt a következő,

1. $H_0 : \Psi = 0$ azaz a folyamat tartalmaz egységgyököt.
2. $H_1 : \Psi < 0$ azaz folyamat stacionárius.

mivel $\Phi - 1 = \Psi$.

Abban az esetben, ha az alapfolyamat nem nullából indul (van "intercept") és/vagy jelen van egy determinisztikus trend is a DF teszt alapmodellje a következő:

$$y_t = \Phi y_{t-1} + \mu + \lambda t + u_t \tag{3.12}$$

Hasonlóan a 3.10 egyenlethez ez is átalakitható, az egyenelet mindkét oldalából y_{t-1}-et kivonva:

$$\Delta y_t = \Psi y_{t-1} + \mu + \lambda t + u_t \tag{3.13}$$

Az eredeti Dickey-Fuller tesztstatisztika a következő:

$$T = \widehat{\Psi}/SE(\widehat{\Psi}) \tag{3.14}$$

Ahol, $\widehat{\Psi}$ nem más, mint az legkisebb négyzetek becslése, míg a nevező a becslés sztenderd hibája. A teszt statisztika aszimptotikusan nem a szokásos student t eloszlást követi, mivel a null hipotézis itt a nemstacionaritás. Így az ehhez a statisztikához tartozó kritikus értékeket numerikusan határozták meg. Mivel a tesztstatisztika eloszlása nem szimmetrikus, elegendő a nullhipotézist elutasításához, hogy a tesztstatisztika értéke kisebb legyen, mint a kritikus érték. Azt is megmutatták, hogy stacionáris idősorok esetén, becsült és elméleti Φ eltérése $\sqrt{T}$ nagyságrendben tart eloszlásban egy 0 várható értékű, $1 - \Phi^2$ szórású normális valószínűségű változóhoz.

A fent értelmezett teszt csak akkor érvényes ha az u_t egy fehér zaj folyamat. Sőt itt az u_t-ről feltesszük, hogy autokorrelálatlanok, mert ha nem az lenne, akkor a regresszió függő változója is (Δy_t) autokorrelált lenne. Ezekben az esetekben előfordulhat, hogy a teszt "oversize" lesz, azaz a teszt eredeti mérete nagyobb,

mint amennyit feltettünk és amivel számoltunk (pl. szign.=0,05). Ekkor az lesz a megoldás, hogy p késleltetését vesszük a függő változónak. Az így meghatározott alternatív modell fodja adni a módosított Dickey Fuller tesztet (röviden ADF):

$$\Delta y_t = \Psi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Delta y_{t-i} + u_t \tag{3.15}$$

A Δy_t-ben bekövetkezett késleltetés fogja biztosítani, hogy az u_t hibatagok autokorrelálatlanok. S mivel ADF teszt még mindig a Ψ függvényeként meghatározott, így a tesztstatisztika kritikus értékei is ugyanazok, mint korábban. Viszont ez a módosított módszer, egyben új problémákat is szül: Mi lehet az optimális késleltetése a függő változónak? Két szabály létezik, az egyik szerint a mintavételezés frekvenciája alapján mondjuk meg p értékét, például ha az adatok havonta vannak, használjunk $p = 12$-es késleltetést, ha negyedévente akkor $p = 4$-es késleltetést stb. Bizonyos típusú adatsorok esetében ez egy jó megközelítése a problémának, de érezzük, hogy ez túlságosan általános. Mondjuk magas frekvenciájú minták vizsgálata során (ahol óránkénti méréseink vannak) nem érdemes nagy p-t használni. A másik "szabály" szerint pedig az információs kritérium vizsgálata alapján érdemes dönteni. Egyszerűen válasszuk azt a p-t, ami alapján az információs kritériumok értéke minimális. Ne feledjük, p optimális meghatározása nem elhanyagolandó, mivel kevés késleltetés esetén a késleltetés nem tűnteti el az autokorreláció egészét így torzítja az eredményeinket, nő a standard hiba értéke s ez a teszt statisztika erejét is gyengíti.

3.5.2. Phillips-Perron tesztek

A Phillips-Perron teszt hasonlóan az ADF tesztnél, a nullhipotézis az hogy a folyamat tartalmaz egységgyököt, és az eljárás menete is ugyanaz, mint az ADF tesztek esetébe, annyi különbséggel, hogy 3.13-re még alkalmaz egy illesztést, s

nem-paraméteres módszerrel módosítja a DF tesztstatisztikát arra az esetre, hogyha heteroszkedaszticitás áll fenn, azaz egyenetlen a szórása a u_t-nek. A hátránya, hogy nagy minta elemszám esetén pontosabb csak az ADF-nél.

3.5.3. A magasabb rendű integrált folyamatok tesztelése

Vegyük a következő regressziót

$$\Delta y_t = \Psi y_{t-1} + u_t \tag{3.16}$$

$H_0 : \Psi = 0$ vizsgáljuk a $H_1 : \Psi < 0$ hipotézissel szemben. Ha H_0-t elutasítjuk, úgy egyszerűen arra következtetésre jutunk, hogy y_t-nek, lehet nincs egységgyöke. De mi a helyzet ha H_0 nem utasítjuk el? Az azt jelenti, hogy bizonyos megbízhatóság mellett a folyamatnak természetesen van egységgyöke, de nem tudjuk mennyi, ettől még lehet $y_t \sim I(1), I(2), I(3)$ stb. Abban az esetben hogyha a következő feladatot nézzük:

1. $H_0 : y_t \sim I(2)$
2. $H_1 : y_t \sim I(1)$

a $\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}$ segítségével, a Δy_{t-1}-re regresszálva ($\Delta^2 y_t$ megfelelő késleltetés megválasztásával ADF esetén) vizsgálható a fenti hipotézis.

Ezek alapján egy általános eljárást adott Dickey és Pantula (1987) és a következő tesztet javasolta. Első lépésben meghatározzuk a lehetséges legnagyobb elérhető rendjét az integráltságnak, s legyen ekkor $H_0 : y_t \sim I(p)$ és ezt teszteljük a $H_1 : y_t \sim I(p-1)$-el szemben. Ha H_0-t elvetjük, akkor nézzük az új hipotézis vizsgálati feladatot a $H_0' : y_t \sim I(p-1)$-t a $H_1' : y_t \sim I(p-2)$-vel szemben. Az eljárást szekvenciálisan addig folytatjuk, míg H_0-t el nem fogadjuk. Ezzel a módszerrel statisztikailag tesztelni tudjuk az integráltság rendjét.

3.1. Megjegyzés:. *Hasonló gondolatmenettel tesztelhetjük a kointegrálhatóság rendjét is a Johansen teszt esetében.*

3.2. Megjegyzés:. *Egyéb módszerek is léteznek arra az esetre ha egy nem stacionárius idősorból szeretnénk stacionáriusat csinálni. Pl. logaritmusképzés, hányados képzés, többszörös differenciálással, kointegrációs kapcsolatok feltérképezésével, hiba korrekciós módszer segítségével.*

3.5.4. A DF és PP tesztek problémája

A legnagyobb probléma ezekkel az egységgyök tesztekkel az, ha a folyamatunk stacionárius, de van egy olyan gyöke, amely közel van a nem-stacionaritás határához. Vegyük erre a következő példát:

3.2. Példa. $y_t = 0.95y_{t-1} + u_t$ *Ez egy AR(1) folyamat* $\Phi = 0.95$ *együtthatóval. Igy a DF nullhipotézisét el kéne vetnünk, mivel* Φ *kisebb, mint 1, ami azt jelenti, hogy a folyamat stacionárius. De azt is tudjuk, hogy kis minta elemszám esetén, a tesztek ereje kicsi, ha arról kell dönteni, hogy* $\Phi = 1$ *vagy* $\Phi = 0.95$

A fenti példa által szemléltetett probléma javítására az a sztenderd eljárás, hogy egyszerre vizsgáljunk több tesztet, így biztosabb képet kaphatunk, a stacionaritásról. Ha egyöntetűen elfogadjuk a nullhipotéziseket akkor nincs baj. Illetve szokás még egy másik egységgyök tesztet is vizsgálni, a KPSS tesztet, mert ennek a tesztnek fel van cserélve a nullhipotézise az ADF tesztekhez képest. Ha viszont a két teszt különböző eredményt mutat, akkor bajban vagyunk. Esetleg megoldást nyújhat az, ha frakcionális integrált rendjére végzünk teszteket.

3.6. Frakcionális Dickey-Fuller teszt

A frakcionális folyamatokon keresztül létezik a Dickey-Fuller féle teszteknek egy általánosítása. Az elmúlt évtizedben vált felkapottá ez a fajta megközelítés. A DF tesztekkel ellentétben nem az áll a hipotézisek középpontjában,(a legegyszerűbb esetet figyelembe véve) hogy a folyamat $I(1)$ és $I(0)$-beli, hanem inkább azt vizsgáljuk, hogy a folyamat $FI(d_0)$ vagy $FI(d_1)$, ahol $FI()$ reprezentálja azt, hogy d értéke tetszőleges valós értéket is felvehet. Abban az esetben ha $d_0 = 1$ az ajánlott teszt statisztika az OLS becslés vagy "t-hányados" lesz, melyet a $\Delta^{d_1} y_{t-1}$ együtthatóinak a Δy_t és $\Delta^{d_1} y_{t-1}$-re vonatkozó regressziója alapján származtatunk. Abban az esetben ha d_1 nem ismert, meg kell becsülnünk. Ennek egy lehetséges módja ha a Hurst paramétert becsüljük meg és abból határozzuk meg a d értékét. Jesus Gonsalo és Laura Mayoral [14] azt is megmutatták, hogy ha a d-nek a $T^{1/2}$-konzisztens becslését vesszük, az FD-F teszt alkalmazható, és megőrzi az aszimptotikus normalitását is. Ennél fogva számos előnye van az FD-F tesztnek a DF tesztel szemben. Egyrészt általánosabb modell, másrészt nem úgy, mint néhány LM teszt (Lagrange multiplikátor) nincs szükség semmilyen ismert eloszlás feltevésére a hibák esetén. Továbbá jó a próba ereje, véges minta elemszám esetén is. Ahogy láttuk korábban induljunk ki, most is a legegyszerűbb $AR(1)$ tagos egyenletből,

$$\Delta^{d_0} y_t = \Phi \Delta^{d_1} y_{t-1} + u_t, \tag{3.17}$$

ahol u_t egy $I(0)$ folyamat. Ha feltesszük, hogy $u_t = \epsilon_t$ amikor $\Phi = 0$ akkor a sorozat a következő folyamatot követi,

$$\Delta^{d_0} y_t = \epsilon_t, \tag{3.18}$$

így y_t egy $FI(d_0)$. Továbba ha $\Phi < 0$, akkor következő teljesül,

$$(\Delta^{d_0-d_1} - \Phi L)\Delta^{d_1} y_t = \epsilon_t, \tag{3.19}$$

Ha a karakterisztikus polinomot is szemügyre vesszük, akkor látjuk, hogy a $\Pi(z) = ((1-z)^{d_0-d1} - \phi z)$ kifejezés együtthatói, összegezhetőek és $\Pi(0) = 1$ és $\Pi(1) = -\phi \neq 0$. Ezek alapján az is megmutatható, hogy polinom összes gyöke akkor van az egységkörön kívül, hogyha $-2^{1-d_1} < \phi < 0$. Így az egyenletünket tovább írva a fenti feltételeket megtartva,

$$\Delta^{d_0} y_t = C(L)\epsilon_t, \tag{3.20}$$

ahol $C(z) = \Pi(z)^{-1} = ((1-z)^{d_0-d_1} - \Phi z)^{-1}$,és $C(0) = 1$ továbbá $0 < C(1) < \infty$. Így a DF teszthez hasonlóan, ebben az esetben is meg tudjuk adni a hipotéziseket.

1. $H_0 : \phi = 0, y_t \sim FI(d_0)$
2. $H_1 : \phi < 0, y_t \sim FI(d_1)$

Abban az esetben ha $d_0 = 1$ és $d_1 = 0$ a DF tesztet kapjuk vissza. Az egyszerűség kedvéért csak a speciális eseteket nézzük, amikor $d_0 = 1$ és a $0 \leq d_1 < 1$. Ezeknek az eseteknek a másik oka az alkalmazás szempontjából fontos. Vegyük észre, hogy a $d_1 < 0$ esettel nem foglalkozunk, mert ekkor az egységgyök tesztek jól működnek [14] (Mármor, 1998).

3.6.1. A teszt és annak aszimptotikus tulajdonságai

Legyen $d_0 = 1$ és $u_t = \epsilon_t$ a 3.18 egyenletből. Az ϵ_t 0 várható értékű i.i.d folyamat, σ^2 ismeretlen varianciával és véges negyedik momentummal. Az OLS becslése ϕ-nek $\hat{\phi_{ols}}$ és a "t-hányados" pedig $t_{\hat{\phi_{ols}}}$,melyek az általános legkisebb négyzetek módszere alapján adódnak.

$$\hat{\phi_{ols}} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \Delta y_t \Delta^{d_1} y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} (\Delta^{d_1} y_{t-1})^2}, \tag{3.21}$$

$$t_{\hat{\phi_{ols}}} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \Delta y_t \Delta^{d_1} y_{t-1}}{S_T \left(\sum_{t=2}^{T} (\Delta^{d_1} y_{t-1})^2 \right)^{1/2}}, \tag{3.22}$$

ahol a reziduálisok varianciája

$$S_T^2 = \frac{\left(\sum \Delta y_t - \hat{\phi_{ols}} \Delta^{d_1} y_{t-1} \right)^2}{T}. \tag{3.23}$$

3.3. Tétel. *Legyen y_t a nullhipotézisnek megfelelő véletlen folyamat, $\hat{\phi_{ols}}$ pedig konzisztens becslése a $\phi = 0$-nak, amely $0 < d_1 < \frac{1}{2}$ esetén T^{1-d1}, $d_1 = \frac{1}{2}$ esetén $(TlogT)^{\frac{1}{2}}$ és $\frac{1}{2} < d_1 < 1$ esetén $T^{\frac{1}{2}}$ rendben konvergál. Ekkor az aszimptotikus eloszlások a következők lesznek.*

$$T^{1-d_1} \hat{\phi_{ols}} \xrightarrow{\omega} \frac{\int_0^1 W_{-d_1}(r) dB(r)}{\int_0^1 W_{-d_1}^2(r) dr} \quad 0 \leq d_1 < 0.5, \tag{3.24}$$

$$(TlogT)^{1/2} \hat{\phi_{ols}} \xrightarrow{\omega} N(0, \pi), \quad d_1 = 0.5, \tag{3.25}$$

$$T^{\frac{1}{2}} \hat{\phi_{ols}} \xrightarrow{\omega} N(0, \frac{\Gamma(d_1^2)}{\Gamma(2d_1 - 1)}), \quad 0.5 < d_1 \leq 1. \tag{3.26}$$

3.4. Tétel. *Legyen y_t a nullhipotézisnek megfelelő véletlen folyamat. A $t_{\hat{\phi_{ols}}}$ aszimptotikus eloszlásai a következők lesznek*

$$t_{\hat{\phi_{ols}}} \xrightarrow{\omega} \frac{\int_0^1 W_{-d_1}(r) dB(r)}{\left(\int_0^1 W_{-d_1}^2(r) dr \right)^{\frac{1}{2}}} \quad 0 \leq d_1 < 0.5, \tag{3.27}$$

$$t_{\hat{\phi_{ols}}} \xrightarrow{\omega} N(0,1) \quad 0.5 < d_1 \leq 1. \tag{3.28}$$

3.7. Kointegrált rendszerek paraméterbecslése

Felmerül a kérdés mi lenne a megfelelő modellező stratégia ha tudjuk, hogy az adataink nem stacionáriusak, és lehetséges, hogy a modellváltozóink kointegráltak? Legalább három módszer ismeretes a kointegráció paramétereinek becslésére:

- Engle-Granger féle két lépéses módszer
- Engle–Yoo
- Johansen féle teszt

3.7.1. Az Engle-Granger kétlépéses módszer

A módszer egy alapvető egyenleten alapszik, és mint a neve is sugalja két lépésből áll:

- 1 lépés

  Meggyőződünk róla, hogy az összes független változó $I(1)$-beli. Ezek után OLS módszerrel megbecsüljük a kointegrációs összefüggést reprezentáló regresszió együtthatóit. Ezek után a kointegrációs regresszió becsült hibatagjait felhasználva teszteljük, hogy stacionáriusak-e. Ha elfogadjuk a teszt alapján (DF,ADF), hogy eleme I(0)-nak továbblépünk a 2-es lépésre.

- 2 lépés

  Felhasználjuk az első lépésbeli becsült rezidumokat, a hiba korrekciós modell egy változójaként. A reprezentációs tételnek köszönhetően felírhatjuk a modellt, a következő alakban a kointegrációs vektor segítségével.

$$\Delta y_t = \beta_1 \Delta x_t + \beta_2 \Delta(\hat{u_{t-1}}) + v_t \tag{3.29}$$

ahol $\widehat{u}_{t-1} = y_{t-1} - \tau x_{t-1}$ és v_t egy i.i.d. hibatag.

Ugye tudjuk, hogy több független kointegrációs vektor is létezhet egy rendszerhez, sőt a kointegrációs vektorok lineáris kombinációja is kointegrációs vektor lesz.

Az Engle-Granger kétlépéses módszernek akad néhány hibája:

1. Véges minta elemszám esetén az egységgyök tesztek és kointegrációs tesztek ereje kicsi, illetve, ha valami féle hiba van az egyes fázisban, azt továbbvisszük a kettesbe.

2. Több szimultán egyenletből bekövetkező torzítás: Tegyük fel, hogy a következő egyenletet megbecsültük, mint egy potenciális kointegrációs regresszió:

$$y_t = \alpha_1 + \beta_1 x_t + u_{1t} \tag{3.30}$$

   Mi történik ha a következő egyenletet vesszük alapul?

$$x_t = \alpha_2 + \beta_2 y_t + u_{2t} \tag{3.31}$$

   Vajon ha megállapítottuk, hogy $u_{1t} \in I(0)$, akkor következik, hogy u_{2t} is az? Az elméleti válasz igen, de gyakorlatban kis minta elemszám esetén, más eredményt kaphatunk.

3. Nincs semmi féle hipotézis vizsgálati teszt az aktuális kointegrációs kapcsolatra vonatkozóan az első lépésben.

Az egyes és a kettes problémák, a kis minta elemszámnak az eredménye, így aszimptotikusan nincsenek jelen. A hármas problémát Engle és Yoo fedezték fel.

Léteznek más alternatív technikák is, melyek a kettes és hármas problémákat legyűrik, ezek a VAR rendszerek becslésén alapszanak, mint majd a Johansen tesztnél látni fogjuk.

3.7.2. Engle-Yoo háromlépéses módszer

Az Engle-Yoo módszer az Engle-Granger módszer kiterjesztése. Az első két lépés ugyanaz, a harmadik lépésben pedig egy korszerűbb becslést adtak a kointegrációs vektor és a sztenderd hibák meghatározására. S mivel ugyanazok a problémák itt is fenn állnak és a Johansen féle módszer a kointegrációs kapcsolat tesztelhetőségére vonatkozó problémára viszont megoldást talál, az EY módszer kevésbé használatos.

3.7.3. A Johansen-módszer

A Johansen módszer kezdeti lépéseként kiindulunk egy p-edrendű vector autoregresszív modellből (VAR)

$$y_t = \mu + A_1 y_{t-1} + ... + A_p y_{t-p} + \epsilon_t, \tag{3.32}$$

ahol y_t egy $n \times 1$ -es vektora az első rendben integrált változóknak és ϵ_t egy $n \times 1$-es vektora az innovációnak. A VAR alakot a következő képpen is felírhatjuk:

$$\Delta y_t = \mu + \Pi y_{t-1} + ... + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta y_{t-i} + \epsilon_t \tag{3.33}$$

ahol

$$\Pi = \sum_{i=1}^{p} A_i - I, \quad \Gamma_i = -\sum_{j=i+1}^{p} A_j. \tag{3.34}$$

Ha a Π együttható mátrix rangja $r < n$, akkor léteznek olyan $n \times r$ α és β mátrixok, melyek rangja r, hogy $\Pi = \alpha\beta'$ és a $\beta' y_t$ stacionárius. Ekkor a kointegrációs kapcsolatok száma r, az α a hiba korrekciós modell által kiigazított paraméterek, és β oszlopvektorok a kointegrációs vektorok. Johansen, azt is megmutatta, hogy adott r esetén, a β maximum likelihood becslése meghatározza y_{t-1} összetételét.

Johansen két különféle likelihood hányados tesztet is meghatározott a Π mátrix rang csökkenésének függvényében:

$$J_{trace} = -T \sum_{i=r+1}^{n} ln(1 - \widehat{\lambda}_i) \tag{3.35}$$

$$J_{max} = -Tln(1 - \widehat{\lambda}_{r+1}) \tag{3.36}$$

ahol a 3.35-es egyenletet nyom tesztnek, míg a 3.36-es egyenletet maximum sajátérték tesztnek nevezik. A T a minta nagyságát jelenti, míg a $\widehat{\lambda}_i$ az i-edik legnagyobb kanonikus korreláció értékét. A nyomteszt során a hipotézisek a következők:

1. H_0 : van legalább r kointegrálós kapcsolat
2. H_1 : r kointegrálós kapcsolat áll fennt

Míg a maximum sajátérték teszt esetében:

1. H_0 : pontosan r db kointegrációs vektor létezik
2. H_1 : pontosan r+1 kointegrációs vektor létezik

Mivel a statisztikák eloszlása nem követ khi négyzet eloszlást, az aszimptotikus kritikus értékeket Johansen és Juselius (1990) meghatározták és a legtöbb ökonometria csomagban ezeket használják. S mivel a teszt statisztikák tisztán

az egységgyök tesztek feltevései alapján születtek, nem biztos, hogy jó ötlet a használatuk olyan folyamatok esetén melyek "egységgyök-szerű folyamatok". Így felmerül a kérdés, hogy vajon a Johansen teszt mennyire érzékeny ezen folyamatosztályok tesztelésére.

4. fejezet

Néhány implementáció, alkalmazás

4.1. Az álregressziók

Nézzük a következő általános lineáris regressziót

$$y_t = \beta_1 x_{t,1} + \beta_2 x_{t,2} + \dots \beta_K x_{t,K} + \epsilon_t \quad \text{for} \quad t = 1, \dots, T, \tag{4.1}$$

ahol y_t egy K dimenziós függő változó és $x_{t,i}$ komponensekből álló vektor a magyarázó változó, β_i-k valós számok, valamint ϵ_t a hibatag, amely egy fehér zaj. Feltesszük, hogy a modellel szemben, akkor teljesül a stacionaritás, ha a változókra teljesül a következő egyenlet:

$$\lim_{T \to \infty} X^{'} X = M \quad \text{és} \quad \exists M^{-1} \tag{4.2}$$

A fenti egyenlet azt fejezi, ki, hogy a magyarázó változókból képzett mátrix egy invertálható mátrixhoz konvergál az idő függvényében. Ez a feltevés a stacionaritásra a legkisebb négyzetek módszerének konzisztencia bizonyításából ered. Már korábban is szó volt arról, ha olyan idősorokat vizsgálunk amikor a differenciált stacionárius, azaz valamilyen rendben integrált folyamatokat nézünk, akkor a hibatagok gyakran erősen korreláltak, s így a t és F statisztikák torzulnak, ami miatt egy adott kritikus értékre a null hipotézist túl sokszor utasítjuk el. Ekkor mondjuk azt, hogy álregresszió van jelen, ráadásul ezek a regressziók gyakran magas R^2-el társulnak. Ennek oka az, hogy a függő változó egy sztochasztikus trendet tartalmaz, azaz hibás a feltételezésünk, hogy a sorozatnak a várható értéke konstans. Ennél fogva a statisztikánk a következő:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{\epsilon_t}^2}{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \overline{y})^2} \tag{4.3}$$

Az alapszabály amit Granger és Newbold ajánlottak, hogy álregresszió esetén, az R^2 értéke nagyobb, mint a Durbin-Watson statisztikáé. Nézzük meg erre a következő példát:

4.1. Példa.

$$Y = 179.9 - 0.2952I - 0.0439M \tag{4.4}$$

$$R^2 = 0.918, D/W = 0.4752, F = 95,17 \tag{4.5}$$

Ahol, Y az egyiptomi katonák halálozási aránya (1971-1990), I az amerikai farmerek éves brutto jövedelme, és M az összes Hondurasi pénzforgalma. [14]

Ahogy látjuk az $R^2 = 0.918$ értéke igen nagy, amit azt jelenti, hogy erős a kapcsolat a magyarázó változók és a függő változó között. Ez elég hihetetlenül hangzik jogos a feltételezés, hogy a Durbin-Watson statisztikát is megvizsgáljuk, amely

szerint 0.4752 ami elég távol áll az R értékétől. Az álregresszió esetén egy megoldást lehet, ha a sorozatunkat megfelelő rendben differenciáljuk, viszont ez több problémát is generálhat. Egyrészt pénzügyi idősorok esetében, gyakran élünk közgazdaságelméleti feltételezésekkel, és azok csak hosszú távon igazak, másrészt a hibatagok autokorrelációját befolyásolja a differenciálás.

Nézzünk most meg Heino Bohn Nielsen példáját,

4.2. Példa. *Stacionárius eset*

$$X_{1,t} = \epsilon_{1,t} \; X_{2,t} = \epsilon_{2,t} \; \epsilon_t \sim N(0, I_2) \tag{4.6}$$

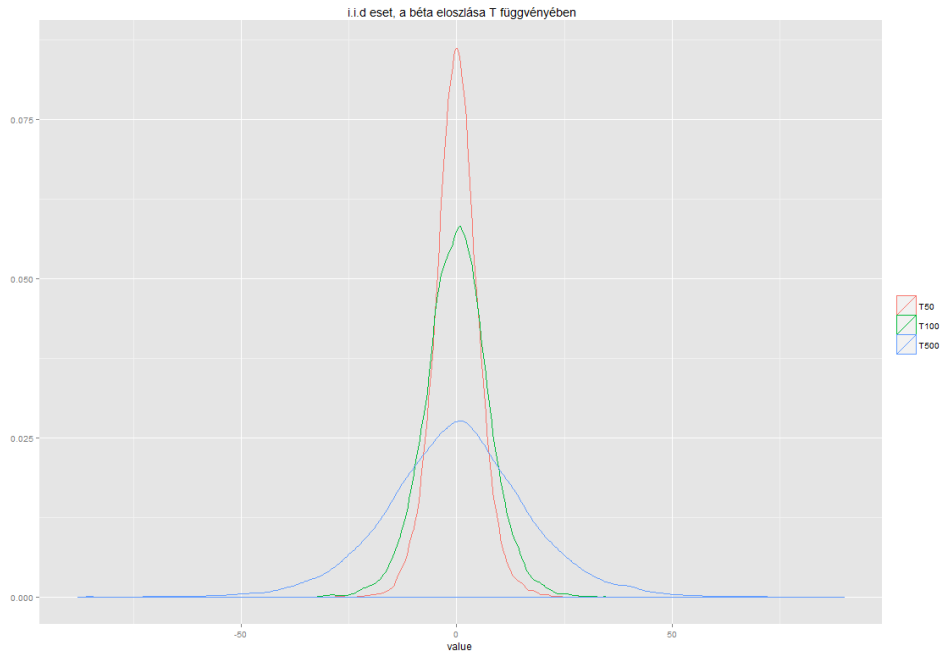
4.3. Példa. *I(1) eset*

$$X_{1,t} = X_{1,t-1} + \epsilon_{1,t}, \; X_{2,t} = X_{2,t-1} + \epsilon_{2,t}, \; \epsilon_t \sim N(0, I_2) \tag{4.7}$$

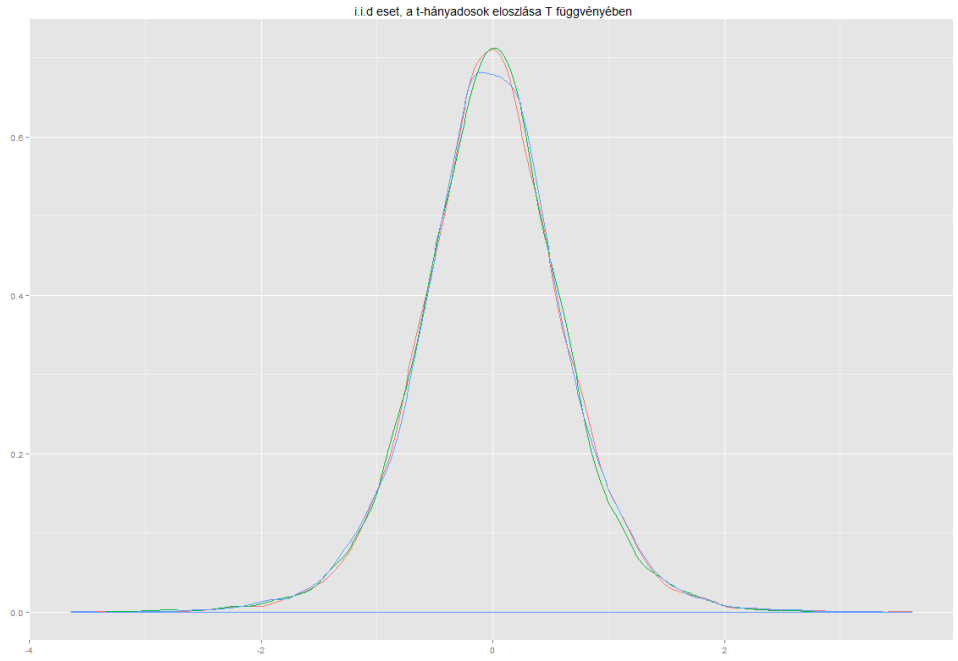
Tekintsük a sztenderd regressziós modellt:

$$X_{1,t} = \mu + \beta X_{2,t} + u_t \tag{4.8}$$

A 4.6 esetben, amikor a rezidumok i.i.d.-k, azt tapasztaljuk, hogy a $T \to \infty$ esetén $\beta = 0$. Ugyanakkor a t-hányadosok azaz a becsült együtthatók és a sztenderd hiba hányadosa, a normális eloszláshoz tart. Ezzel szemben a 4.7 esetben, a rezidumok I(1)-ek. Ekkor a β-k nem konvergálnak. Valamint sérülnek a konzisztencia feltételei, így a t-hányadosok eloszlása eltűnik, ahogy $T \to \infty$. Azt is megmutatták, hogy a β eloszlása a stacionárius esetben T^{-1} nagyságrendben tart az azonosan 0-hoz, míg az I(1) esetben T^{-2} a konvergencia rendje, azaz a becslés varianciája gyorsabban nő az elemszám növelésével. Ezt a jelenséget szuperkonzisztenciának hívják.



4.1. ÁBRA. i.i.d eset, a béta eloszlása T függvényében



4.2. ÁBRA. i.i.d eset, a t-hányados eloszlása T függvényében

4.2. A Hurst paraméter becslése

Már korábban is szó volt arról, hogy hosszúmemóriájú folyamatok modellezése során, az alapfeladatok közé tartozik a frakcionalitás rendjének becslése. Ha a Hosking féle definíciót követjük [6] akkor a d-edik frakcionális derivált az 1/2-H deriváltal egyezett meg, így szimuláció során, ha az R-ben a Hurst paramétert becsüljük, akkor ezt figyelembe kell venni, korrigálni kell a kapott becslést $\frac{1}{2}$-el. Szó volt arról is, hogy a Hurst együttható egyfajta önhasonlósági paraméter, így a hosszú emlékezet leírására is szolgál (Beran és McLeod féle definíció). A következőkben tehát röviden ismertetjük a Hurst paraméter becslésére szolgáló módszerek heurisztikus gondolatmenetét (Prőhle Tamás kézirata alapján [16]), majd a frakcionális zaj folyamatra megvizsgáljuk őket, hogy numerikus szempontból melyik adja a legjobb becslést.

1. **Az aggregált variancia módszer** A Hurst paramétert a frakcionális zajból, vagy FARIMA idősor variánciájából számolja úgy, hogy az idősort m méretű blokkokra bontja és minden blokknak veszi a tapasztalati varianciáját. Az aggregált folyamat varianciája $Var(X_k^m) = Cm^{2H-2}$. A β paraméter pedig a tapasztalati varianciák és a blokkméret logaritmusának lineáris regressziójának meredeksége lesz. Ebből meghatározható a $H = \beta/2 - 1$.

2. **A differenciált variancia módszer** Az aggregált varianciájának differenciáin alapuló módszere. A regressziót az egymásutáni blokkokra kapott varianciák differenciáira vesszük. Így a trend ugrása nem befolyásolja a stacionaritást. A β a tapasztalati varianciák differenciáinak és a blokkméretek logaritmusa alapján vett lineáris regresszió meredeksége. Így a Hurst paraméter: $\beta/2 - 1$

3. **Az aggregált momentumon alapuló módszer** Ez hasonlóan működik, mint az első esetben, az aggregált variancia módszer általánosítása. Az adott m-re nem a varianciát, hanem az m-edik tapasztalati abszolút momentumot veszi. A β hasonlóan itt is egy meredekség, a blokkméret logaritmusa és a momentumok közt.

4. **A Higuchi féle módszer** másnéven a fraktál dimenzió módszer. A módszer az aggregált momentum módszer n=1 esetére hasonlít, azzal a különbséggel, hogy a nem egymás fedő blokkok helyett, csúszó ablakot használ. Így a számolásigénye a módszernek is jóval nagyobb mint a fenti esetekben. Az aggregált folyamat ívhosszát számolja ki, és ennek logaritmusa és az ablakméret logaritmusa közti lineáris regressziós egyenes meredeksége adja a δ-t. Ezt fel lehet fogni egyfajta fraktál dimenziónak is. Így $H = 2 - \delta$ adja a becslést.

5. **A Peng féle módszer** avagy a maradékok varianciájának módszere. Az idősort m méretü blokkokra bontjuk. Minden blokkban kiszámoljuk a kumulált összegeket t-ig és rá egy $a+bt$ egyenest illesztünk legkisebb négyzetek módszerével. A maradékok tapasztalati varianciája az m^{2H} -val arányos, ahol m az átlag vagy a medián. Így, ha β a logaritmusok közti legkisebb négyzetek módszerével kapott líneáris regresszió meredeksége, akkor $H = \beta/2$.

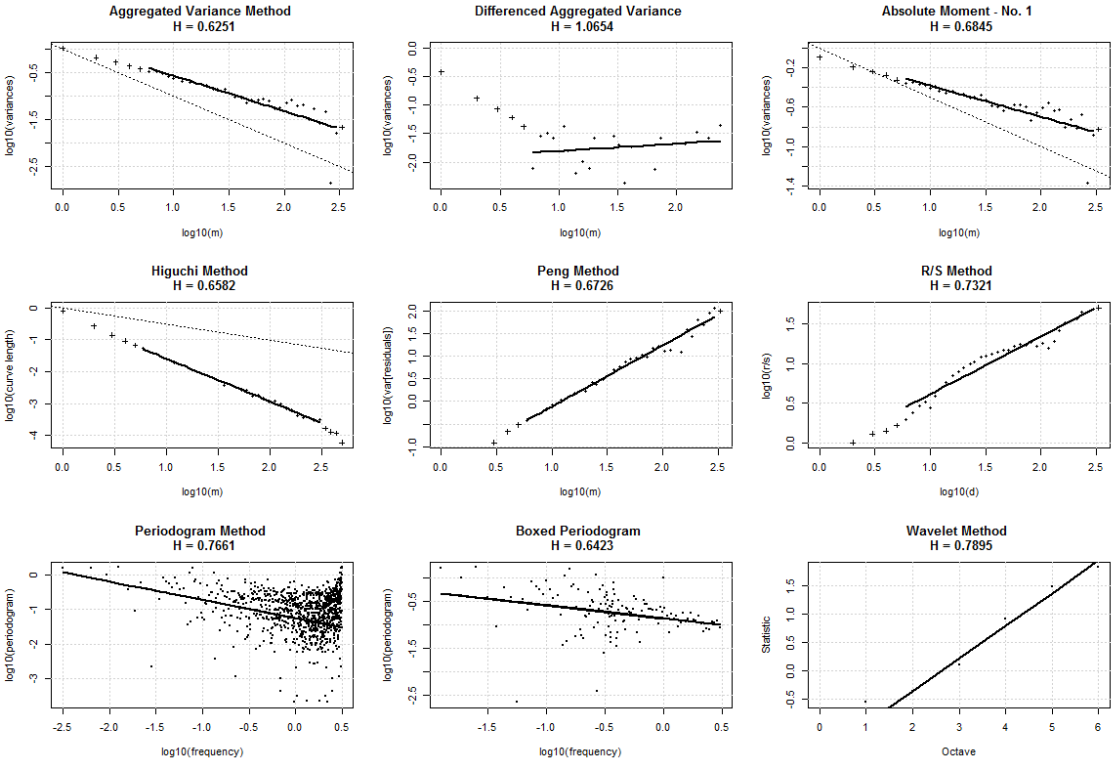
6. **Az R/S módszer** Az N hosszú megfigyelési sort, n hosszú A darab intervallumra bontja. Az intervallumokban a megfigyelési értékeket lineárisan közelíti az intervallum első és utolsó megfigyelésére illesztett egyenessel, majd veszi a megfigyelés és interpolációk közti különbséget. Ezekre a különbségekre, majd számolunk egy R_a terjedelmet és S_a tapasztalati szórást, minden intervallumra. Ezek hányadosának átlagának minden n-re vett logaritmusa és az n logaritmusa közti lineáris regresszió meredeksége adja madj a H-t.

7. **A Periodogram módszer** A periodogramból becsüli a Hurst exponenst. A periodogram a spektrálsűrűség aszimptotikusan torítatlan becslése, így a becsült spektrum meghatározása után, a nulla körüli viselkedést nézzük, mivel a hiperbolikus lecsengés miatt, ez a meghatározó rész, majd logaritmikusan egyenlő szakaszokra bontja a Fourier frekvenciák mentén a becslést, és az egyes szakaszokon kiszámítja a periodogram átlagokat.

8. **A módosított periodogram módszer** Ez a periodogram módszer egy módosított változata. A frekvencia tengelyt logaritmikusan egyenlo szakaszokra bontja, és az egyes szakaszokon kiszámítja a periodogram átlagokat.

9. **A Whittle féle becslés.** Ez a módszer is a periodogram alapján számol, de elöbb a periodogramot írja fel paraméteresen, majd-e paraméteres periodogram alapján vett esélyfüggvényt minimalizálja. Vagyis ez a módszer egy likelihood módszer, feltételezve, hogy a megfigyelt folyamat egy ARIMA(p,d,q) folyamat, ismeretlen $d \in (-1/2, 1/2)$-beli értékkel, adott p és q fokszámokkal.

A módszerek összehasonlításához az R $fArma$ csomagját használtam. A zaj generálásához pedig az $fgnSim()$ függvényt. Minden esetben 1000 elemű $H = 0.7$ Hurst paraméterű frakcionális zajra végeztem el a becslést. A következő táblázatok tartalmazzák az eredményeket a $T = 10, 100, 1000$ realizáció függvényében. Ahol lehetséges volt blokk számot megadni, ott 50-et adtam meg, ahol nem ott pedig az alaprételmezett beállításokkal futtattam a módszert. Nézzünk egy példát egy realizációra kilenc módszer esetében $H = 0.7$.



4.3. ábra. Módszerek a Hurst becslésére

A tíz módszer közül kilenc grafikus módszer, ezek közül mindössze a Higuchi a kivétel. A következőkben részletezett közelítések alapján mindegyik esetben, a Whittle féle becslés bizonyult a legjobbnak. Bár azt fontos megjegyezni, hogy az egyes módszerek esetében nem az optimális megoldást adtuk, meg, mert nem vettük figyelembe például a dobzok optimális számának beállítását stb. Így egyes módszerek jobb értékeket is eredményezhetnek. [16]

$T = 10$ lépésre:

Módszer:	mean	std
Aggregated Variance Method	0.6225	0.1096
Differenced Aggregated Variance	0.8924	0.0783
Absolute Moment	0.6851	0.1065
Higuchi Method	0.6410	0.0869
Peng Method	0.6608	0.0344
R/S Method	0.6931	0.0678
Periodogram Method	0.7093	0.0742
Boxed Periodogram	0.6286	0.0380
fgn whittle	0.6937	0.0167
Wavelet Method	0.6951	0.0603

$T = 100$ lépésre:

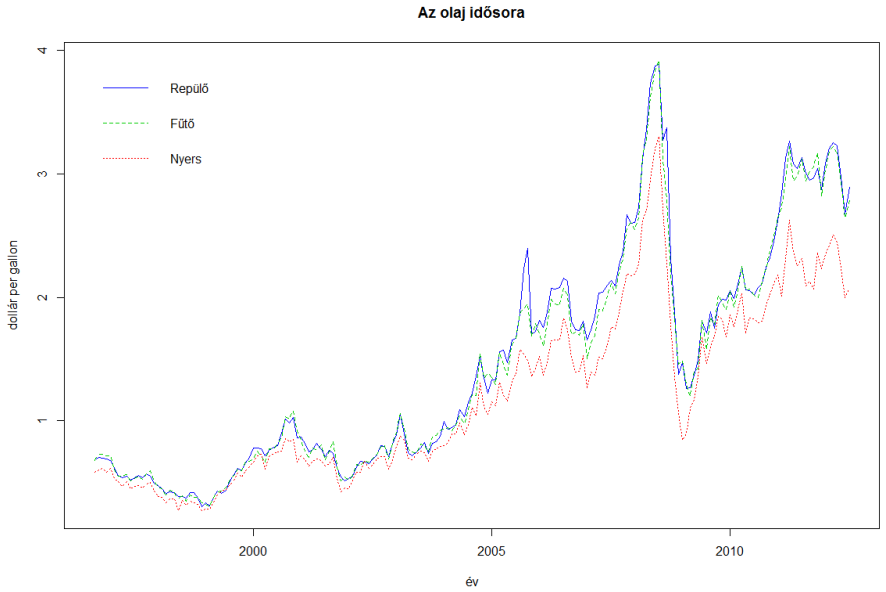
Módszer:	mean	std
Aggregated Variance Method	0.5902	0.1192
Differenced Aggregated Variance	0.8602	0.1036
Absolute Moment	0.6581	0.1211
Higuchi Method	0.6572	0.0817
Peng Method	0.6789	0.0476
R/S Method	0.7068	0.1000
Periodogram Method	0.7074	0.0777
Boxed Periodogram	0.6210	0.0403
fgn whittle	0.6944	0.0222
Wavelet Method	0.6781	0.0954

$T = 1000$ lépésre:

Módszer:	mean	std
Aggregated Variance Method	0.6130	0.1127
Differenced Aggregated Variance	0.8815	0.1110
Absolute Moment	0.6767	0.1136
Higuchi Method	0.6542	0.0811
Peng Method	0.6783	0.0460
R/S Method	0.7051	0.0844
Periodogram Method	0.7203	0.0743
Boxed Periodogram	0.6275	0.0391
fgn whittle	0.7000	0.0210
Wavelet Method	0.6737	0.1087

4.3. Kointegráció becslése

A 3-as fejezetben ismertetett egységgyök tesztek és kointegrációs paraméterbecslések használatával, nézzünk egy példát. Adott egy *uzemanyag.csv* kiterjesztésű fájl, mely 1996 szeptemberétől 2012 júliusáig tartalmazza a különböző finomítású olajok árát gallononként dollárban. Ez az idősor lekérdezhető tetszőleges bontásban, pl. a *http://www.indexmundi.com/commodities/* oldalon keresztül. A három olajtípus közötti összefüggőségi kapcsolatot kerestük: a repülőgép üzemanyagokét, a fűtő olajét, és a nyers olajét. A következő ábra tartalmazza az ár alakulását 1996-tól az időszak végéig.



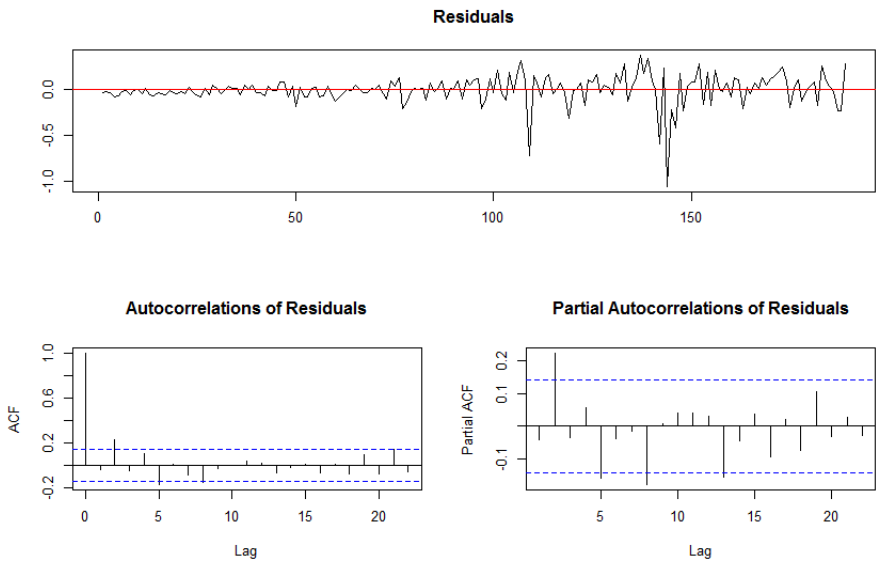
4.4. ábra. Az olaj dollár árfolyama

Már az ábrán látszódik, hogy szoros az összefüggés a különböző finomítású olajok esetén, ami nem meglepő, hiszen, ha a nyersolaj ára felfele megy, várhatóan a kerozin is drágább lesz. Érdemes lehet a kointegrációs kapcsolatokat boncolgatni.

Vizsgáljuk meg az integráltság rendjét, lehetséges, hogy egy drift van jelen az adatainkban, úgyhogy az ADF teszt esetében egy driftes alapmodellt érdemes figyelembe venni.

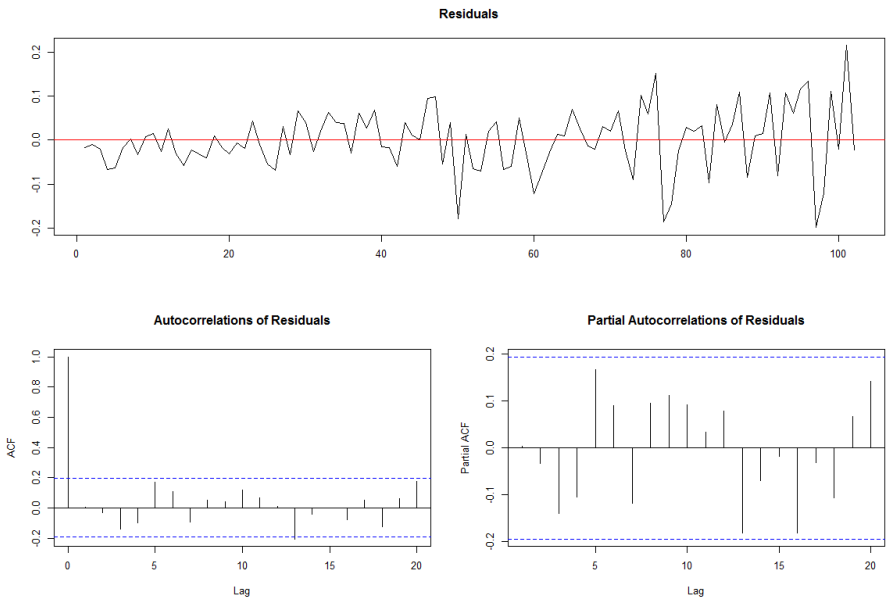
$$\Delta y_t = \beta_1 + \pi y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \Delta y_{t-j} + u_{2t}, \tag{4.9}$$

Megvizsgálva első körben az auto- és parciális korrelációkat a kerozinra, látszódik, hogy a reziduálisok, nem stacionáriusak, nem teljesen szép a modell.



4.5. ábra. A kerozinra illesztett modell hibájának statisztikai értékelései

Ennek többféle oka lehet, az egyik az, hogy a gazdasági világválság 2007 októberében érte el Amerikát, és ennek hatása begyűrűzött az olajpiacra is. A válság miatt, olyan szélsőséges események alakultak ki, hogy érdemes két részre szedni az adatokat (válság előtti és a válság utánira), így az idősort 2007 októberéig levágjuk és csak ezt az időszakot figyeljük meg.



4.6. ábra. A kerozinra (2007 október) illesztett modell hibájának statisztikai értékelései

A driftes modell tesztelésekor, a hipotézisünk melyet vizsgálunk, a $\phi_1 = (\beta_1, \pi) = (\beta_1, 0)$. S mivel a tesztstatisztika értékei a ϕ_1-hez tartozó kritikus értékeknél kisebbek, nem kell elvetni a nullhipotézist, így az a sejtésünk, hogy nincs szükség a driftes modellre (a levágott adatsor esetén ugye). Viszont, ha a τ statisztika értékét nézzük, az jóval nagyobb, mint a kritikus érték, emiatt a nullhipotézist elfogadjuk így lehet egységgyöke a folyamatnak.

	τ_2	ϕ_1
Kerozin	0.2354	0.6235
Nyers olaj	0.0844	0.6012
Fűtő olaj	0.0997	0.5328

Az ADF teszthez tartozó kritikus értékek a következők:

kvantilis	1pct	5pct	10pct
τ_2	-3.46	-2.88	-2.57
ϕ_1	6.52	4.63	3.81

Tudjuk, hogy van a folyamatnak egységgyöke, sőt abban is biztosak vagyunk, hogy a folyamat I(1)-beli, mivel a differenciálással a folyamat már nem tartalmaz több egységgyököt, ugyanis:

	τ_1
Kerozin	-6.6946
Nyersolaj	-7.9439
Fűtőolaj	-7.0985

A kritikus értékeket pedig a következő táblázat tartalmazza, a τ_1 értékei nagy negatív számok, így mint három esetben elvetjük a nullhipotézist.

kvantilis	1pct	5pct	10pct
τ_1	-2.58	-1.95	-1.62

Tehát azt kaptuk, hogy ezek I(1)-beli folyamatok. Most pedig nézzük, meg a Johansen féle becslést a paraméterekre. A rang és nyomstatisztikák és kritikus értékeit tartalmazza a következő táblázat:

kvantilis/T	1pct	5pct	10pct	$T_{K\sim F}$	$T_{F\sim Ny}$	$T_{Ny\sim K}$
$r <= 1$	11.65	8.18	6.50	0.07	0.65	0.22
$r = 0$	19.19	14.90	12.91	34.37	28.43	18.85

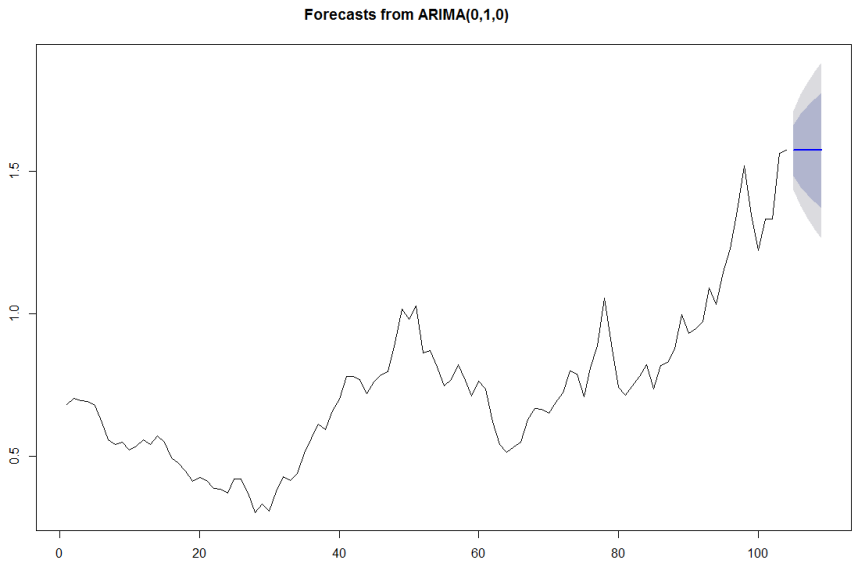
A statisztikák értékei $r = 0$ esetén jóval meghaladják a kritikus értékeket így nem tudjuk elfogadni, hogy a kointegrációs rang 0. Az $r <= 1$ esetnél viszont, a nullhipotézist elfogadjuk. Ezek alapján mindegyik párra igaz, hogy első rendben kointegráltak, mivel egynél nem lehet nagyobb a kointegráció rangja.

4.1. Megjegyzés:. *A K a kerozin, F a fűtőolaj, Ny a nyersolaj rövidítése*

Mivel van kointegráció, megadjuk a kointegrációs vektorokat is. Ezek segítségével lehetőség nyílhat, spekulációkra, technikai elemzések készítésére is.

$$\begin{pmatrix} K \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.999 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ Ny \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Ny \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.804 \end{pmatrix}$$

Végül a kerozin árafolyamalakulására, (2007 októberéig) megpróbáltam illeszteni, egy ARFIMA(p,d,q)-t. Mivel nem hosszú memóriájú, valamint a kis elemszám miatt is, nem célszerű frakcionális ARMA-val modellezni. Az ARIMA alapján a legjobb becslést az ARIMA(0,1,0) szolgálta az Akaike és Bayesi információs kritérium alapján, h=5-es késleltetésre az előrejelzés a következő.



4.7. ábra. ARIMA(0,1,0) alapján az előrejelzés

Függelék

CRAN csomagok

A kódolás során az R program 2.15.2-es verziószámú változatát használtam. Számos kód esetében az alapvető strukturákat, (idősor, mátrix osztály stb.) valamint széles körben elterjedt eljárásokat (Johansen-módszer, Dickey-Fuller teszt stb.) nem programoztam le. Ennek oka egyrészt az, hogy tetemes plusz munkát igényelt volna, másrészt a módszerek optimalizáltsága végett, célszerűbbnek láttam felhasználni az R beépített környezetét. A csomagok telepítése az osztrák szerveren keresztül történt. A dolgozat során felhasznált csomagok a következők:

Név	Cím	Verzió	Dátum
fracdiff	ARFIMA(p,d,q) modellek	1.4-2	2012-12-02
fBasics	Pénzügyi ökonometria szoftverek	2160.85	2012-09-21
urca	Egységgyök és kointegrációs tesztek	1.2-7	2012-07-22
ggplot2	Grafikai implementációk	0.9.3	2012-12-05
reshape2	Adat konverzió	1.2.2	2012-12-04
fArma	ARMA idősor modellezés	2160.78	2012-09-17
fields	Térbeli adatok kezelése	6.7	2012-10-16
caTools	GIF kiterjesztés készítéséhez	1.13	2012-05-23
lmtest	Lineáris regresszió modellek	0.9-30	2012-05-31

Implementált forráskódok

Az alfejezetekhez tartozó numerikus kísérletek eredményeihez és a generált képekhez tartozó forráskódokat tartalmazza a függelék ezen része.

```
##A binomiális együtthatók
binom <- function(c, k )
  {
  if (k=="1") { solution<-c }
  else {
                y<-cumprod(seq(c, c-k+1, by = -1))[k]
                z<-gamma(k+1)
                solution=y/z
       }
  return(solution)
  }
binomd<-function(c,k)
{
  vect <- rep(0, k)
  for(i in 1:k)
    {
   vect[i]= binom(c,i)
    }
  return(vect)
}
par(mfrow=c(3,3))
plot(binomd(100,100),type="l",xlab="k")
plot(binomd(10,100),type="l",xlab="k")
plot(binomd(1,100),type="l",xlab="k")
plot(binomd(0.3,100),type="l",xlab="k")
plot(binomd(-0.3,100),type="l",xlab="k")
plot(binomd(-1,100),type="l",xlab="k")
plot(binomd(-1.3,100),type="l",xlab="k")
plot(binomd(-3,100),type="l",xlab="k")
```

```
plot(binomd(-10,100),type="l",xlab="k")
```

```
##Hurst paraméter különféle becslései

library(fArma)
#Input: i realizációra,n elemű frakcionális zajból, h hurst
   paraméterű becslések, l szint mellett (dobozok száma)
#Outpu: A becslés várható értéke, szórása, neve
#Végén 1 realizációra történő megjelenítés

hurst <- function(i,n,h,l )
{

nev<-rep(0,10)
nev[1]<-aggvarFit(x)@method;
nev[2]<-diffvarFit(x)@method;
nev[3]<-absvalFit(x)@method;
nev[4]<-higuchiFit(x)@method;
nev[5]<-pengFit(x)@method;
nev[6]<-rsFit(x)@method;
nev[7]<-perFit(x)@method;
nev[8]<-boxperFit(x)@method;
nev[9]<-whittleFit(x)@method;
nev[10]<-waveletFit(x)@method;





mean<-rep(0, 10)
std<-rep(0, 10)
outputdarab<-cbind(mean,std)

mtx<-matrix(0,10,i)

for(j in 1:i)
```

```
{
x<-fgnSim( n, h, method = c("beran", "durbin", "paxson"))
mtx[1,j]<-aggvarFit(x,levels = l)@hurst$H
mtx[2,j]<-diffvarFit(x,levels = l)@hurst$H
mtx[3,j]<-absvalFit(x,levels = l)@hurst$H
mtx[4,j]<-higuchiFit(x,levels = l)@hurst$H
mtx[5,j]<-pengFit(x,levels = l)@hurst$H
mtx[6,j]<-rsFit(x,levels = l)@hurst$H
mtx[7,j]<-perFit(x)@hurst$H
mtx[8,j]<-boxperFit(x)@hurst$H
mtx[9,j]<-whittleFit(x)@hurst$H
mtx[10,j]<-waveletFit(x)@hurst$H
}

for(j in 1:10)
{
outputdarab[j,2]<-sd(mtx[j,])
outputdarab[j,1]<-mean(mtx[j,])
}

output<-cbind(nev,outputdarab)
return(output)
}
```

```
##Példa stacionárius és nem stacionárius idősorra

par(mfrow=c(2,1))

set.seed(42)
y<- w<- rnorm(1000)
for (t in 2:1000) {
  y[t]<- 0.9*y[t-1]+w[t]
}
#vektor összefűzés
xy.mat<- cbind(c(0,450,225,750,600,1000),c(6.5,6.5,7.5,7.5,8.5,8.5))
```

```
##plottolás, Dickey Fuller teszt##
plot(1:length(y),y,xlab="t",ylab=expression(y[t]),type="l",ylim=c
    (-8,10),main="Stacionárius idősor")
text(125,-6.5,labels=expression(ADF == -6.128));



set.seed(42)
yns<- wns<- rnorm(1000)
for (t in 3:1000) {
  yns[t]<-1.5*yns[t-1]-0.5*yns[t-2]+wns[t]
}
plot(1:length(yns),yns,xlab="t",ylab=expression(y[t]),type="l", ylim=
    c(-100,20),main="Nem stacionárius idősor" )
text(125,-60,labels=expression(ADF == -2.0251));
```

```
##Hosszú és rövid memóriájú folyamatokhoz


library(fracdiff)
set.seed(123456)
#ARFIMA (0.4,0.4,0.0)
y1<- fracdiff.sim(n=1000, ar=0.4, ma=0.0, d=0.4)
#ARFIMA (0.4,0.0,0.0)
y2<- arima.sim(modell=list(ar=0.4), n=1000)
#Ábrázolás
layout(matrix(1:6, 3, 2, byrow=FALSE))
plot.ts(y1$series, main='Hosszú memóriájú folyamat', ylab='')
acf(y1$series, lag.max=100, main='Az autokorrelációfüggvény')
spectrum(y1$series, main='A spektrálsűrűségfüggvény')
plot.ts(y2,main='Rövid memóriájú idősor', ylab='')
acf(y2, lag.max=100, main='Az autokorreláció')
spectrum(y2,main='A spektrálsűrűségfüggvény')
```

```
## fgnSim - Frakcionális zajok, generálása H=0,75-re


>    par(mfrow = c(3, 1), cex = 0.75)
```

```
>
  >    # Beran féle módszer:
  >    plot(fgnSim(n = 200, H = 0.75), type = "l",
           +      ylim = c(-3, 3), xlab = "time", ylab = "x(t)",
   main = "Beran")
>
  >    # Durbin féle módszer:
  >    plot(fgnSim(n = 200, H = 0.75, method = "durbin"), type = "l",
           +      ylim = c(-3, 3), xlab = "time", ylab = "x(t)",
   main = "Durbin")
>
  >    # Paxon féle módszer:
  >    plot(fgnSim(n = 200, H = 0.75, method = "paxson"), type = "l",
           +      ylim = c(-3, 3), xlab = "time", ylab = "x(t)",
   main = "Paxson")
```

```
>##Mandelbrot halmaz; a megjelenítéséhez tartozó kódrészlet Jarek
   Tuszynski, PhD. szellemi terméke:
>
> library(fields) # for tim.colors
> library(caTools) # for write.gif
> m = 400 # grid size
> C = complex( real=rep(seq(-1.8,0.6, length.out=m), each=m ),
+ imag=rep(seq(-1.2,1.2, length.out=m), m ) )
> C = matrix(C,m,m)
>
>
> Z = 0
> X = array(0, c(m,m,20))
> for (k in 1:20) {
+ Z = Z^2+C
+ X[,,k] = exp(-abs(Z))
+ }
> image(X[,,k], col=tim.colors(256)) # show final image in
> write.gif(X, "Mandelbrot.gif", col=tim.colors(256), delay=100)
```

```
##Plotok, H függvényében a folyamatra

library(timeDate)
library(timeSeries)
library(fBasics)
library(fArma)
par(mfrow=c(3,1))
fbmSim(n = 1000, H = 0.9, method = "chol", doplot = TRUE, fgn = FALSE
    )
fbmSim(n = 1000, H = 0.5, method = "chol", doplot = TRUE, fgn = FALSE
    )
fbmSim(n = 1000, H = 0.1, method = "chol", doplot = TRUE, fgn = FALSE
    )

##lehetséges methodok a futtatásra: c("mvn", "chol", "lev", "circ", "
    wave")
```

```

##Álregresszió 1. eset

library(ggplot2)
library(reshape2)

reg=function(i)

{
  a <- rep(0, 10000)
    for( j in seq(1,10000,by=1) )
  {

    x1=rnorm(i)
    x2=rnorm(i)
```

```
    b=lm(x1~x2)$coef[2]
    a[j]=b
  }
   return(a)
}

y1=reg(50)
y2=reg(100)
y3=reg(500)

df <- data.frame(y1,y2,y3)
df.m <- melt(df)
ggplot(df.m) + geom_density(aes(x = value,
     colour = variable)) + labs(x = NULL) +
     opts(legend.position = "none") + opts(title = "Kerneles
   sűrűségfüggvény becslés")
```

```
## Álregresszió 2. eset

library(ggplot2)
library(reshape2)

sreg1=function(i)

{
  a <- rep(0, 10000)
    for( j in seq(1,10000,by=1) )
  {

    x1=rnorm(i)
    x2=rnorm(i)
    y1=cumsum(x1)
    y2=cumsum(x2)

    b=lm(y1~y2)$coef[2]
```

```
    a[j]=b
  }
   return(a)
}

z1=sreg1(50)
z2=sreg1(100)
z3=sreg1(500)

df <- data.frame(z1,z2,z3)
df.m <- melt(df)
ggplot(df.m) + geom_density(aes(x = value,
     colour = variable)) + labs(x = NULL) +
     opts(legend.position = "none") + opts(title = "Kerneles
   sűrűségfüggvény becslés")
```

```
##Álregresszió 3.1 eset

library(ggplot2)
library(reshape2)
library(fracdiff)

fracreg1=function(i)

{
  a <- rep(0, 10000)
    for( j in seq(1,10000,by=1) )
  {
    y1 <- unlist(fracdiff.sim(n=i, d= 0.4)[1])
    y2 <- unlist(fracdiff.sim(n=i, d= 0.4)[1])

    b=lm(y1~y2)$coef[2]
    a[j]=b
  }
   return(a)
```

```
}

z1=fracreg1(50)
z2=fracreg1(100)
z3=fracreg1(500)

df <- data.frame(z1,z2,z3)
df.m <- melt(df)
ggplot(df.m) + geom_density(aes(x = value,
     colour = variable)) + labs(x = NULL) +
     opts(legend.position = "none") + opts(title = "Kerneles
   sűrűségfüggvény becslés")
```

```
##Álregresszió 3.2 eset

library(ggplot2)
library(reshape2)
library(fracdiff)

fracreg2=function(i)

{
  a <- rep(0, 10000)
    for( j in seq(1,10000,by=1) )
  {
    y1 <- unlist(fracdiff.sim(n=i, d= 0.4)[1])
    y2 <- unlist(fracdiff.sim(n=i, d= 0.4)[1])

    z=summary(lm(y1~y2))$coeff
    b1=z[[2]]/z[[4]]
    a[j]=b1
  }
   return(a)
}
```

```
z1=fracreg2(50)
z2=fracreg2(100)
z3=fracreg2(500)

df <- data.frame(z1,z2,z3)
df.m <- melt(df)
ggplot(df.m) + geom_density(aes(x = value,
     colour = variable)) + labs(x = NULL) +
     opts(legend.position = "none") + opts(title = "Kerneles
   sűrűségfüggvény becslés")
```

```
#Egy eljárás az I(d) meghatározására, és a kointegráció szemléltetése
#Input: Nyers olaj, Fűtőolaj, Repülőgép üzemanyag (pl. Kerozin)
   idősora 1996 szeptemberétől– 2012 júliusáig.

library("urca")
# Adatok betöltése, idősor struktúra létrehozása
adat<-read.csv("uzemanyag.csv",header=TRUE)
repulo<-ts(adat$JetFuel,start=c(1996,9),frequency=12)
futo<-ts(adat$HeatingOil,start=c(1996,9),frequency=12)
nyers<-ts(adat$Crude,start=c(1996,9),frequency=12)


# A módosított Dickey–Fuller egységgyök teszt az idősorokra
repulo.adf<-ur.df(repulo,type="drift",selectlags="BIC")
summary(repulo.adf)
futo.adf<-ur.df(futo,type="drift",selectlags="BIC")
summary(futo.adf)
nyers.adf<-ur.df(nyers,type="drift",selectlags="BIC")
summary(nyers.adf)

plot(repulo.adf)
```

```
repulo<-repulo[1:104]
futo<-futo[1:104]
nyers<-nyers[1:104]

# A módosított Dickey-Fuller egységgyök teszt az idősorokra
repulo.adf<-ur.df(repulo,type="drift",selectlags="BIC")
summary(repulo.adf)
futo.adf<-ur.df(futo,type="drift",selectlags="BIC")
summary(futo.adf)
nyers.adf<-ur.df(nyers,type="drift",selectlags="BIC")
summary(nyers.adf)

plot(repulo.adf)



#plot(repulo.adf@res)
#spectrum(repulo.adf@res)

#Megnézzük az integráltság rendjét,
drepulo<-diff(repulo)
drepulo.adf<-ur.df(drepulo,type="none",selectlags="BIC")
dfuto<-diff(futo)
dfuto.adf<-ur.df(dfuto,type="none",selectlags="BIC")
dnyers<-diff(nyers)
dnyers.adf<-ur.df(dnyers,type="none",selectlags="BIC")




#Kointegrációs vektorok becslése
simdat1<- cbind(repulo,futo)
simdat2<- cbind(futo,nyers)
simdat3<- cbind(nyers,repulo)
jo.results1<- summary(ca.jo(simdat1))
jo.results2<- summary(ca.jo(simdat2))
```

```
jo.results3<- summary(ca.jo(simdat3))

#Folyamat illesztés
repulo<-ts(adat$JetFuel,start=c(1996,9),frequency=12)
repulo1<-repulo[1:104]
repulo2<-repulo[104:191]

# A legjobb illeszkedést nézzük, Akaike információs kritérium alapján
# Tegyük fel, hogy az ARMA(p,q) model rendje 0<=p<=3 és 0<=q<=3 így

best.order<-c(0,0)
best.aic<-Inf
for (i in 0:5) for (j in 0:5) {
     fit.aic<-AIC(fracdiff(repulo1, nar =i, nma =j))
     if (fit.aic < best.aic) {
         best.order <- c(i,j)
         best.arfima <- fracdiff(repulo1, nar =i, nma =j)
         best.aic <-fit.aic
     }}
# Ezek alapján illesztés
fit<-fracdiff(repulo1, nar =1, nma =0)

#szimuláció
szimrep<-fracdiff.sim(104, ar =fit$ar, ma =0, d =fit$d)
par(mfrow=c(2,1))
plot(szimrep$ser,type='l')
plot(repulo1,type='l')

# ARIMA fit és forecast
fit<-auto.arima(repulo1,max.p=50,max.q=50)
plot(forecast(fit,h=5))
```

Irodalomjegyzék

[1] Richard T. Bailli, 1996, Long memory processes and fractional integration in econometrics, Journal of Econometrics 73, 5-59

[2] Heino Bohn Nielsen, 2005, Non-Stationary Time Series, Cointegration and Spurious Regression, Econometrics 2

[3] Maryam Tayefi, T. V. Ramanathan, 2012, An Overview of FIGARCH and Related Time Series Models, Austrian Journal of Statistics

[4] Brietzke, E.H.M., Lopes, Bisognin, A closed formula for the Durbin-Levinson's algorithm in seasonal fractionally integrated processes

[5] Jesus Gonsalo, Tae-Hwy Lee, On the robustness of cointegration tests when series are fractionally integrated

[6] J.R.M. Hosking, 1981, Fractional Differencing, Biometrika, Vol, 68

[7] Marco Avarucci, Carlos Velasco, 2009, A Wald test for the cointegration rank in nonstationary fractional systems, Journal of Econometrics

[8] Celso Brunetti, Christopher L. Gilbert, 2000, Bivariate FIGARCH and fractional cointegration, Journal of Empirical Finance

[9] Johansen Soren, 1991, Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models, Econometrica

[10] Richard G. Clegga, A parctical guide to measuring the Hurst parameter

[11] Benoit B. Mandelbrot, John W. Van Ness, 1968, Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, JSTOR

[12] Katona Gyula Y., Recski András, Szabó Csaba, 2002, A számítástudomány alapjai, TYPOTEX

[13] Engle, R. Granger, G. 1987, Cointegration and error correction: Representation, estimation and testing. Econometrica 55, 251-276.

[14] Juan J. Dolado, Jesus Gonzalo, Laura Mayoral, 2002, A fractional Dickey-Fuller test for unit roots, Econometrica

[15] Bernhard Pfaff, 2006, Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R, Springer Science+Business Media, Inc

[16] Prőhle Tamás, 2008, A Hurst együttható becslése az R-ben kézirat, ELTE