Fourier-transzformáció alkalmazása ipari adatok elemzésében

Szakdolgozat

Írta

Nagy Zsuzsanna

Alkalmazott matematikus MSc, Alkalmazott analízis szakirány

Témavezető:

Simon L. Péter

Egyetemi docens

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest

2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Fourier-sorok elmélete **4**
2.1. Történeti háttér 4
2.2. A trigonometrikus rendszer teljessége L^2 függvénytérben 6
2.3. Fourier-sor L^2 függvénytérben 9

3. Frekvencia-analízis **11**
3.1. Harmonikus rezgőmozgás 11
3.2. Fourier-sor 12
3.2.1. Trigonometrikus polinomokkal leírt Fourier-sor 12
3.2.2. Fourier-sor komplex alakja 13
3.3. Fourier transzformáció 14
3.3.1. Folytonos Fourier-transzformáció 14
3.3.2. Diszkrét Fourier-transzformáció 16
3.4. Mintavételezés 18
3.4.1. Mintavételezett jel diszkrét Fourier-transzformáltja 18
3.4.2. Mintavételezett függvény rekonstruálása 20
3.5. Ablakfüggvények 23

4. Szimulációs eredmények **26**
4.1. Hangjelek analízise 26
4.2. Rezgésanalízis 28
4.2.1. Motordiagnosztika 28
4.2.2. Egy ventilátor rezgésének mérése 30

5. Összefoglalás **33**

1. Bevezetés

Az Audi Hungaria Motor Kft.-nél töltött szakmai gyakorlatom során foglalkoztam a Fourier-transzformáció egyik alkalmazási területével a motordiagnosztikával. Részt vettem olyan napjainkban is zajló kutatásokban, amelyek hátterében többek között a Fourier-transzformáció áll. Szakdolgozatom célja az volt, hogy jobban megismerjem ennek a mérnöki alkalmazásnak a matematikai alapjait és egy grafikus felületet hozzak létre, melynek segítségével a különböző frekvenciájú hangjeleket lehet elemezni.

A Fourier-sorok elméletének múltja hosszú évszázadokra tekint vissza. A XVIII. század során egy mechanikai probléma körül kialakult vita indította el a trigonometrikus sorok elméletének kialakulását. A témával a kor legnagyobb elméi, így például Bernoulli, Euler és Fourier foglalkoztak.

A digitális jelfeldolgozás során a Fourier-transzformáció alkalmazásával a vizsgált jel különböző tulajdonságainak elemzésére nyílik lehetőség. Szakdolgozatomban determinisztikus, periodikus jelek matematikai tanulmányozásával és ezek mérnöki alkalmazásaival foglalkozom.

2. Fourier-sorok elmélete

2.1. Történeti háttér

A trigonometrikus sorok elméletének kiindulópontjául egy mechanikai probléma körül kialakult vita tekinthető, amely a XVIII. század közepén D'Alembert, Euler és Bernoulli között folyt le. Ez a probléma a rezgő húr problémája volt: a két végén kifeszített, l hosszúságú homogén rezgő húr alakjának meghatározása egy tetszés szerinti t időpontra, feltételezve, hogy a húr tranzverzális síkrezgést végez. A mechanika általános mozgásegyenletéből a következő másodrendű állandó együtthatós parciális differenciálegyenlet adódik:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

$a^2 = \frac{p}{\varrho}$, p jelöli a feszítőerőt és ϱ pedig a húr (állandó) vonalmenti sűrűségét.

Ennek a differenciálegyenletnek első általános megoldását D'Alembert közölte 1747-ben:

$$u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at),$$

ahol φ és ψ tetszőleges függvények lehetnek; ez az eredmény könnyen adódik abból, hogy x és t helyett a $\xi = x + at$,$\eta = x - at$ új független változók bevezetésével a differenciálegyenlet a következő alakra hozható:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

ennek pedig az általános megoldása $u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$.

Az (1) differenciálegyenlet mellett u-nak még az

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \tag{2}$$

homogén Dirichlet-féle peremfeltételt is ki kell elégítenie, mivel a húr két végpontja rögzítve van.

Vagyis

$$\varphi(at) = -\psi(-at), \varphi(l+at) = -\psi(l-at);$$

az elsőből az következik, hogy

$$\psi(z) = -\varphi(-z),$$

a másodikból pedig ennek felhasználásával következik, hogy

$$\varphi(l+at) = \varphi(at-l), \text{azaz} \varphi(z) = \varphi(z+2l).$$

D'Alembert ezek alapján kimondja: a rezgő húr problémájának általános megoldása

$$u(x,t) = \varphi(at+x) - \varphi(at-x),$$

ahol $\varphi(z)$ tetszőleges, $2l$ periódussal rendelkező függvény.

Bernoulli dolgozata 1753-ban jelent meg, amely egészen más módon tárgyalja a kérdést. Már őelőtte Taylor észrevette, hogy az

$$u(x,t) = sin\frac{n\pi x}{l}cos\frac{n\pi at}{l}, n = (1,2,...)$$

függvények az (1) differenciálegyenletnek a (2) peremfeltételeket kielégítő partikuláris megoldásai, és ezzel magyarázta azt a fizikai tényt, hogy az l hosszúságú húr az alaphangján kívül az $\frac{l}{2}, \frac{l}{3}, \frac{l}{4}, ...$ hosszúságú húrok alaphangjait (az ún. felhangokat) is adni képes. Ismeretes volt az a fizikai tény is, hogy a húr által keltett tetszés szerinti hang a húr alap- és felhangjaiból tehető össze.

Új lendületet kapott a probléma Fourier-nak a hővezetési elméletével foglalkozó, 1807-től kezdve közölt dolgozatai révén. Újra felmerült tetszőleges függvények trigonometrikus sorokkal való előállításának kérdése. Fourier (hasonlóképpen, mint Bernoulli) azt állítja, hogy ilyen előállítás lehetséges. Már Euler észrevette azt, hogy az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \tag{3}$$

trigonometrikus sor összegét $f(x)$-szel jelölve, az együtthatók $f(x)$ segítségével így fejezhetők ki:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx; \tag{4}$$

ezek a képletek a sornak $\cos nx$-szel, illetve $\sin nx$-szel való átszorzása és tagonként való integrálása útján adódnak, felhasználva a trigonometrikus rendszer ortogonalitását és feltéve, hogy a sort szabad tagonként integrálni, de ebben Euler idejében nem kételkedtek. Mindenesetre érvényesek ezek a képletek, ha a (3) sor például egyenletesen konvergens, mert akkor a $\cos nx$-szel és a $\sin nx$-szel átszorzott sorok is egyenletesen konvergensek, így valóban szabad őket tagonként integrálni.

Fourier szintén eljutott ezekhez a képletekhez, és észrevette azt, hogy a jobb oldalon álló integrálok tetszőleges f függvényre képezhetők, azt állította, hogy az a (3) trigonometrikus sor, amelynek együtthatói az adott f függvényből a (4) képletek szerint képezzük, a $0 \leq x \leq 2\pi$ szakaszon előállítja az f függvényt.

Még számos egyéb fizikai probléma során felmerült a Fourier-sorfejtés gondolata, ami az [1] hivatkozásban szereplő könyvben részletesen leírva megtalálható.

2.2. A trigonometrikus rendszer teljessége L^2 függvénytérben

Az előző fejezetben láttunk egy példát arra, hogy milyen fizikai folyamat során merült fel annak a kérdése, hogy egy f függvényt hogyan lehet ún. trigonometrikus polinomokkal közelíteni. A konvergencia kérdését későbbi fejezetben fogjuk megvizsgálni.

Most vizsgáljuk meg a trigonometrikus rendszer teljességét. Nézzük a következő ortogonális függvényrendszert:

$$1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx), \ldots; \tag{5}$$

az alapintervallum (figyelembe vesszük, hogy ezek a függvények 2π szerint periodikusak) bármely 2π hosszúságú intervallum lehet, például $(-\pi, \pi)$, vagy $(0, 2\pi)$.

Mielőtt tovább folytatnánk a teljesség vizsgálatát, tekintsünk át néhány funcionálanalízisbeli definíciót.

1. Definíció. *Legyen H vektortér $\mathbb{C}$ felett. Egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $H \times H \to \mathbb{C}$ leképezést skalárszorzatnak nevezünk, ha bármely $x, y \in H$ esetén*
(i) az $x \to \langle x, y \rangle$ leképezés lineáris funkcionál,
(ii) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$,
(iii) $\langle x, x \rangle > 0$, kivéve ha x=0.

1. Megjegyzés. *Norma értelmezése skalárszorzattérben: ha $x \in H$, akkor legyen*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

ennek neve a skalárszorzat által indukált norma.

2. Definíció. *A $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ skalárszorzatteret Hilbert-térnek nevezzük, ha H az indukált normával teljes.*

Az $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető: $\int_\Omega |f|^2 \, d\lambda < \infty\}$, azaz egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon négyzetesen Lebesgue-integrálható függvények tere Hilbert-tér az

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_\Omega f \overline{g} \, d\lambda$$

skalárszorzással. Ha $f \in L^2(\Omega)$ és $\langle f, f \rangle_{L^2} = 0$, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt.

Az (5) rendszer ortogonalitásáról meggyőződhetünk, ha a

$$\cos(mx) \cdot \cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin(mx)\cdot\cos(nx) = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$
$$\sin(mx)\cdot\sin(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m+n)x],$$

azonosságokat felhasználjuk. A rendszer azonban nem normált, ugyanis

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

A megfelelő normált rendszer tehát

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Azt állítjuk, hogy a trigonometrikus rendszer az $L^2(-\pi,\pi)$ térben teljes, azaz ha egy négyzetesen integrálható f függvény ortogonális a trigonometrikus rendszer minden elemére, akkor majdnem mindenütt $f(x) = 0$.

Mivel véges szakaszon a négyzetes integrálhatóságból következik a közönséges integrálhatóság, fordítva azonban nem[1], ezért a fenti állításnál többet mond ki a következő tétel:

1. Tétel. *Ha f függvény a $(-\pi,\pi)$ szakaszon Lebesgue-integrálható és*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{6}$$

akkor majdnem mindenütt f(x)=0.

A bizonyítás során felhasználjuk Weierstrass második approximációs tételét:

2. Tétel. *Minden 2π szerint periodikus folytonos függvény az egész számegyenesen tetszés szerinti pontosságra megközelíthető trigonometrikus polinomokkal.*

Az utóbbi tétel bizonyítása az [1] hivatkozásban szereplő könyv 72. oldalán megtalálható.

Térjünk vissza az előbbi tétel bizonyítására.

Bizonyítás: Először vegyük észre, hogy ha az adott f függvény mellett az

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) = 0 \tag{7}$$

[1] példa erre a $|x|^{\frac{1}{2}}$ függvény

egyenlőség fennáll valamely G függvényosztály minden $g(x)$ elemére, akkor fennáll minden olyan g függvényre is, amely majdnem mindenütt határértéke a G osztályba tartozó függvények valamely korlátos sorozatának. Ez következik a Lebesgue-féle konvergenciatételből, hiszen ha $g_n(x) \to g(x)$ majdnem mindenütt, $g_n \in G$, $|g_n(x)| \leq M$, akkor $f(x)g_n(x) \to f(x)g(x)$ majdnem mindenütt és $|f(x)g_n(x)| \leq M|f(x)|$, tehát $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = 0$.

Mármost (6)-ból azonnal következik, hogy (7) teljesül, ha $g(x)$ egy

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

trigonometrikus polinommal egyenlő. Weierstrass második approximációtétel szerint minden olyan függvény, amely a zárt $[-\pi, \pi]$ intervallumon folytonos és a végpontokban egyenlő értékeket vesz fel (vagyis amely 2π szerint periodikus folytonos függvénnyé folytatható), trigonometrikus polinomok egyenletesen konvergens (és ennélfogva korlátos) sorozatának a határértékeként állítható elő.

Viszont minden lépcsősfüggvényhez megszerkeszthető a $g_n(-\pi) = g_n(\pi)$ feltételnek eleget tevő folytonos függvények $\{g_n(x)\}$ korlátos sorozata, amely majdnem mindenütt (ha a lépcsősfüggvény véges sok ugrási helyét és a végpontokat esetleg kivéve) konvergál a lépcsőfüggvényhez. Végül minden korlátos, mérhető $g(x)$ függvényhez ($m \leq g(x) \leq M$) található lépcsősfüggvények olyan korlátos sorozata, amely majdnem mindenütt $g(x)$-hez tart. (A mérhetőség definíciója szerint, van majdnem mindenütt $g(x)$-hez tartó $\{\varphi_n(x)\}$ lépcsősfüggvénysorozat és feltehető, hogy ($m \leq g(x) \leq M$), különben $\varphi_n(x)$-et a $[m \cup \varphi_n(x)] \cap M$ lépcsősfüggvénnyel pótolnánk.)

Ennélfogva (7) minden korlátos mérhető $g(x)$ függvényre fennáll, speciálisan a

$$g(x) = sgn f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)/|f(x)|, & \text{ha } f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{ha } f(x) = 0 \end{array} \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{|f(x)| + \frac{1}{n}}$$

függvényre. Tehát

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx = 0,$$

ebből következik, hogy majdnem mindenütt $f(x) = 0$.

Az

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x, \ldots \quad \text{ún. koszinusz-rendszer}$$

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x, \ldots \quad \text{ún. szinusz-rendszer}$$

külön-külön a $(-\pi, \pi)$ intervallumon nem alkotnak teljes ortogonális rendszert. Ezzel szemben a $(0, \pi)$ intervallumon mindkét rendszer teljes ortogonális rendszer. Az ortogonalitás következik abból, hogy a $\cos mx \cdot \cos nx$, $\sin mx \cdot \sin nx$ szorzatok páros

függvények lévén, a $(0,\pi)$-n vett integráljuk fele a $(-\pi,\pi)$-n vett integráljuknak, így az $m \neq n$ esetben ez az integrál 0-val egyenlő. Másrészt

$$\int_0^\pi \cos^2 nx\,dx = \int_0^\pi \sin^2 nx\,dx = \frac{\pi}{2},$$

így egyik rendszer sem normált. A teljességet a trigonometrikus rendszerére való visszavezetéssel bizonyítjuk. Ha ugyanis az $f \in L^2(0,\pi)$ függvény ortogonális $(0,\pi)$-n a koszinusz-rendszer minden elemére, akkor az f értelmezését az egész $(-\pi,\pi)$-re úgy kiterjesztve, hogy a függvény páros legyen, a kapott függvény $(-\pi,\pi)$-n ortogonális lesz az egész trigonometrikus rendszerre:

$$\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx\,dx = 2\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx\,dx = \int_0^\pi (f(x)-f(-x))\sin nx\,dx = 0,$$

így f majdnem mindenütt 0-val egyenlő $(-\pi,\pi)$-n, tehát $(0,\pi)$-n is. A szinusz-rendszer esetében hasonlóképpen járhatunk el azzal a különbséggel, hogy most az f függvényt páratlan függvénnyé terjesztjük ki.

2.3. Fourier-sor L^2 függvénytérben

Az előző fejezetben beláttuk a trigonometrikus rendszer teljességét.

3. Tétel. *A $(-\pi,\pi)$ intervallumon értelmezett, valós értékű, négyzetesen integrálható f függvényhez rendeljük hozzá az*

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \dots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \dots \tag{8}$$

sort, amelynek együtthatóit $f(x)$-ből a következő képletekkel számítjuk ki:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx\,dx \ \ (n=0,1,\dots)^2$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx\,dx \ \ (n=1,2,\dots)$$

ez a sor az f függvény Fourier-sora, ennek $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ együtthatói pedig az f függvény Fourier-együtthatói.

A (8) Fourier-sor négyzetintegrálra f-hez tart, azaz

$$\int_{-\pi}^\pi \Big[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k\cos kx + b_k\sin kx)\Big]^2 dx \to 0 \ (n\to\infty).$$

[2] A sor első tagját azért jelöljük $\frac{a_0}{2}$-vel, hogy az $a_n$re vonatkozó képlet az n=0 esetben is érvényben maradjon.

Ha a sorba fejtett f függvény a $(-\pi, \pi)$ intervallumon páros, akkor a Fourier-sorában az összes szinuszegyüttható 0-val egyenlő, így a sor tiszta koszinuszsorrá redukálódik, ha pedig a függvény páratlan, akkor a sor tiszta szinuszsorrá redukálódik.

Mivel minden $f \in L^2(0, \pi)$ függvény kibővíthető a $(-\pi, \pi)$ intervallumra úgy is, hogy páros legyen, és úgy is, hogy páratlan legyen, ezért minden $f \in L^2(0, \pi)$ függvényhez hozzárendelhető egy

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

tiszta koszinuszsor az

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

együtthatókkal, és egy

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

tiszta szinuszsor a

$$b_n = \frac{2}{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

együtthatókkal. Mindkét sor a $(0, \pi)$ intervallumon négyzetintegrálra az f függvényhez tart. Tekintettel arra, hogy a koszinusz- és a szinusz-rendszer a $(0, \pi)$-n teljes ortogonális rendszerek, ezekhez az eredményekhez közvetlenül is eljuthattunk volna.

Nézzünk egy példát Fourier-sorfejtésre:

1. Feladat. *Legyen az intervallum:* $[0, 2\pi)$. *Fejtsük Fourier-sorba az*

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0, \pi] \\ 2\pi - x, & \text{ha } x \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

függvényt és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor f-et.

Megoldás: Az f függvény Fourier sora a következő:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

Ez a Fourier-sor a 3. Tétel szerint minden $x \in [0, 2\pi)$ pontban konvergens és előállítja f-et.

3. Frekvencia-analízis

Az eddig megismert Fourier-sorok elmélete után térjünk rá az alkalmazásukra. Ebben a fejezetben megismerjük a harmonikus rezgőmozgást, majd a folytonos és diszkrét Fourier-transzformáció bemutatása után a mintavételezés folyamatával ismerkedünk meg. A mintavételezett jel diszkrét Fourier-transzformáltját véve az időtartományból áttérünk a frekvenciatartományba. A frekvencia-analízis ez utóbbi tartományban (spektrumban) vizsgálja a jel viselkedését.

3.1. Harmonikus rezgőmozgás

A rezgések egyik nagy csoportját a mechanikai rezgések alkotják. A mechanikai rezgés (például a belső égésű motorok dugattyújának mozgása vagy a rugóra erősített testek rezgése) mindig valamilyen mozgás, ezért ilyen esetben rezgőmozgásról beszélünk. Ha például egy csavarrugóra felfüggesztett testet, a rugó hossztengelyének irányában kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből és elengedjük, akkor a test egy egyenes szakasz mentén rezeg. Az így rezgő test áthalad azon a helyen, ahol nyugalomban van, eléri a túloldali szélső helyzetet, majd visszatér a kiindulási pontjába, és ezt a mozgásszakaszt ismételi.

A rezgőmozgást tartósan végző test ugyanazon a pályaszakaszon sokszor fut végig. Közben állandóan változik a test egyensúlyi helyzetétől mért pillanatnyi távolsága. Ennek előjeles értéket nevezzük kitérésnek. A legnagyobb kitérés nagysága az amplitúdó.

A rezgőmozgások közül a harmonikus rezgőmozgással fogunk foglalkozni. Ugyanúgy a kitérés és az amplitúdó jellemző mennyiségei. Mivel ez a mechanikai mozgás periodikus, így értelmezhető a periódusidő[3] (jele: T) és a frekvencia fogalma[4] (jele: $f_r = 1/T$).

Az 1. ábrán látható, hogy a rezgő test kitérése minden pillanatban megegyezik a körmozgást végző test helyvektorának rezgésirányú összetevőjével, ezért

$$y = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t = A \cdot \sin 2\pi f_r t,$$

ahol $\omega = 2\pi f_r$. Az ω jelöli a körfrekvenciát, ami a rezgőmozgás frekvenciájának 2π-szerese. A $\varphi = \omega t$ szöget fázisszögnek nevezzük. A kitérés irányát a $\sin \omega t$ előjele adja meg.

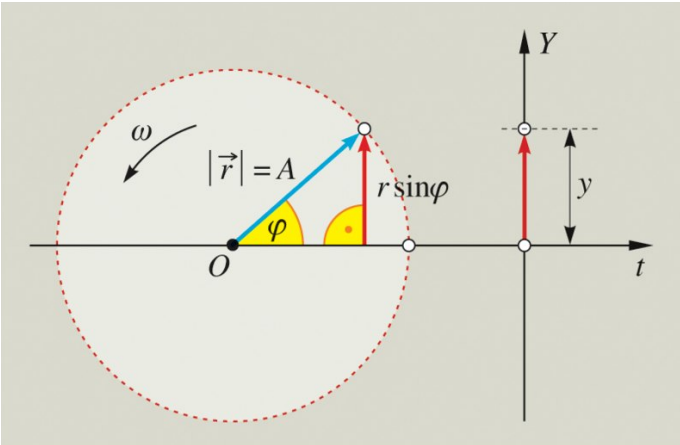
A következő másodrendű differenciálegyenlettel is ki lehet fejezni a harmonikus rezgőmozgást, rögzített ω esetén:

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0,$$

melynek megoldása: $f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$, ahol φ_0 a kezdeti fázisszöget jelöli.

[3] Az egy teljes rezgés létrejöttéhez szükséges idő.

[4] Megmutatja az egységnyi idő alatti teljes rezgések számát.



1. ábra. Harmonikus rezgőmozgás: ω: körfrekvencia; φ: fázisszög

3.2. Fourier-sor

3.2.1. Trigonometrikus polinomokkal leírt Fourier-sor

A 2.1. fejezetben láttuk, hogy minden periodikus függvényt különböző amplitúdójú- és fázissúlyozású, harmonikus rezgésre lehet felbontani. Az előző fejezetben megismert harmonikus rezgőmozgást is periodikus függvények segítségével lehet modellezni. Az $f(t)$ periodikus folyamat, vagyis ha periódusa T ($T \neq 0$), akkor $f(t) = f(t + nT)$, $n \in (-\infty, \infty)$, egyértelműen előállítható olyan megfelelő amplitúdókkal és fázisállandókkal bíró harmonikus rezgések összegeként, amelyek körfrekvenciái $\omega_0 = 2\pi/T$ és ennek egész számú többszörösei:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(\omega_k t), \tag{9}$$

$$\omega_k = k \cdot \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \cdot k = 2\pi f_{r_0} k$$

Ebben a sorfejtésben az egyes diszkrét rezgések amplitúdóit és fázisait az a_k és b_k Fourier-együtthatók adják meg. Ezek az alábbi integrálokból számíthatók ki:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt \tag{10}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt \tag{11}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt \tag{12}$$

Az a_0 Fourier-együttható az $f(t)$ időfüggvény egy T periódusra átlagolt aritmetikai középértékének felel meg, amely a jel középértékét adja meg.

Ha polárkoordináták segítségével írjuk fel a (9) formulát, akkor a következő képletet kapjuk:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t - \varphi_k), \tag{13}$$

ahol

$$A_k = \frac{a_k}{\cos\varphi_k} = \frac{b_k}{\sin\varphi_k}$$

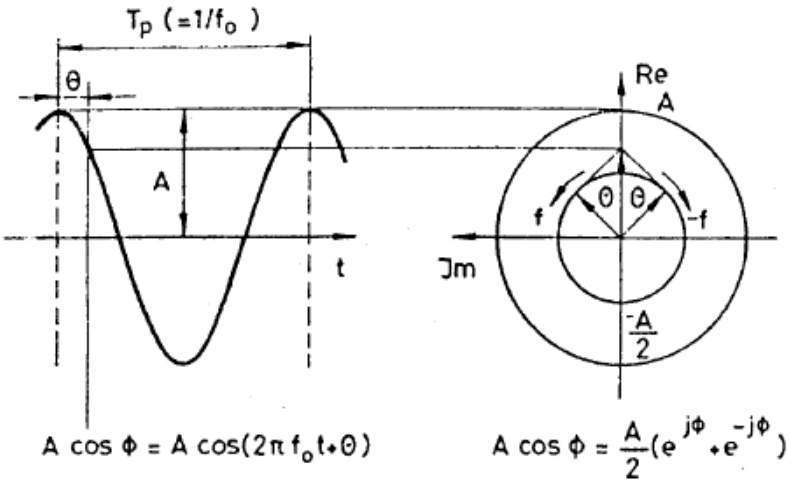
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \tag{14}$$

Későbbi fejezetekben látni fogjuk, hogy a mintavételezett jel kiértékelése során a fenti (14)-ben szereplő képletpár fontos adatokat hordoz magában.

3.2.2. Fourier-sor komplex alakja

A trigonometrikus polinomokkal felírt Fourier-sor ábrázolása koordináta-rendszerben zavaró lehet abból a szempontból, hogy az idő és a fázis ábrázolva van az x tengely mentén. Ezért célszerűbb a Fourier-sor komplex alakját használni jelanalízis során.

A 2. ábrán látható a (13) képlet szerinti koszinuszos jel komplex síkban két,



2. ábra. Valós harmonikus rezgés ábrázolása komplex síkban [5]

fél amplitúdójú és ellentétes irányban forgó vektorral írható le. Ezen az ábrán a

kezdeti fázis szög θ-val egyenlő. Az exponenciális alakot és a (9) képlet szerint felírt trigonometrikus alakot az Euler-formula kapcsolja össze:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$$

Ezek szerint a komplex alak a következő kifejezéssel egyenlő:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{i\omega_k t},$$

ahol $C_k \in \mathbb{C}$ amplitúdótényező, amely az ismert a_0, a_k, b_k Fourier együtthatókat helyettesíti. A fázisszöget a következő képlettel lehet kiszámolni:

$$\operatorname{tg}\varphi_k = \frac{Im(f_k(t))}{Re(f_k(t))}$$

A C_k komplex együttható és az a_k, b_k valós együtthatók kapcsolatát a következő kifejezés adja:

$$C_k = \begin{cases} \frac{a_k - i \cdot b_k}{2}, & \text{ha } k > 0 \\ \frac{a_{-k} + i \cdot b_{-k}}{2}, & \text{ha } k < 0 \\ a_0, & \text{ha } k = 0 \end{cases} \tag{15}$$

ahol $\overline{C_k} = C_{-k}$, $(k = 0, 1, 2, \dots)$. A (10)-(12) és a (15) képletek segítségével a Fourier-sorban szereplő harmonikus rezgések amplitúdói egyetlen összefüggés segítségével kiszámíthatók:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega_0 t}\, dt \tag{16}$$

Ezáltal egyszerűbben lehet számolni az amplitúdót ellentétben a valós együtthatókkal, ahol három egyenletből kapjuk meg a kívánt értéket.

A (16)-ban szereplő komplex együttható diszkrét ω_k értékeknél, vagyis az alapfrekvencia egész számú többszöröseinél van definiálva.

3.3. Fourier transzformáció

3.3.1. Folytonos Fourier-transzformáció

Eddig periodikus függvények esetében vizsgáltuk a Fourier-sorokat. Mi történik akkor, ha az egész számegyenesre kiterjesztjük a függvényt? Vagyis, ha az általános periodikus jel T periódus idejét végtelenhez közelítjük.

Mielőtt rátérnék a diszkrét Fourier-transzformációra, tekintsünk át néhány általános definíciót a folytonos esettel kapcsolatban.

3. Definíció. *Az $L^1(\mathbb{R})$ téren értelmezett $f \mapsto \widehat{f}$,*

$$\widehat{f}(x) := (\mathcal{F}f)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i2\pi xt}\,dt \tag{17}$$

leképezést Fourier-transzformációnak, az $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényt az f Fourier-transzformáltjának nevezzük.

Jelölje $C_0(\mathbb{R})$ a valós számokon értelmezett, végtelenben eltűnő, folytonos függvények halmazát.

4. Tétel. *A Fourier-transzformáció egy $L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ korlátos, lineáris operátor, amelyre*

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$$

teljesül.

5. Tétel. *Legyen f olyan függvény melyre $f,\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Ekkor majdnem minden x-re teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$f = \widetilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\widetilde{\mathcal{F}}f$$

$$(\widetilde{\mathcal{F}}f)(x) = (\mathcal{F}f)(-x)$$

A tétel szerint az $\widetilde{F}$ operátort a Fourier-transzformáció inverzének nevezzük. Az előző két tétel bizonyítása megtalálható a [7] hivatkozásban szereplő jegyzetben.

Az $L^1(\mathbb{R})$ lineáris tér nem zárt a függvények pontonkénti szorzására nézve. Ezért ebben a függvénytérben bevezetjük a konvolúció fogalmát.

1. Állítás. *Bármely $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ függvény esetén, majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik és véges a következő integrál*

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt \tag{18}$$

Bizonyítás: Minthogy a $(t, x) \to f(t)g(x-t)$ kétváltozós függvény a szorzat mértéktéren mérhető, ezért elég azt megmutatni, hogy a (18)-ban szereplő integrálban a függvények helyett azok abszolút értékét véve, majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ pontban véges értéket kapunk. Ennek igazolására tekintsük az így kapott függvény számegyenesen vett μ mérték szerinti integrálját és alkalmazzuk a Fubini-tételt. Ekkor a μ eltolásinvarianciája miatt

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|\,d\mu(t) \Big)\,d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)| \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |g(x-t)|\,d\mu(x) \Big)\,d\mu(t) =$$

$$= \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^1} < \infty$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $(f * g)(x)$ létezik és véges. $\square$

A (18)-ban szereplő kifejezést függvények konvolúciójának nevezzük. A konvolúcióképzés művelete asszociatív, kommutatív és az összeadásra nézve disztributív.

6. Tétel. *Minden $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ függvényre*

$$\mathcal{F}(f * g)(x) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g).$$

A következő tételben összefoglaljuk a Fourier-transzformált néhány tulajdonságát. Ehhez szükséges bevezetni a következő műveleteket:

$$\begin{array}{rcll} \tau_h f(x) & = & f(x+h) & \text{transzláció} \\ \nu_h f(x) & = & hf(x) & \text{moduláció} \\ \delta_h f(x) & = & f(hx) & \text{dilatáció} \end{array}$$

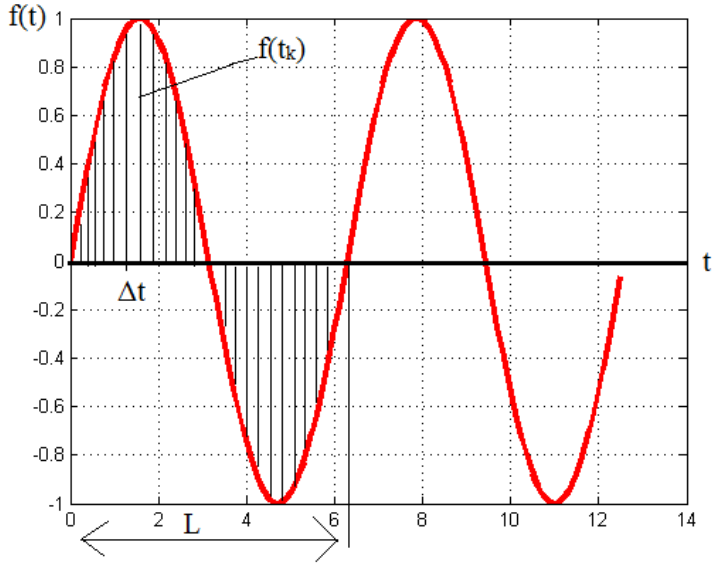
7. Tétel. *Legyen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Ekkor*
(1) $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$
(2) Ha f differenciálható és $f' \in L^1(\mathbb{R})$, akkor $\mathcal{F}(f')(\lambda) = i\lambda\mathcal{F}(\lambda)$.
(3) $\mathcal{F}(\tau_h f) = \nu_h(\mathcal{F}f)$
(4) $\mathcal{F}(\nu_h f) = \tau_{-h}(\mathcal{F}f)$
(5) $\mathcal{F}(\delta_h f) = \frac{1}{|h|} \cdot \delta_{\frac{1}{h}}(\mathcal{F}f)$

3.3.2. Diszkrét Fourier-transzformáció

A jelfeldolgozás során nem használhatunk folytonos Fourier-transzformációt, mivel adatrögzítéskor véges diszkrét adatsort kapunk. Mintavételezésnek hívjuk azt az eljárást, mikor az időben folytonos jelet diszkrét idejű jelsorozattá alakítjuk. A mintavételezés egyenletes időközönként történik. Ezt az időt nevezik mintavételi időnek. Ennek reciproka a mintavételi frekvencia.

Tekintsünk egy L szerint periodikus folytonos függvényt a `3.ábra` szerint, amelyből Δt egyenlő időközönként N darab diszkrét pontot mintavételezünk. Az így kapott diszkrét pontsorozat hordoz minden információt a folytonos jelről, amennyiben betartjuk a Shannon mintavételi törvényt, amelyet a következő fejezetben fogok bemutatni. A mintavételekhez tartozó értékek: f_k, $(k = 0, \ldots, N-1)$. A Fourier-sort csak közelítőleg tudjuk meghatározni, így a (16) képletben szereplő együttható a következőképpen alakul:

$$C_n \sim \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t f_k e^{-2i\pi n \frac{1}{L} k \Delta t}$$



3. ábra. N darab ponton mintavételezett függvény

$\Delta t = \frac{L}{N}$ helyettesítéssel egyszerűbb alakra hozható a fenti összefüggés:

$$C_n \sim \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

Ezek után definiáljuk a diszkrét Fourier-transzformáltat:

4. Definíció. *A mintavételezett jel diszkrét Fourier-transzformáltja a következő módon számítódik:*

$$\mathcal{D}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \tag{19}$$

ahol $\mathcal{D}_n$ az n. komponens komplex spektrumértéke, N a minták száma és f_k az n. bemeneti minta.

A (19)-ben szereplő egyenlőséget mátrixszorzásként is felírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_0 \\ \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{D}_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \tag{20}$$

ahol

$$\omega = e^{-2\pi i/N}$$

5. Definíció. *Inverz Fourier-transzformáció képlete:*

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{D}_n e^{i\frac{2\pi}{N}kn} \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

A DFT műveletigénye $\mathcal{O}(N^2)$ nagyságrendű. Az ún. gyors Fourier-transzformáció (FFT) algoritmus használata felgyorsítja a (20)-ban szereplő mátrixszorzást, ami $\mathcal{O}(N \log N)$ idő alatt végezhető el.

3.4. Mintavételezés

A Fourier-sorok és a Fourier-transzformáció egyik alkalmazási területe a digitális jelfeldolgozás. Ezen belül két nagyobb területtel fogunk foglalkozni a továbbiakban. Az egyik téma a híradástechnikában is gyakori alkalmazás, a hanghullámok vizsgálata. A másik terület pedig a rezgésanalízis, amit a különböző mechanikai gépek rezgésdiagnosztikája során használnak. Mindkét területnek az a kulcskérdése, hogyan lehet időben folytonos jelet diszkrét jelsorozattá alakítani úgy, hogy ebből a jelből újból elő lehessen állítani az eredeti folytonos jelet.

A feladat kettős: egyrészt a folytonos jelet időben kell diszkretizálni, azaz adott időközönként megfigyelni az aktuális jelértéket. Ezt nevezzük mintavételezésnek. A legfontosabb kérdés, hogy milyen gyakorisággal kell a jelet mintavételezni ahhoz, hogy az eredeti folytonos jel visszaállítható legyen.

3.4.1. Mintavételezett jel diszkrét Fourier-transzformáltja

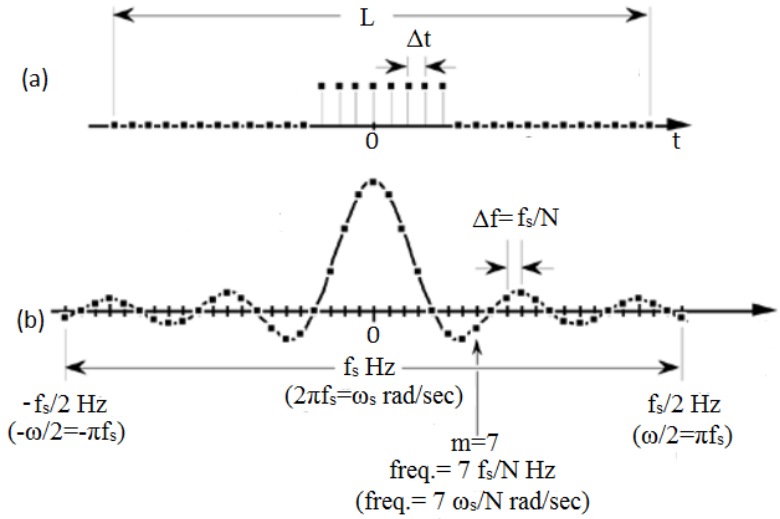
Az előző fejezetben megismert időtartománybeli jelöléseket felhasználva nézzük meg, hogy a frekvenciatartománybeli mintavételi paraméterekre milyen összefüggéseket kapunk. A `4.ábrán` láthatjuk a mintavételezési jelöléseket idő- és frekvenciatartományban.

Egy folytonos jelet L ideig f_s mintavételi frekvenciával mintavételezzük. Így N darab diszkrét adatértéket kapunk:

$$N = \frac{L}{\Delta t} \qquad \Delta t = \frac{1}{f_s}$$

A jel L szakaszának hosszúságát megfigyelési időnek vagy ablakszélességnek nevezzük. A (19) képlet a következőképpen módosul:

$$\mathcal{D}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{D}_n = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-i2\pi nk\Delta t}$$



4. ábra. Mintavételi paraméterek: (a) idő- és (b) frekvenciatartomány esetén

mivel a transzformációt nem egy egység, hanem L hosszúságú intervallum értékeire végezzük el. Vagyis:

$$\frac{1}{N} \qquad \rightarrow \qquad \frac{L}{N} = \Delta t$$

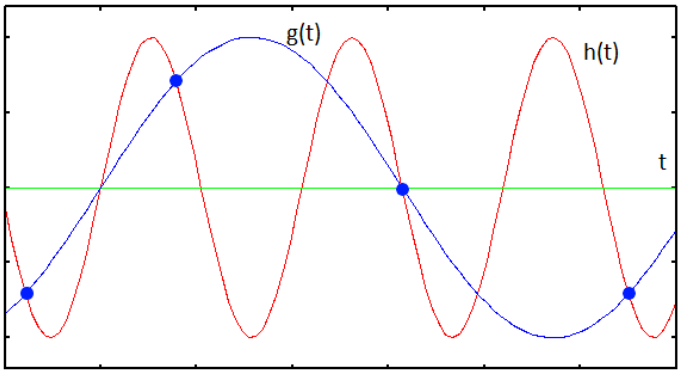
Az eddigi összefüggések alapján a frekvenciatartományban a mintavételezési távolság:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{L}$$

Ez utóbbi összefüggés alapján, ha a frekvenciák sűrűbb mintavételezése a célunk, akkor az időtartományban vett L megfigyelési időt kell nagyobbra vennünk. Ezt az összefüggést használja fel az ún. *zero-padding* módszer, amely szerint a mintavételezett intervallumot nullákkal egészítjük ki, ezzel növelve L hosszúságát.

Abban az esetben, ha minél nagyobb mintavételi frekvenciát szeretnénk, akkor az $f_s = 1/\Delta t$ összefüggés alapján annál kisebb mintavételi időt kell választanunk az időtartományban. Ha nem megfelelő mintagyakoriságot választunk, akkor ún. alias-hatás (spektrum átlapolódás) lép fel. A `5.ábrán` látható, hogy a mintavételezési pontok a kisebb frekvenciájú $g(t)$ függvényt rekonstruálják. Akkor kapnánk vissza a nagyobb frekvenciájú $h(t)$ függvényt, ha sűrűbben mintavételezzük a jelet. Tehát a mintavételi idő csökkentésével az alias-hatást tudjuk mérsékelni.

Fontos megjegyezni, hogy a mintavételi folyamat során a diszkrét Fourier-transzformációt használva a frekvenciatérben a mintavételezett jel periodikus lesz, függetlenül attól, hogy az eredeti megfelelője periodikus frekvenciaspektrumot eredményez-e vagy sem.[8]



5. ábra. Alias-hatás jelensége.

3.4.2. Mintavételezett függvény rekonstruálása

Az 2π szerint periodikus, egyenletes időközönként mintavételezett függvény visszaállításához használjuk a trigonometrikus interpolációt. Keressük azt a trigonometrikus polinomot, ami a legjobban illeszkedik a diszkrét adatsorra. Ez a polinom adott periódusú szinusz és koszinusz függvények lineáris kombinációja. A (9)-ben már definiált trigonometrikus polinomokkal felírt Fourier-sort felhasználva kapjuk a következő K-adfokú $p(t)$ polinomot és a komplex alakját:

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(kx)$$

$$p(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{ikt}$$

Ez a kifejezés $2K+1$ együtthatót tartalmaz, és ezeket az együtthatókat szeretnénk meghatározni ahhoz, hogy végül megkapjuk a legjobb közelítést az N ponton áthaladó függvényre.

2. Megjegyzés. *A komplex alakban szereplő c_k együtthatók a (15)-ben szereplő kifejezés felhasználásával kaphatóak meg $a_0, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ együtthatókból.*

8. Tétel. *Adott $2K+1$ különböző pont: $t_0, \ldots, t_{2K} \in [0, 2\pi)$ és $2K+1$ érték: $y_0, \ldots, y_{2K} \in \mathbb{R}$. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott trigonometrikus polinom a következő tulajdonsággal:*

$$p_K(t_k) = y_k, \qquad k = 0, \ldots, N$$

a következő ekvidisztáns felosztáson tekintve:

$$0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < 2\pi$$

A Lagrange-féle alappolinom segítségével a trigonometrikus interpolációs polinom a következő formában adható meg, ha $N = 2K + 1$ alakú:

$$p_K(t) = \sum_{k=0}^{2K} y_k l_k(t)$$

ahol $l_k(t)$ képletének felírásához felhasználjuk a Dirichlet-féle magfüggvényt:

6. Definíció. *Dirichlet-féle magfüggvénynek nevezik a*

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{sin(n+\frac{1}{2})x}{sin(\frac{x}{2})}, \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

függvénysorozatot.

Felhasználva az előző képletet

$$D(t, N) = \frac{1}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(N-1)} \cos(kt) = \frac{\sin \frac{1}{2} Nt}{N \sin \frac{1}{2} t}, \tag{21}$$

ahol N páratlan pozitív egész szám. Vegyük észre, hogy $D(x, N)$ lineáris kombinációja az e^{it} megfelelő hatványainak, és kielégíti a következő feltételt:

$$D(t_m, N) = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq 0 \\ 1, & \text{ha } m = 0 \end{cases} \qquad m = (0, \ldots, 2K) \tag{22}$$

Az (21) és (22) feltételek egyértelműen meghatározzák az $l_k(t)$ interpolációs alappolinomot:

$$l_k(t) = D(t - t_k, N) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sin \frac{1}{2} N(t-t_k)}{N \sin \frac{1}{2}(t-t_k)}, & \text{ha } t \neq t_k \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2} Nt}{N \sin \frac{1}{2} t}, & \text{ha } t = t_k \end{array} \right\} = \frac{\operatorname{sinc} \frac{1}{2} N(t - t_k)}{\operatorname{sinc} \frac{1}{2}(t - t_k)}$$

A sinc függvény alapvető jelentőségű a jelek viszszaállításánál, egyenletes eloszlású mintavétel esetén. Két típusa van, ahogy a `(6).ábrán` is látható:

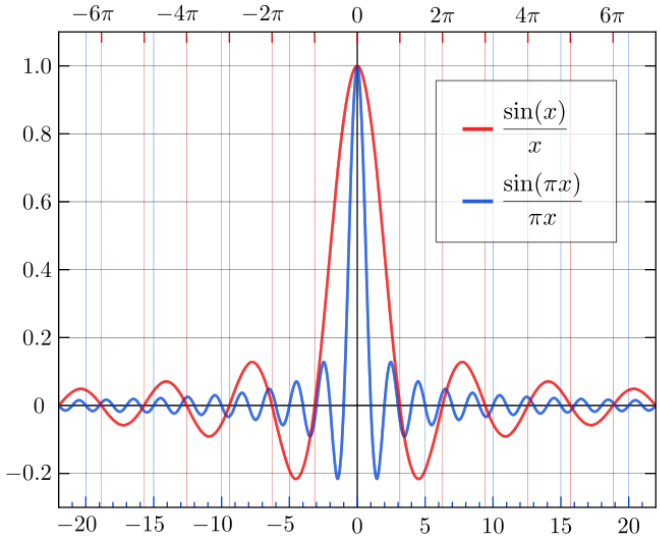
(i) normalizálatlan: $\operatorname{sinc}(x) = \frac{sin(x)}{x}$

(ii) normalizált: $\operatorname{sinc}(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}$

A függvény normalizálásának hatására a teljes számegyenesen vett határozott integrálja eggyel lesz egyenlő. A másik esetben ez az érték π-vel lesz egyenlő.

Térjünk át arra az esetre, mikor $N = 2K$ alakú. Ekkor

$$p_K(t) = \sum_{k=0}^{2K-1} y_k l_k(t), \tag{23}$$



6. ábra. *Sinc* függvények: normalizált: kék, normalizálatlan: piros

alakban keressük a trigonometrikus polinomot. A Dirichlet-féle magfüggvény a következő formában írható fel:

$$D(t,N) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N}\cos\frac{1}{2}Nt + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}N-1}\cos(kt) = \frac{\sin\frac{1}{2}Nt}{N\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}$$

Ebben az esetben is érvényes a (22) feltétel, $m = (0,\ldots,2K-1)$ esetén. Ekkor az interpolációs polinom a következő alakban írható fel:

$$l_k(t) = D(t-t_k,N) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{\sin\frac{1}{2}N(t-t_k)}{N\operatorname{tg}\frac{1}{2}(t-t_k)}, & \text{ha } t \neq t_k \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}Nt}{N\sin\frac{1}{2}t}, & \text{ha } t = t_k \end{array}\right\} = \frac{\operatorname{sinc}\frac{1}{2}N(t-t_k)}{\operatorname{sinc}\frac{1}{2}(t-t_k)}\cos\frac{1}{2}(t-t_k)$$

Láthatjuk, hogy $l_k(t)$ képletében nem szerepel $\sin\frac{1}{2}Nt$, mivel ez a függvény minden t_m pontban nullával egyenlő.

A `8.tétel` $N = 2K$ esetben is érvényben marad a megfelelő (23) alakú polinomra alkalmazva. A `2.tétel` szerint a trigonometrikus polinomokkal tetszőleges pontosságra megközelíthető az eredeti 2π szerint periodikus függvény. Tehát a mintavételezett pontokra illesztett trigonometrikus polinommal rekonstruálhatjuk az eredeti folytonos jelet.

3.5. Ablakfüggvények

A mérnöki alkalmazásokban a Shannon mintavételezési tétel adja meg arra a választ, hogy milyen gyakorisággal kell a jelet mintavételezni, hogy az eredeti folytonos jel visszaállítható legyen. A tétel szerint a mintavételi frekvenciának a jelben előforduló legnagyobb frekvencia kétszeresénél nagyobbnak kell lennie ahhoz, hogy a jel által tartalmazott információ teljes mértékben megmaradjon. Tehát ismernünk kell a mérendő jelben található legnagyobb frekvenciát ahhoz, hogy f_s értéke megfelelő legyen. Mi történik akkor, ha nem ismerjük ezt az értéket? Ekkor ún. *aluláteresztő szűrőt* kell használnunk, ami egy adott f_0-nál magasabb frekvenciájú tagokat kiszűri a jelből. Egy ideális szűrő az f_0-nál alacsonyabb frekvenciájú komponenseket átengedi, a nagyobbakat pedig kiszűri. A valóságban ilyen szűrő nem létezik, de elég nagy pontossággal közelíthető. További probléma, hogy a szűrő az áteresztő tartományban valamennyire módosítja a jelek fázisát is, vagyis egy adott frekvenciájú szinuszos jel a szűrő alkalmazása után valamekkora fáziskéséssel jelenik meg, ráadásul ez a késés függ a jel frekvenciájától is.

A gyakorlatban a véges kiterjedésű jelek sávszélessége[5] mindig végtelen, és a

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} \geq 2f_{max}$$

feltétel szerint végtelenül kicsi mintavételezési távolságot kell alkalmazzunk, ami nyilván nem teljesíthető. Ebben az esetben is aluláteresztő szűrőt alkalmazunk, vagyis a mérendő jel Fourier-transzformáltját egy véges tartójú[6] függvénnyel szorozzuk:

$$\mathcal{D}_n = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} w_k f(k\Delta t) e^{-i2\pi nk\Delta t} \tag{24}$$

ahol a w_k ún. *ablakfüggvény*. A diszkrét Fourier-transzformált eredményéül kapott $\mathcal{D}_n$ érték az eredet $f(t)$ jel folytonos Fourier-transzformáltjának becslője a $f_m = \frac{m}{N} f_s$ helyeken. Ez a becslés torzított, ami a következőképpen írható le:

$$\mathcal{D}_n = (\mathcal{D}_s * W)(f_m)$$

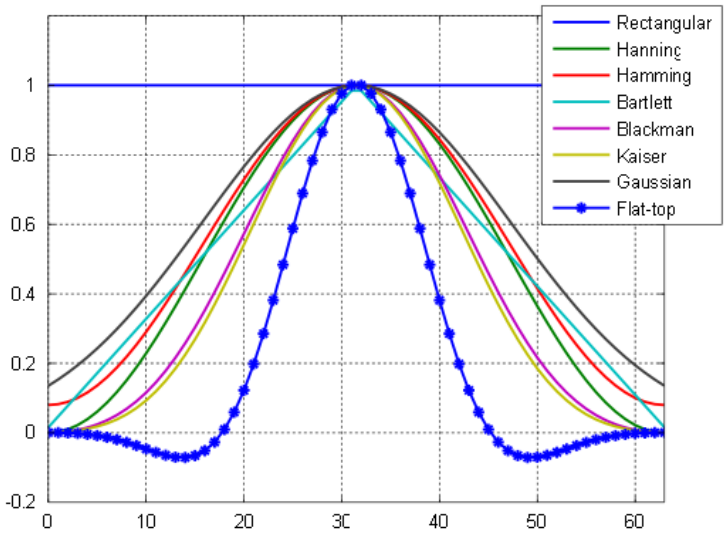
ahol $\mathcal{D}_s$ a mintavételezett jel spektruma, W pedig a folytonos ablakfüggvény Fourier-transzformáltja.

A különféle szűrők tervezésének nagy irodalma van, szakdolgozatomban nem térek ki erre a területre, hanem a szűrők hibájának csökkentésére szolgáló ablakfüggvényekkel foglalkozom. A diszkrét Fourier-transzformált a mintavételezett szakaszt periodikusnak tekinti, ennek következtében a kezdeti és befejező ugrások helyén

[5] Sávszélesség: a legnagyobb és a legkisebb frekvenciakomponens különbsége.

[6] Ahol a függvény nem nulla.

magas frekvenciás komponensek keletkeznek, amelyek a kapott spektrum eltorzítását okozzák. Ezért a már fent említett (24)-ben ablakfüggvénnyel időben leszűkítjük a mintavételezett jelet, a fennmaradó intervallumon pedig nullának tekintjük a függvényt, így kiküszöbölhetők az említett magas frekvenciás komponensek. Ezután alkalmazhatjuk a diszkrét Fourier-transzformációt. Sajnos még a csonkító függvények használata is torzítást okozhat, de már kisebb mértékben, ezért fontos, hogy megfelelő ablakfüggvényt válasszunk a mintavételezési folyamat során.



7. ábra. Fontosabb ablakfüggvények időtartományban

A `(7).ábrán` a fontosabb ablakfüggvényeket láthatjuk időtartományban nézve. Tekintsük át ezen csonkító függvényeket:

Rectangular:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |t| \leq \frac{L}{2} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Hanning:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{L}\right)\right], & \text{ha } 0 \leq t \leq L \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Hamming:

$$w(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi t}{L}\right), & \text{ha } 0 \leq t \leq L \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Bartlett:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{2t}{L}, & \text{ha } 0 \leq t \leq \frac{L}{2} \\ 2 - \frac{2t}{L}, & \text{ha } \frac{L}{2} \leq t \leq L \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Blackman:

$$w(t) = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi t}{L-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi t}{L-1}\right), & \text{ha } 0 \leq t \leq L-1 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

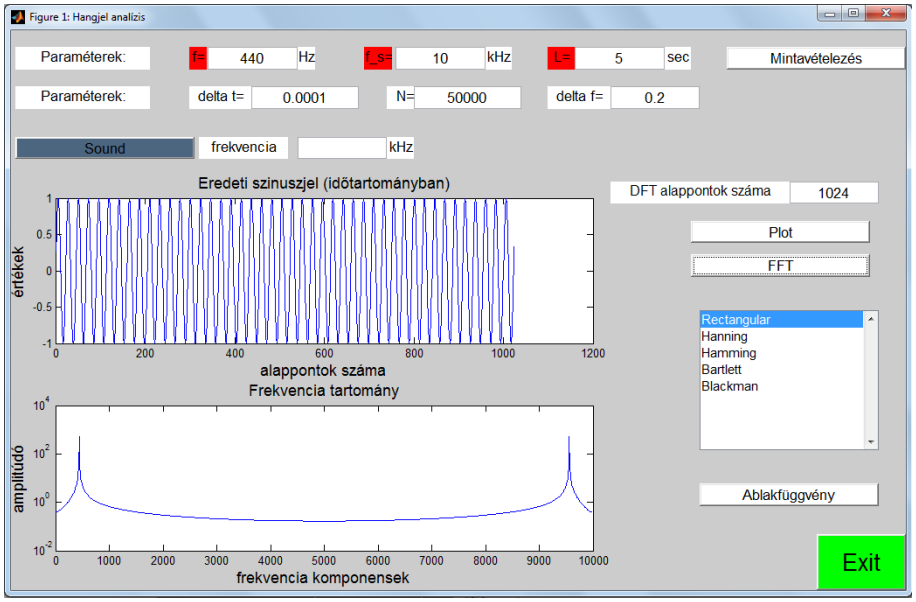
A többi ablakfüggvény képlete megtalálható a [11] hivatkozásban szereplő jegyzetben.

4. Szimulációs eredmények

4.1. Hangjelek analízise

Ebben a fejezetben bemutatom az általam *Matlab* programcsomagban készített grafikus felületet, amellyel különböző frekvenciájú periodikus hangjelek analízisét lehet elvégezni. A T periódus idő reciproka adja meg a hang frekvenciáját, mértékegysége a Hertz [Hz]. A mély hangok alacsonyabb, míg a magas hangok magasabb frekvenciájúak.

A mellékelt `CD`-n található *start.m* fájl futtatásával indul el a program. (Elérhető ezen a weboldalon: http://nagyzsuzsa4.web.elte.hu/hangjel/)



8. ábra. Grafikus felület főablaka

A `8.ábra` mutatja a grafikus felület főablakát. A legfelső sorban pirossal jelzett paramétereket előre meg kell adnunk. A *Mintavételezés* gombra kattintva pedig megjelennek a második sorban lévő paraméterek, amit a program számol ki a megadott értékekből. A harmadik sorban látható egy *Sound* gomb, amire kattintva meg is lehet hallgatni azt a hangot, amit mintavételezünk, az általunk megadott frekvencián.

Esetünkben a *normál zenei A* hangot választottam, aminek a frekvenciája 440 Hz és 5 másodpercig tartó részt vágtam ki a jelből, 10 kHz mintavételezési frekvencia mellett. A `9.ábra` tartalmazza az A hang felharmonikusait[7].

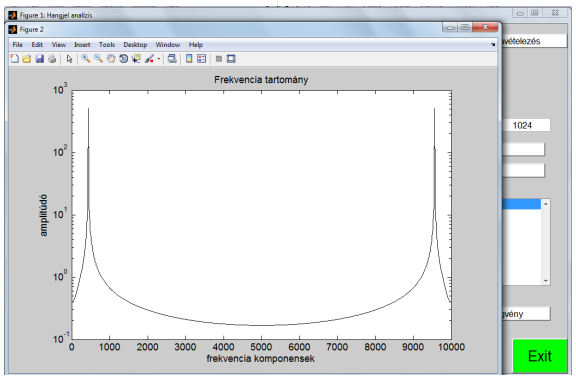
[7] A `(9)` képletben szereplő k jelöli a felharmonikusokat.

A *DFT alappontok száma* jelen esetben 1024, mivel a diszkrét Fourier-transzformált, ami a programban gyors Fourier-transzformáltat jelent, kettőhatvány mintavételezési pontszám esetén működik a leggyorsabb futási idővel. A *Plot* gomb segítségével lehet megjeleníteni a megadott pontszám szerint mintavételezett jelet időtartományban nézve.

Note	Frequency	Harmonic
low low low A	$f = 55$ Hz	fundamental
low low A	$f = 110$ Hz	second
low E	$f = 165$ Hz	third
low A	$f = 220$ Hz	fourth
middle $C^{\#}$	$f = 275$ Hz	fifth
middle E	$f = 330$ Hz	sixth
approx. middle G	$f = 385$ Hz	seventh
middle A	$f = 440$ Hz	eighth

9. ábra. Az *A* hang felharmonikusainak frekvenciái [12]

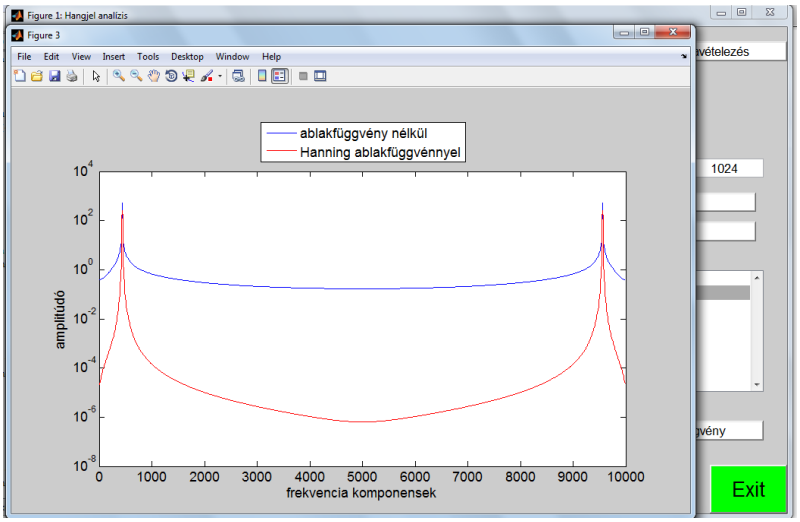
Ezt követően az *FFT* gombra kattintva lehet látni ezt a jelet frekvenciatartományban. Ekkor megjelenik egy külön 'figure' is ami ugyanezt az ábrát mutatja (`10.ábrán` láthatjuk), ami megkönnyíti a nagyítás lehetőségét, könnyebben megvizsgálhatjuk a különböző frekvenciákat. Ezen az ábrán az értékeket logaritmikus skáláról olvashatjuk le. Ez azért fontos, mert a nagy értékeket és az arányokat logaritmikus skálán tudjuk a legkönnyebben leolvasni.



10. ábra. Frekvenciatartománybeli jel

Térjünk vissza a `8.ábrához`. Láthatunk egy listát, amiben szerepelnek a `3.5`

`fejezetben` megismert ablakfüggvények. Innen kiválasztjuk a kívánt függvényt, amivel még az időbeli függvényt csonkítjuk, majd ezután a program alkalmazza a gyors Fourier-transzformációt. A `11.ábra` mutatja az ablakfüggvénnyel transzformált jelet és az eredeti frekvenciatérbeli jelet, ezáltal könnyen összehasonlíthatóak.



11. ábra. Ablakfüggvény alkalmazása

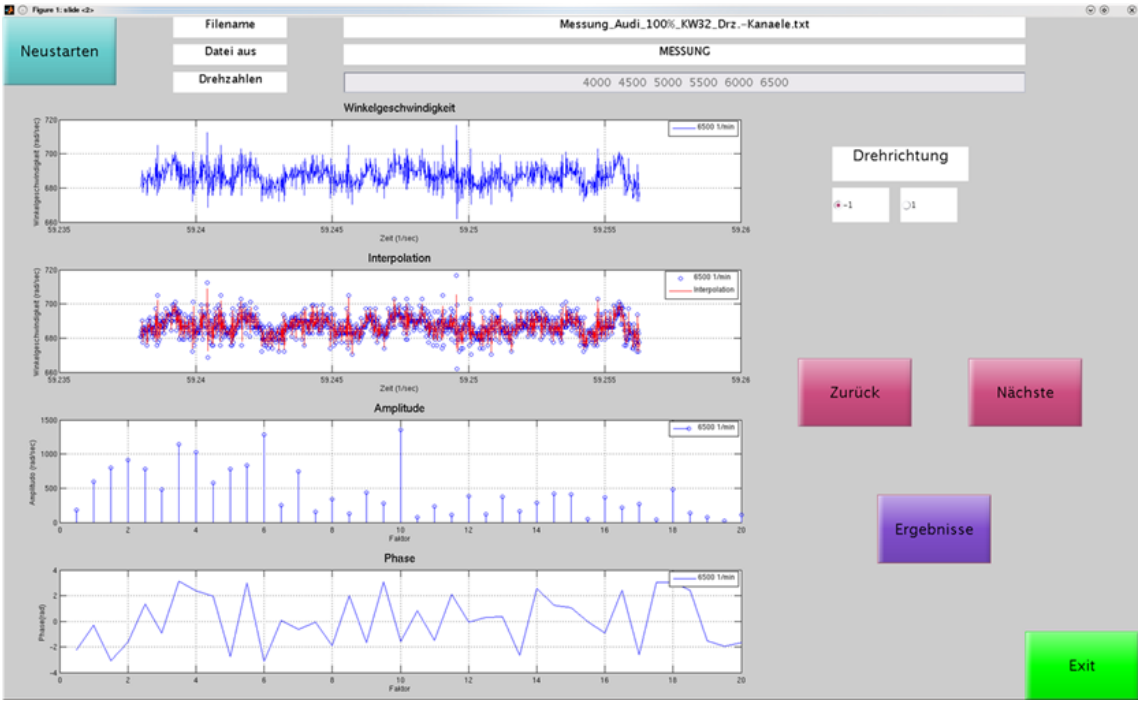
4.2. Rezgésanalízis

A rezgésanalízis egyik gyakori alkalmazása a különféle gépek, berendezések diagnosztikája. Egy géprendszer összetett időjele, minden esetben az alkatrészek működése, vagy hibája miatt kialakuló harmonikus rezgésekből tevődik össze. Minél több ilyen alkatrész található a berendezésben, annál több összetevőből jön létre a rezgésmérési eredmény, így természetesen a kiértékelés során is nehezebben lehet őket beazonosítani vagy az esetleges meghibásodás okára fényt deríteni. Az időben lejátszódó folyamatok által keltett szinuszos rezgések a Fourier-transzformáció segítségével a frekvenciatartományba transzformálhatók.[14]

4.2.1. Motordiagnosztika

Az Audi Hungaria Motor Kft.-nél töltött szakmai gyakorlatom során az volt a feladatom, hogy a motor főtengelyének rezgéséből jövő mért jeleket feldolgozzam különböző paraméterek szerint. Egy grafikus felületet készítettem, amelynek segítségével a mérnökök ezeket a mért jeleket vizsgálva következtetni tudnak az

esetleges meghibásodásra. Ez nagyon fontos a motor tervezésénél is, mivel így kijavíthatóak a hibák, mielőtt elkészülnek és forgalomba kerülnek.

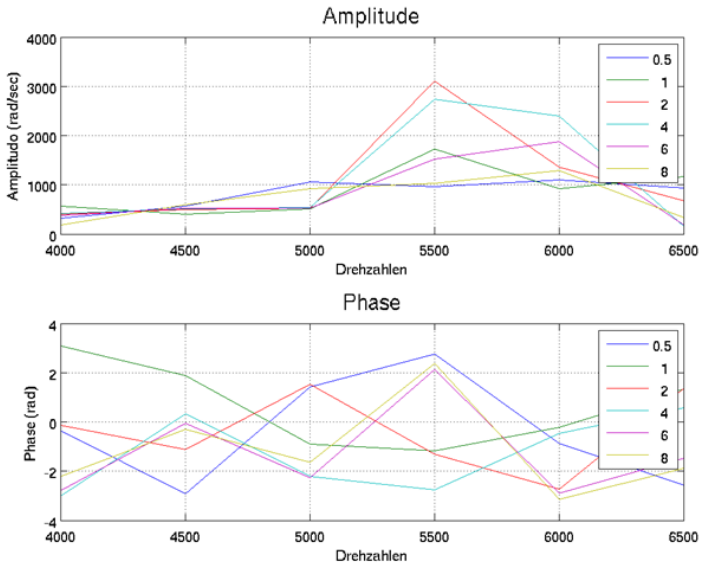


12. ábra. Motor főtengelyének rezgésanalízise

A `12.ábra` mutatja a grafikus felület főablakát. A beolvasott adatokat különböző fordulatszámpontok[8] szerint vizsgálhatjuk, mivel a legtöbb géphiba frekvenciája fordulatszámfüggő. Az első ábra az eredeti mért jelet ábrázolja, itt diszkrét értékek szerepelnek, a könnyebb átláthatóság kedvéért vannak összekötve az értékek. A második az interpolált értéket mutatja. A harmadik és negyedik ábra a gyors Fourier-transzformált segítségével számolt amplitúdót és fázist mutatja. Állítható a körülfordulás iránya is, aminek a program lefutásának végeztével a transzformált adatok kiírásánál van fontos szerepe.

A `13.ábra` abban különbözik ez előző felületen látható harmadik és negyedik ábrától, hogy itt felharmonikusok szerint láthatjuk a spektrumot. A kiválasztott fordulatszámpontok azonos sorszámú Fourier-együtthatói vannak összefűzve fordulatszám függvényében. Ezáltal tudunk következtetni egy alkatrész működésére vagy meghibásodására.

[8]Fordulatszám: a forgó testek, alkatrészek, gépek időegység alatti teljes körforgásainak száma; [1/min] vagy [Hz] mértékegységben.



13. ábra. Felharmonikusok ábrázolása amplitúdó és fázis szerint

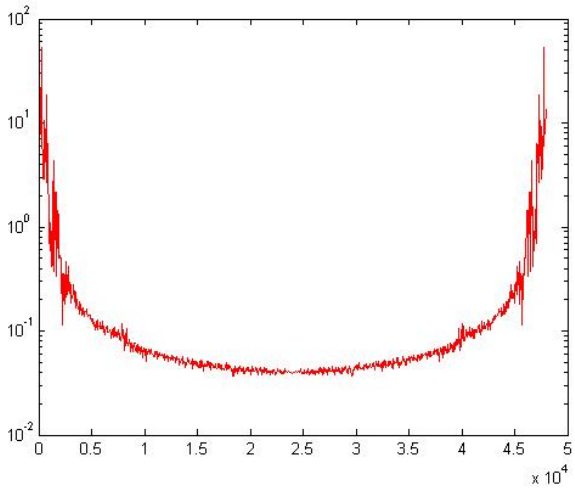
A gyors Fourier-transzformáció használata után komplex értékeket kapunk, amelyek hossza és fázisszöge adja az amplitúdót és fázist. Önmagában csak az amplitúdó értékek adnak lényeges információt, ezért a fázis csak az amplitúdóval együtt értelmezhető. A jelentősége abban áll, amikor egy-egy meghibásodásra utaló frekvencián található magas amplitúdót több különféle hiba is okozhatja.

4.2.2. Egy ventilátor rezgésének mérése

Mivel a szakmai gyakorlat során vizsgált adatokat nem használhattam fel, ezért a BME-VIK, Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszéken végeztünk méréseket Sujbert László segítségével. Egy ötlapátos ventilátor rezgését mértük. A mérési paraméterek a következők:

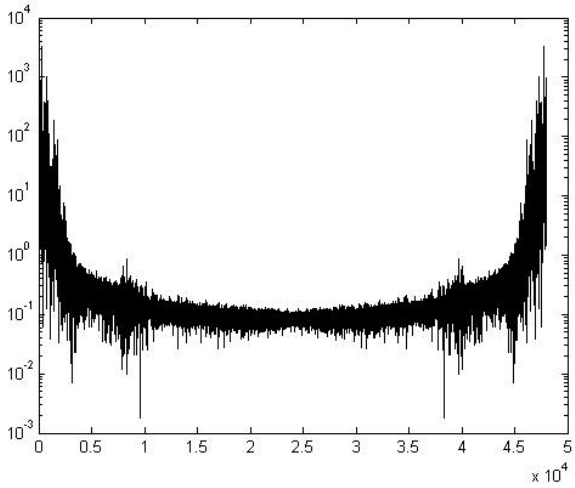
(i) frekvencia: 440 Hz
(ii) mintavételi frekvencia (f_s): 48 kHz
(iii) mintavételezés hossza (L): 10 sec
(iv) mintavételezési pontok száma (N): 2^{10} és 2^{16}

A `14.ábra` mutatja a mintavételezett jel spektrumát. Az információ méréstechnikai szempontból nagyítással vehető ki, vagyis hol és milyen magas spektrumvonalak jelennek meg. Ebben az esetben nem alkalmaztunk ablakfüggvényt a diszkrét Fourier-transzformáció előtt. A transzformált jel a frekvenciakomponensek függvényében van ábrázolva 48 kHz mintavételi frekvencia mellett.



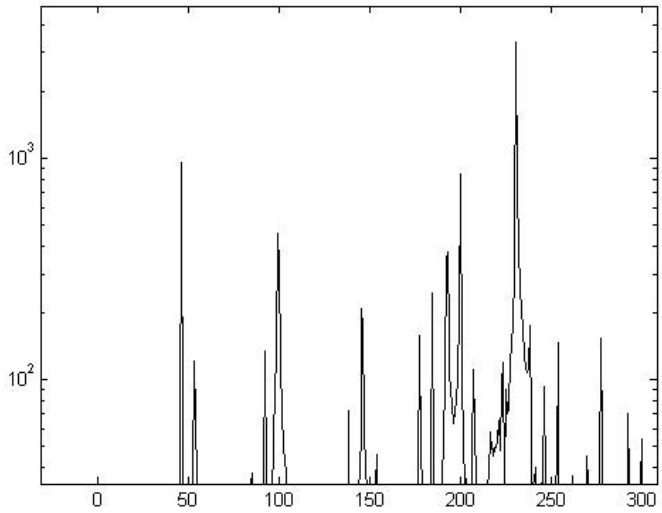
14. ábra. Mintavételezett jel spektruma

A `15.ábra` már nem 1024 pontszám mellett mintavételeztük a jelet, hanem 2^{16}, mivel a növelés hatására 48 kHz/2^{16} <1 Hz felbontás mellett már pontosabban tudjuk megfigyelni, hogy milyen frekvenciákon van rezgés.



15. ábra.

A `16.ábrán` láthatjuk az előző ábra 0 és 300 Hz közötti nagyítását. 48 Hz-nél van az első lokális maximum érték és 240 Hz-nél az utolsó lokális maximum érték, ami az előbbi érték ötszöröse, vagyis arra következtethetünk, hogy valóban ötlapátos ventilátor rezgését mértük meg. Ahhoz, hogy a ventilátor meghibásodásáról tudjunk következtetni ún. *a priori ismeretek* szükségesek. Ha nem rendelkezünk ilyennel,



16. ábra.

akkor látnunk kell egy olyan spektrumot, amin a ventilátor hibás volt és amin nem. Az összehasonlítás után tudunk következtetéseket levonni.

5. Összefoglalás

Szakdolgozatomban a Fourier-sorok elméletének bemutatása után a Frekvencia-analízis keretein belül a digitális jel mintavételezésének vizsgálatán keresztül jutottam el az általam készített grafikus felület bemutatásához.

Az első fejezetben a Fourier-sorok elméletét tekintettük át. Azon belül a történeti háttér bemutatásával kezdtem. Ezután a trigonometrikus rendszer teljességét és a Fourier-sorokat tanulmányoztuk L^2 függvénytérben.

A következő fejezetben a harmonikus rezgőmozgást leíró jelek analízisével foglalkoztunk. Ezt a periodikus jelet trigonometrikus polinomok segítségével modelleztük. Majd rátértünk a Fourier-sor komplex alakjára, amit leggyakrabban használnak a jelanalízis során. Mindezek után a folytonos és diszkrét Fourier-transzformációval kapcsolatos definíciókat és tételeket tekintettük át. Ezután a mintavételezés folyamatával ismerkedtünk meg, felhasználva a diszkrét Fourier-transzformációt. A fejezet végén a különféle ablakfüggvények típusait ismertük meg.

Végül az utolsó fejezetben bemutatom az általam készített grafikus felület használatát, aminek segítségével különböző frekvenciájú hangjeleket lehet vizsgálni. Ezután a szakmai gyakorlatom során készített grafikus felület bemutatása következett, amelynek segítségével a motor főtengelyének rezgéséből jövő mért jeleket lehet megvizsgálni. Végül egy ventilátor rezgésének diagnosztikája során elért eredményeket láttuk.

Hivatkozások

[1] Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok, Tankönyvkiadó, 1977

[2] Lóczi Lajos: A Fourier-sorfejtés és a Laplace-transzformáció (egyetemi jegyzet)

[3] Elias M. Stein and Rami Shakarchi: Fourier Analysis, An Introduction, Princeton University Press

[4] R.B. Randall: Frequency analysis, Brüel and Kjaer, 1987

[5] Mészáros Ágnes: Mintavételezéses mérés és spektrális analízis (szakdolgozat)

[6] Sujbert László: Beágyazott rendszerek analízise laboratórium (egyetemi jegyzet)

[7] Schipp Ferenc: Fourier-analízis (egyetemi jegyzet)

[8] Tóth Erzsébet Rita: Fourier-analízis alkalmazása a digitális holográfiában (diplomamunka), 2013

[9] Győri István, Hartung Ferenc: Fourier-elmélet (egyetemi jegyzet), 2006

[10] Elek Kálmán, Kovács Lóránt: Híradástechnika példatár, Műegyetem Kiadó, 2004

[11] Balázs László: Geofizikai adatfeldolgozás, egyetemi jegyzet, 2010

[12] Mark Petersen: Mathematical Harmonies

http://www.math.sc.edu/ sharpley/math750/MathMusic.pdf

[13] Cseh Miklós Zsolt: A beszéd fonetikai komponenseinek számítógépes vizsgálata, (szakdolgozat), 2009

[14] Szabó József Zoltán: Rezgésdiagnosztikai vizsgálatok és haditechnikai alkalmazhatóságuk kutatása, (PhD értekezés),2010

[15] Mihalkó Zita, Interpoláció, (szakdolgozat), 2010

Köszönetnyilvánítás

Végezetül szeretnék köszönetet mondani Simon Péter, Sujbert László és Fridli Sándor Tanár Uraknak.

Köszönettel tartozom még azoknak, akik segítették munkámat és nem utolsósorban Édesanyámnak és barátaimnak.

Nyilatkozat

Név:

ELTE Természettudományi Kar, szak:

Neptun kód:

Szakdolgozat címe:

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 20

a hallgató aláírása